

# UA: Síntesis de mecanismos

## Año de elaboración: 2018

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| <b>HORAS TEÓRICAS</b>                | <b>3.0</b>  |
| HORAS PRÁCTICAS                      | 0.0   |
| TOTAL DE HORAS                       | 3.0   |
| CRÉDITOS INSTITUCIONALES             | 6.0   |
| TÍTULO DEL MATERIAL                  | Síntesis analítica de engranajes con dientes cónicos rectos |
| TIPO DE UNIDAD DE APRENDIZAJE        | Curso   |
| CARÁCTER DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE | Obligatoria   |
| NÚCLEO DE FORMACIÓN                  | Integral  |
| PROGRAMA EDUCATIVO                   | Ingeniería Mecánica   |
| ESPACIO ACADÉMICO                    | Facultad de Ingeniería                                      |
| RESPONSABLE DE LA ELABORACIÓN        | Juan Carlos Posadas Basurto                                 |

# Índice

---

|  | <b>Página</b> |
|--|---------------|
| Presentación                                 | 1             |
| Estructura de la unidad de aprendizaje       | 2             |
| Contenido de la presentación                 | 3             |
| Introducción                                 | 6             |
| Tipos de ruedas con dientes cónicos          | 7             |
| Cinemática de las ruedas con dientes cónicos | 12            |
| Aproximación de Tredgold                     | 17            |
| Ejemplo                                      | 20            |
| Bibliografía                                 | 33            |

---

# Presentación

- La Unidad de Aprendizaje Síntesis de Mecanismos es obligatoria y se sugiere cursarla en el octavo período.
- No tiene antecedente seriado pero se da un curso de Análisis de Mecanismos en el sexto periodo donde el discente realiza análisis cinemático y dinámico de mecanismos y elementos de máquinas, aplicando los fundamentos de Mecánica Clásica y el software adecuado para su comparación y selección.
- Se sugiere que el discente curse primero Análisis de Mecanismos para tener una idea general de su composición, movimientos y tipos que existen.

# Estructura de la Unidad de Aprendizaje

## 1. SÍNTESIS GRÁFICA DE ESLABONAMIENTOS

1.1 Conceptos generales

1.2 Síntesis dimensional

1.3 Curvas de acoplador

## 2. SÍNTESIS ANALÍTICA DE ESLABONAMIENTOS

2.1 Generación de mecanismos de dos y tres posiciones por síntesis analítica

2.2 Síntesis analítica de cuatro o cinco posiciones

## 3. DISEÑO DE LEVAS

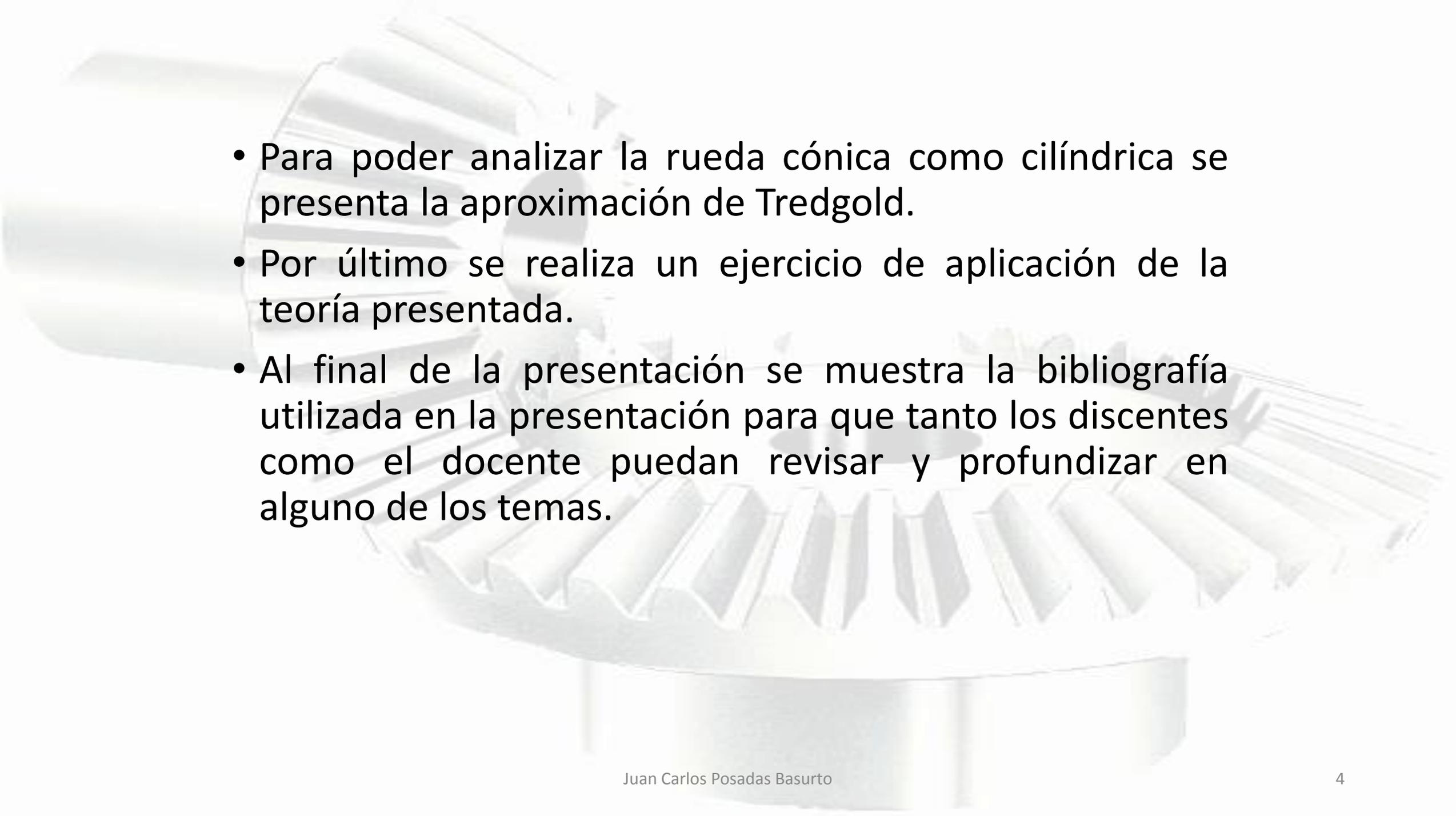
3.1 Síntesis gráfica de levas

3.2 Síntesis analítica de levas

3.3 Síntesis de mecanismos combinados

# Contenido de la presentación

- La presentación comprende el punto 3.3 de la Estructura de la Unidad de Aprendizaje donde se estudia la síntesis analítica de mecanismos combinados, entre ellos los trenes de engranaje de dientes cónicos.
- Inicia con una introducción a las ruedas con dientes cónicos.
- Continúa con los tipos de ruedas con dientes cónicos que hay comercialmente.
- Se da la cinemática de las ruedas con dientes cónicos rectos.

- 
- Para poder analizar la rueda cónica como cilíndrica se presenta la aproximación de Tredgold.
  - Por último se realiza un ejercicio de aplicación de la teoría presentada.
  - Al final de la presentación se muestra la bibliografía utilizada en la presentación para que tanto los discentes como el docente puedan revisar y profundizar en alguno de los temas.

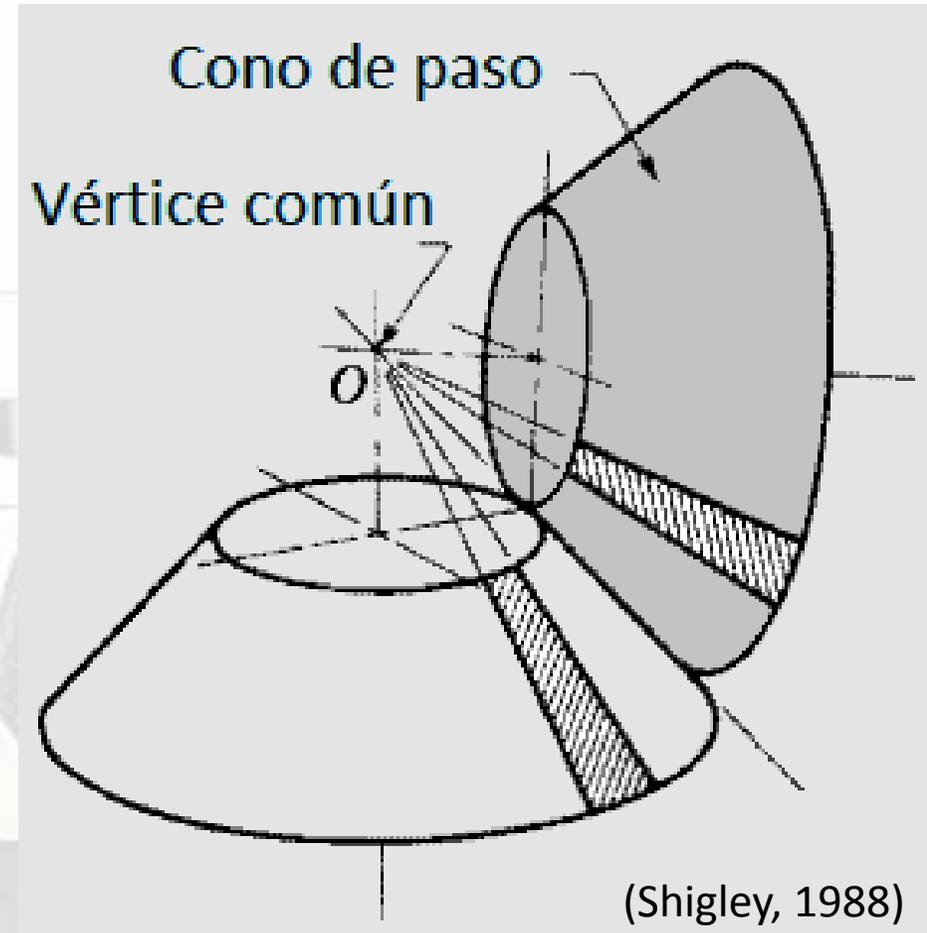


# Síntesis de mecanismos

Síntesis analítica de engranajes con dientes cónicos rectos

# Introducción

- Cuando se tiene que transferir potencia entre dos ejes no paralelos que se intersecan, se usan las ruedas con dientes cónicos (Shigley, 1988).
- Los ejes tienen que montarse de tal manera que los vértices de los conos de paso del contacto de las ruedas sean coincidentes (Shigley, 1988).

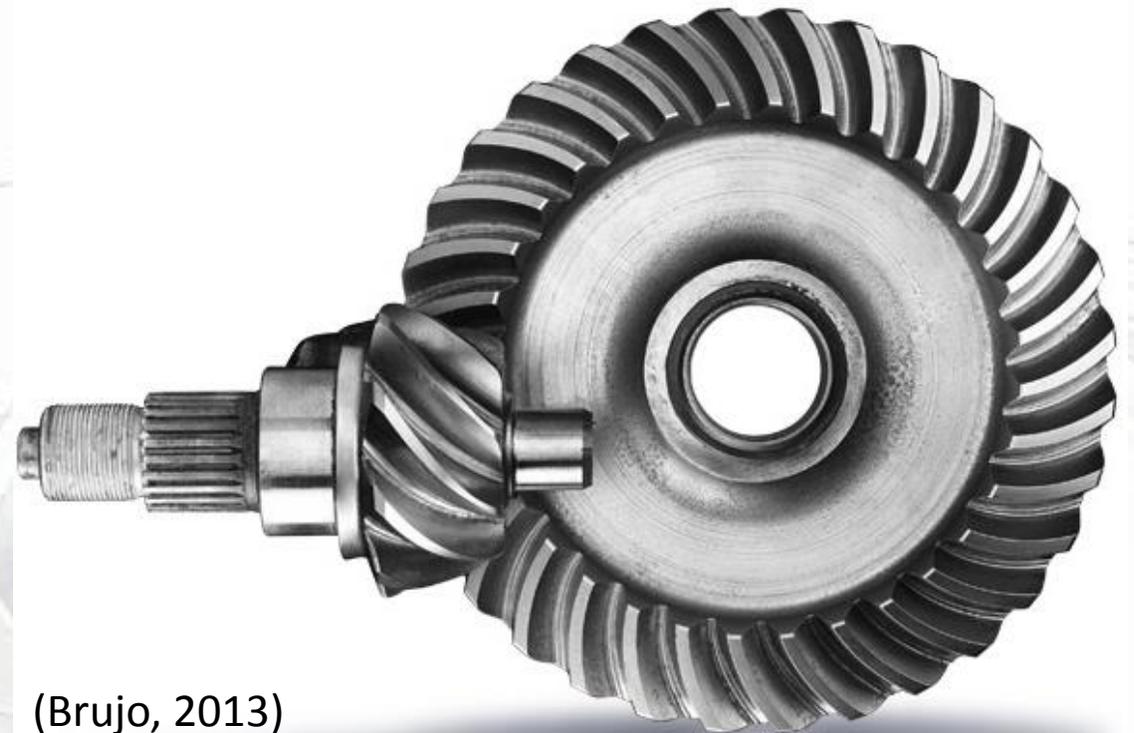


# Tipos de ruedas con dientes cónicos

- La rueda con dientes paralelos a su eje es una rueda con dientes cónicos rectos (Norton, 2009).
- Si los dientes forman un ángulo con respecto al eje, es una rueda cónica con dientes en espiral (Norton, 2009).
- Los dientes del engrane cónico no son involutas, sino octoidal (Norton, 2009).

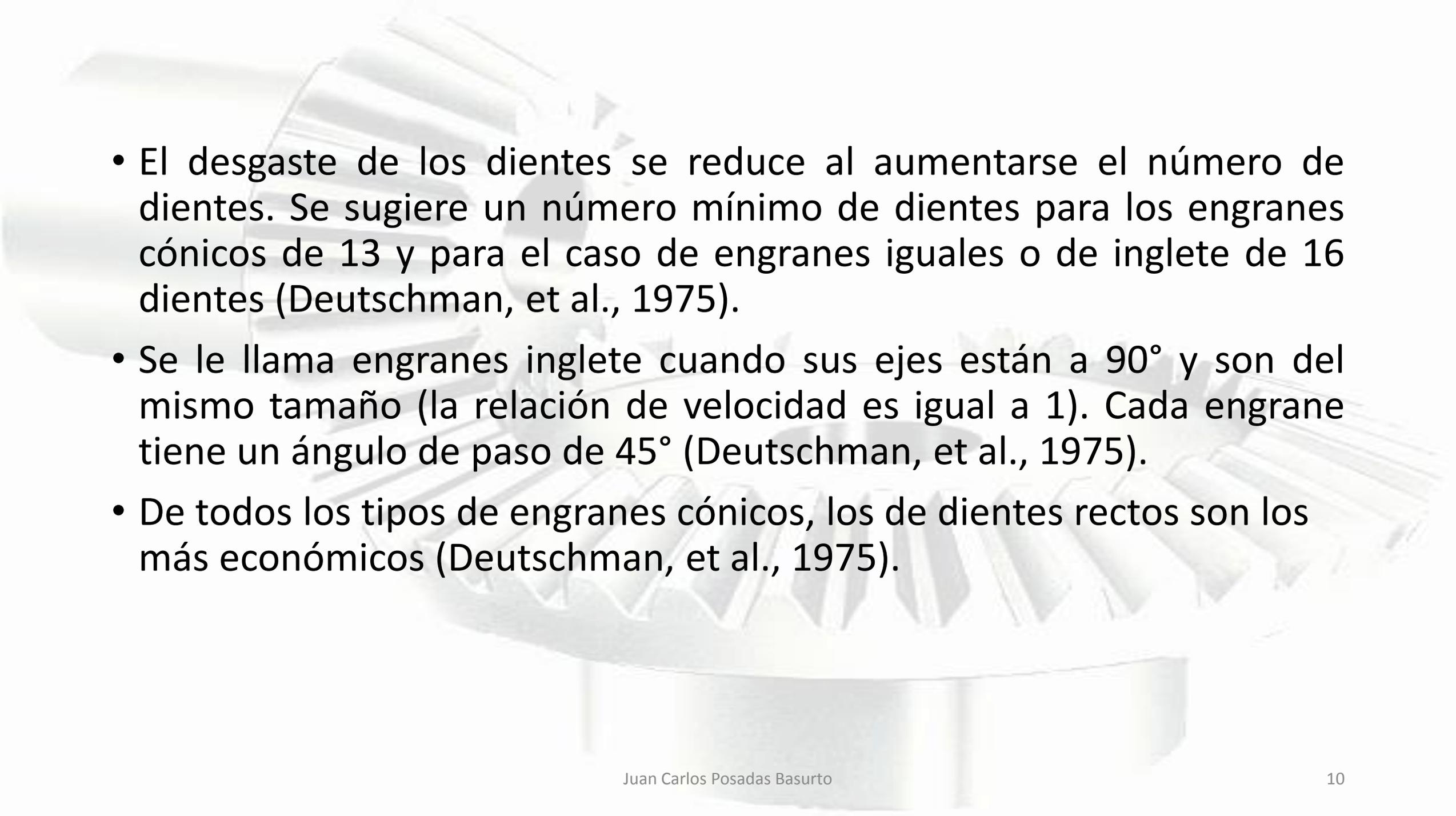


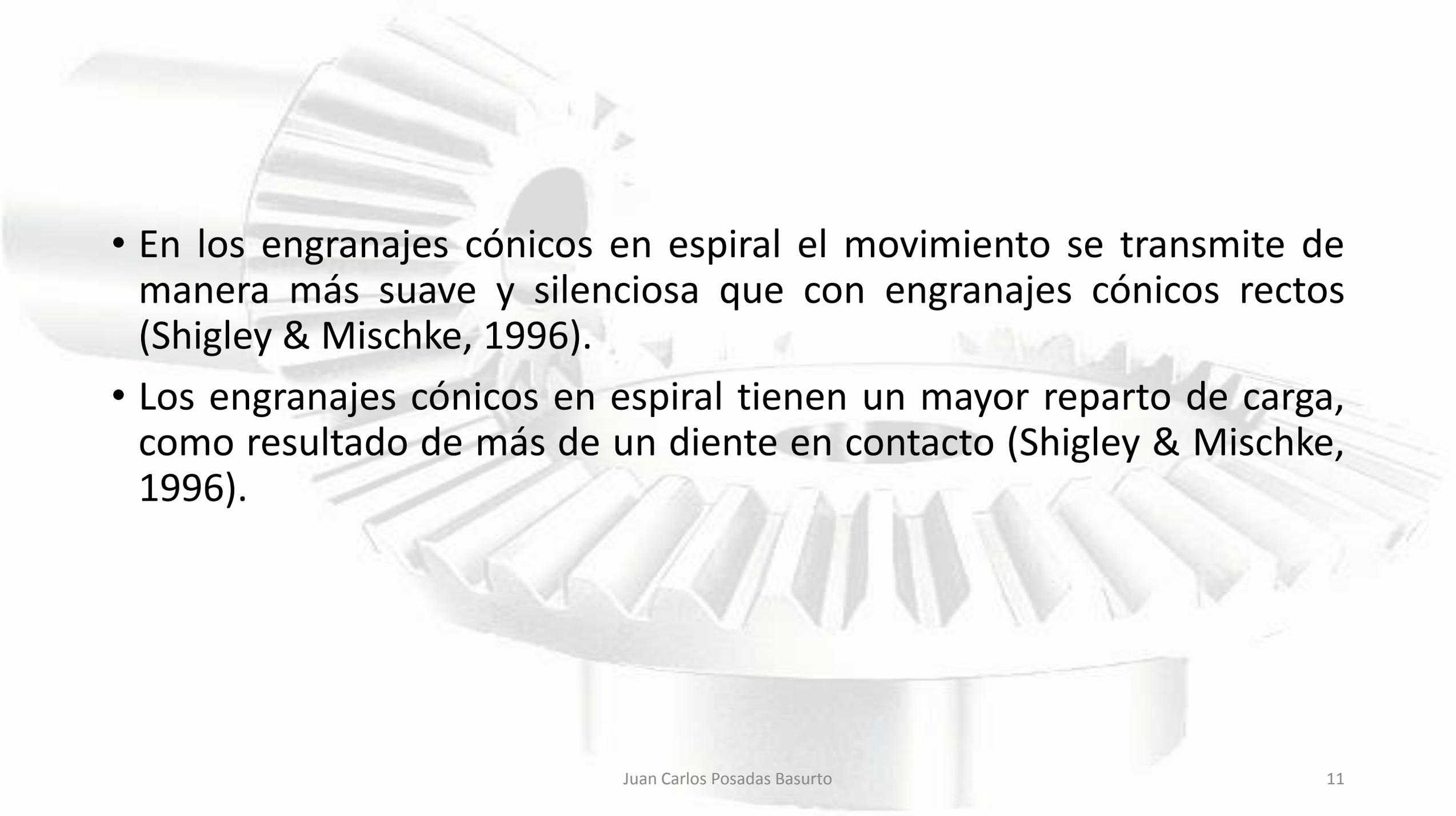
- Para ejes entre las ruedas dentadas no paralelos y que ni se intersecan, se utilizan los engranes hipoidales (Norton, 2009).
- Se basan en hiperboloides de revolución (Norton, 2009).
- Se utilizan en la transmisión final de automóviles con el motor adelante y tracción en la rueda trasera (Norton, 2009).



(Brujo, 2013)

- El uso de engranajes cónicos rectos generalmente se limita a unidades que operan a bajas velocidades en la línea de paso (hasta de 5 m/s) y donde el ruido y la suavidad del movimiento no son importantes (Deutschman, et al., 1975).
- Debido al contacto continuo en los engranajes cónicos espirales, la carga se transmite más suavemente. También tienen una mayor capacidad de carga que sus contrapartes rectas (Deutschman, et al., 1975).
- Generalmente se prefieren los engranajes cónicos espirales a los engranajes cónicos rectos cuando las velocidades son superiores a 5 m/s, particularmente para engranajes muy pequeños (Deutschman, et al., 1975).

- 
- A large, semi-transparent gear is centered in the background of the slide. The gear has many teeth and is rendered in a light gray color, allowing the text to be clearly visible over it.
- El desgaste de los dientes se reduce al aumentarse el número de dientes. Se sugiere un número mínimo de dientes para los engranes cónicos de 13 y para el caso de engranes iguales o de inglete de 16 dientes (Deutschman, et al., 1975).
  - Se le llama engranes inglete cuando sus ejes están a  $90^\circ$  y son del mismo tamaño (la relación de velocidad es igual a 1). Cada engrane tiene un ángulo de paso de  $45^\circ$  (Deutschman, et al., 1975).
  - De todos los tipos de engranes cónicos, los de dientes rectos son los más económicos (Deutschman, et al., 1975).

- 
- En los engranajes cónicos en espiral el movimiento se transmite de manera más suave y silenciosa que con engranajes cónicos rectos (Shigley & Mischke, 1996).
  - Los engranajes cónicos en espiral tienen un mayor reparto de carga, como resultado de más de un diente en contacto (Shigley & Mischke, 1996).

# Cinemática de las ruedas con dientes cónicos

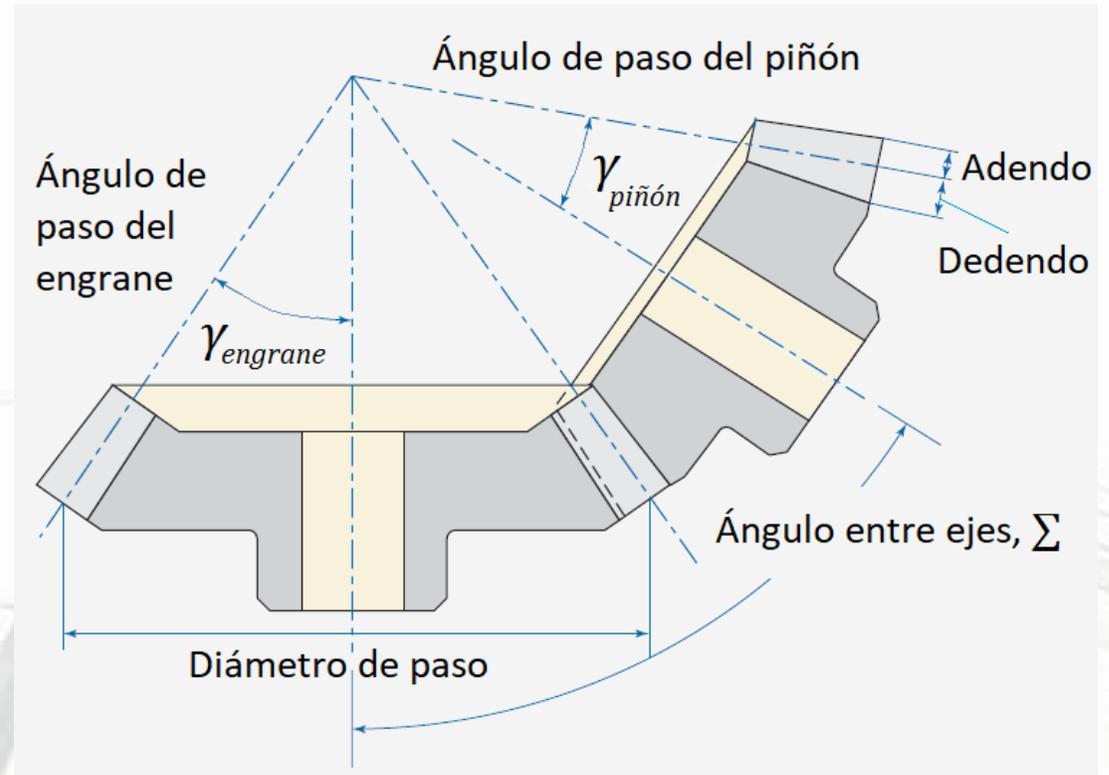
- La mayoría de las características geométricas de los dientes que se utilizan con las ruedas con dientes cilíndricos rectos, como el paso diametral y el ángulo de presión, se aplican a las ruedas con dientes cónicos (Myszka, 2012).
- Debido a que el diente se estrecha al borde interno, sus características se miden en el borde externo (Myszka, 2012).
- La relación de velocidad angular para las ruedas con dientes cilíndricos rectos también se aplica a las ruedas con dientes cónicos (Myszka, 2012).

- El paso diametral para engranajes cónicos suele seguir los valores estándar que se presentan en la Tabla (Myszka, 2012).
- La mayoría de los engranajes cónicos se fabrican con un ángulo de presión de  $20^\circ$  (Myszka, 2012).

| Paso grueso |    | Paso fino |     |
|-------------|----|-----------|-----|
| 2           | 6  | 20        | 80  |
| 2.25        | 8  | 24        | 96  |
| 2.5         | 10 | 32        | 120 |
| 3           | 12 | 40        | 150 |
| 3.5         | 16 | 48        | 200 |
| 4           |    | 64        |     |

(Myszka, 2012)

- El ángulo de paso  $\gamma$  es el ángulo de generación del cono sobre el que está construido el engranaje (Myszka, 2012)..
- Están relacionados para las dos ruedas con dientes cónicos coincidentes (Myszka, 2012).



(Myszka, 2012)

- El ángulo de paso de cada rueda es función de la relación de número de dientes y/o velocidad (Myszka, 2012)

$$\tan \gamma_{\text{piñón}} = \frac{\sin \Sigma}{\left\{ \cos \Sigma + \left( \frac{N_{\text{engrane}}}{N_{\text{piñón}}} \right) \right\}}$$

$$\tan \gamma_{\text{engrane}} = \frac{\sin \Sigma}{\left\{ \cos \Sigma + \left( \frac{N_{\text{piñón}}}{N_{\text{engrane}}} \right) \right\}}$$

- Cuando el ángulo entre ejes es de  $90^\circ$ , entonces

$$\tan \gamma_{engrane} = \frac{N_{piñón}}{N_{engrane}}$$

$$\tan \gamma_{piñón} = \frac{N_{engrane}}{N_{piñón}}$$

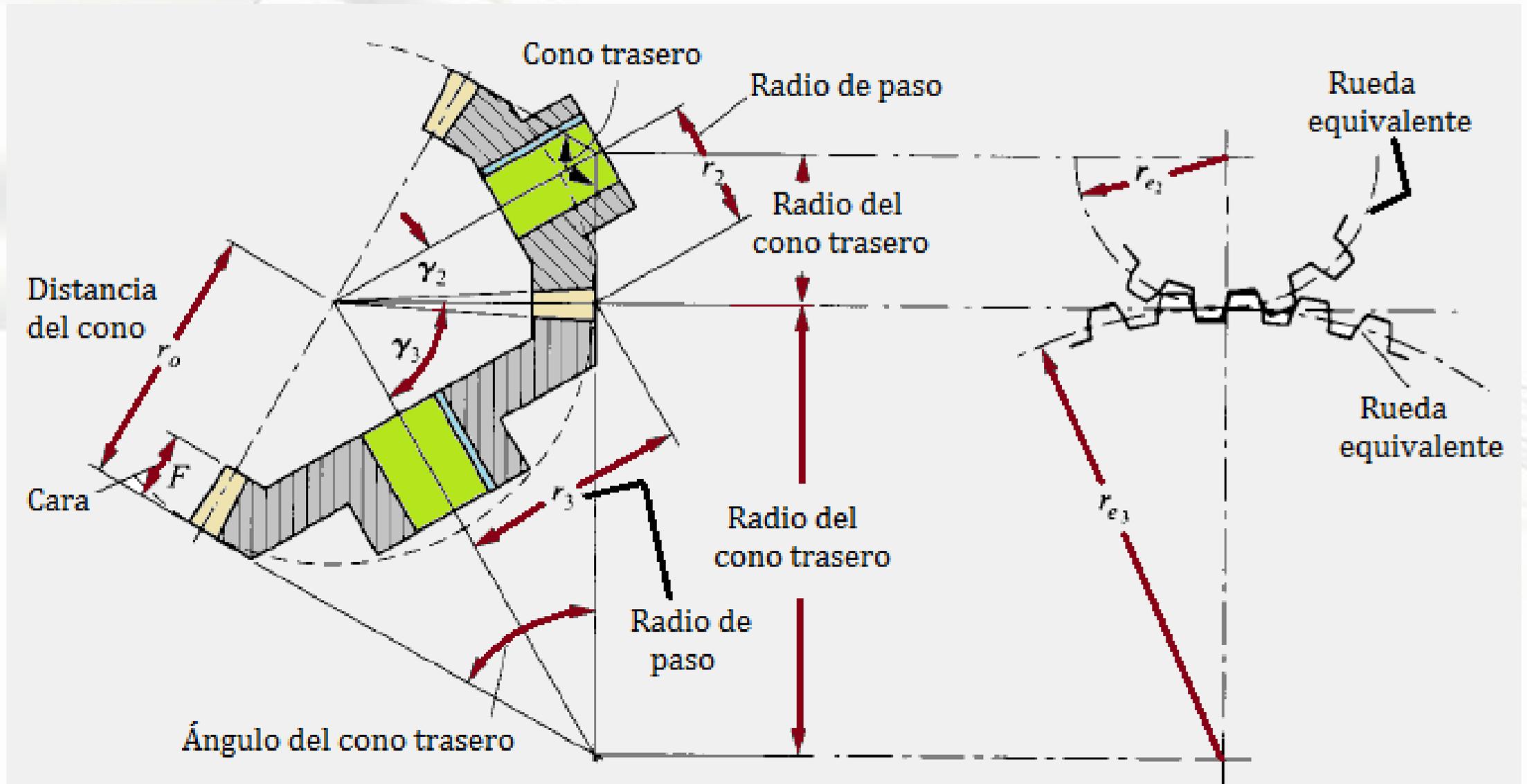
- Además

$$\gamma_{engrane} + \gamma_{piñón} = \Sigma$$

$$\frac{\sin \gamma_{engrane}}{\sin \gamma_{piñón}} = \frac{d_{engrane}}{d_{piñón}}$$

# Aproximación de Tredgold

- Es difícil estudiar la acción de los dientes cónicos con su perfil real ya que cae en la superficie de una esfera (Martin, 1982).
- La aproximación de Tredgold presenta la rueda con dientes cónicos rectos equivalente a una rueda con dientes cilíndricos rectos (Waldron & Kinzel, 2004).
- La superficie del cono trasero aproxima la superficie esférica y los conos se presentan planos (Martin, 1982).
- Cada cono forma una porción de una rueda con dientes cilíndricos rectos cuyo radio de círculo de paso es igual al radio del cono trasero de la rueda con dientes cónicos rectos (Martin, 1982).



- El número formativo de dientes  $N_b$  es función del número de dientes en la rueda de dientes cónicos rectos  $N$  (Martin, 1982)

$$N_b = N \frac{r_e}{r} = \frac{N}{\cos \gamma}$$

- $N_b$  generalmente no es un entero (Martin, 1982).
- Además

$$r_{e2} = \frac{r_2}{\cos \gamma_2}$$

$$r_{e3} = \frac{r_3}{\cos \gamma_3}$$

# Ejemplo

- Un par de ruedas con dientes cónicos rectos, que tienen un ángulo entre ejes de  $90^\circ$ , deben tener una relación de velocidades angulares  $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{5}{2}$ . Propóngase el paso diametral de las ruedas para obtener el número de dientes y los diámetros de paso.



(STAHL GEAR & MACHINE CO., 2018)

# Solución

- Se considera un paso diametral grueso de 10 para tener un primer análisis.
- De las ecuaciones

$$\tan \gamma_{engrane} = \frac{N_{engrane}}{N_{piñón}} = \frac{\omega_2}{\omega_3}$$

$$\tan \gamma_{piñón} = \frac{N_{piñón}}{N_{engrane}} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

| Paso grueso |    | Paso fino |     |
|-------------|----|-----------|-----|
| 2           | 6  | 20        | 80  |
| 2.25        | 8  | 24        | 96  |
| 2.5         | 10 | 32        | 120 |
| 3           | 12 | 40        | 150 |
| 3.5         | 16 | 48        | 200 |
| 4           |    | 64        |     |

- Por lo que

$$\gamma_{engrane} = \tan^{-1} \frac{\omega_2}{\omega_3} = \tan^{-1} \frac{5}{2} = 68.2^\circ$$

$$\gamma_{piñón} = \tan^{-1} \frac{\omega_3}{\omega_2} = \tan^{-1} \frac{2}{5} = 21.8^\circ$$

- Donde

$$\gamma_{engrane} + \gamma_{piñón} = 68.2^\circ + 21.8^\circ = 90^\circ = \Sigma$$

- El número de dientes de las ruedas con dientes cónicos se calculan de la siguiente relación

$$\frac{N_{\text{piñón}}}{N_{\text{engrane}}} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{2}{5}$$

$$N_{\text{piñón}} = \frac{2}{5} N_{\text{engrane}}$$

- Considerando un múltiplo de 5 para el número de dientes del piñón se obtiene un número entero para los dientes del engrane. Para  $N_{\text{engrane}} = 25$

$$N_{\text{piñón}} = \frac{2}{5} (25) = 10$$

- Los diámetros de paso se obtienen con el paso diametral

$$d_{engrane} = \frac{N_{engrane}}{P_d} = \frac{25}{10} = 2.5$$

$$d_{piñón} = \frac{N_{piñón}}{P_d} = \frac{10}{10} = 1$$

- Finalmente

$$\frac{\sin \gamma_{engrane}}{\sin \gamma_{piñón}} = \frac{d_{engrane}}{d_{piñón}}$$

$$\frac{\sin 68.2^\circ}{\sin 21.8^\circ} = \frac{2.5}{1}$$

$$2.5 = 2.5$$

- Por lo que se cumplen todas las relaciones.

- Como verificación a los datos obtenidos, se utiliza la aproximación de Tredgold.
- Sabiendo que el diámetro y el ángulo de paso para el piñón es 1 y  $21.8^\circ$  respectivamente, y para el engrane 2.5 y  $68.2^\circ$  respectivamente, los radios equivalentes se obtienen de las siguientes ecuaciones.

$$r_{e_2} = \frac{r_2}{\cos \gamma_2} = \frac{1/2}{\cos 21.8^\circ} = 0.5385$$

$$r_{e_3} = \frac{r_3}{\cos \gamma_3} = \frac{2.5/2}{\cos 68.2^\circ} = 3.3659$$

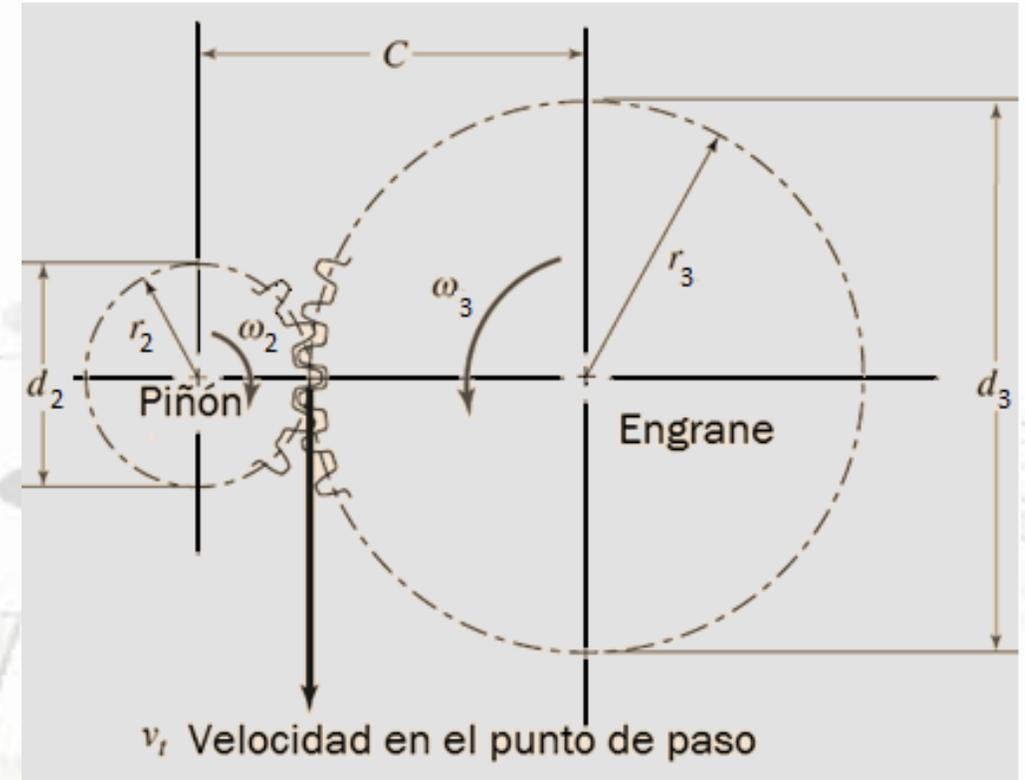
- La distancia entre centros  $C$  es la suma de los radios  $r$

$$C = 0.5385 + 3.3659 = 3.9044$$

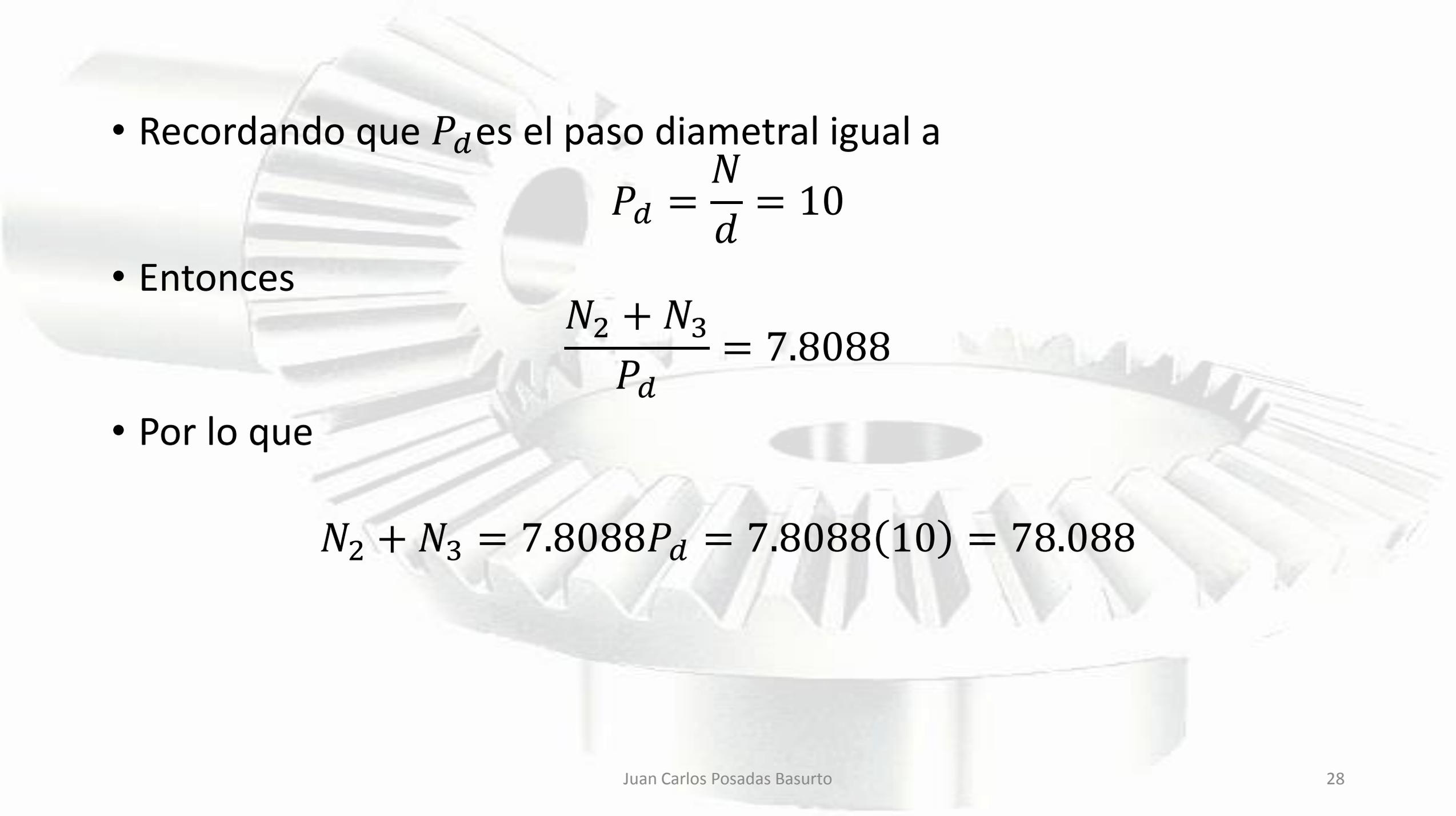
- Cambiando la suma de radios a número de dientes  $N$ , se tiene

$$r_2 + r_3 = 3.9044$$

$$d_2 + d_3 = 7.8088$$



(Myszka, 2012)

- 
- Recordando que  $P_d$  es el paso diametral igual a

$$P_d = \frac{N}{d} = 10$$

- Entonces

$$\frac{N_2 + N_3}{P_d} = 7.8088$$

- Por lo que

$$N_2 + N_3 = 7.8088P_d = 7.8088(10) = 78.088$$

- Como se consideran ruedas cilíndricas con dientes rectos, obedece a la siguiente relación de velocidades angulares

$$N_3 = N_2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)$$

- Relacionando las dos últimas ecuaciones

$$N_2 \left( 1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) = 78.088$$

- Como la relación de velocidades angulares es igual a la relación de radios, se obtiene la relación de velocidades equivalente

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_{e3}}{r_{e2}}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{3.3659}{0.5385} = 6.25$$

- Sustituyendo el valor de la relación de velocidades en la siguiente ecuación se obtiene el número de dientes en el piñón

$$N_2(1 + 6.25) = 78.088$$

$$N_2 = 10.770$$

- De tal manera que

$$N_2 = 10.770$$

- y

$$N_3 = 78.088 - 10.770 = 67.317$$

- Para obtener el número de dientes reales se utiliza la siguiente ecuación

$$N_b = N \frac{r_e}{r}$$

- Al despejar el número de dientes reales y sustituir los valores correspondientes se obtiene

$$N_2 = N_{b_2} \frac{r_2}{r_{b_2}} = 10.770 \left( \frac{0.5}{0.5385} \right) = 10$$

$$N_3 = N_{b_3} \frac{r_3}{r_{b_3}} = 67.317 \left( \frac{1.25}{3.3659} \right) = 25$$

- Son los mismos valores obtenidos en el engranaje cónico.

# Bibliografía

- Norelem, 2018. *Norelem*. [En línea]  
Available at: <https://www.norelem.de/>  
[Último acceso: 22 Mayo 2018].
- Brujo, A., 2013. *Engranes*. [En línea]  
Available at: <http://mecanismos-engranes.blogspot.mx>  
[Último acceso: 22 Mayo 2018].
- Deutschman, A. D., Michels, W. J. & Wilson, C. E., 1975. *Diseño de máquinas. Teoría y práctica*. México: Compañía editorial continental.
- Martin, G. H., 1982. *Kinematics and dynamics of machines*. New Dheli: McGraw-Hill

- MISUMI, 2018. *MISUMI Corporation*. [En línea] Available at: <https://de.misumi-ec.com/> [Último acceso: 22 Mayo 2018].
- Myszka, D. H., 2012. *Machines and mechanisms. Applied kinematics analysis*. New Jersey: Prentice Hall.
- Norton, R. L., 2009. *Diseño de maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. México: Mc Graw-Hill.
- Shigley, J. E., 1988. *Teoría de máquinas y mecanismos*. México: McGraw-Hill.
- Shigley, J. E. & Mischke, C. R., 1996. *Standard handbook of machine design*. Segunda ed. New York: McGraw Hill.

- 
- STAHL GEAR & MACHINE CO., 2018. *The Sthal gear & Machine Co.*. [En línea]  
Available at: <http://www.stahlgear.com/products/bevel-gear.html>  
[Último acceso: 22 Mayo 2018].
  - Waldron, K. J. & Kinzel, G. L., 2004. *Kinematics, dynamics and design of machinery*. USA: John Wiley & Sons, Inc..