Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Caracterización de la curva cerrada simple en términos del hiperespacio de no estorbadores

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Irving Rios Ortiz

DIRECTORES DEL TRABAJO:
Dr. David Maya Escudero
Dr. Félix Capulín Pérez

Toluca, México, 10 de Junio del 2021

Índice general

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. La Teoría de Hiperespacios es una rama importante de la topología, tuvo sus inicios a principios del Siglo XX y desde entonces la investigación en esta área ha experimentado un interés creciente. La teoría de hiperespacios se encarga de estudiar familias particulares de subconjuntos de los espacios topológicos. Esta teoría ha mostrado ser muy útil para determinar el comportamiento topológico de los espacios originales con respecto a las propiedades que presentan los hiperespacios y viceversa, este estudio se ve reflejado en la amplia bibliografía que existe al respecto. Algunos de los hiperespacios más conocidos para un espacio métrico X son: $2^X = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A = \overline{A}\}$ conocido como el hiperespacio de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X, $\mathcal{F}_1(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más un punto}\}$, $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$, $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$ y $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$. De los cuales 2^X y $C(X)$ han sido de los más comunes. En las últimas décadas del Siglo XX hubo avances significantes en el estudio de los hiperespacios, $\mathcal{F}_n(X)$ (conocido como el n-ésimo producto simétrico de X) y $C_n(X)$ (conocido como n-ésimo hiperespacio de X). Recientemente, un nuevo hiperespacio ha atraído la atención de los especialistas, a éste se le llama **hiperespacio de no estorbadores de los singulares de un continuo**. Este tipo de hiperespacios tienen un comportamiento distinto al del resto, porque no siempre es conexo, no siempre es compacto, pero aún así se ha buscado a través de él caracterizar a los continuos. Una pregunta natural que surgió en [4] apartir de que la circunferencia S^1 satisface que su hiperespacio de no estorbadores de los singulares es exactamente $\mathcal{F}_1(S^1)$, es la siguiente: existe un continuo distinto a S^1 cuyo hiperespacio de no estorbadores es exactamente a $\mathcal{F}_1(X)$. Una respuesta parcial se encuentra en la misma referencia para los continuos localmente conexos. Posteriormente, en [8] se amplia la clase de continuos donde la respuesta también es afirmativa. Finalmente, en [2] se demuestra que el único continuo cuyo hiperespacio de no estorbadores de sus singulares que coincide con $\mathcal{F}_1(X)$ es exactamente la curva cerrada simple. La meta principal de este trabajo es proporcionar una introducción sencilla a los resultados presentados en [2].

Capítulo 1

Conceptos y resultados básicos

A continuación se definen conceptos esenciales que serán utilizados constantemente en los capítulos sucesivos, en especial nos interesa recordar algunas nociones y resultados básicos de la topología general, y de la teoría de los continuos y sus hiperespacios. En la primera sección presentamos, entre otros, algunos teoremas relacionados con componentes de subconjuntos en espacios de Hausdorff, compactos y conexos, conocidos como Teoremas de Golpes en la Frontera los cuales juegan un rol importante dentro del presente trabajo. En la segunda sección presentamos la teoría básica de continuos.

1.1. Espacios topológicos

Una familia τ de subconjuntos de X es llamada una topología en X, si satisface las siguientes propiedades:

- $\emptyset, X \in \tau$
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$
- Si $\{U_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$

A la pareja (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una topología en X, es llamada **espacio topológico**. Los elementos de τ son llamados **subconjuntos abiertos** del espacio topológico (X, τ). Si (X, τ) es espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces el conjunto $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ es una topología para A llamada la **topología relativa** a A respecto a (X, τ). Si $A \subseteq X$, diremos que (A, τ_A) es un **subespacio** de (X, τ). Sea V un conjunto en un espacio topológico (X, τ). Se dice que V es

vecindad de un punto $x \in X$ si y sólo si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq V$. A la colección de vecindades de x en X se le llama **sistema de vecindades del punto** x (en (X, τ)) y se denota por $\mathcal{V}(x)$.

Sean (X, τ) un espacio topológico y E un subconjunto de X. Se dice que E es un **subconjunto cerrado** de (X, τ) si $X - E$ es abierto. Un punto $x \in X$ es un **punto de acumulación** de E si cada vecindad de V de x en (X, τ) contiene algún punto de E diferente de x. El conjunto **derivado** de E, que se denota por $der(E)$, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de E.

1.2. Cerradura, Interior y Frontera

Sea (X, τ) un espacio topológico. Definimos la cerradura o adherencia de $A \subseteq X$ como la intersección de todos los miembros de la familia de conjuntos cerrados en X que contienen a A; y se denota por $Cl_X(A)$, esto es,

$$Cl_X(A) = \bigcap \{B \subseteq X : B \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subseteq B\}.$$

Dado A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ), se define el **interior** de A en X, el cual se denotará con $Int_X(A)$, como la unión de todos los abiertos contenidos en A, esto es,

$$Int_X(A) = \bigcup \{C \subseteq X : C \text{ es abierto en } X \text{ y } C \subseteq A\}.$$

A los puntos que pertenecen a $Int_X(A)$ les llamaremos **puntos interiores** de A.

La siguiente proposición relaciona los conceptos de interior y cerradura de un conjunto.

Proposición 1.1. *Sea E un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Entonces $Int_X(X - E) = X - Cl_X(E)$.*

Demostración. Sea $\mathbb{K} = \{K \in \tau : K \subseteq E\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} X - Int_X(E) &= X - \bigcup_{K \in \mathbb{K}} K \\ &= \bigcap_{K \in \mathbb{K}} (X - K) \end{aligned}$$

Sea $\mathbb{K}' = \{K' \subseteq X : (X - E) \subseteq K' \text{ y } K' \text{ es cerrado en } X\}$. Observemos que $Cl_X(X - E) = \bigcap_{K' \in \mathbb{K}'} K'$. Como K es un subconjunto abierto en X, $X - K$ es subconjunto cerrado de X. Además, $X - E \subseteq X - K$. Entonces $K \in \mathbb{K}$ si y sólo si

$X - K \in \mathbb{K}'$. Así que, $X - Int_X(E) = \bigcap_{K' \in \mathbb{K}'} K' = Cl_X(X - E)$. Luego,

$$\begin{aligned} Int_X(E) &= X - (X - Int_X(E)) \\ &= X - (Cl_X(X - E)) \end{aligned}$$

De aquí que, $Int_X(X - E) = X - [Cl_X(X - (X - E))]$. Por lo tanto, $Int_X(X - E) = X - Cl_X(E)$. $\square$

La siguiente Proposición es consecuencia de la anterior.

Proposición 1.2. *Para cualquier subconjunto E en un espacio topológico (X, τ) se tiene que*

$$Int_X(E) = X - Cl_X(X - E).$$

Sean S un espacio y $H \subseteq S$. La ***frontera*** de H (en S), denotada como $\mathrm{Bd}_S(H)$, es definida como $\mathrm{Bd}_S(H) = Cl_S(H) \cap Cl_S(S - H)$.

Proposición 1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Se tiene que $Bd_X(A) = Bd_X(X - A)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} Bd_X(X - A) &= Cl_X(X - A) \cap Cl_X(X - (X - A))) \\ &= Cl_X(X - A) \cap Cl_X(A) \\ &= Bd_X(A) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Bd_X(A) = Bd_X(X - A)$. $\square$

1.3. Conexidad

Un espacio topológico (X, τ) es **conexo** si y sólo si, no existe ningún par de conjuntos abiertos no vacíos A y B en X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Si X no es conexo entonces diremos que X es **disconexo**.

Sean (X, τ) es un espacio topológico y A, B subconjuntos no vacíos de X. Se dice que A y B son **conjuntos mutuamente separados** si $Cl_X(A) \cap B = \emptyset$ y $Cl_X(B) \cap A = \emptyset$.

Proposición 1.4. *Sean (X, τ) un espacio topológico. Si U y V son abiertos no vacíos de X tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces U y V son conjuntos mutuamente separados.*

Demostración. Sea $v \in V$. Supongamos que $v \in Cl_X(U) = \bigcap\{F \subseteq X : F = Cl_X(F), U \subseteq F\}$. Como V es un abierto, $X - V$ es un cerrado de X tal que $v \in X - V$. Esto último no puede ocurrir. Por lo tanto, $V \cap Cl_X(U) = \emptyset$. De manera similar, $U \cap Cl_X(V) = \emptyset$. $\square$

Proposición 1.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, X es disconexo si y sólo si X es la unión de dos conjuntos mutuamente separados.*

Demostración. Supongamos que X es disconexo. Existen abiertos no vacíos U y V de X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$. Por la Proposición 1.4, U y V son conjuntos mutuamente separados. Por lo tanto, X es la unión de dos conjuntos mutuamente separados.

Supongamos que $X = A \cup B$ donde A y B son conjuntos no vacíos de X tales que $Cl_X(A) \cap B = \emptyset$ y $Cl_X(B) \cap A = \emptyset$. Esto implica que $A \cap B = \emptyset$. Observemos que $X - B = Cl_X(A)$ y $X - A = Cl_X(B)$. Se tiene que $X - B$ y $X - A$ son subconjuntos cerrados en X. En consecuencia, A y B son subconjuntos abiertos ajenos no vacíos en X tales que $X = A \cup B$. Por lo tanto, X es disconexo. $\square$

Teorema 1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si A es conexo, entonces $Cl_X(A)$ es un subconjunto conexo de X.*

Demostración. Supongamos que $Cl_X(A)$ es un subconjunto disconexo de X. Por la Proposición 1.5, $Cl_X(A) = E \cup F$ donde E y F son subconjuntos no vaciós de X tales que $Cl_X(E) \cap F = \emptyset$ y $Cl_X(F) \cap E = \emptyset$. Mostraremos que $E = \emptyset$ ó $F = \emptyset$. Observemos que $A \cap E$ y $A \cap F$ son conjuntos mutuamente separados. Como A es conexo y $A = (A \cap E) \cup (A \cap F)$ se tiene por la Proposición 1.5 que $A \cap E = \emptyset$ ó $A \cap F = \emptyset$. Supongamos que $A \cap E = \emptyset$. Así, $A \subseteq F$. De aquí que, $Cl_X(A) \subseteq Cl_X(F)$. Del hecho de $E \cap Cl_X(F) = \emptyset$ se tiene que

$$E = E \cap (E \cup F) = E \cap Cl_X(A) \subseteq E \cap Cl_X(F) = \emptyset.$$

Esto implica que $E = \emptyset$. Esto es una contradiccón. Por lo tanto, $Cl_X(A)$ es un subconjunto conexo de X. $\square$

Proposición 1.7. *Sean (X, τ) espacio topológico, C un subconjunto conexo de X y U, V subconjuntos mutuamente separados no vacíos de X tales que $U \cap V = \emptyset$. Si $C \subseteq U \cup V$, entonces $C \subseteq U$ ó $C \subseteq V$.*

Demostración. Supongamos que $C \cap (X - U) \neq \emptyset$ y $C \cap (X - V) \neq \emptyset$, es decir, $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \cap V \neq \emptyset$. De aquí que, $C \cap U$ y $C \cap V$ son abiertos ajenos no vacíos en C. Se tiene que $(C \cap U) \cup (C \cap V) = C$. Esto contradice el hecho de que C sea conexo. Por lo tanto, $C \subseteq U$ ó $C \subseteq V$. $\square$

Proposición 1.8. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos cerrados y abiertos en X son $\emptyset$ y X.*

Demostración. Supongamos que X es conexo. Sea A un subconjunto de X tal que es abierto y cerrado. Se tiene que A y $X-A$ son abiertos en X tales que $A\cap(X-A)=\emptyset$ y $X=A\cup(X-A)$. Puesto que X es conexo, se tiene que $A=\emptyset$ ó $X-A=\emptyset$. Por lo tanto, $A=\emptyset$ ó $A=X$.

Para la otra implicación, supongamos que X es disconexo. Entonces existen subconjuntos abiertos propios U y V no vacíos de X tales que $U\cap V=\emptyset$ y $X=U\cup V$. Esto implica que $U=X-V$ es cerrado en X. Pero esto es una contradicción pues los únicos subconjuntos cerrados y abiertos de X son $\emptyset$ y X. Por lo tanto, X es conexo. $\square$

La demostración de los siguientes dos teoremas se pueden consultar en [10, Teorema 26.7 y 26.8, p. 193]

Teorema 1.9. *Sea $\{A_j : j\in\mathcal{J}\}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico (X,τ). Si $\bigcap\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j\neq\emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ es conexo.*

Teorema 1.10. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A\subseteq X$. Si $A\subseteq B\subseteq Cl_X(A)$ y A es conexo, entonces B es conexo.*

Proposición 1.11. *Sea (X,τ) espacio topológico. Si $\{A_\alpha : \alpha\in I\}$ es una familia de subconjuntos conexos de X y existe un subconjunto conexo A tal que $A\cap A_\alpha\neq\emptyset$ para cada $\alpha\in I$, entonces $A\cup\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Para cada $\alpha\in I$, sea $B_\alpha=A\cup A_\alpha$. Consideremos la familia $\{B_\alpha : \alpha\in I\}$ de subconjuntos conexos de X. Observemos que $\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\neq\emptyset$. Por el Teorema 1.9, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$ es conexo. Pero $\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A\cup A_\alpha)=A\cup\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$. Por lo tanto, $A\cup\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ es conexo. $\square$

Sea (X,τ) un espacio topológico. Un subconjunto A de X es una **componente** de X si A es conexo y para cualquier subconjunto conexo de B de X tal que $A\subseteq B$ se tiene que $B=A$.

Proposición 1.12. *Sea (X,τ) es un espacio topológico. Si C es una componente de X, entonces C es cerrado en X.*

Demostración. Sea C una componente de $x\in X$. Observemos que $C\subseteq Cl_X(C)$. Por el Teorema 1.6, $Cl_X(C)$ es un subconjunto conexo de X. Por ser C una componente de X se tiene que $Cl_X(C)=C$. Por lo tanto, C es cerrado. $\square$

1.4. Compacidad

Sea (X, τ) es un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de X si $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ también es una cubierta de X, entonces se dice que $\mathcal{U}'$ es una **subcubierta** de $\mathcal{U}$. Si todos los elementos de una cubierta $\mathcal{U}$ de X son abiertos de X entonces $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta** de X.

Un espacio topológico (X, τ) es **compacto** si toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta finita. Un subconjunto A de X es compacto si como subespacio es compacto.

1.5. Continuidad y Homeomorfismos

Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es **continua** si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [10, Teorema 7.2, p. 45]

Teorema 1.13. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) f es continua

b) Para cualquier cerrado F de Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

c) Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es llamada un **homeomorfismo** si y sólo si f es biyectiva y continua y, además, f^{-1} también es continua. En tal caso se dice que X y Y son homeomorfos y se denota por $X \cong Y$.

Una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva entre continuos es:

- **abierta** si $f(U)$ es un subconjunto abierto en Y para todo para todo subconjunto abierto U de X.
- **cerrada** si $f(V)$ es un subconjunto cerrado en Y para todo subconjunto cerrado V de X.
- **monótona** si $f^{-1}(\{y\})$ es conexo para todo $y \in Y$.

Proposición 1.14. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si C es un subconjunto conexo de X, entonces $f(C)$ es un subconjunto conexo de Y.*

Demostración. Sea C un subconjunto conexo de X. Supongamos que $f(C)$ es disconexo. Existen abiertos no vacíos relativos U y V a $f(C)$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $f(C) = U \cup V$. Del hecho de que U y V son abiertos relativos a $f(C)$ se tiene que $U = N \cap f(C)$ y $V = M \cap f(C)$ donde N y M son abiertos no vacíos de Y. Como f es una función continua, $f^{-1}(N)$ y $f^{-1}(M)$ son abiertos no vacíos en X tales que $f^{-1}(V) = f^{-1}(M) \cap C$ y $f^{-1}(U) = f^{-1}(N) \cap C$. De aquí que, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Sean $G = f^{-1}(U)$ y $H = f^{-1}(V)$. Observemos que G y H son abiertos no vacíos relativos a C tales que $G \cap H = \emptyset$. Luego, $C = G \cup H$ y C es disconexo. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $f(C)$ es un subconjunto conexo de Y. $\square$

1.6. Axiomas de separación

Un espacio X es de **Fréchet** ó T_1 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen vecindades V y W de x e y respectivamente tales que $V \cap \{y\} = \emptyset$ y $W \cap \{x\} = \emptyset$.

Un espacio X es de **Hausdorff** ó T_2 si y sólo si para dos puntos diferentes $x, y \in X$ existen abiertos U y V ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$.

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [10, Teorema 17.5, p. 119].

Teorema 1.15. *a) Un subconjunto compacto en un espacio de Hausdorff es cerrado.*

b) Todo subconjunto cerrado en un espacio compacto es compacto.

Un espacio X es **normal** ó T_4 si y sólo si es T_1 y para cualesquiera subconjuntos cerrados ajenos A y B de X, existen abiertos ajenos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

De acuerdo a las definiciones anteriores, se tienen las siguientes implicaciones

$$\text{Normal} \Rightarrow \text{Hausdorff} \Rightarrow \text{Fréchet}.$$

Un espacio X es **perfectamente normal** si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $A = f^{-1}(\{0\})$ y $B = f^{-1}(\{1\})$.

Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Se dice que A es un conjunto G_δ si $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$ donde U_n es un subconjunto no vacío abierto de X.

Proposición 1.16. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos y A un subconjunto no vacío de Y. Si A es un conjunto G_δ, entonces $f^{-1}(A)$ es un subconjunto G_δ de X.*

Demostración. Sea $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ donde cada U_n es abierto en Y y $V_n = f^{-1}(U_n)$. Como f es una función continua, V_n es abierto en X. Afirmamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = f^{-1}(A)$. Si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$, entonces $x \in V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $f(x) \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $f(x) \in A$. Por lo tanto, $x \in f^{-1}(A)$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \subseteq f^{-1}(A)$. Para la otra contención, si $x \in f^{-1}(A)$, entonces $f(x) \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x \in V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = f^{-1}(A)$. □

El siguiente Lema se puede encontrar en [10, Lema 15.6, p. 102]

Lema 1.17 (Lema de Urysohn)**.** *Un espacio X es normal si y sólo si para cualesquiera subconjuntos cerrados ajenos en X, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.*

Teorema 1.18. *Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si X es un espacio normal y cada subconjunto cerrado A en X es un conjunto G_δ.*

Demostración. Sean C y D subconjuntos cerrados ajenos de X. Por ser X un espacio perfectamente normal, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = C$ y $f^{-1}(\{1\}) = D$. Sean $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$. Observemos que U y V son subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$. Esto implica que X es normal. Observemos que $\{0\}$ es un subconjunto G_δ de $[0,1]$. Por la Proposición 1.16, C es un subconjunto G_δ de X. Por lo tanto, cualquier subconjunto cerrado de X es un subconjunto G_δ.

Para la otra implicación supongamos que X es un espacio normal y cada subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ. Sean A y B subconjuntos cerrados en X tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ donde cada G_n es un subconjunto abierto de X. Por el Lema 1.17, existe una función continua $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f_n(A) = \{0\}$ y $f_n(X - G_n) = \{1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $f_A : X \to [0,1]$ con regla de correspondencia $f_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{f_n(x)}{2^n}\right)$. De lo anterior se tiene que $f_A^{-1}(\{0\}) = A$. De manera similar, $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ donde cada F_n es un subconjunto abierto de X. Por el Lema 1.17, existe una función continua $g_n : X \to [0,1]$ tal que $g_n(B) = \{0\}$ y $g_n(X - F_n) = \{1\}$ con regla de correspondencia $g_B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{g_n(x)}{2^n}\right)$. De lo anterior, $g_B^{-1}(\{0\}) = B$. Puesto que $f_A(x) + g_B(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$, podemos definir la función $h : X \to [0, 1]$ con regla de correspondencia

$$h(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + g_B(x)}.$$

Observemos que $h^{-1}(\{0\}) = A$ si y sólo si $f_A^{-1}(\{0\}) = A$ y $h^{-1}(\{1\}) = B$ si y sólo si $g_B^{-1}(\{0\}) = B$. Como h es una función continua, se concluye que X es un espacio perfectamente normal. □

El siguiente resultado se puede consultar en [3, Teorema 3.1.12, p. 125]

Teorema 1.19. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua entre un espacio compacto X y un espacio de Hausdorff Y entonces f es cerrada y $f^{-1}(A)$ es compacto para $A \subseteq Y$ compacto.*

1.6.1. Teorema de Baire

El matemático René-Louis Baire introdujo la noción de primera categoría y segunda categoría como parte de su trabajo de tesis doctoral. El teorema que lleva su nombre ha intervenido, directa o indirectamente, en la demostración de una inmensa cantidad de resultados, principalmente en ramas como Topología, Análisis Real, Análisis Funcional, etc.

Sean (X, τ) un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Se dice que Y es **denso en ninguna parte** si $Int_X(Cl_X(Y)) = \emptyset$.

Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X.

- Se dice que A es un conjunto de **primera categoría** si existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es un conjunto denso en ninguna parte.

- Se dice que A es un conjunto de **segunda categoría** si A no es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

Un espacio topológico (X, τ) se llama **espacio de Baire** si para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos y densos en X, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa.

Las demostraciones del siguiente Teorema y Lema pueden consultarse en [6, Teorema 48.2, p. 296] y [6, Teorema 48.4, p. 297] respectivamente.

Teorema 1.20 (Teorema de Baire)**.** *Si X es un espacio de Hausdorff compacto, entonces X es un espacio de Baire.*

Lema 1.21. *Si X es un espacio de Baire y Y es un subespacio abierto de X, entonces Y es un espacio de Baire.*

1.6.2. Espacios métricos

Sea X un un conjunto. Una **métrica** d sobre el conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:

a) $d(x, y) \geq 0$, para todos $x, y \in X$.

b) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, para todos $x, y \in X$.

c) $d(x, y) = d(y, x)$

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Se define a un espacio métrico como una pareja (X, d), donde X es un conjunto no vacío y d es una métrica sobre X.

Sea X es un espacio topológico. Se dice que X es **metrizable** si existe una métrica d en el conjunto X que induce la topología de X.

Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y ε un número real positivo. El conjunto $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ es llamado **la bola abierta** de radio ε con centro en x.

Dado un espacio métrico (X, d) la familia $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ genera una topología en X. Comúnmente se dice que esta topología es la generada por la métrica d.

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en un espacio métrico y x es un punto de X, entonces $x_n \to x$ significa que la sucesión $\{x_n\}_\mathbb{N}$ converge al punto x.

El siguiente Teorema se puede consultar en [9, Teorema 3.6, p. 51] respectivamente.

Teorema 1.22. *Sea A un subconjunto compacto de un espacio métrico. Toda sucesión en A tiene una subsucesión que converge en A.*

Corolario 1.23. *Sea x un punto de un espacio métrico X y $A \subseteq X$. Entonces $x \in Cl_X(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to x$.*

La demostración del siguiente Teorema puede consultarse en [6, Teorema 32.2, p. 202]

Teorema 1.24. *Todo espacio metrizable es normal.*

Teorema 1.25. *Todo espacio metrizable es perfectamente normal*

Demostración. Por Teorema 1.24, X es normal. Sea A un subconjunto cerrado de X. Sea $U_n = \{p \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(p,a) < \frac{1}{n}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que U_n es un conjunto abierto en X pues es unión de bolas abiertas de radio $\frac{1}{n}$ centradas en los puntos de A. Veamos que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Sea $a \in A$. Se tiene que $d(a,a) = 0 < \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Para probar la otra contención, sea $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Supongamos que $p \notin A$. Puesto que A es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \cap A = \emptyset$. Por otra parte, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. De aquí que, $p \notin U_{n_0}$. Esto es una contradicción. Luego, $p \in A$ y $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Aplicando el Teorema 1.18, X es un conjunto perfectamente normal. $\square$

1.7. Continuos

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un continuo X se dice que es **descomponible** si X puede verse como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo que no es descomponible se dice que es **indescomponible**.

Un continuo X es **unicoherente** si $A \cap B$ es conexo, para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$.

Dados $p, q \in X$, se dice que X es **irreducible entre los puntos** p y q, si para cada subcontinuo A de X tal que $\{p,q\} \subseteq A$ implica que $A = X$. Un continuo X es **irreducible** si es irreducible entre dos de sus puntos.

Sean X un continuo y $p \in X$. Se define la **composante** de p en X como la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a p y lo denotamos como κ_p.

Las demostraciones de los siguientes dos Teoremas se encuentran en [7, Teorema 11.15, p. 203] y [7, Teorema 11.17, p. 204] respectivamente.

Teorema 1.26. *Si X es un continuo indescomponible no degenerado, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Teorema 1.27. *Si X es un continuo indescomponible no degenerado, entonces las composantes de X son mutuamente ajenas.*

Sean X un continuo y A, B subcontinuos no vacios de X. Decimos que un subcontinuo C de X es **irreducible desde** A **a** B, denotado por $C = irr(A, B)$, si $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap B \neq \emptyset$ y ningun subcontinuo propio M de C intersecta a A y B a la vez. Observemos que C es irreducible desde p a q si y sólo si C es irreducible entre p y q.

La siguiente proposición puede encontrarse en [7, Proposición 11.30, p. 212].

Proposición 1.28. *Si X es un continuo y A, B son subconjuntos compactos no vacios de X, entonces existe un C subcontinuo de X tal que $C = irr(A, B)$.*

La demostración del siguiente resultado se encuentra en [7, Teorema 5.6, p. 74].

Teorema 1.29 (**Teorema de Golpes en la Frontera II**). *Sean X un continuo y E un subconjunto propio no vacío de X. Si K es la componente de E, entonces $Cl_X(K) \cap Bd_X(E) \neq \emptyset$*

Proposición 1.30. *Sean X un continuo, U un subconjunto abierto propio no vacío de X y N un subcontinuo de X. Si $U \cap N \neq \emptyset$, entonces $Bd_N(U \cap N) \subseteq Bd_X(U)$.*

Demostración. Sea $p \in Bd_N(N \cap U)$. Como $Bd_N(N \cap U) = Cl_N(N \cap U) - Int_N(N \cap U) = Cl_N(N \cap U) - (N \cap U)$. Entonces $p \in Cl_N(N \cap U) = Cl_X(N \cap U) \cap N$. Por lo que $p \notin U$. Ahora, puesto que $Cl_X(N \cap U) \subseteq Cl_X(U) \cap Cl_X(N)$ se tiene que $p \in Cl_X(U)$. En consecuencia, $p \in Cl_X(U) - U = Bd_X(U)$ y $Bd_N(N \cap U) \subseteq Bd_X(U)$. □

Proposición 1.31. *Sean X un continuo, R un subconjunto cerrado propio no vacío de X y K un subcontinuo de X. Si $R \cap K \neq \emptyset$, entonces $Bd_K(R \cap K) \subseteq Bd_X(K)$.*

Demostración. Sea $r \in Bd_K(R \cap K)$. Entonces $r \in Cl_K(R \cap K) - Int_K(R \cap K)$. Como $Cl_K(R \cap K) \subseteq Cl_X(K) \cap Cl_X(R)$, $r \in Cl_X(K)$. Falta ver que $r \notin Int_K(K)$. Observemos que $Int_K(K \cap R) \subseteq Int_X(K) \cap Int_X(R)$. Como $r \notin Int_K(K \cap R)$, $r \notin Int_X(K)$. Por lo tanto, $r \in Bd_X(K)$. □

Teorema 1.32. *Sean X un continuo, U un subconjunto abierto propio no vacío de X y N un subcontinuo de X tal que $N \cap U \neq \emptyset$. Si M es una componente conexa de $N - (N \cap U)$, entonces $M \cap Bd_X(U) \neq \emptyset$ y $M \cap Cl_X(U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Por Teorema 1.29, $M \cap Bd_N(N - (N \cap U)) \neq \emptyset$. Por las Proposiciones 1.3 y 1.30, $Bd_N(N - (N \cap U)) = Bd_N(N \cap U) \subseteq Bd_X(U)$. Por lo tanto, $M \cap Bd_X(U) \neq \emptyset$ y $M \cap Cl_X(U) \neq \emptyset$. □

Proposición 1.33. *Sea X un continuo. Si U, V son abiertos ajenos no vacíos de X y K es un subconjunto cerrado de X tal que $X - K = U \cup V$, entonces $Bd_X(U) \subseteq K$ y $Bd_X(V) \subseteq K$.*

Demostración. Por Proposición 1.4, $U \cap Cl_X(V) = \emptyset$ y $V \cap Cl_X(U) = \emptyset$. Sea $u \in Bd_X(U)$. Como $Bd_X(U) = Cl_X(U) - U$, $u \in Cl_X(U) - U$. Luego, $u \notin V$. Observemos que $K = (X - U) \cap (X - V)$. En consecuencia, $u \in K$. Por lo tanto, $Bd_X(U) \subseteq K$. De manera similar, $Bd_X(V) \subseteq K$. □

Proposición 1.34. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos, entonces f es monótona si y sólo si $f^{-1}(D)$ es conexo para todo subconjunto conexo D de Y.*

Demostración. Supongamos que f es monotóna y sea C un subconjunto conexo no vacío de Y tal que $f^{-1}(C)$ no es conexo. Por Proposición 1.5, existen subconjuntos no vacíos A y B de X tales que $f^{-1}(C) = A \cup B$, $Cl_X(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap Cl_X(B) = \emptyset$. Observemos que si $y \in C$ y $f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$ por Proposición 1.7. Sean $M = \{y \in C : f^{-1}(\{y\}) \subseteq A\}$ y $N = \{z \in C : f^{-1}(\{z\}) \subseteq B\}$. Afirmamos que $A = f^{-1}(M)$.

En efecto, sea $m \in f^{-1}(M)$. Entonces $f(m) \in M$, es decir, $f^{-1}(\{f(m)\}) \subseteq A$, por lo que $m \in A$. Por otro lado, si $a \in A$, entonces $f(a) \in C$ y $f^{-1}(\{f(a)\}) \cap A \neq \emptyset$. De aquí que $f^{-1}(\{f(a)\}) \subseteq A$ y $a \in f^{-1}(M)$. De manera similar se prueba que $B = f^{-1}(N)$. Observemos que $C = M \cup N$. Supongamos que existe $y \in Cl_X(M) \cap N$. Como $y \in N$, se tiene que $f^{-1}(\{y\}) \subseteq B$. Puesto que $y \in Cl_X(M)$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en M que convergen a y. Esto implica que $f^{-1}(\{y_n\}) \subseteq A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n \in f^{-1}(\{y_n\})$. Por el Teorema 1.22, supongamos sin pérdida de generalidad que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto x. Por el Corolario 1.23, $x \in Cl_X(A)$ y por la continuidad de f, $f(x) = y$. De aquí que $x \in Cl_X(A) \cap f^{-1}(\{y\}) \subseteq Cl_X(A) \cap B$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Cl_X(M) \cap N = \emptyset$. De manera similar, $M \cap Cl_X(N) = \emptyset$. En conclusión, C no es conexo.

Para probar la otra implicación supongamos que $f^{-1}(D)$ es conexo para todo subcojunto conexo D de Y. Sea $y \in Y$. Como $\{y\}$ es conexo en Y se tiene que $f^{-1}(\{y\})$ es conexo. Por tanto, f es monotóna. □

Capítulo 2

Conjuntos de no estorbadores

Los hiperespacios se definen como colecciones de subconjuntos de un continuo que satisfacen alguna propiedad topológica. La teoría de los hiperespacios tiene sus inicios con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris. Existen muchos resultados acerca de hiperespacios. Solo se utilizará la notación y no las propiedades topológicas por lo que no se presenta ningún resultado relacionado a hiperespacios. Para un continuo X, se definen los siguientes hiperespacios.

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A = \overline{A}\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\ \mathcal{F}_1(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más un punto}\}. \end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq C(X)$.

El primer escrito sobre el concepto de hiperspacio de estorbadores fue publicado por los matemáticos Alejandro Illanes y Pawel Krupski en [5] en el 2011. Desde entonces se ha experimentado un interés creciente por esta área y se ha desarrollado una teoría general de estos conjuntos. En este capítulo se darán la definición de conjunto no estorbador, hiperespacio de conjuntos de no corte débil y de hiperespacio de conjuntos orilla. Se estudiarán las propiedades que estos conjuntos poseen. Al final de este capítulo se establecerá la conexión entre estos hiperespacios.

El símbolo X siempre denotará un continuo en este capítulo. Dado un continuo X, $A \in C(X) - \{X\}$ y $B \in 2^X$ tales que $A \cap B = \emptyset$, se define el conjunto $\mathcal{K}(A, B)$ como

$$\mathcal{K}(A, B) = \bigcup \{E \in C(X) : A \cap E \neq \emptyset, E \subseteq X - B\}.$$

Cuando $A = \{x\}$ se define,

$$\mathcal{K}(x, B) = \bigcup\{C \in C(X) : x \in C \subseteq X - B\}.$$

Observación 2.1. Según la definición anterior, se tiene que $x \in \mathcal{K}(x, B) \subseteq X - B$.

A continuación se construirán ejemplos del conjunto $\mathcal{K}(A, B)$ en el intervalo cerrado $[0, 1]$, el cuál es el continuo más simple que se puede considerar. En el capítulo 3 se construirán más ejemplos con distintos continuos.

Ejemplo 2.2. Sean $X = [0, 1]$ y los conjuntos $B = \{0\}$ y $A = \{1\}$. Se afirma que $\mathcal{K}(A, B) = X - B$. Por la observación 2.1, $\mathcal{K}(A, B) \subseteq X - B$. Para la otra contención sea $x \in X - B$. Luego, $0 < x \leq 1$. Consideremos el intervalo cerrado $I = [x, 1]$. Observemos que I es un subcontinuo de X tal que $x \in I$, $I \cap A \neq \emptyset$ y $I \subseteq X - B$. Por lo tanto $x \in \mathcal{K}(A, B)$.

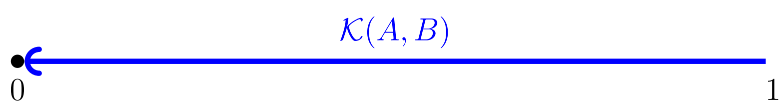


Figura 2.1:

No sucede siempre que $\mathcal{K}(A, B) = X - B$ como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. Sea $X = [0, 1]$. Consideremos los conjuntos unipuntuales $B = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ y $A = \{1\}$.

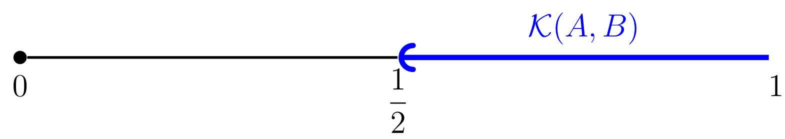


Figura 2.2:

Entonces $\mathcal{K}(A, B) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Por la observación 2.1, $\mathcal{K}(A, B) \subseteq \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Probemos la otra contención, sea $r \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Entonces, $\frac{1}{2} < r \leq 1$. El subcontinuo $I = [r, 1]$ cumple que $I \cap A \neq \emptyset$, $r \in I \subseteq X - B$. Por tanto, $r \in \mathcal{K}(A, B)$.

A continuación se enunciarán y probarán algunas propiedades generales del conjunto $\mathcal{K}(A, B)$.

Lema 2.4. *Si $A \in C(X)$ y $B \in 2^X$ son tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mathcal{K}(A, B)$ es un subconjunto conexo de X.*

Demostración. Denotemos como $\mathcal{L} = \{E \in C(X) : A \cap E \neq \emptyset, E \subseteq X - B\}$. Tenemos que $\mathcal{L}$ es una familia de conexos tal que $E \cap A \neq \emptyset$ para todo $E \in \mathcal{L}$. Entonces, $A \cup (\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup \mathcal{L}$ pues $A \in \mathcal{L}$. Por la Proposición 1.11, $\mathcal{K}(A, B)$ es conexo pues $\bigcup \mathcal{L} = \mathcal{K}(A, B)$. $\square$

Lema 2.5. *Sean $A \in C(X)$ y $B \in 2^X$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces existe una sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C(X)$ tal que $\mathcal{K}(A, B) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $A \subseteq A_n \subseteq A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como X es perfectamente normal, X es normal y cada subconjunto cerrado de X es un subconjunto G_δ. Sea $\mathcal{G} = \{G_j : j \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $B = \bigcap\limits_{j \in \mathbb{N}} G_j$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = G_1 \cap \ldots \cap G_n \cap (X - A)$. Observemos que $B = \bigcap U_n$, $U_{n+1} \subseteq U_n$ y $U_n \cap A = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea A_n la componente conexa de $X - U_n$ tal que $A \subseteq A_n$. Por la observacion 1.12, A_n es un subcontinuo de X. En consecuencia, A_n es un subconjunto compacto de X. Se afirma que $A_n \subseteq A_{n+1}$. En efecto, como $A_n \subseteq X - U_n \subseteq X - U_{n+1}$ se cumple que $A_n \subseteq X - U_{n+1}$. Se sabe que $A \subseteq A_n$ y $A \subseteq A_{n+1}$, por lo que

$A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Del hecho que A_n es conexo y A_{n+1} es componente de $X - U_{n+1}$ se sigue que $A_n \subseteq A_{n+1}$.

Probaremos que $\mathcal{K}(A, B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Sea $x \in \mathcal{K}(A, B)$. Existe un subcontinuo E de X tal que $x \in E$, $E \cap B = \emptyset$ y $E \cap A \neq \emptyset$. Dado que $E \cap B = \emptyset$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $E \cap U_k = \emptyset$. De aquí que $E \subseteq X - U_k$ y E es un subconjunto conexo de X tal que $E \cap A \neq \emptyset$ y $E \subseteq A_k$. Por tanto $x \in A_k \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Sea $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Existe $A_i \in C(X)$ tal que $y \in A_i$ con $i \in \mathbb{N}$. Observemos que $A_i \cap A \neq \emptyset$ y $A_i \cap B = \emptyset$. Por tanto, $y \in \mathcal{K}(A, B)$ y $\mathcal{K}(A, B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. □

Proposición 2.6. *Sean $A \in C(X)$ y $B, G \in 2^X$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $G \subseteq B$. Entonces $\mathcal{K}(A, B) \subseteq \mathcal{K}(A, G)$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{K}(A, B)$. Existe un subcontinuo C de X tal que $x \in C$, $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap B = \emptyset$. Del hecho que $G \subseteq B$, se tiene que $C \cap G = \emptyset$. Por tanto, $x \in \mathcal{K}(A, G)$. □

Proposición 2.7. *Sean $A, D \in C(X)$ y $B \in 2^X$ tales que $A \subseteq D$ y $D \cap B = \emptyset$. Entonces $\mathcal{K}(A, B) = \mathcal{K}(D, B)$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{K}(A, B)$. Entonces existe $E \in C(X)$ tal que $x \in E$, $E \cap A \neq \emptyset$ y $E \cap B = \emptyset$. Como $E \cap A \neq \emptyset$ y $A \subseteq D$, entonces $E \cap D \neq \emptyset$. De esta forma, $E \in C(X)$ es tal que $x \in E$, $E \cap D \neq \emptyset$ y $E \cap B = \emptyset$. Por tanto, $x \in \mathcal{K}(D, B)$. Así, $\mathcal{K}(A, B) \subseteq \mathcal{K}(D, B)$.

Ahora, sea $y \in \mathcal{K}(D, B)$. Entonces existe un subcontinuo L de X tal que $y \in L$, $L \cap D \neq \emptyset$ y $L \cap B = \emptyset$. Como $L \cap D \neq \emptyset$ tenemos que $L \cup D$ es cerrado y conexo en X tal que $(L \cup D) \cap A \neq \emptyset$. Luego, $L \cup D \in C(X)$ es tal que $y \in L \cup D$, $(L \cup D) \cap A \neq \emptyset$ y $(L \cup D) \cap B = \emptyset$. Por tanto, $y \in \mathcal{K}(A, B)$. □

En el siguiente ejemplo se muestra la utilidad de la Proposición 2.7.

Ejemplo 2.8. Consideremos el mismo continuo $X = [0, 1]$. Sean $B = \{0\}$ y $D = [t, 1]$ donde $t > 0$. Entonces $\mathcal{K}(D, B) = (0, 1] = X - B$.

Figura 2.3: $X = [0, 1]$

Sea $A = \{1\}$. Observemos que $A \subseteq D$ y $D \cap B = \emptyset$. Por la Proposición 2.7, $\mathcal{K}(A, B) = \mathcal{K}(D, B)$. Por el Ejemplo 2.2, $\mathcal{K}(A, B) = X - B$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(D, B) = X - B$.

A continuación se dará la definición principal en la que se basa la presente tesis.

Sean A, B subcontinuos de X tales que $B \in 2^X$ y $A \cap B = \emptyset$. Se dice que B **no le estorba a** A si $\mathcal{K}(A, B)$ es denso en X. De otra manera, se dice que B le estorba a A. Diremos que B **no estorba a** x si $\mathcal{K}(x, B)$ es denso en X.

Por lo hecho en el ejemplo 2.2 tenemos que $\{0\}$ no le estorba a $\{1\}$.

Proposición 2.9. *Sea $B \in 2^X$. Si B no le estorba a x para algún $x \in X - B$, entonces $Int_X(B) = \emptyset$ y $X - B$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $Int_X(B) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{K}(x, B)$ es denso tenemos que $Int_X(B) \cap \mathcal{K}(x, B) \neq \emptyset$. Sea $q \in Int_X(B) \cap \mathcal{K}(x, B)$. Entonces existe un subcontinuo C de X tal que $q \in C \subset X - B$. Como $q \in Int_X(B)$, $q \in B$. Esto es una contradiccón. Por lo tanto, $Int_X(B) = \emptyset$.

Se probará que $X - B$ es denso en X. Por el Lema 2.4, $\mathcal{K}(x, B)$ es un subconjunto conexo de X. Por la observación 2.1, $\mathcal{K}(x, B) \subseteq X - B$. Por otro lado, dado que $\mathcal{K}(x, B)$ es denso, tenemos que $\mathcal{K}(x, B) \subseteq X - B \subseteq Cl_X(\mathcal{K}(x, B)) = X$. Por el Teorema 1.10 , $X - B$ es un subconjunto conexo de X. $\square$

Teorema 2.10. *Sean $p \in A \in C(X)$ y $B \in 2^X$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces B no le estorba a A si y solo si B no le estorba a $\{p\}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.7, $\mathcal{K}(A, B) = \mathcal{K}(p, B)$.

Supongamos que B no le estorba a A. Entonces $\mathcal{K}(A, B)$ es denso en X. En consecuencia, $\mathcal{K}(p, B)$ es denso en X. Por lo tanto, B no le estorba a $\{p\}$.

Ahora, supongamos que B no le estorba a $\{p\}$. Esto implica que $\mathcal{K}(p, B)$ es denso en X. De aquí que, $\mathcal{K}(A, B)$ es denso en X. Por lo tanto, B no le estorba a A. $\square$

La manera en como se pretende usar a los subconjuntos cerrados no estorbadores, es mediante la colección de aquellos que no le estorban a los elementos de una familia de subconjuntos cerrados de un continuo, de manera particular, a la familia de los subconjuntos de un continuo.

Sea $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Definimos $NB(\mathcal{H}) = \{B \in 2^X : B$ no le estorba a cada elemento $A \in \mathcal{H}, A \cap B = \emptyset\}$. Cuando $\mathcal{H} = \mathcal{F}_1(X)$ se tiene que

$$NB(\mathcal{F}_1(X)) = \{B \in 2^X : B \text{ no estorba a } x, \text{ para cada } x \in X - B\}.$$

Lema 2.11. *Sean $\mathcal{H}, \mathcal{K} \subseteq 2^X$. Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$, entonces $NB(\mathcal{K}) \subseteq NB(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sean $B \in NB(\mathcal{K})$ y $A \in \mathcal{H}$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces $A \in \mathcal{K}$ y $A \cap B = \emptyset$. Esto implica que B no le estorba a A. Por lo tanto, $B \in NB(\mathcal{H})$. □

Proposición 2.12. *$NB(C(X)) = NB(\mathcal{F}_1(X))$.*

Demostración. Tenemos que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq C(X)$. Por el Lema 2.11,

$$NB(C(X)) \subseteq NB(\mathcal{F}_1(X)).$$

Ahora, sean $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $A \in C(X)$ tal que $B \cap A = \emptyset$. Sea $p \in A$. Tenemos que $\{p\} \in \mathcal{F}_1(X)$ y $\{p\} \cap B = \emptyset$. Entonces B no le estorba a p. Por Teorema 2.10, concluimos que B no le estorba a A. Por tanto, $B \in NB(C(X))$. □

Teorema 2.13. *Sea $B \in 2^X$ tal que $Int_X(B) = \emptyset$. Entonces $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ si y sólo si para cada $p \in X - B$, existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $p \in A_n \subseteq X - B$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $Cl_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = X$.*

Demostración. Probaremos la suficiencia. Sea $p \in X - B$ y U un abierto no vacío en X. Vamos a mostrar que $\mathcal{K}(p, B)$ es denso en X, es decir, $\mathcal{K}(p, B) \cap U \neq \emptyset$. Por hipotésis, existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $p \in A_n \subseteq X - B$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $Cl_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = X$. Por lo anterior, $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap U \neq \emptyset$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \in C(X)$, $p \in A_m \subseteq X - B$ y $A_m \cap U \neq \emptyset$. Se tiene que $\mathcal{K}(p, B) \cap U \neq \emptyset$. Luego, $\mathcal{K}(p, B)$ es denso en X y por lo tanto $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Supongamos que $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Sea $p \in X - B$. Por el Lema 2.5, existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $p \in A_n \subseteq A_{n+1}$ y $\mathcal{K}(p, B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Por hipotésis, $\mathcal{K}(p, B)$ es denso en X. Por lo tanto, $X = Cl_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. □

Mostraremos algunos resultados relacionados al hiperespacio de no estorbadores y ciertas clases de funciones entre continuos.

Proposición 2.14. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y D un subconjunto cerrado de Y. Si $f^{-1}(D) \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, entonces $D \in NB(\mathcal{F}_1(Y))$.*

Demostración. Sea $y \in Y - D$ y V un abierto no vacío en Y. Del hecho que f es suprayectiva, existe $x \in X - f^{-1}(D)$ tal que $f(x) = y$. Al ser f continua, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto no vacío en X. Como $f^{-1}(D) \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, $\mathcal{K}(x, f^{-1}(D))$ es denso en X. De donde existe un subcontinuo C de X tal que $x \in C \subseteq X - f^{-1}(D)$ y $C \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Por la proposición 1.14, $f(C)$ es un subconjunto conexo de Y. Por el Teorema 1.19, $f(C)$ es un subconjunto compacto de Y y es tal que $y \in f(C) \subseteq Y - D$. Tomemos $d \in C \cap f^{-1}(V)$. Entonces $f(d) \in f(C) \cap V$. Por tanto, $\mathcal{K}(y, D)$ es denso en Y y $D \in NB(\mathcal{F}_1(Y))$. $\square$

Proposición 2.15. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es monótona y $D \in NB(\mathcal{F}_1(Y))$, entonces $f^{-1}(D) \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X y $x \in X - f^{-1}(D)$. Por Teorema 1.19, f es una función cerrada. Esto implica que $f(X-U)$ es un subconjunto cerrado en Y. Luego, $Y - f(X - U)$ es un subconjunto abierto no vacío en Y. Observemos que $y = f(x) \notin D$. Por hipotésis, $\mathcal{K}(y, D) \cap (Y - f(X - U)) \neq \emptyset$. Así, existe un subcontinuo C de Y tal que $y \in C \subseteq Y - D$ y $C \cap (Y - f(X - U)) \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.34, $f^{-1}(C)$ es un subcontinuo de X tal que $x \in f^{-1}(C) \subseteq X - f^{-1}(D)$. Probemos ahora que $f^{-1}(C) \cap U \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario. Si $f^{-1}(C) \cap U = \emptyset$, entonces $f(f^{-1}(C)) \subseteq f(X - U)$. Dado que f es suprayectiva, $f(f^{-1}(C)) = C$ y $C \subseteq f(X - U)$. Esto es una contradicción pues $C \cap (Y - f(X - U)) \neq \emptyset$. En consecuencia, $f^{-1}(C) \cap U \neq \emptyset$. Se tiene que $\mathcal{K}(x, f^{-1}(D)) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f^{-1}(D) \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. $\square$

En esta parte se introduce el concepto de fibras terminales. En particular, se muestra que si se tiene una función suprayectiva entre continuos X e Y tal que es monótona y tiene fibras terminales, entonces el conjunto de todas las imagenes inversas de los elementos del conjunto de no estorbadores de los singulares de Y coincide con el conjunto de no estorbadores de los singulares de X.

Una función monótona $f : X \longrightarrow Y$ tiene **fibras terminales** si para cada $y \in Y$ y para cada $A \in C(X)$ se cumple una de las siguientes condiciones

$$f^{-1}(\{y\}) \cap A = \emptyset \quad \text{ó} \quad f^{-1}(\{y\}) \subseteq A.$$

Proposición 2.16. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona entre continuos y que tiene fibras terminales. Si $y \in Y$, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in f^{-1}(\{y\}) - A$. Del hecho de que $\mathcal{K}(x, A)$ es un subconjunto denso en X, $\mathcal{K}(x, A) \cap (X - f^{-1}(\{y\})) \neq \emptyset$. Existe un subcontinuo C de X tal que $x \in C \subseteq X - A$ y $C \cap (X - f^{-1}(\{y\})) \neq \emptyset$. Como f tiene fibras terminales, $f^{-1}(\{y\}) \subseteq C$. Más aún, $f^{-1}(\{y\}) \cap A = \emptyset$ pues $C \cap A = \emptyset$. Esto contradice el hecho $f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$. □

Teorema 2.17. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva y monótona entre continuos y que tiene fibras terminales. Entonces*

$$NB(\mathcal{F}_1(X)) = \{f^{-1}(B) : B \in NB(\mathcal{F}_1(Y))\}.$$

Demostración. Sea $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $y \in Y$. Observemos primero que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Probemos que $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. Sea $x \in f^{-1}(f(A))$. Entonces $f(x) \in f(A)$. Luego, existe $a \in A$ tal que $f(x) = f(a)$. De esta forma, $a \in f^{-1}(\{f(x)\}) \cap A$. Por la Proposición 2.16, $f^{-1}(\{f(x)\}) \subseteq A$. De aquí que $x \in A$. Luego, $A = f^{-1}(f(A))$. Sea $E = f(A)$. Así, $A = f^{-1}(E) \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Por Proposición 2.14, tenemos que $E \in NB(\mathcal{F}_1(Y))$. Por tanto, $A \in \{f^{-1}(B) : B \in NB(\mathcal{F}_1(Y))\}$.

Para probar la otra contención sea $D \in \{f^{-1}(B) : B \in NB(\mathcal{F}_1(Y))\}$. Entonces $D = f^{-1}(B)$ para $B \in NB(\mathcal{F}_1(Y))$. Por la Proposición 2.15, se tiene que $D = f^{-1}(B) \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. □

Lema 2.18. *Si $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $H \subseteq A$, entonces $X - H$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X - H$ no es conexo. Por Proposición 1.5, existen subconjuntos mutuamente separados no vacíos P y Q de X tales que $X - H = P \cup Q$, es decir, $Cl_X(P) \cap Q = \emptyset$, $P \cap Cl_X(Q) = \emptyset$ y $X - H = P \cup Q$. Sea $p \in P$. Como $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, $\mathcal{K}(p, A)$ es denso en X. Notemos que $X - Cl_X(P) \subseteq Q$ y $X - Cl_X(P)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. De esto, $(X - Cl_X(P)) \cap \mathcal{K}(p, A) \neq \emptyset$. Esto implica que existe un subcontinuo B de X tal que $p \in B \subseteq X - A$ y $B \cap (X - Cl_X(P)) \neq \emptyset$. Como $B \subseteq X - A \subseteq X - H = P \cup Q$, $B \subseteq P \cup Q$. Dado que $p \in B \cap P$ y $B \cap (X - Cl_X(P)) \neq \emptyset$, se tiene que $B \cap Q \neq \emptyset$. Esto contradice el hecho de que B sea conexo. Por tanto, $X - H$ es conexo. □

El estudio de los puntos de corte ha tenido implicaciones en resultados y pruebas dentro de la Teoría de continuos. A continuación se dará la definición de conjunto de corte así como de un punto de corte.

Sea A un subconjunto de X. Se dice que A es un **conjunto de corte** si $X - A$ no es conexo. También se dice que x es un **punto de corte** de X si $X - \{x\}$ no es conexo.

Teorema 2.19. *Si x es un punto de corte de X y $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, entonces $x \in X - B$.*

Demostración. Supongamos que $x \notin X - B$. Observemos que $\{x\} \subseteq B$. Por el Lema 2.18, $X - \{x\}$ es conexo. Esto es una contradiccón. Por lo tanto, $x \in X - B$. □

2.1. Hiperespacio de conjuntos orilla

En esta sección se introducirá el concepto de conjunto orilla el cual esta ligado al hiperspacio de no estorbadores. Mostraremos que todo conjunto no estorbador es un conjunto orilla y que todo conjunto orilla no es un conjunto de corte.

Diremos que $A \in 2^X$ es un **conjunto orilla** si para todo $\varepsilon > 0$, existe $L \in C(X)$ tal que $L \cap A = \emptyset$ y para cada $x \in X$ existe $y \in L$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Se define el hiperespacio $S(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conjunto orilla}\}$.

Lema 2.20. *Sean X un continuo y A un subcontinuo de X. Entonces $A \in S(X)$ si y sólo si para cualquier familia finita $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe un subcontinuo L de X tal que $L \cap A = \emptyset$ y $L \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Supongamos que $A \in S(X)$. Sean $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, ..., U_n\}$ una familia finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X y $\varepsilon > 0$ tal que para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $x_i \in U_i$ y $B_\varepsilon(x_i) \subseteq U_i$. Del hecho de que $A \in S(X)$, existe un subcontinuo L de X tal que $A \cap L = \emptyset$ y para cada $x \in X$ se tiene que $L \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. En particular, $L \cap B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo tanto, $L \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $U_i \in \mathcal{U}$.

Probemos que $A \in S(X)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}(x)} : x \in X\}$ una cubierta abierta de X. Puesto que X es compacto, existe $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ tal que $\mathcal{U} = \{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) : j \in \{1, 2, ..., n\}\}$ es una subcubierta finita de X. Observemos que $\mathcal{U}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X. Existe un subcontinuo L de X tal que $L \cap A = \emptyset$ y $L \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. De esto, existe $y_j \in L$ tal que $d(y_j, x_j) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por otra parte, para cualquier $x \in X$ existe $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ tal que $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$. En consecuencia, $d(x, x_j) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, y_j) \leq d(x, x_j) + d(x_j, y_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $A \in S(X)$. □

Proposición 2.21. $NB(\mathcal{F}_1(X)) \subseteq S(X)$.

Demostración. Sean $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, ..., U_n\}$ una familia finita subconjuntos abiertos no vacíos de X. Dado $p \in X - A$ tenemos que $Cl_X(\mathcal{K}(p, A)) = X$. Para cada $1 \leq i \leq n$ existe un subcontinuo K_i de X tal que $p \in K_i \subseteq X - A$ y $K_i \cap U_i \neq \emptyset$. El subcontinuo $L = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ de X cumple que $p \in L \subseteq X - A$ y $L \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $U_i \in \mathcal{U}$. Por el Lema 2.20, $A \in S(X)$. Por lo tanto, $NB(\mathcal{F}_1(X)) \subseteq S(X)$. □

Proposición 2.22. *Si $A \in S(X)$, entonces $X - A$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X - A = U \cup V$ donde U y V son abiertos no vacíos de X tales que $U \cap V = \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Observemos que $\mathcal{U}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por el Lema 2.20, existe un subcontinuo L de X tal que $L \cap A = \emptyset$, $L \cap U \neq \emptyset$ y $L \cap V \neq \emptyset$. Esto contradice la Proposición 1.7. Por lo tanto, $X - A$ es conexo. □

2.2. Hiperespacio de conjuntos de no corte débil

El estudio del concepto de conjunto de no corte débil es de gran utilidad dada la relación existente con los conjuntos no estorbadores. Se introducirá el concepto de conexo por continuos y algunos resultados de esta sección servirán para el resto de los capítulos de este trabajo.

Un espacio Y es **conexo por continuos** si para cada $x, y \in Y$ existe un continuo W tal que $x, y \in W \subseteq Y$.

Con base en lo anterior, se dice que un elemento A de $2^X - \{X\}$ es un **conjunto de corte no débil** si $X - A$ es conexo por continuos. Se define $NWC(X) = \{B \in 2^X : Int_X B = \emptyset$ y B es un conjunto de corte no débil$\}$.

Lema 2.23. *Si A es un subconjunto propio y cerrado de X, entonces $X - A$ es conexo por continuos si y sólo si $\mathcal{K}(x, A) = X - A$ para todo $x \in X - A$.*

Demostración. Sea $x \in X - A$. Supongamos que $X - A$ es conexo por continuos. Por la Observación 2.1, $\mathcal{K}(x, A) \subseteq X - A$. Ahora sea $y \in X - A$. Al ser $X - A$ conexo por continuos, existe un subcontinuo W de X tal que $x, y \in W \subseteq X - A$. Así, $y \in \mathcal{K}(x, A)$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(x, A) = X - A$.

Probemos la otra implicación. Sean $a, b \in X - A$ tales que $a \neq b$. Por hipotésis, $a \in \mathcal{K}(b, A)$. Existe un subcontinuo Q de X tal que $a, b \in Q \subseteq X - A$. Por lo tanto, $X - A$ es conexo por continuos. □

Proposición 2.24. *Sea* $B \in 2^X$ *tal que* $Int_X(B) = \emptyset$*. Entonces* $B \in NWC(X)$ *si y sólo si* $\mathcal{K}(x, B) = X - B$ *para cada* $x \in X - B$*.*

Demostración. Sea $B \in NWC(X)$. Esto implica que $X - B$ es conexo por continuos. Por el Lema 2.23, $\mathcal{K}(x, B) = X - B$. Por otra parte, supongamos que para cada $x \in X - B$ se tiene que $\mathcal{K}(x, B) = X - B$. Usando el Lema 2.23, $X - B$ es conexo por continuos. Como B es un conjunto de no corte débil y $Int_X(B) = \emptyset$, $B \in NWC(X)$. □

Proposición 2.25. *Si todo abierto conexo de* X *es un subconjunto conexo por continuos, entonces* $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ *si y sólo si* $Int_X B = \emptyset$ *y* $X - B$ *es conexo.*

Demostración. Probemos la suficiencia. Si $X - B$ es conexo y $B \in 2^X$, entonces $X - B$ es un abierto conexo en X, por lo que $X - B$ es continuo por conexos. Por Lema 2.23, $\mathcal{K}(x, B) = X - B$. Por hipotésis tenemos que $Int_X B = \emptyset$, entonces de la identidad

$$Int_X B = X - (Cl_X(X - B)) \tag{2.2.1}$$

se deduce que $Cl_X(\mathcal{K}(x, B)) = Cl_X(X - B) = X$. Luego, $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Para probar la necesidad, sea $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Por la Proposición 2.9, $Int_X(B) = \emptyset$ y $X - B$ es conexo. □

Teorema 2.26. $NWC(X) \subseteq NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Demostración. Sea $A \in NWC(X)$ y $x \in X - A$. Por Lema 2.23, $\mathcal{K}(x, A) = X - A$. Más aún, $X - A$ es denso en X pues $Int_X(A) = \emptyset$ y por tanto $\mathcal{K}(x, A)$ es denso en X. Por definición, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. □

El siguiente resultado se puede encontrar en [1, Teorema 11, p. 505] y caracteriza a la circunferencia en terminos del hiperespacio $NWC(X)$.

Teorema 2.27. *Sea* X *un continuo. Entonces* X *es una curva cerrada simple si y sólo si* $NWC(X) = \mathcal{F}_1(X)$*.*

Capítulo 3

Modelos del hiperespacio de no estorbadores

A continuación calcularemos los hiperespacios de no estorbadores de los singulares de algunos continuos. Los resultados presentados anteriormente serán utilizados a lo largo de este capítulo y en especial uno de los más mencionados será el Lema 2.18, por lo que se usará en algunas ocasiones sin hacer referencia explícitamente a él para una mejor lectura.

Ejemplo 3.1. Consideremos el continuo $X = [0, 1]$. Luego,

$$NB(\mathcal{F}_1(X)) = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Sea $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Queremos ver que $B \subseteq \{0, 1\}$. Supongamos que $B \cap (X - \{0, 1\}) \neq \emptyset$. Tomemos $b \in B \cap (X - \{0, 1\})$ y $x \in X - B$. Observemos que $\{b\} \subseteq B$. Por Proposición 2.7, se sigue que $\mathcal{K}(x, B) \subseteq \mathcal{K}(x, \{b\})$ y puesto que $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, entonces $\mathcal{K}(x, \{b\})$ es denso en X. Por definición, $\{b\}$ no estorba a x, es decir, $\{b\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. De la Proposición 2.9 se tiene que $\text{Int}_X(\{b\}) = \emptyset$ y $X - \{b\}$ es conexo. Esto es una contradicción pues $b \neq 0$ y $b \neq 1$. En consecuencia, $B \subseteq \{0, 1\}$. Si $|B| = 1$, entonces $B = \{0\}$ ó $B = \{1\}$. Si $|B| = 2$, entonces $B = \{0, 1\}$. Por lo tanto, $B \in \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Veamos que $\{0\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Sea $p \in X - \{0\}$. Observemos que $p > 0$. Sea $A_n = \left[\frac{p}{n}, 1\right]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $A_n \in C(X)$, $p \in A_n$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0, 1]$. Luego, $Cl_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = X$ y por el Teorema 2.13 tenemos $\{0\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. De manera similiar, $\{1\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Para demostrar esto, sea $p \in X - \{1\}$. Afirmamos que $\mathcal{K}(p, \{1\}) = X - \{1\}$. Por la Observación 2.1,

$\mathcal{K}(p,\{1\}) \subseteq X-\{1\}$. Sea $l \in X-\{1\}$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $p < l$. El subcontinuo $I=[p,l]$ de X es tal que $p,l \in I \subseteq X-\{1\}$. En consecuencia, $\mathcal{K}(p,\{1\}) = X-\{1\}$. Como $X-\{1\}$ es denso, $\mathcal{K}(p,\{1\})$ también es denso. Por lo tanto, $\{1\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Falta mostrar que $\{0,1\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Se tiene que $\{0,1\} \in NWC(X)$. En efecto, sean $y,r \in X-\{0,1\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $y<r$. El subcontinuo $[y,r]$ de X satisface que $y,r \in [y,r] \subseteq X-\{0,1\}$. Por Proposición 2.26, $\{0,1\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Por lo tanto, $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

Ejemplo 3.2. Sea $X=S^1$ donde S^1 denota la circunferencia unitaria. En este caso se tiene que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$.

Sea $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Supongamos que $B \in 2^X - \mathcal{F}_1(X)$. Para cualesquiera $p,q \in B$ distintos, se tiene que $X-\{p,q\}$ no es conexo. Esto contradice el Lema 2.18. Por tanto, $B \in \mathcal{F}_1(X)$. Para probar la otra contención, sean $A \in \mathcal{F}_1(X)$ y $y,q \in X-A$ tales que $y \neq q$. Existe un arco σ de X tal que $y,q \in \sigma(I) \subseteq X-A$. En consecuencia, $A \in NWC(X)$. Por Proposición 2.26, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Ejemplo 3.3. Sean $a=(-1,0)$, $b=(1,0)$, $I=\{(w,z) \in \mathbb{R}^2 : z=\sqrt{1-w^2}\}$, $K=\{(w,z) \in \mathbb{R}^2 : z=-\sqrt{1-w^2}\}$ y $J=[-1,1]\times\{0\}$. Consideremos el continuo $X=J\cup I\cup K$(Ver figura 3.1).

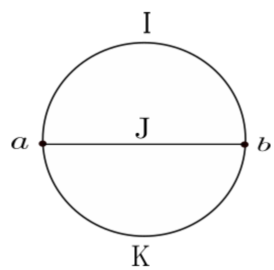


Figura 3.1:

Afirmamos que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X) \cup \{\{q,p\} : q \in I \text{ y } p \in (J\cup K)-\{a,b\}\} \cup \{\{q,p\} : q \in J \text{ y } p \in (I\cup K)-\{a,b\}\} \cup \{\{q,p\} : q \in K \text{ y } p \in (I\cup J)-\{a,b\}\}$.

Sea $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Supongamos que $|A|>3$. Sean $x,y,z \in A$ distintos a pares. Así, $\{x,y,z\} \subseteq A \subseteq J\cup I\cup K$. Observemos que no sucede que $x,y,z \in I$ o $x,y,z \in J$ o $x,y,z \in K$ por el Lema 2.18. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in J$, $y \in I$ y $z \in K$. Pero $X-\{x,y,z\}$ no es conexo. Esto contradice el Lema 2.18. En consecuencia, $|A| \leq 2$. Si $A=\{x\}$, entonces $A \in \mathcal{F}_1(X)$. Podemos suponer que $A=\{x,y\}$ donde $x \neq y$. Si $x \in I$, entonces $y \notin I$ pues de lo contrario $X-\{x,y\}$ no es conexo contradiciendo el Lema 2.18. Así, $y \in (J\cup K)-\{a,b\}$.

En este caso $A \in \{\{q,p\} : q \in I \text{ y } p \in (J \cup K) - \{a,b\}\}$. Si $x \in J$, entonces usando un argumento similar tenemos que $y \in (I \cup K) - \{a,b\}$. En consecuencia, $A \in \{\{q,p\} : q \in J \text{ y } p \in (I \cup K) - \{a,b\}\}$. De la misma forma tenemos que si $x \in K$, entonces $y \in (I \cup J) - \{a,b\}$. Por lo tanto, $A \in \{\{q,p\} : q \in K \text{ y } p \in (I \cup J) - \{a,b\}\}$.

Para probar la otra contención, sea $D \in \mathcal{F}_1(X) \cup \{\{q,p\} : q \in I \text{ y } p \in (J \cup K) - \{a,b\}\} \cup \{\{q,p\} : q \in J \text{ y } p \in (I \cup K) - \{a,b\}\} \cup \{\{q,p\} : q \in K \text{ y } p \in (I \cup J) - \{a,b\}\}$. Supongamos que $D = \{q,p\}$ donde $q \in I$ y $p \in (J \cup K) - \{a,b\}$. Los casos $q \in J$ con $p \in (I \cup K) - \{a,b\}$ y $q \in K$ con $p \in (I \cup J) - \{a,b\}$ son similares. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $p \in J - \{a,b\}$. Vamos a probar que $X - D$ es conexo por continuos. Sean $x, y \in X - D$ distintos. Si $x, y \in K$, entonces K es un subcontinuo de X tal que $x, y \in K \subseteq X - D$. Supongamos que $x \in I - \{q\}$ y $y \in J - \{p\}$. Existe un arco N en I tal que $a, x \in N \subseteq X - \{p\}$. De forma similar, existe un arco M en J tal que $b, y \in M \subseteq X - \{q\}$. El subcontinuo $H = N \cup K \cup M$ es tal que $x, y \in H \subseteq X - D$. Esto implica que $X - D$ es conexo por continuos. Por la Proposición 2.24, $\mathcal{K}(r, D) = X - D$ para cualquier $r \in X - D$. Como $X - D$ es denso en X, $\mathcal{K}(r, D)$ también lo es. De donde $D \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Supongamos que $D = \{d\}$ con $d \in X$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $d \in I$. Sean $x, y \in X - D$ distintos. Se afirma que $\mathcal{K}(x, D) = X - D$. Por la Observación 2.1, $\mathcal{K}(x, D) \subseteq X - D$. Si $x, y \in I - \{d\}$, entonces existen arcos E y F en I tales que $a, x \in E \subseteq X - D$ y $b, y \in F \subseteq X - D$. El subcontinuo $G = E \cup J \cup F \cup K$ es tal que $x, y \in G \subseteq X - D$. En consecuencia, $y \in \mathcal{K}(x, D)$. Si $x \in J$ y $y \in K$, entonces consideramos el subcontinuo $H = J \cup K$. Se tiene que $x, y \in H \subseteq X - D$. Luego, $y \in \mathcal{K}(x, D)$. De aquí que, $\mathcal{K}(x, D) = X - D$. Del hecho $X - D$ es denso, $\mathcal{K}(x, D)$ también es denso en X. Por lo tanto, $D \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Ejemplo 3.4. Sea el continuo $X = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\right\}$, conocida como la curva del topólogo. Denotemos $G = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\right\}$, $I = \{0\} \times [-1,1]$ y el punto $p = (1, \sin(1))$ como se muestra en la figura 3.2.

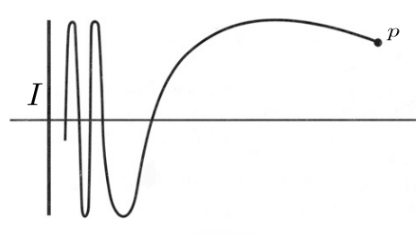


Figura 3.2:

Afirmamos que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \{\{p\}, I, I \cup \{p\}\}$.

Sea $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $a \in A$. Esto implica que $\{a\} \subseteq A$. Si $a \in G - \{p\}$, entonces $X - \{a\}$ no es conexo. Esto contradice el Lema 2.18. En consecuencia, $a \in X - (G - \{p\}) \subseteq I \cup \{p\}$ y $A \subseteq I \cup \{p\}$. Supongamos que $A \cap I \neq \emptyset$. Sea $c \in A \cap I$. Vamos a probar que $I = A$. Sea $k \in I$. Supongamos que $k \notin A$ y que existe $b \in I$ tal que $k \in \{0\} \times [1, b] \subseteq I - \{c\}$. Se tiene que $\mathcal{K}(k, A) \subseteq \{0\} \times [1, b]$. En consecuencia $\mathcal{K}(k, A)$ no es denso en X. Esto contradice el hecho $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Luego, $k \in A$ y $I \subseteq A$.

Por otra parte, supongamos que $a \notin I$. Sea $z \in I - A$. Esto implica que $\mathcal{K}(z, A) \subseteq \mathcal{K}(z, \{a\})$. Observemos que $\mathcal{K}(z, \{a\}) \subseteq I - \{c\}$ y $\mathcal{K}(z, \{a\})$ no es denso. Esto es una contradicción pues $Cl_X(\mathcal{K}(z, A)) = X$. De aquí que, $a \in I$ y $A \subseteq I$. Por lo tanto, $A = I$.

Si $A \cap I = \emptyset$, entonces $A = \{p\}$. Por lo tanto, $A \in \{\{p\}, I, I \cup \{p\}\}$.

Para la otra contención, sea $B \in \{\{p\}, I, I \cup \{p\}\}$. Supongamos que $B = \{p\}$. Mostremos que $\mathcal{K}(y, B) = X - B$ para cualquier $y \in X - B$. Por la Observación, 2.1, $\mathcal{K}(y, B) \subseteq X - B$. Sea $l \in X - B$. Existe un número real $k < 1$ tal que el subcontinuo $T = I \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, k] \right\}$ satisface $l, y \in T \subseteq X - B$. En consecuencia, $l \in \mathcal{K}(y, \{p\})$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(y, \{p\})$ es denso en X y $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Supongamos que $B = I$ o $B = I \cup \{p\}$. Vamos a probar que $B \in NWC(X)$. Sean $z, w \in X - B$. Esto implica que $z, w \in G$. Existen números reales ε y δ tales que $0 < \varepsilon < \delta \leq 1$. El subcontinuo $F = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\varepsilon, \delta] \right\}$ es tal que $z, w \in F \subseteq X - I$. De aquí que, $B \in NWC(X)$. Por Proposición 2.26, $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Ejemplo 3.5. Sea $G = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1] \right\}$. Consideremos $S = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup G$. Sea $X = S \cup C$ donde C es un arco que une a los puntos $p = (0, -1)$ y $q = (1, \sin(1))$ y $S \cap C = \{p, q\}$. A este continuo se le conoce como la curva de Varsovia. Denotemos $I = \{0\} \times [-1, 1]$ y $z = (0, 1)$.(Ver figura 3.3).

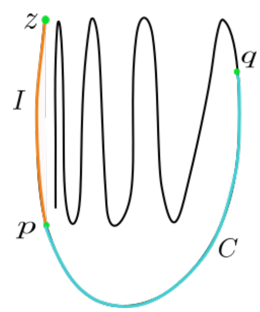


Figura 3.3:

Entonces $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X - I) \cup \{M \in C(X) : z \in M \subseteq I\}$.

Sea $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Consideremos los casos $A \cap I \neq \emptyset$ o $A \cap I = \emptyset$.

Caso 1. $A \cap I \neq \emptyset$.

Probaremos que $A \in \{M \in C(X) : z \in M \subseteq I\}$. Sean $a \in A$ y $b \in A \cap I$. Supongamos que $a \notin I$. Sea J el arco en X que une al punto a con el punto b. Como $Int_X(J) \neq \emptyset$ y $Int_X(A) = \emptyset$, $J - A$ es no vacío. Sea $x \in J - A$. Observemos que $\mathcal{K}(x, A) \subseteq J$. De aquí que, $\mathcal{K}(x, A)$ no es un subconjunto denso en X. Esto contradice el supuesto $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Así, $a \in I$ y $A \subseteq I$.

Veamos que A es conexo. Supongamos que A es disconexo. Existen $a, c \in A$ distintos tales que si $x \in \{0\} \times [a, c]$, entonces $x \notin A$. Luego, $\mathcal{K}(x, A) \subseteq I$ y $Cl_X(\mathcal{K}(x, A))$ no es denso en X. Esto contradice $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. En consecuencia, A es conexo. Falta ver que $z \in A$. Supongamos lo contrario. Sea $w = (0, r) \in A \cap I$ donde $-1 \leq r < 1$. El subconjunto $L = \{0\} \times [1, r]$ de X cumple que $z, w \in L \subseteq I$. Se afirma que $\mathcal{K}(z, A) \subseteq L$. En efecto, sea $n \in \mathcal{K}(z, A)$. Existe un subcontinuo R de X tal que $n, z \in R$ y $R \cap A = \emptyset$. Esto implica que $n = (0, t)$ donde $1 \leq t < r$. Luego, $n \in L$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(z, A)$ no es denso en X pues $Cl_X(\mathcal{K}(z, A)) \subseteq I$. De aquí que, $z \in A$.

Caso 2. $A \cap I = \emptyset$.

Afirmamos que $A \in \mathcal{F}_1(X - I)$. Sean $a, b \in A$ distintos. El conjunto $H = \{a, b\}$ satisface que $H \subseteq A$. Observemos que $X - H$ no es conexo. Esto contradice el Lema 2.9. En consecuencia, $|A| = 1$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}_1(X - I)$.

Para la otra contención, sea $A \in \mathcal{F}_1(X - I) \cup \{M \in C(X) : z \in M \subseteq I\}$. Supongamos que $A \in \mathcal{F}_1(X - I)$. Veamos que $A \in NWC(X)$. Sean $x, y \in X - A$. Si $A \in C - \{p\}$, entonces existen arcos C_1, C_2 ajenos en X y $r, t \in C - A$ distintos tales que $r, x, q \in C_1 \subseteq X - A$ y $p, y, t \in C_2 \subseteq X - A$. El subcontinuo $F = C_1 \cup S \cup C_2$ de X es tal que $x, y \in F \subseteq X - A$. De donde, $A \in NWC(X)$. Si $A \subseteq G$, entonces $A = \{\left(a, \sin\left(\frac{1}{a}\right)\right)\}$ donde $a \in (0,1]$. Existen números reales w y z distintos tales que $0 < z < a < w \leq 1$, $x, y \in L = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{\left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, z]\} \cup \{\left(w, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : t \in [w, 1]\} \cup C$. El subcontinuo L de X es tal que $x, y \in L \subseteq X - A$. Así, $A \in NWC(X)$. Por la Proposición 2.26, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Supongamos que $A \in \{M \in C(X) : z \in M \subseteq I\}$. Observemos que $Int_X(A) = \emptyset$. Sea $x \in X - A$. Se afirma que $\mathcal{K}(x, A) = X - A$. Por la Observación 2.1, $\mathcal{K}(x, A) \subseteq X - A$. Sea $y \in X - A$ distinto de x. Si $x, y \in X - I$, entonces el subcontinuo $C \cup G$ de X es tal que $x, y \in C \cup G \subseteq X - A$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $x \in I - A$ e $y \in X - I$. Existe un subintervalo cerrado J en I tal que $x, (0, -1) \in J \subseteq I - A$. El subcontinuo $J \cup C \cup G$ es tal que $x, y \in J \cup C \cup G \subseteq X - A$. De esta forma, $\mathcal{K}(x, A) = X - A$. Por las Proposiciones 2.24 y 2.26, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Ejemplo 3.6. Sean $X = \left\{\left(z, \sin\frac{1}{z}\right) : z \in [-1,0) \cup (0,1]\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$, $x = (-1, \sin(-1))$ y $y = (1, \sin(1))$(ver figura 3.4).

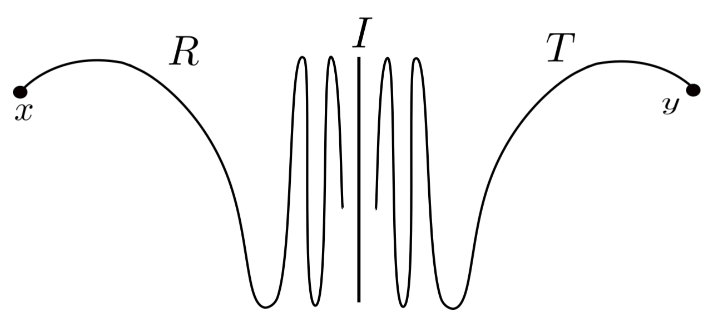


Figura 3.4:

Afirmamos que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \{\{y\}, \{x\}, \{x, y\}\}$. Sean,

$$I = \{0\} \times [-1,1], R = \{\left(r, \sin\frac{1}{r}\right) : r \in [-1, 0)\} \text{ y } T = \{\left(t, \sin\frac{1}{t}\right) : t \in (0,1]\}.$$

Se tiene que $X = R \cup I \cup T$. Sea $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Mostremos que $A \cap I = \emptyset$. Supongamos que $A \cap I \neq \emptyset$. Observemos que R y T son abiertos no vacíos en X. Por la Proposición 2.9, $Int_X(A) = \emptyset$. Si $R \subseteq A$, entonces $Int_X(R) \subseteq Int_X(A)$. Así, $Int_X(A) \neq \emptyset$. Esto es un absurdo. Por lo tanto, existe $q \in R - A$. Del hecho de que

$A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, $\mathcal{K}(q, A)$ es denso en X. Esto implica que $\mathcal{K}(q, A) \cap T \neq \emptyset$. Existe un subcontinuo B de X tal que $q \in B \subseteq X - A$ y $B \cap T \neq \emptyset$. Esto implica $I \subseteq B$ y así $A \cap B \neq \emptyset$. Esto contradice que $B \subseteq X - A$. Concluimos que $A \cap I = \emptyset$ y en consecuencia $A \subseteq R \cup T$. Se afirma que $|A| \leq 2$. Supongamos que $|A| > 2$. Sean $m, n, l \in A$ distintos. Entonces $\{m, n, l\} \subseteq A$. Pero $X - \{m, n, l\}$ no es conexo. Por el Lema 2.18, $0 < |A| \leq 2$. Supongamos que $|A| = 1$. Sea $a \in A$. Entonces $a \in R$ ó $a \in T$. Por el Lema 2.18, $a = x$ ó $a = y$ respectivamente. Supongamos que $|A| = 2$. Sean $z, w \in A \cap R$ tales que $z \neq w$. Observemos que $\{z, w\} \subseteq A \cap R \subseteq A$. Pero $X - \{z, w\}$ no es conexo. Por el Lema 2.18, $|A \cap R| \leq 1$. Si $v \in A \cap (R - \{x\})$, entonces $\{v\} \subseteq A$. Se tiene que $X - \{v\}$ no es conexo. Por el Lema 2.18, $v \in \{x\}$. Por lo tanto, $A \cap R \subseteq \{x\}$. Se prueba de manera similar que $|A \cap T| \leq 1$ y $A \cap T \subseteq \{y\}$. Falta probar que $A \subseteq \{x, y\}$. En efecto, sea $a \in A$. Entonces $a \in R \cup T$. Por el Lema 2.18, $a = x$ o $a = y$. Así, $a \in \{x, y\}$. Por lo tanto, $A = \{x, y\}$.

Demostremos la otra contención. Sea $B \in \{\{y\}, \{x\}, \{x, y\}\}$. Supongamos que $B = \{y\}$. Sea $z \in X - B$. Se tiene que $\mathcal{K}(z, B) = X - B$. Sea $l \in X - B$. Existe un número real α tal que $\alpha < 1$. El subcontinuo $H = R \cup I \cup \{\left(t, \sin \dfrac{1}{t}\right) : t \in (0, \alpha]\}$ de X es tal que $l, z \in H \subseteq X - B$. Luego, $\mathcal{K}(z, B)$ es denso en X. El caso $B = \{x\}$ es similar al anterior. Supongamos que $B = \{x, y\}$. Para cualquier $p \in X - B$, se tiene que $X - B \subseteq \mathcal{K}(p, B)$. En efecto, sea $u \in X - B$. Puesto que $u, p \in X - B$, existen numéros reales $r > -1$ y $s < 1$ tales que $u, p \in A = R_0 \cup I \cup T_0$ donde $R_0 = \left\{\left(z, \sin \dfrac{1}{z}\right) : z \in [r, 0)\right\}$ y $T_0 = \left\{\left(y, \sin \dfrac{1}{y}\right) : y \in (0, s]\right\}$. Observemos que A es un subcontinuo de X tal que $u, p \in A \subseteq X - B$. En consecuencia, $u \in \mathcal{K}(p, B)$ y $X - B \subseteq \mathcal{K}(p, B)$. Al ser $X - B$ un conjunto denso en X, se tiene que $\mathcal{K}(p, B)$ también es denso en X. Por lo tanto, $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Ejemplo 3.7. Sean $\delta > 0$, $C = \left(\dfrac{\delta}{2}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$ y $a = (0, 0)$. El conjunto $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{\delta}{2})^2 + y^2 = (\frac{\delta}{2})^2\}$ describe una circunferencia que tiene como centro el punto C y radio $\dfrac{\delta}{2}$. De igual forma, sea $\beta < 0$ y $D = \left(\dfrac{\beta}{2}, 0\right)$ un punto en $\mathbb{R}^2$. El conjunto $S_2 = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x' - \frac{\beta}{2})^2 + (y')^2 = (\frac{\beta}{2})^2\}$ describe una circunferencia con centro en el punto D y radio $\dfrac{-\beta}{2}$. Observemos que $a \in S_1 \cap S_2$. Sea X el continuo formado por la unión de S_1 y S_2(Ver figura 3.5).

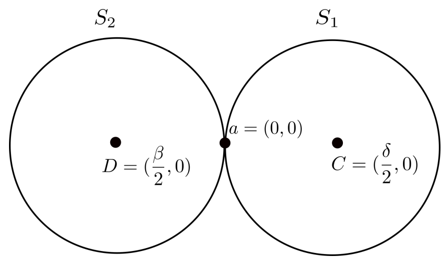


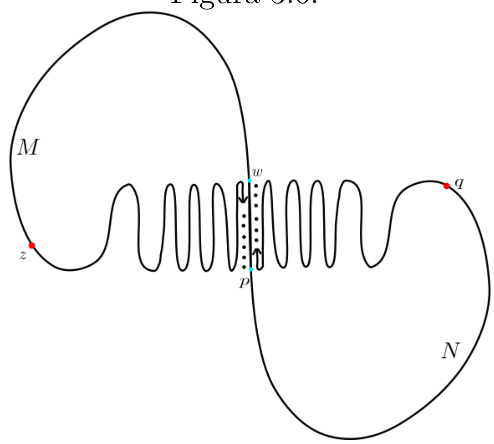
Figura 3.5:

Denotemos $G = \{\{u, v\} : u \in S_1 - \{a\} \text{ y } v \in S_2 - \{a\}\}$. Probaremos que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(S_1 - a) \cup \mathcal{F}_1(S_2 - a) \cup G$. Sea $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Sean $x, y, z \in B \subseteq X = S_1 \cup S_2$ distintos a pares. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x, z \in S_1$ y $y \in S_2$. Observemos que $\{x, z\} \subseteq B$ y que $X - \{x, z\}$ no es conexo. Esto contradice el Lema 2.18. En consecuencia, $0 < |B| \leq 2$. Como $X - \{a\}$ es disconexo y $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, $a \notin B$. Si $B = \{b\}$, entonces $B \in \mathcal{F}_1(S_1 - \{a\})$ ó $B \in \mathcal{F}_1(S_2 - \{a\})$. Si $B = \{b, c\}$ donde $b \neq c$, entonces $B \nsubseteq S_1$ ó $B \nsubseteq S_2$ pues $X - \{c, d\}$ no sería conexo. Esto implica que $\{c\} \subseteq S_1$ y $\{d\} \subseteq S_2$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{F}_1(S_1 - \{a\}) \cup \mathcal{F}_1(S_2 - \{a\}) \cup G$. Para mostrar la otra contención, sea $Q \in \mathcal{F}_1(S_1 - \{a\}) \cup \mathcal{F}_1(S_2 - \{a\}) \cup G$. Supongamos que $Q \in \mathcal{F}_1(S_1 - \{a\})$, es decir, $Q = \{q\}$ para algún $q \in S_1 - \{a\}$. Probemos que $Q \in NWC(X)$. Sean $z, y \in X - Q = (S_1 - Q) \cup (S_2 - Q) = (S_1 - Q) \cup S_2$. Veamos que existe un subcontinuo K de X tal que $y, z \in K \subseteq X - Q$. Si $y, z \in S_1 - Q$, entonces existe un arco σ en S_1 tal que $y, z \in \sigma \subseteq X - Q$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y \in S_1 - Q$ y $z \in S_2$. Existe un arco σ en S_1 tal que $y, a \in \sigma$ y $\sigma \cap Q = \emptyset$. El subcontinuo $H = \sigma \cup S_2$ de X cumple que $y, z \in H \subseteq X - Q$. Por lo tanto, $Q \in NWC(X)$. Por Proposición 2.26, $Q \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Se prueba de forma similar $B \in \mathcal{F}_1(S_2 - \{a\})$. Supongamos ahora que $Q \in G$, es decir, $Q = \{u, v\}$ donde u, v son tales que $u \in S_1 - \{a\}$ y $v \in S_2 - \{a\}$. Sean $x, y \in X - Q$ distintos. Si $x, y \in S_1 - \{u\}$ ó $x, y \in S_2 - \{v\}$, entonces existe un arco σ en $S_1 - \{u\}$ ó en $S_2 - \{v\}$ tal que $x, y \in \sigma \subseteq X - Q$. Supongamos que $x \in S_1 - \{u\}$ y $y \in S_2 - \{v\}$. Existen arcos σ_1 y σ_2 en S_1 y S_2 respectivamente tales que $x, a \in \sigma_1 \subseteq S_1 - \{u\}$ y $y, a \in \sigma_2 \subseteq S_2 - \{v\}$. El subcontinuo $\sigma_1 \cup \sigma_2$ de X safistace $x, y \in \sigma_1 \cup \sigma_2 \subseteq X - Q$. Como $Int_X(Q) = \emptyset$ y $X - Q$ es conexo por continuos se tiene que $Q \in NWC(X)$. Por la Proposición 2.26, $Q \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Ejemplo 3.8. Sean $I = \{0\} \times [-1, 1]$, $L = \{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}$ y $R = \{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0)\}$. Definamos $N = L \cup C$ y $M = R \cup D$

donde C y D son arcos que unen a los puntos $p = (0, -1)$ con $q = (1, \sin(1))$ y $w = (0, 1)$ con $z = (-1, \sin(-1))$ respectivamente y que no tocan ni a N ni a M más que en esos pares de puntos y $M \cap N = \emptyset$. Sea $X = M \cup I \cup N$. Se tiene que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \{A \in 2^X : |A \cap M| \leq 1 \text{ y } |A \cap N| \leq 1\}$(Vease la figura 3.6).

Figura 3.6:

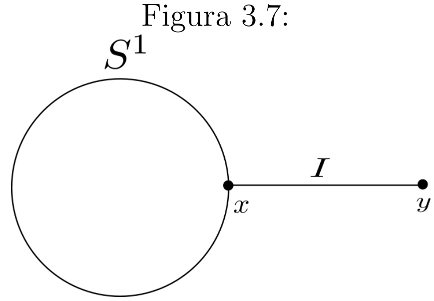


Sea $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Por la Proposición 2.9 y el Lema 2.18, $Int_X(A) = \emptyset$ y $X - H$ es conexo para cualquier subconjunto H de A. Afirmamos que $A \cap I = \emptyset$. Supongamos que existe $p \in A \cap I$. Sea $z \in X - A$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $z \in M$. Se tiene que $\mathcal{K}(z, A) \subseteq X - N$. Esto implica que $Cl_X(\mathcal{K}(z, A)) \subseteq Cl_X(X - N)$ y $Cl_X(X - N)$ no es un subconjunto denso. De aquí que, $Cl_X(\mathcal{K}(z, A))$ no es denso en X. Esto contradice $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Como $A \cap I = \emptyset$, entonces $A \subseteq M$ ó $A \subseteq N$ ó bien $M \cap A \neq \emptyset \neq A \cap N$. Supongamos que $A \subseteq M$ y que $x, y \in A \cap M$. Sea L un arco en M tal que $x, y \in L$. Observemos que $Int_X(L) \neq \emptyset$. Si $L \subseteq A$, entonces $Int_X(A) \neq \emptyset$ lo que contradice el hecho de que $Int_X(A) = \emptyset$. En consecuencia, $L \nsubseteq A$. Sea $r \in L - A$. Pero $Cl_X(\mathcal{K}(r, A)) \subseteq Cl_X(L)$ y $Cl_X(L)$ no es denso en X. Por lo tanto, $|A \cap M| \leq 1$ y $|A \cap N| = 0$. De manera similar se prueba que $|A \cap N| \leq 1$ y $|A \cap M| = 0$. Supongamos que $M \cap A \neq \emptyset \neq A \cap N$. Si $A \cap M = \{m, j\}$ y $A \cap N = \{n, k\}$, entonces $\{m, j\} \subseteq A$ y $\{n, k\} \subseteq A$. Pero $X - \{m, j\}$ y $X - \{n, k\}$ son subconjuntos no conexos de X. Esto contradice el Lema 2.18. Luego, $A \cap M = \{m\}$ y $A \cap N = \{n\}$. Esto implica que $|A \cap N| \leq 1$ y $|A \cap M| \leq 1$. Por lo tanto, $\{A \in 2^X : |A \cap M| \leq 1 \text{ y } |A \cap N| \leq 1\}$. Para la otra contención, sea $A \in 2^X$ tal que $|A \cap M| \leq 1$ y $|A \cap N| \leq 1$. Sean $A \cap M = \{a\}$ y $A \cap N = \{b\}$. Afirmamos que $A \in NWC(X)$. Sean $x, y \in X - A$ distintos. Si $x, y \in I$, entonces I es un subcontinuo de X tal que $x, y \in I \subseteq X - A$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in N$ e $y \in M$. Si $b \notin C$ y $x \in C$, entonces existe un subcontinuo $F = C \cup I$ de X tal que $x \in F \subseteq X - \{b\}$. Si $b \in C$ y $x \in R$, entonces el subcontinuo $F = R \cup I$ es tal que $x \in F \subseteq X - \{b\}$. Y si $b, x \in C$, entonces existe un arco J en M tal que $x \in J \subseteq X - \{b\}$ y $F = J \cup I$ ó $F = J \cup (R \cup I)$ es un subcontinuo de X tal que $x \in F \subseteq X - \{b\}$. De la misma manera, existe un subcontinuo W de X tal que $y \in W \subseteq X - \{a\}$ y $W \cap I \neq \emptyset$. Tenemos que $T = F \cup I \cup W$ es un subcontinuo de X tal que $x, y \in T \subseteq X - \{a, b\}$. Así, $A \in NWC(X)$. Por la Proposición 2.26, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Ejemplo 3.9. Consideremos el continuo $X = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\})$ donde S^1 es la circunferencia unitaria. (Ver figura 3.7). Denotemos $I = [1,2] \times \{0\}$, $x = (1,0)$ y $y = (2,0)$. Su conjunto de no estorbadores es $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(S^1 - \{x\}) \cup \{\{y\}\} \cup \{\{y,z\} : z \in S^1 - \{x\}\}$.

Figura 3.7:



Sea $B \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Entonces $B \in 2^X$, $Int_X(B) = \emptyset$ y $X - B$ es conexo. Consideremos dos casos.

Caso 1. $B \cap I = \emptyset$.

Se tiene que $B \subseteq S^1 - \{x\}$. Veamos que el supuesto $|B| \neq 1$ conduce a una contradicción. Sean $a, b \in B$ distintos. El conjunto $H = \{a, b\}$ satisface que $H \subseteq B$. Observemos que $X - H$ no es conexo. Esto contradice la Proposición 2.9. En consecuencia, $|B| = 1$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{F}_1(S^1 - \{x\})$.

Caso 2. $B \cap I \neq \emptyset$.

Para cualquier $s \in I - \{y\}$ se tiene que $s \notin B$. De lo contrario, $\{s\} \subseteq B$ y $X - \{s\}$ no es conexo, contradiciendo la Proposición 2.9. Así que, $\{y\} \subseteq B$. Supongamos $|B| > 2$. Sean $c, d, e \in B$ distintos a pares. Esto implica que $\{c, d, e\} \subseteq B$. Pero $X - \{c, d, e\}$ es disconexo. Esto contradice la Proposición 2.9. En consecuencia $|B| \leq 2$. Si $|B| = 1$, entonces $\{y\} = B$ y $B \in \{\{y\}\}$. Por otro lado, supongamos que $|B| = 2$. De aquí que $B = \{y, b\}$ donde $b \neq y$ y $b \in X - I$, es decir, $b \in S^1 - \{x\}$. De esta forma $B \in \{\{y, z\} : z \in S^1 - \{x\}\}$.

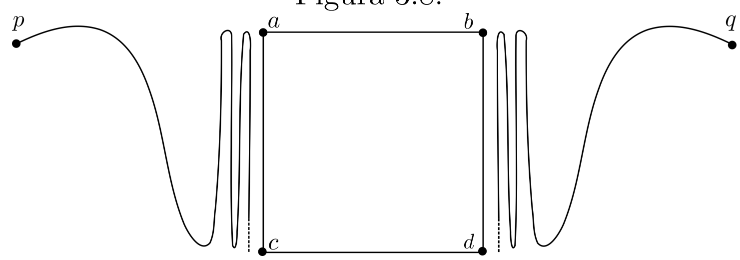
Por otra parte, sea $A \in \mathcal{F}_1(S^1 - \{x\}) \cup \{\{y\}\} \cup \{\{y,z\} : z \in S^1 - \{x\}\}$. Supongamos que $A \in \mathcal{F}_1(S^1 - \{x\})$. Veamos que $X - A \subseteq \mathcal{K}(x, A)$. Sea $q \in X - A$. Si $q \in I$, entonces I es un subcontinuo de X tal que $x, q \in I \subseteq X - A$. Luego, $q \in \mathcal{K}(x, A)$. Supongamos que $q \in S^1 - A$. Sea σ un arco en S^1 tal que $x, q \in \sigma$ y $\sigma \cap A = \emptyset$. El subcontinuo σ de X satisface que $x, q \in \sigma \subseteq X - A$. En consecuencia, $q \in \mathcal{K}(x, A)$ y $\mathcal{K}(x, A) = X - A$. Se afirma que $\mathcal{K}(k, A) = \mathcal{K}(x, A)$ para cada $k \in X - A$. En efecto, sea $a \in \mathcal{K}(k, A)$. Esto implica que $a \in X - A$. Del hecho de que $\mathcal{K}(x, A) = X - A$, entonces $a \in \mathcal{K}(x, A)$. Para la otra contención, sea $l \in \mathcal{K}(x, A)$. Existe un subcontinuo L de X tal que $x, l \in L \subseteq X - A$. Si $k \in S^1 - A$, existe un arco φ en S^1 tal que $x, k \in \varphi$ y $\varphi \cap A = \emptyset$. Tomamos el subcontinuo $T = L \cup \varphi$ de X. Se tiene que $k, l \in T \subseteq X - A$. Si $k \in I$, entonces $k, l \in I \subseteq X - A$. En cualquier caso, $\mathcal{K}(k, A) = \mathcal{K}(x, A)$. Puesto que $X - A$ es denso, se tiene que $\mathcal{K}(k, A)$ también es denso. Por lo tanto, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Supongamos que $A = \{y\}$. Sea $p \in X - A$. Mostraremos que $X - A \subseteq \mathcal{K}(p, A)$. Sea $n \in X - A$. Existe un número real $1 \leq r < 2$ tal que $n, p \in S^1 \cup ([1, r] \times \{0\})$. El subcontinuo $K = S^1 \cup ([1, r] \times \{0)$ cumple que $n, p \in K \subseteq X - A$. En consecuencia, $n \in \mathcal{K}(p, A)$. Luego, $X - A \subseteq \mathcal{K}(p, A)$ y $\mathcal{K}(p, A)$ es denso en X pues contiene un subconjunto $X - A$ el cual es denso en X. Por lo tanto, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Por último, supongamos que $A \in \{\{y, z\} : z \in S^1 - \{x\}\}$. Entonces $A = \{y, z\}$ donde $z \in S^1 - \{x\}$. En este caso, se tiene que $X - A \subseteq \mathcal{K}(x, A)$. En efecto, sea $m \in X - A$. Si $m \in I - \{y\}$, entonces existe un número real ε tal que $1 < \varepsilon < 2$ y $m, x \in [1, \varepsilon] \subseteq X - A$. En consecuencia, $m \in \mathcal{K}(x, A)$. Supongamos que $m \in S^1 - A$. Sea C un arco en S^1 tal que $C \cap \{z\} = \emptyset$ y $m, x \in C \subseteq X - A$. En consecuencia, $m \in \mathcal{K}(x, A)$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(x, A) = X - A$. Afirmamos que $\mathcal{K}(k, A) = \mathcal{K}(x, A)$ para cualquier $k \in X - A$. Solo basta probar que $\mathcal{K}(x, A) \subseteq \mathcal{K}(k, A)$. En efecto, para cualquier $s \in \mathcal{K}(x, A)$ existe un subcontinuo H de X tal que $s, k \in H \subseteq X - A$. Luego, $\mathcal{K}(k, A) = \mathcal{K}(x, A)$. En consecuencia, $\mathcal{K}(k, A)$ es denso en X. Por lo tanto, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Ejemplo 3.10. Sean $L_1 = (-1, 1) \times \{1\}$, $L_2 = (-1, 1) \times \{-1\}$, $I = \{-1\} \times [-1, 1]$, $J = \{1\} \times [-1, 1]$. Hacemos $S = J \cup \{\left(x, \sin\left(\frac{-1}{1-x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (1, 2]\}$, $D = L_1 \cup J \cup L_2 \cup I$ el cuál es un cuadrado con lados de longitud 2 con centro en el origen y $T = I \cup \{\left(x, \sin\left(\frac{-1}{1+x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, -1)\}$. Denotemos $a = (-1, 1)$, $b = (1, 1)$, $c = (-1, -1)$, $d = (1, -1)$, $p = (-2, \sin(1))$ y $q = (2, \sin(1))$(ver figura 3.8). Tenemos el siguiente continuo $X = T \cup D \cup S$.

Figura 3.8:



Entonces, $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \{\{p\},\{q\},\{p,q\}\} \cup \{\{k\},\{p,k\},\{q,k\},\{p,q,k\} : k \in L_1 \cup L_2\}$.

Sea $M \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $m \in M \subseteq X = S \cup D \cup T$. Si $m \in (S \cup T) - (J \cup I \cup \{p,q\})$, entonces $X - \{m\}$ no es conexo en X. Como $M \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $X - \{m\}$ es disconexo, $m \notin (S \cup T) - (J \cup I \cup \{p,q\})$. Así, $m \in D \cup \{p,q\}$. Por lo tanto, $M \subseteq D \cup \{p,q\}$. Probaremos que si $m \in D$, entonces $m \notin (J \cup I)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $m \in J$. Sea $z \in S - J$. Por la Proposición 2.7, $\mathcal{K}(z, M) \subseteq \mathcal{K}(z,\{m\})$. Pero $\mathcal{K}(z,\{m\}) \subseteq S - J$ y $S - J$ no es denso en X. Esto contradice el hecho de que $M \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. En consecuencia, $m \notin J$. Así, $m \in L_1 \cup L_2$. Si $M = \{m\} \subseteq \{p,q\}$, entonces $M = \{p\}$ ó $M = \{q\}$.

Supongamos que $|M| = 2$ y sea $m \in M \cap D$. Si existe $n \in M \cap D$ tal que $n \neq m$. Entonces $X - \{n,m\}$ no es conexo en X. Esto último contradice la Proposición 2.18. En consecuencia, $M \cap D = \{m\}$. Sea $r \in M$ tal que $r \neq m$. Por lo anterior, $r \notin D$. Es decir, $r \in \{p,q\}$. Esto implica que $M = \{p,m\}$ o $M = \{q,m\}$ donde $m \in L_1 \cup L_2$.

Supongamos que $2 < |M|$. Sean $g, m, r \in M$ distintos a pares. Observemos que $|M \cap D| = 1$ y si $g \notin D$, entonces $g \in \{p,q\}$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $r = p$ y $g = q$. Por lo tanto, $M = \{p,q,m\}$ y $M \in \{\{p\},\{q\},\{p,q\}\} \cup \{\{k\},\{p,k\},\{q,k\},\{p,q,k\} : k \in L_1 \cup L_2\}$.

Probemos la otra contención. Sea,

$$A \in \{\{p\},\{q\},\{p,q\}\} \cup \{\{k\},\{p,k\},\{q,k\},\{p,q,k\} : k \in L_1 \cup L_2\}.$$

Para cualquier $\alpha \in (1,2)$ hacemos,

$$G_\alpha = I \cup \{\left(x, \sin\left(\frac{-1}{1-x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (1,\alpha]\}$$

y si $\alpha \in (-2,-1)$ hacemos

$$H_\alpha = J \cup \{\left(x, \sin\left(\frac{-1}{1+x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha,-1)\}.$$

Supongamos que $A = \{p, q\}$. Sea $l \in X - A$. Afirmamos que $\mathcal{K}(l, A) = X - A$. Por la Observación 2.1, $\mathcal{K}(l, A) \subseteq X - A$. Sea $y \in X - A$. Existen números reales r, s tales que $-2 < r < 1$, $1 < s < 2$ y $l, y \in G_r \cup D \cup H_s$. El subcontinuo $Z = G_r \cup D \cup H_s$ de X cumple que $l, y \in Z \subseteq X - A$. Por lo tanto, $y \in \mathcal{K}(l, A)$ y $\mathcal{K}(l, A) = X - A$. Como $X - A$ es denso en X, $\mathcal{K}(l, A)$ también es denso.

Supongamos que $A = \{p, k\}$ con $k \in L_1 \cup L_2$. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que $k \in L_1$. Esto es $k = (u, 1)$ para algún $u \in (-1, 1)$. Probemos que $X - A$ es conexo por continuos. Sean $w, z \in X - A$ distintos. Si $w, z \in L_1$, entonces existen numeros reales $e, f \in (-1, 1)$ distintos tales que $e < u < f$ y los intervalos cerrados $L_w = [-1, e] \times \{1\}$ y $L_z = [f, 1] \times \{1\}$ contienen a los puntos w y z respectivamente. Observemos que $k \notin L_w$ y $k \notin L_z$. Como $w, z \in X - \{p\}$, existe un número real s tal que $1 < s < -2$ y el subcontinuo $Y = G_s \cup L_w \cup L_2 \cup T \cup L_z$ cumple $w, z \in Y \subseteq X - A$. Supongamos que $w \in L_1$ y $z \in S \cup (T - \{p\}) \cup L_2$. Existe un número real $e < u$ tal que intervalo cerrado $L_w = [-1, e] \times \{1\}$ contiene a w pero no a k. Como $z \neq p$, podemos encontrar un número real ε tal que $-2 < \varepsilon < 1$ y $z \in H_\varepsilon$. Consideramos el continuo $F = H_\varepsilon \cup L_w \cup L_2 \cup S$. Entonces $w, z \in F \subseteq X - A$. Por lo tanto, $X - A$ es conexo por continuos. Por la Proposición 2.24, $\mathcal{K}(l, A) = X - A$ para todo $l \in X - A$. Como $X - A$ es denso, $\mathcal{K}(l, A)$ también es denso en X. El caso $A = \{q, k\}$ es similar.

Supongamos que $A = \{p, q, k\}$ con $k \in L_1 \cup L_2$. Supongamos que $k \in L_1$. Sean $u, v \in X - A$. Si $u, v, k \in L_1$, entonces existen números reales ε y δ tales que los intervalos cerrados $L_u = [-1, \varepsilon] \times \{1\}$ y $L_v = [\delta, 1] \times \{1\}$ cumplen que $L_u \cap L_v = \emptyset$ y contienen a u y v respectivamente. Observemos que $k \notin L_u \cap L_v$. Podemos encontrar dos números reales β y λ distintos tales que $-2 < \beta < -1$, $1 < \lambda < 2$ y los puntos p, q no están contenidos en G_β y H_λ. Así que, el subcontinuo $Y = G_\beta \cup L_2 \cup L_u \cup L_v \cup H_\lambda$ es tal que $u, v \in Y \subseteq X - A$. En consecuencia, $\mathcal{K}(l, A) = X - A$ para todo $l \in X - A$. Como $X - A$ es denso, $\mathcal{K}(l, A)$ también lo es. Por lo tanto, $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Finalmente, si $A = \{k\}$ con $k \in L_1 \cup L_2$, entonces para cualquier $z \in X - A$ se tiene que $\mathcal{K}(z, A) = X - A$. De esta manera, $\mathcal{K}(z, A)$ es denso. Por lo tanto, $A \in NB(\mathcal{F}_1)$.

Capítulo 4

Caracterización de la curva cerrada simple

En este último capítulo se explorarán algunos resultados auxiliares para la demostración del Teorema Principal de este trabajo, el cuál establece que el único continuo X tal que el hiperespacio de no estorbadores de $\mathcal{F}_1(X)$ que coincide con $\mathcal{F}_1(X)$ es la curva cerrada simple. Con este objetivo, definamos el conjunto ${2_0}^X = \{B \in 2^X : Int_X(B) = \emptyset\}$.

Lema 4.1. *Sean X un continuo y $B \in 2^X$. Si $a, d \in X - B$, entonces $\mathcal{K}(a, B) \cap \mathcal{K}(d, B) = \emptyset$ ó $\mathcal{K}(a, B) = \mathcal{K}(d, B)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{K}(a, B) \cap \mathcal{K}(d, B) \neq \emptyset$. Probaremos que $\mathcal{K}(a, B) = \mathcal{K}(d, B)$. En efecto, sea $m \in \mathcal{K}(a, B)$. Entonces existe $S \in C(X)$ tal que $m, a \in S \subseteq X - B$. Por hipotésis $\mathcal{K}(a, B) \cap \mathcal{K}(d, B) \neq \emptyset$. Tomemos $r \in \mathcal{K}(a, B) \cap \mathcal{K}(d, B)$. Existen $Q \in C(X)$ y $R \in C(X)$ tales que $a, r \in Q \subseteq X - B$ y $r, d \in R \subseteq X - B$. El subcontinuo $S \cup Q \cup R$ de X cumple que $m, d \in S \cup Q \cup R \subseteq X - B$. De esta forma, $m \in \mathcal{K}(d, B)$ y $\mathcal{K}(a, B) \subseteq \mathcal{K}(d, B)$. Similarmente se prueba que $\mathcal{K}(a, B) \supseteq \mathcal{K}(d, B)$. Así que $\mathcal{K}(a, B) = \mathcal{K}(d, B)$. $\square$

Lema 4.2. *Sean X un continuo y $B \in {2_0}^X$. Si $B \in NB(\mathcal{F}_1(X)) - NWC(X)$, entonces existen $a, b \in X - B$ tales que $\mathcal{K}(a, B) \cap \mathcal{K}(b, B) = \emptyset$ y $Int_X \mathcal{K}(x, B) = \emptyset$ para cada $x \in X - B$.*

Demostración. Dado que $X - B$ no es conexo por continuos y por la Observación 2.1, existen $a, b \in X - B$ tales que $b \notin \mathcal{K}(a, B)$. Por el Lema 4.1, $\mathcal{K}(a, B) \cap \mathcal{K}(b, B) = \emptyset$.

Ahora, supongamos que $Int_X(\mathcal{K}(d, B)) \neq \emptyset$ para algún $d \in X - B$. Existen $\varepsilon > 0$ y $p \in Int_X \mathcal{K}(d, B)$ tal que $B_\varepsilon(p) \subseteq \mathcal{K}(d, B)$. Como $\mathcal{K}(a, B)$ es denso, $B_\varepsilon(p) \cap \mathcal{K}(a, B) \neq$

$\emptyset$. Esto último implica que $\mathcal{K}(a,B)\cap\mathcal{K}(d,B)\neq\emptyset$. Por el Lema 4.1, $\mathcal{K}(a,B)=\mathcal{K}(d,B)$. Del hecho que $\mathcal{K}(b,B)$ es denso en X, la intersección $\mathcal{K}(b,B)\cap B_\varepsilon(p)$ es no vacía y de aquí $\mathcal{K}(a,B)\cap\mathcal{K}(b,B)\neq\emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $Int_X\mathcal{K}(x,B)=\emptyset$ para cada $x\in X-B$. $\square$

Lema 4.3. *Sean X un continuo y $B\in {2_0}^X$. Si $B\in NB(\mathcal{F}_1(X))-NWC(X)$, entonces $\{\mathcal{K}(x,B):x\in X-B\}$ es una familia no numerable de subconjuntos densos de X.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, $\{\mathcal{K}(x,B):x\in X-B\}$ es una familia numerable de subconjuntos densos de X. Observemos que $X-B=\bigcup_{x\in X-B}\mathcal{K}(x,B)$. Como X es un espacio de Hausdorff y compacto, por Teorema 1.20, X es un espacio de Baire. Por Lema 1.21, $X-B$ es un espacio de Baire y en consecuencia un espacio de segunda categoría.

Sea $x\in X$. Por el Lema 2.5, existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $C(X)$ tal que $\mathcal{K}(x,B)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Int_X(A_n)\subseteq Int_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$ y por el Lema 4.2, $Int_X\mathcal{K}(x,B)=\emptyset$. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Int_X(A_n)=\emptyset$, de aquí que $Int_X(A_n)=\emptyset$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Esto implica que cada $\mathcal{K}(x,B)$ es la unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte. Luego, $X-B$ es unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte. Esto contradice que $X-B$ es de segunda categoría. Por tanto, $\{\mathcal{K}(x,B):x\in X-B\}$ es una familia no numerable de subconjuntos densos de X. $\square$

Lema 4.4. *Sean X un continuo, $B\in {2_0}^X$, $K\in C(X)$ es tal que $Int_X(K)\neq\emptyset$ y $D\in 2^X$ es un subconjunto de $X-K$ a lo más numerable. Si $B\in NB(\mathcal{F}_1(X))-NWC(X)$, entonces $\mathcal{K}(x,D)$ es denso en X para cada $x\in K$.*

Demostración. Sea $x\in K$. Por el Lema 4.3, $\{\mathcal{K}(l,B):l\in X-B\}$ es una familia no numerable. Por lo que existe $\alpha\in X-B$ tal que $\mathcal{K}(\alpha,B)\cap D=\emptyset$. Como $Int_X(K)\neq\emptyset$ y $\mathcal{K}(\alpha,B)$ es denso, se tiene que $\mathcal{K}(\alpha,B)\cap Int_X(K)\neq\emptyset$. Tomemos $y\in\mathcal{K}(\alpha,B)\cap Int_X(K)$. Existe un subcontinuo E de X tal que $\alpha,y\in E\subseteq X-B$. Por el Lema 2.5, existe una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\alpha\in C_n\subseteq X-B$ y $\mathcal{K}(\alpha,B)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$. Sea $A_n=K\cup C_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Del hecho,

$$X=Cl_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n\right)\subseteq Cl_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(K\cup C_n)\right)=Cl_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$$

se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en X. Por otra parte, $A_n \cap D = \emptyset$ pues $K \cap D = \emptyset$ y $\mathcal{K}(\alpha, B) \cap D = \emptyset$. De esta forma, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $x \in A_n \subseteq X - D$ y $Cl_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = X$. Por el Teorema 2.13, $D \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(x, D)$ es denso en X. $\square$

Teorema 4.5. *Sea X un continuo. Si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, entonces $X - K$ es conexo para todo subcontinuo K de X.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de X. Supongamos que existen abiertos ajenos no vacíos U y V de X tales que $X - K = U \cup V$. Sean $x \in U$ y $y \in V$. Afirmamos que el conjunto $X - \{x, y\}$ es conexo por continuos. Sean $r, s \in X - \{x, y\}$ distintos. Supongamos que $s \in V$. Como $\mathcal{K}(s, \{y\})$ es denso, $\mathcal{K}(s, \{y\}) \cap U \neq \emptyset$. Existe un subcontinuo S de X tal que $s \in S \subseteq X - \{y\}$ y $S \cap U \neq \emptyset$. Observemos que $S \cap V$ es un abierto en S tal que $s \in S \cap V$. Sea N la componente de $N \cap V$ tal que $s \in N$. Luego, $Cl_X(N)$ es un subcontinuo de X tal que $s \in Cl_X(N) \subseteq Cl_X(V)$. Por el Teorema 1.32, $Cl_X(N) \cap Bd_S(S \cap V) \neq \emptyset$. Por la Proposición 1.30, $Bd_S(S \cap V) \subseteq Bd_X(V) \subseteq K$. Por lo anterior, basta mostrar que existe un subcontinuo Q de X tal que $r \in Q \subseteq X - \{x, y\}$ y $Q \cap K \neq \emptyset$.

Si $r \in K$, entonces el subcontinuo K de X cumple con las propiedades anteriores. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r \in V$.

Como $\{y\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, $\mathcal{K}(r, \{y\})$ es denso y conexo. Esto implica que $U \cap \mathcal{K}(r, \{y\}) \neq \emptyset$. Por la Proposición 1.7, $\mathcal{K}(r, \{y\}) \nsubseteq X - K$. De aquí que $\mathcal{K}(r, \{y\}) \cap K \neq \emptyset$ y existe un subcontinuo D de X tal que $r \in D \subseteq X - \{y\}$ y $D \cap K \neq \emptyset$. Observemos que $V \cap D$ es un abierto en D tal que $r \in V \cap D$. Por las Proposiciones 1.30 y 1.33, $Bd_D(V \cap D) \subseteq Bd_X(V) \subseteq K$. Sea C la componente de $V \cap D$ tal que $r \in C$. Observemos que $Cl_X(C) \subseteq Cl_X(D) = D$ y $Cl_D(C) = Cl_X(C)$. Sea $Q = Cl_X(C)$. Luego, Q es un subcontinuo de X tal que $r \in Q \subseteq Cl_X(V)$ y por el Teorema 1.32 se tiene que $Q \cap Bd_D(V \cap D) \neq \emptyset$. Esto implica que $Q \cap K \neq \emptyset$. Puesto que $Cl_X(V) \cap U = \emptyset$, Q es un subcontinuo de X tal que $r \in Q \subseteq X - \{x, y\}$. Consideremos $H = Q \cup K \cup Cl_X(N)$. El subcontinuo H de X es tal que $r, s \in H \subseteq X - \{x, y\}$. Así $X - \{x, y\}$ es conexo por continuos y se tiene que $\mathcal{K}(r, \{x, y\}) = X - \{x, y\}$. Como $X - \{x, y\}$ es denso, $\mathcal{K}(r, \{x, y\})$ es denso en X. Luego, $\{x, y\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ lo que contradice la hipotésis de que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$. Por tanto, $X - K$ es conexo. $\square$

Teorema 4.6. *Sea X un continuo. Si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, entonces X no es irreducible.*

Demostración. Supongamos que X es irreducible entre p y q. Mostraremos que $\{p,q\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Sea $y \in X - \{p,q\}$. Consideremos los siguientes dos casos.

Caso 1. $y \notin \kappa_p$ ó $y \notin \kappa_q$

Supongamos que $y \notin \kappa_p$. Esto implica que para cualquier subcontinuo propio L de X tal que $y \in L$, se cumple que $p \notin L$. Como $\{q\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, se tiene que $\mathcal{K}(y,\{q\})$ es denso en X. Sea U un abierto no vacío en X. Por lo anterior, $\mathcal{K}(y,\{q\}) \cap U \neq \emptyset$. Existen $z \in \mathcal{K}(y,\{q\}) \cap U$ y un subcontinuo N de X tal que $z, y \in N \subseteq X - \{q\}$. Entonces $p \notin N$, es decir, $N \subseteq X - \{p,q\}$. Por lo tanto, $z \in U \cap \mathcal{K}(y,\{p,q\})$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(y,\{p,q\})$ es denso en X.

Caso 2. $y \in \kappa_p \cap \kappa_q$

Existen subcontinuos propios A y B tales que $p, y \in A$, $q, y \in B$ de donde $A \cup B$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y q. Por ser X irreducible entre p y q, $X = A \cup B$. Por la Proposición 1.28, existen subcontinuos C y D de A y B respectivamente tales que $C = irr(y,p)$ y $D = irr(y,q)$. Observemos que C y D son subcontinuos propios de X. Tenemos que $X = C \cup D$ pues $C \cup D$ es un subcontinuo de X que contiene a p y q.

Sea U un abierto propio no vacío en X. Se cumple que $U \cap C \neq \emptyset$ ó $U \cap D \neq \emptyset$. Supongamos que $U \cap D \neq \emptyset$. Esto implica que $U \cap D$ es un abierto no vacío de D. Como U es un abierto en X tal que $U \neq \emptyset$ y $U \subsetneq X$, se tiene $U - \{y\} \neq \{y\}$. Luego, $(U \cap D) - \{y\}$ es un abierto no vacío en D. Puesto que D es un subespacio regular, existe abierto V no vacío en D tal que $V \subseteq Cl_D(V) \subseteq (U \cap D) - \{y\}$. Esto implica que V es un subconjunto abierto no vacío de D tal que $V \subseteq Cl_D(V) \subseteq U \cap D$ y $y \notin Cl_D(V)$. En consecuencia, $D - V$ es un cerrado en D que contiene a y. Sea F la componente de $D - V$ tal que $y \in F$. Por el Teorema 1.32, se tiene que $Cl_D(F) \cap Bd_D(V) \neq \emptyset$. Observemos que $Cl_D(F) = F$ pues F es cerrado en D. Como $Bd_D(V) \subseteq Cl_D(V) \subseteq U \cap D$, obtenemos que $F \cap U \neq \emptyset$. Puesto que D es un subcontinuo propio de X tal que $q \in D$, se tiene que $D \subseteq X - \{p\}$. De aquí que, $F \subseteq D \subseteq X - \{p\}$. Como $D = irr(y,q)$ y F es un subcontinuo propio de D tal que $y \in F$, $q \notin F$. Luego, F es un subcontinuo de X tal que $y \in F \subseteq X - \{p,q\}$ y $F \cap U \neq \emptyset$. Se tiene que $\mathcal{K}(y,\{p,q\})$ es denso en X.

En conclusión $\{p,q\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, esto es una contradicción. Por tanto, X no es irreducible.

$\square$

Teorema 4.7. *Sea X un continuo. Si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, entonces X es des-*

componible.

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que X es indescomponible. Sean $p, q \in X$ tales que $\kappa_p \neq \kappa_q$. Demostraremos que $\{p, q\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Sea $x \in X - \{p, q\}$. Supongamos que $x \notin \kappa_p \cup \kappa_q$. Sea $y \in \mathcal{K}(x, \{p\})$, entonces existe un subcontinuo Q de X tal que $x, y \in Q \subseteq X - \{p\}$. Luego, $q \notin Q$ pues de lo contrario $x \in \kappa_q$. Así que $x, y \in Q \subseteq X - \{p, q\}$ y $y \in \mathcal{K}(x, \{p, q\})$. De donde $\mathcal{K}(x, \{p\}) \subseteq \mathcal{K}(x, \{p, q\})$. Como $\{p\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, $X = Cl_X(\mathcal{K}(x, \{p\}) \subseteq Cl_X\mathcal{K}(x, \{p, q\})$. Por lo que $\mathcal{K}(x, \{p, q\})$ es denso en X. Así, $\{p, q\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ lo cual es una contradicción.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in \kappa_p$. Probemos que $\mathcal{K}(x, \{p\}) \subseteq \kappa_p$. Sea $r \in \mathcal{K}(x, \{p\})$. Existe un subcontinuo C_1 de X tal que $r, x \in C_1 \subseteq X - \{p\}$. Ademas, puesto que $x \in \kappa_p$ existe un subcontinuo propio C_2 de X tal que $x, p \in C_2$. Tenemos que $C_1 \cup C_2$ es un subcontinuo de X. Del hecho X es indescomponible se tiene que $X \neq C_1 \cup C_2$ y así $C_1 \cup C_2$ es un subcontinuo propio de X tal que $r, p \in C_1 \cup C_2$. De aquí que $r \in \kappa_p$. Entonces $\mathcal{K}(x, \{p\}) \cap \kappa_q = \emptyset$. Bajo estas condiciones se probará que $\mathcal{K}(x, \{p\}) \subseteq \mathcal{K}(x, \{p, q\})$. En efecto, sea $b \in \mathcal{K}(x, \{p\})$. Existe $A \in C(X)$ tal que $x, b \in A \subseteq X - \{p\}$. Afirmamos que $A \subseteq X - \{p, q\} = \emptyset$. Si $A \cap \{p, q\} \neq \emptyset$, existe $a \in \{p, q\}$ y $a \in A$. Si $a = p$, entonces $A \cap \{p\} \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Si $a = q$, entonces $b \in \kappa_q$. Así, $\kappa_q \cap \kappa_p \neq \emptyset$. Pero por el Teorema 1.27, $\kappa_p \cap \kappa_q = \emptyset$. En ambos casos se tiene una contradicción. De esta forma $A \cap \{p, q\} = \emptyset$. En consecuencia $x, b \in A \subseteq X - \{p, q\}$). Así, $\mathcal{K}(x, \{p, q\})$ es denso en X y se concluye que $\{p, q\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Esto es una contradicción. Por tanto, X es descomponible. □

Teorema 4.8. *Sea X un continuo. Si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, entonces X no es unicoherente.*

Demostración. Por el Teorema 4.7, existen subcontinuos propios K y L tales que $X = K \cup L$. Probaremos que $K \cap L$ no es conexo. Como

$$X - (K \cap L) = (X - K) \cup (X - L)$$

y $X - K$, $X - L$ son abiertos no vacíos ajenos en X se sigue del Teorema 4.5 que $K \cap L$ no puede ser un subcontinuo de X. Por lo tanto, $K \cap L$ no es conexo. □

Teorema 4.9. *Sea X un continuo. Si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, entonces $Bd(K)$ no es conexa para todo subcontinuo K de X tal que $Int_X(K) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea K un subcontinuo propio de X tal que $Int_X(K) \neq \emptyset$. Observemos que $Bd_X(K) = K \cap (Cl_X(X - K))$. Así, $X - Bd_X(K) = (X - K) \cup (X - Cl_X(X - K))$ donde $X - K$ y $X - (Cl_X(X - K))$ son abiertos no vacíos. Como $X - K \subseteq Cl_X(X - K)$,

$(X - K) \cap (X - Cl_X(X - K)) = \emptyset$. De esta forma, $X - Bd_X(K)$ es disconexo. Por el Teorema 4.5, $Bd_X(K)$ no puede ser un subcontinuo de X. Por lo tanto, $Bd_X(K)$ no es conexo. □

Teorema 4.10. *Sea X un continuo. Si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, K es un subcontinuo propio de X y $a, z \in K$ tales que $a \neq z$, entonces existe un subcontinuo L de X tal que $z \in L \subseteq K - \{a\}$ y $L \cap Bd_X(K) \neq \emptyset$.*

Demostración. Del hecho que $\mathcal{K}(z, \{a\})$ es denso en X y $X - K$ es abierto no vacío, tenemos $\mathcal{K}(z, \{a\}) \cap (X - K) \neq \emptyset$. Entonces existe un subcontinuo R de X tal que $z \in R \subseteq X - \{a\}$ y $R \cap (X - K) \neq \emptyset$. Sea L la componente de $K \cap R$ tal que $z \in L$. Entonces L es un subcontinuo de X que cumple $z \in L \subseteq K - \{a\}$. Por el Teorema 1.29, $L \cap Bd_K(K \cap R) \neq \emptyset$. Por la Proposición 1.31, $Bd_K(K \cap R) \subseteq Bd_X(K)$. Por tanto, $L \cap Bd_X(K) \neq \emptyset$. □

Teorema 4.11. *Sea X un continuo. Si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, entonces $Int_X(K) = \emptyset$ para todo subcontinuo indescomponible K de X.*

Demostración. Sea K un subcontinuo indescomponible de X. Por el Teorema 1.26, para cada $z \in K$ podemos considerar κ_z, la composante de z en K. Supongamos que $Int_X(K) \neq \emptyset$. Sea $W = Cl_X(X - K)$. Por el Teorema 4.5, $X - K$ es conexo y en consecuencia W es conexo, compacto y métrico. Así, W es un subcontinuo de X. Sean $x, y \in Int_X(K)$ distintos tales que $x \notin \kappa_y$. Por el Teorema 1.27, se tiene que $\kappa_x \cap \kappa_y = \emptyset$. Sea $w \in X - \{x, y\}$. Afirmamos que existe un subcontinuo Q de X tal que $w \in Q \subseteq X - \{x, y\}$ y $Q \cap W \neq \emptyset$. Supongamos que $w \in X - K$. En este caso, el subcontinuo W de X cumple que $w \in W \subseteq X - \{x, y\}$ y $W \cap W \neq \emptyset$. Ahora bien, supongamos que $w \in K$. Distingamos dos casos:

Caso 1. $w \notin \kappa_x \cup \kappa_y$.
Sea $\gamma \in K$ tal que $\gamma \neq w$ y $\gamma \in \kappa_w$. Por el Teorema 4.10, existe un subcontinuo L de X tal que $w \in L \subseteq K - \{\gamma\}$ y $L \cap Bd_X(K) \neq \emptyset$. Como $w \notin \kappa_x \cup \kappa_y$, se sigue que $x, y \notin L$. Por tanto, el subcontinuo L de X satisface que $w \in L \subseteq X - \{x, y\}$ y $L \cap Bd_X(K) \neq \emptyset$. Dado que $Bd_X(K) \subseteq W$, se concluye que $L \cap W \neq \emptyset$.

Caso 2. $w \in \kappa_x \cup \kappa_y$.
Asumamos que $w \in \kappa_x$. Por el Teorema 4.10, existe un subcontinuo Q de X tal que $w \in Q \subseteq X - \{x\}$ y $Q \cap Bd_X(K) \neq \emptyset$. De la definición de composante, existe un subcontinuo propio S de K tal que $w, x \in S$. Veamos que $y \notin Q$. Supongamos que $y \in Q$. Puesto que $w \in Q \cap S$, se tiene que $Q \cup S$ es un subcontinuo de X tal que $x, y \in Q \cup S \subseteq K$. Recordemos que K es indescomponible. De aquí que, $Q \cup S$ es un subcontinuo propio de K tal que

$x, y \in Q \cup S$. Esto contradice el hecho de que $\kappa_x \cap \kappa_y = \emptyset$. En consecuencia, $y \notin Q$. Luego, Q es un subcontinuo de X tal que $w \in Q \subseteq X - \{x, y\}$ y $Q \cap Bd_X(K) \neq \emptyset$. De esto último y del hecho que $Bd_X(K) \subseteq W$, se tiene que $Q \cap W \neq \emptyset$. El caso $w \in \kappa_y$ es similar.

Aplicando un argumento como el anterior, para cualquier $r \in X - \{x, y, w\}$ existe un subcontinuo R de X tal que $r \in R \subseteq X - \{x, y\}$ y $R \cap W \neq \emptyset$. El subcontinuo $Z = Q \cup W \cup R$ de X es tal que $r, w \in Z \subseteq X - \{x, y\}$. De esta forma, $\mathcal{K}(w, \{x, y\}) = X - \{x, y\}$. Así, $\mathcal{K}(w, \{x, y\})$ es denso en X. Por lo tanto, $\{x, y\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. $\square$

Lema 4.12. *Sea X un continuo tal que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$. Entonces existen subcontinuos propios A y B de X tales que*
(4.12.1) $A = Cl_X(Int_X(A))$ *y* $B = Cl_X(Int_X(B))$,
(4.12.2) $Int_X(A) \neq \emptyset$, $Int_X(B) \neq \emptyset$
(4.12.3) $A \cap Int_X(B) = \emptyset$ *y* $Int_X(A) \cap B = \emptyset$.
(4.12.4) $X = A \cup B$.

Demostración. Por Teoremas 4.7 y 4.11, existe un subcontinuo propio L de X tal que $Int_X(L) \neq \emptyset$. Del Teorema 4.5 se infiere que $X - L$ es conexo. Más aún, $Cl_X(X - L)$ es un subcontinuo de X. De aquí que, $X - (Cl_X(X - L)) = Int_X(L)$ es conexo. Sea $A = Cl_X(Int_X(L))$. Se tiene que $A \subseteq L$ y $Int_X(L) \subseteq A$. Luego, $Int_X(A) \subseteq Int_X(L)$. Por lo tanto, $Int_X(A) = Int_X(L)$ y $A = Cl_X(Int_X(A))$. Sea $B = Cl_X(X - A)$. Del Teorema 4.5, $X - A$ es conexo y con esto B es un subcontinuo de X tal que $X = A \cup B$ y $Int_X(B) = X - A$. Observemos que $Int_X(B) \neq \emptyset$ pues A es un subcontinuo propio de X. Se tiene que $A \cap Int_X(B) = \emptyset$ y $Int_X(A) \cap B = \emptyset$. $\square$

Lema 4.13. *Sea X un continuo tal que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$. Si $p \in X$ es tal que existe un subcontinuo propio F de X tal que $Int_X(F) \neq \emptyset$ y $p \notin F$, entonces $\{p\} \in NWC(X)$.*

Demostración. Sean $x, y \in X - \{p\}$. Como $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, los subconjuntos $\mathcal{K}(x, \{p\})$ y $\mathcal{K}(y, \{p\})$ son densos en X. Entonces existen subcontinuos S y Q de X tales que $x \in S \subseteq X - \{p\}$, $y \in Q \subseteq X - \{p\}$, $S \cap Int_X(F) \neq \emptyset$ y $Q \cap Int_X(F) \neq \emptyset$. Luego, $G = S \cup F \cup Q$ es un subcontinuo de X tal que $x, y \in G \subseteq X - \{p\}$. En consecuencia, $X - \{p\}$ es conexo por continuos. Por lo tanto, $\{p\} \in NWC(X)$. $\square$

Un continuo X es ***3-descomponible*** si existen subcontinuos propios A, B, C de X tales que $X = A \cup B \cup C$, $Int_X A = X - (B \cup C) \neq \emptyset$, $Int_X B = X - (A \cup C) \neq \emptyset$ y $Int_X C = X - (A \cup B) \neq \emptyset$. En este caso, diremos que la terna (A, B, C) es una ***3-descomposición*** de X.

Lema 4.14. *Sea X un continuo. Si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$ y $\{p\} \notin NWC(X)$, entonces existe una 3-descomposición de X.*

Demostración. Por el Teorema 4.12, existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $A = Cl_X(Int_X(A))$, $B = Cl_X(Int_X(B))$, $Int_X(A) \neq \emptyset$, $Int_X(B) \neq \emptyset$, $Int_X(A) \cap Int_X(B) = \emptyset$, $Int_X(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap Int_X(B) = \emptyset$. De acuerdo al Teorema 4.11, A es descomponible. Esto implica que existe un subcontinuo propio M de A tal que $Int_A(M) \neq \emptyset$. Probaremos que, $Int_X(M) \neq \emptyset$. En efecto, existe un abierto U en X tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A \subseteq M$. Del hecho $A = Cl_X(Int_X(A))$ tenemos que $U \cap Int_X(A) \neq \emptyset$. De aqui que, $U \cap Int_X(A) \subseteq U \cap A \subseteq M$ y $U \cap Int_X(A)$ es un abierto no vacío en X. Luego, $Int_X(M) \neq \emptyset$. Se tiene que $X - M$ es conexo por el Teorema 4.5. Más aún, $Cl_X(X - M)$ es un subcontinuo de X. Por lo tanto, $X - (Cl_X(X - M)) = Int_X(M)$ es conexo. Sea $L = Cl_X(Int_X(M))$. Observemos que L es un subcontinuo de X. Como $Int_X(M) \subseteq L \subseteq M$, $Int_X(L) = Int_X(M)$. De aquí que $Int_X(L) \neq \emptyset$. Por el Lema 4.13, $p \in L \cap B$. Sea $V = X - (B \cup L)$. Por el Teorema 4.5, V es un abierto conexo en X. Como M es un subcontinuo propio de A, $A - M$ es un abierto no vacío de A. Así, existe un abierto W en X no vacío tal que $A \cap W = A - M$. Como $Cl_X(Int_X(A)) = A$ y $A \cap W \neq \emptyset$, $Int_X(A) \cap W \neq \emptyset$. Sea $z \in W \cap Int_X(A)$. Por lo que $z \notin B$. Observemos que $W \cap Int_X(A) \subseteq A \cap W = A - M$. De aquí que, $z \notin M$. Como $L \subseteq M$, se tiene que $z \notin L$. En consecuencia, $z \in X - (L \cup B) = V$. Sea $x \in V$. Esto implica que $x \in X = A \cup B$. Si $x \in B$, entonces $x \notin V$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $x \in A$ y $V \subseteq A$. Hacemos $N = Cl_X(V)$. Observemos que N es un subcontinuo de X tal que $N \subseteq A$. Afirmamos que (L, N, B) es una 3-descomposición de X. En primer lugar, $L \cup B \cup N = (L \cup B) \cup Cl_X(X - (L \cup B)) = X$.

Probemos que $X - (L \cup B) = Int_X(N)$. Observemos que $X - (L \cup B) \subseteq N$ y $X - (L \cup B)$ es un abierto no vacío en X. De aquí que $X - (L \cup B) \subseteq Int_X(N)$. Sea $q \in Int_X(N)$. Como $N \subseteq A$, $q \in Int_X(A)$. En consecuencia, $q \notin B$. Si $q \in L$, entonces $Int_X(N) \cap Int_X(L) \neq \emptyset$ y $Int_X(N) \cap Int_X(L) \subseteq N = Cl_X(V)$. De aquí que,

$$\begin{aligned} Int_X(N) \cap [Int_X(L) \cap V] &= Int_X(N) \cap [Int_X(L) \cap (X - (L \cup B))] \\ &= Int_X(N) \cap [Int_X(L) \cap (X - L)] \cap (X - B). \end{aligned}$$

Dado que $Int_X(L) \cap (X - L) = \emptyset$, $Int_X(N) \cap [Int_X(L) \cap V] = \emptyset$. Esto es una contradicción. Luego, $q \notin L$. Por lo tanto, $q \in X - (L \cup B)$ y $X - (L \cup B) = Int_X(N)$.

Se tiene que lo siguiente $N \cup L = A$. Esto implica que $Int_X(B) = X - A = X - (N \cup L)$.

Falta ver que $Int_X(L) = X-(B\cup N)$. Puesto que $X-(B\cup N) \subseteq L$ y $X-(B\cup N)$ es un abierto no vacío de X se tiene que $X-(B\cup N) \subseteq Int_X(L)$. Ahora, sea $w \in Int_X(L)$. Dado que $L \subseteq A$, $w \in Int_X(A)$. Por lo tanto, $w \notin B$. Supongamos que $w \in N$. De aquí que, $Int_X(L) \cap V \neq \emptyset$. Pero

$$\begin{aligned} Int_X(L) \cap (X-(B\cup L)) &= (Int_X(L)) \cap (X-L) \cap (X-B) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

En consecuencia, $w \notin N$. De aquí que, $w \in X-(B\cup N)$. Por lo tanto, (L, N, B) es una 3-descomposición de X. $\square$

Lema 4.15. *Sea X un continuo tal que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$ y $p \in X$. Si (A_1, A_2, A_3) es una 3-descomposición de X, $\{p\} \notin NWC(X)$, $\{k, m, n\} = \{1, 2, 3\}$, $x \in Int_X(A_k)$ y $y \in Int_X(A_m) - \mathcal{K}(x, \{p\})$, entonces existe $q \in ((\mathcal{K}(x, \{p\}) \cup \mathcal{K}(y, \{p\})) \cap (X - A_n)$ tal que*

1. *$\mathcal{K}(q, \{x, y, p\}) \cap A_n = \emptyset$,*
2. *$\mathcal{K}(q, \{x, y, p\}) \cap Int_X A_k \neq \emptyset$ y*
3. *$\mathcal{K}(q, \{x, y, p\}) \cap Int_X A_m \neq \emptyset$.*

Demostración. Puesto que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$, existe $q \in X - \{x, y\}$ tal que $\mathcal{K}(q, \{x, y\})$ no es denso en X. Supongamos que $q \in A_n \cup [X - (\mathcal{K}(x, \{p\}) \cup \mathcal{K}(y, \{p\}))]$. Observemos que A_n es un subcontinuo de X tal que $p \in A_n \subseteq X - \{x, y\}$ y $\mathrm{Int}_X(A_n) \neq \emptyset$. Por el Lema 4.4, $\mathcal{K}(q, \{x, y\})$ es denso en X. Esto implica que $\{x, y\}$ no estorba a $\{q\}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $q \in ((\mathcal{K}(x, \{p\}) \cup \mathcal{K}(y, \{p\})) \cap (X - A_n)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $q \in \mathcal{K}(x, \{p\}) \cap (X - A_n)$.

Mostremos que $\mathcal{K}(q, \{x, y, p\}) \cap A_n = \emptyset$. Si $\mathcal{K}(q, \{x, y, p\}) \cap A_n \neq \emptyset$, entonces existe un subcontinuo K de X tal que $q \in K \subseteq X - \{x, y, p\}$ y $K \cap A_n \neq \emptyset$. El subcontinuo $K \cup A_n$ de X cumple que $\{x, y\} \cap (K \cup A_n) = \emptyset$ y $Int_X(K \cup A_n) \neq \emptyset$. Por el Lema 4.4, $\{x, y\}$ no estorba a $\{q\}$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(q, \{x, y, p\}) \cap A_n = \emptyset$.

Observemos que existen abiertos no vacíos U y V en X tales que $y \in U \subseteq Cl_X(U) \subseteq Int_X(A_m)$, $x \in V \subseteq Cl_X(V) \subseteq Int_X(A_k)$ y $Cl_X(U) \cap Cl_X(V) = \emptyset$. El subconjunto $W = U \cup V$ es un abierto no vacío de X. Por el Teorema 4.5, $X - W$ es un subconjunto cerrado y no conexo de X. Sea Q la componente conexa de $X - W$ tal que $q \in Q$. Del hecho que Q es un subconjunto propio de $X - W$, se deduce $x, y \notin Q$. Si $Q \cap A_n \neq \emptyset$, entonces el subcontinuo $Q \cup A_n$ de X cumple que $\mathrm{Int}_X(Q \cup A_n) \neq \emptyset$ y $(Q \cup A_n) \cap \{x, y\} = \emptyset$. Por el Lema 4.4, $\mathcal{K}(\alpha, \{x, y\})$ es denso en X para cualquier

$\alpha \in Q \cup A_n$. En particular, para cualquier $\alpha \in Q$. Es decir, $\{x, y\}$ no le estorba a $\{q\}$. Esto último es una contradicción. En consecuencia, $Q \cap A_n = \emptyset$.

Con lo hecho hasta el momento se tiene que el subcontinuo Q de X es tal que $q \in Q \subseteq X - \{x, y, p\}$. Por el Teorema 1.29, $Q \cap Cl_X(W) \neq \emptyset$. De aquí que, $Q \cap Cl_X(U) \neq \emptyset$ o $Q \cap Cl_X(V) \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Q \cap Cl_X(U) \neq \emptyset$. Como $\{y\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$, $\mathcal{K}(q, \{y\})$ es denso en X. Existe un subcontinuo N de X tal que $q \in N \subseteq X - \{y\}$ y $N \cap V \neq \emptyset$. Sea M la componente de $N - V$ tal que $q \in M$. Si $M \cap A_n \neq \emptyset$, entonces $\{x, y\}$ no le estorba a q. Luego, $p \notin M$. Por el Teorema 1.32, $M \cap Cl_X(V) \neq \emptyset$. Observemos que el subcontinuo $S = M \cup Q$ de X cumple que $q \in S \subseteq X - \{x, y, p\}$, $S \cap Cl_X(V) \neq \emptyset$ y $S \cap Cl_X(U) \neq \emptyset$. Esto significa que $S \cap Int_X(A_k) \neq \emptyset$ y $S \cap Int_X(A_m) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(q, \{x, y, p\}) \cap Int_X(A_m) \neq \emptyset$ y $\mathcal{K}(q, \{x, y, p\}) \cap Int_X(A_k) \neq \emptyset$. □

Lema 4.16. *Sea X es un continuo tal que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$ y sean $w, z \in X$ tales que $w \neq z$. Si E, G son subcontinuos propios de X tal que $w \in E$ y $X - E \subseteq G$, entonces existe un subcontinuo F de X tal que $w \in F \subseteq \mathcal{K}(w, \{z\}) \cap E$ y $F \cap G \neq \emptyset$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{K}(w, \{z\})$ es denso en X, existe un subcontinuo L de X tal que $w \in L \subseteq X - \{z\}$ y $L \cap (X - E) \neq \emptyset$. Sea F la componente de $L - (L \cap (X - E))$ tal que $w \in F$. Entonces $F \subseteq \mathcal{K}(w, \{z\}) \cap E$. Por el Teorema 1.32, se tiene que $F \cap Bd_X(E) \neq \emptyset$. Como $Bd_X(E) \subseteq G$, se sigue que $F \cap G \neq \emptyset$. □

Lema 4.17. *Sea X es un continuo tal que $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$ y $p \in X$. Si (A_1, A_2, A_3) es una 3-descomposición de X, $\{p\} \notin NWC(X)$, $\{k, m, n\} = \{1, 2, 3\}$, $a \in Int_X(A_n)$ y $b \in Int_X(A_m) - \mathcal{K}(a, \{p\})$, entonces $A_k \cup [X - (\mathcal{K}(a, \{p\}) \cup \mathcal{K}(b, \{p\}))] \subseteq \mathcal{K}(p, \{a, b\})$.*

Demostración. Sea $t \in A_k \cup [X - (\mathcal{K}(a, \{p\}) \cup \mathcal{K}(b, \{p\}))]$. Dado que $A_k \cap Int_X(A_m) = \emptyset$ y $A_k \cap Int_X(A_n) = \emptyset$ se tiene que $A_k \subseteq X - \{a, b\}$. Por el Teorema 4.13, $p \in A_k$. Esto implica que $A_k \subseteq \mathcal{K}(p, \{a, b\})$. De esta forma, si $t \in A_k$, entonces $t \in \mathcal{K}(p, \{a, b\})$. Supongamos que $t \in X - (\mathcal{K}(a, \{p\}) \cup \mathcal{K}(b, \{p\}) \cup A_k)$. Esto implica que $\mathcal{K}(t, \{p\}) \cap \mathcal{K}(a, \{p\}) = \emptyset$ y $\mathcal{K}(t, \{p\}) \cap \mathcal{K}(b, \{p\}) = \emptyset$. De aquí que, $\mathcal{K}(t, \{p\}) \subseteq X - \{a, b\}$. Al ser $\mathcal{K}(t, \{p\})$ denso en X, se tiene que $\mathcal{K}(t, \{p\}) \cap Int_X(A_k) \neq \emptyset$. Existe un subcontinuo S de X tal que $t \in S \subseteq \mathcal{K}(t, \{p\}) \subseteq X - \{a, b\}$ y $S \cap A_k \neq \emptyset$. El subcontinuo $S \cup A_k$ de X es tal que $t, p \in S \cup A_k \subseteq X - \{a, b\}$. Por lo tanto, $t \in \mathcal{K}(p, \{a, b\})$. □

4.1. Teorema Principal

Teorema 4.18. *Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$.*

Demostración. Sea X es una curva cerrada simple y $\{c\} \in \mathcal{F}_1(X)$. Para cualquier $u \in X - \{c\}$, $\mathcal{K}(u, \{c\}) = X - \{c\}$. Entonces, $\mathcal{K}(u, \{c\})$ es denso en X. Por lo tanto, $\{c\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ y $\mathcal{F}_1(X) \subseteq NB(\mathcal{F}_1(X))$. Para la otra contención, supongamos que existe $A \in NB(\mathcal{F}_1(X))$ tal que $A \notin \mathcal{F}_1(X)$. Sean $a, b \in A$ tales que $a \neq b$. Luego, $M = \{a, b\} \subseteq A$. Observemos que $X - M$ no es conexo. Esto contradice la Proposición 2.18. Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}_1(X)$ y $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$.

Para la prueba de la otra implicación, por el Teorema 2.27 solo basta probar $NWC(X) = \mathcal{F}_1(X)$. Por la Proposición 2.26, se tiene que $NWC(X) \subseteq NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$. Hace falta ver que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq NWC(X)$. Supongamos que existe $p \in X$ tal que $\{p\} \notin NWC(X)$. Por el Teorema 4.14, existe una 3-descomposición (A_1, A_2, A_3) del continuo X. Existen $\lambda_1, \lambda_2 \in X - \{p\}$ distintos tales que $\mathcal{K}(\lambda_1, \{p\}) \cap \mathcal{K}(\lambda_2, \{p\}) = \emptyset$. Denotemos $K_1 = \mathcal{K}(\lambda_1, \{p\})$ y $K_2 = \mathcal{K}(\lambda_2, \{p\})$. Puesto que K_1 y K_2 son densos en X, tenemos que $K_1 \cap Int_X(A_1) \neq \emptyset$ y $K_2 \cap Int_X(A_2) \neq \emptyset$. Por Lema 4.13, $p \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Sean $x_0 \in K_1 \cap Int_X(A_1)$, $y_0 \in K_2 \cap Int_X(A_2)$ y $y_1 \in K_2 \cap Int_X(A_3)$. Por el Lema 4.1, $\mathcal{K}(x_0, \{p\}) = K_1$ y $\mathcal{K}(y_0, \{p\}) = \mathcal{K}(y_1, \{p\}) = K_2$. Por el Lema 4.15, existen $w \in (\mathcal{K}(x_0, \{p\}) \cup \mathcal{K}(y_0, \{p\})) \cap (X - A_3)$ y $z \in (\mathcal{K}(x_0, \{p\}) \cup \mathcal{K}(y_1, \{p\})) \cap (X - A_2)$ tales que

(η.1) $\mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\}) \cap Int_X(A_1) \neq \emptyset$,
(η.2) $\mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\}) \cap Int_X(A_2) \neq \emptyset$,
(η.3) $\mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\}) \cap A_3 = \emptyset$,
(η.4) $\mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \cap Int_X(A_1) \neq \emptyset$,
(η.5) $\mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \cap Int_X(A_3) \neq \emptyset$,
(η.6) $\mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \cap A_2 = \emptyset$.

Supongamos que $w \in \mathcal{K}(x_0, \{p\}) \cap Int_X(A_1)$ y $z \in \mathcal{K}(y_1, \{p\}) \cap Int_X(A_1)$. Por el Lema 4.1,

(β.1) $\mathcal{K}(w, \{p\}) = K_1$,
(β.2) $\mathcal{K}(z, \{p\}) = K_2$,
(β.3) $\mathcal{K}(w, \{p\}) \cap \mathcal{K}(z, \{p\}) = \emptyset$.

Como $\{p\} \subseteq \{x_0, y_0, p\}$, $\{p\} \subseteq \{x_0, y_1, p\}$ y por la Proposición 2.7 se tiene que $\mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\}) \subseteq \mathcal{K}(w, \{p\})$ y $\mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \subseteq \mathcal{K}(z, \{p\})$.

Sean $a \in \mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\}) \cap Int_X(A_2)$ y $b \in \mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \cap Int_X(A_3)$.

Vamos a probar que $\mathcal{K}(p, \{a, b\}) = X - \{a, b\}$. Sea $t \in X - \{a, b\}$. Por el Lema 4.17, $A_1 \cup [X - (\mathcal{K}(a, \{p\}) \cup \mathcal{K}(b, \{p\}))] \subseteq \mathcal{K}(p, \{a, b\})$. Si $t \in A_1 \cup [X - (\mathcal{K}(a, \{p\}) \cup \mathcal{K}(b, \{p\}))]$, entonces $t \in \mathcal{K}(p, \{a, b\})$. Supongamos ahora que $t \in (X - A_1) \cap (\mathcal{K}(x_0, \{p\}) \cup \mathcal{K}(y_0, \{p\}))$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $t \in A_2$. Aplicando el Lema 4.16, existe un subcontinuo P de X tal que $t \in P \subseteq \mathcal{K}(t, \{a\}) \cap A_2$ y $P \cap (A_1 \cup A_3) \neq \emptyset$. De esta forma, $P \subseteq X - \{a, b\}$. Si $P \cap A_1 \neq \emptyset$, entonces el subcontinuo $P \cup A_1$ de X es tal que $p, t \in P \cup A_1 \subseteq X - \{a, b\}$. Así que, $t \in \mathcal{K}(p, \{a, b\})$.

Si $P \cap A_1 = \emptyset$, entonces $P \cap A_3 \neq \emptyset$. Sea $q \in P \cap A_3$.

Si $q \in X - (K_1 \cup K_2)$. Tenemos que $\mathcal{K}(q, \{p\}) \cap \mathcal{K}(x_0, \{p\}) = \emptyset$ y $\mathcal{K}(q, \{p\}) \cap \mathcal{K}(y_0, \{p\}) = \emptyset$. De aquí que, $\mathcal{K}(q, \{p\}) \subseteq X - \{a, b\}$. Como $\mathcal{K}(q, \{p\})$ es denso en X, $\mathcal{K}(q, \{p\}) \cap Int_X(A_1) \neq \emptyset$. Existe un subcontinuo S de X tal que $q \in S \subseteq \mathcal{K}(q, \{p\}) \subseteq X - \{a, b\}$ y $S \cap A_1 \neq \emptyset$. El subcontinuo $P \cup S \cup A_1$ de X es tal que $p, t \in P \cup S \cup A_1 \subseteq X - \{a, b\}$. Esto implica que $t \in \mathcal{K}(p, \{a, b\})$.

Supongamos ahora que $q \in K_1 \cup K_2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $q \in K_1$. Aplicando el Lema 4.16, existe un subcontinuo M de X tal que $q \in M \subseteq \mathcal{K}(q, \{p\}) \cap A_3$ y $M \cap (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$. Observemos que $M \subseteq X - \{x_0, p\}$. Puesto que $\mathcal{K}(q, \{p\}) = \mathcal{K}(x_0, \{p\})$ y $\mathcal{K}(y_1, \{p\}) \cap \mathcal{K}(x_0, \{p\}) = \emptyset$, se cumple que $M \subseteq X - \mathcal{K}(y_1, \{p\}) \subseteq X - \{y_1\}$. Es decir, $M \subseteq X - \{p, x_0, y_1\}$. Sabemos que $\mathcal{K}(q, \{p\}) = \mathcal{K}(w, \{p\})$. Así, $M \subseteq \mathcal{K}(w, \{p\})$. Por otra parte, de la Proposición 2.7 se tiene que $\mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \subseteq \mathcal{K}(z, \{p\})$. Si $M \cap \mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \neq \emptyset$, entonces $M \subseteq \mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \subseteq \mathcal{K}(z, \{p\})$.

Pero $M \cap \mathcal{K}(w, \{p\}) \neq \emptyset$. De aquí que, $\mathcal{K}(w, \{p\}) \cap \mathcal{K}(z, \{p\}) \neq \emptyset$. Esto último contradice (β.3). Así que, $M \cap \mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) = \emptyset$. Por lo tanto, $M \subseteq X - \{b\}$. Falta ver que $a \notin M$. Si $a \in M$, entonces $M \subseteq \mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\})$. Pero $q \in A_3 \cap M$. Así que, $\mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\}) \cap A_3 \neq \emptyset$. Esto contradice ($\eta$.3). Por lo tanto, $a \notin M$.

El subcontinuo $P \cup M$ de X satisface que $t \in P \cup M \subseteq X - \{a, b\}$ y $(P \cup M) \cap A_1 \neq \emptyset$. De esta forma, $A_1 \cup P \cup M$ es un subcontinuo de X tal que $p, t \in A_1 \cup P \cup M \subseteq X - \{a, b\}$. Por lo tanto, $t \in \mathcal{K}(p, \{a, b\})$. De aquí que, $\mathcal{K}(p, \{a, b\}) = X - \{a, b\}$. Por el Lema 2.24 y la Proposición 2.26, $\{a, b\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$.

Podemos suponer que $w, z \in \mathcal{K}(x_0, \{p\})$. Esto implica que $\mathcal{K}(x_0, \{p\}) = \mathcal{K}(w, \{p\}) = \mathcal{K}(z, \{p\})$. Por ($\eta$.1) y ($\eta$.5), $c \in \mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\}) \cap Int_X(A_2)$ y $d \in \mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \cap Int_X(A_3)$. Del hecho de que $\mathcal{K}(w, \{x_0, y_0, p\}) \subseteq \mathcal{K}(w, \{p\})$ y $\mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\}) \subseteq \mathcal{K}(z, \{p\})$ se tiene lo siguiente, $c, d \in \mathcal{K}(x_0, \{p\})$. De aquí que $\mathcal{K}(c, \{p\}) = \mathcal{K}(d, \{p\}) = \mathcal{K}(x_0, \{p\})$. Igual que en el caso anterior, se probará que $\mathcal{K}(p, \{c, d\}) = X - \{c, d\}$. Sea $t \in X - \{c, d\}$. Por el Lema 4.17, $A_1 \cup [X - (\mathcal{K}(c, \{p\}) \cup \mathcal{K}(d, \{p\}))] \subseteq \mathcal{K}(p, \{c, d\})$. Si $t \in A_1 \cup [X - (\mathcal{K}(c, \{p\}) \cup \mathcal{K}(d, \{p\}))]$, entonces $t \in \mathcal{K}(p, \{c, d\})$. Supongamos que $t \in (X - A_1) \cap \mathcal{K}(x_0, \{p\})$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $t \in A_2$.

Aplicando el Lema 4.16, existe un subcontinuo T de X tal que $t \in T \subseteq \mathcal{K}(t, \{c\}) \cap A_2$ y $T \cap (A_1 \cup A_3) \neq \emptyset$. De esta forma, $T \subseteq X - \{c, d\}$. Si $T \cap A_1 \neq \emptyset$, entonces el subcontinuo $T \cup A_1$ de X es tal que $p, t \in T \cup A_1 \subseteq X - \{c, d\}$. Así que, $t \in \mathcal{K}(p, \{c, d\})$.

Si $T \cap A_1 = \emptyset$, entonces $T \cap A_3 \neq \emptyset$. Sea $q \in T \cap A_3$. Si $q \in X - \mathcal{K}(x_0, \{p\})$, entonces $\mathcal{K}(q, \{p\}) \cap \mathcal{K}(x_0, \{p\}) = \emptyset$. Esto implica que $\mathcal{K}(q, \{p\}) \subseteq X - \{c, d\}$. Puesto que $\mathcal{K}(q, \{p\})$ es denso en X, $\mathcal{K}(q, \{p\}) \cap Int_X(A_1) \neq \emptyset$. Existe un subcontinuo S de X tal que $q \in S \subseteq \mathcal{K}(q, \{p\}) \subseteq X - \{c, d\}$ y $S \cap A_1 \neq \emptyset$. El subcontinuo $T \cup S \cup A_1$ de X es tal que $p, t \in T \cup S \cup A_1 \subseteq X - \{c, d\}$. Esto implica que $t \in \mathcal{K}(p, \{c, d\})$.

Supongamos que $q \in \mathcal{K}(x_0, \{p\})$. Aplicando el Lema 4.16, existe un subcontinuo M de X tal que $q \in M \subseteq \mathcal{K}(q, \{p\}) \cap A_2$ y $M \cap (A_1 \cup A_3) \neq \emptyset$. Observemos que $M \subseteq X - \{x_0, p\}$. Puesto que $\mathcal{K}(q, \{p\}) = \mathcal{K}(x_0, \{p\})$, $\mathcal{K}(y_1, \{p\}) \cap \mathcal{K}(x_0, \{p\}) = \emptyset$ y $\mathcal{K}(y_0, \{p\}) \cap \mathcal{K}(x_0, \{p\}) = \emptyset$ implica $M \subseteq X - \{y_0, y_1\}$. Es decir, $M \subseteq X - \{p, x_0, y_1\}$. Si $c \in M$, entonces $M \subseteq \mathcal{K}(c, \{p, x_0, y_0\}) = \mathcal{K}(w, \{p, x_0, y_0\})$. Esto implica que $M \cap A_3 = \emptyset$. Pero $q \in M \cap A_3$. En consecuencia, $c \notin M$. Si $d \in M$, entonces $M \subseteq \mathcal{K}(d, \{x_0, y_1, p\}) = \mathcal{K}(z, \{x_0, y_1, p\})$. Por $(\eta.6)$, $M \cap A_2 = \emptyset$. Pero $T \subseteq A_2$ y $q \in T$. Así que, $q \in A_2$. Luego, $q \in M \cap A_2$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $M \subseteq X - \{c, d\}$. El subcontinuo $T \cup M \cup A_1$ de X es tal que $t, p \in T \cup M \cup A_1 \subseteq X - \{c, d\}$. Por lo tanto, $t \in \mathcal{K}(p, \{c, d\})$. Esto es un absurdo.

De aquí que, $\mathcal{K}(p, \{c, d\}) = X - \{c, d\}$. Por el Lema 2.24 y la Proposición 2.26, $\{c, d\} \in NB(\mathcal{F}_1(X))$. Pero $NB(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$. Por lo tanto, $\{p\} \in NWC(X)$.

$\square$

Bibliografía

[1] R.H. Bing, *Some characterizations of arcs and simple closed curves*, Am. J. Math. **70** (1948), 497–506.

[2] J. Camargo, D. Maya, and L. Ortiz, *The hyperspace of nonblockers of $F_1(X)$*, Topol. Appl. **159** (2019), 70–81.

[3] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, 1989.

[4] R. Escobedo, M. de J. Lopez, and H. Villanueva, *Nonblockers in hyperspaces*, Topol. Appl. **159** (2012), 3614–3618.

[5] A. Illanes and P. Krupski, *Blockers in hyperspaces*, Topol. Appl. **158** (2011), 653–659.

[6] J. R. Munkres, *Topology; a first course*, Prentice-Hall, Inc., 1974.

[7] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory. An introduction*, Monogr. Textb. Pure Appl. Math, vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[8] C. Piceno, *Nonblockers in homogeneous continua*, Topol. Appl. **249** (2018), 127–134.

[9] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1964.

[10] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley, Reading MA, 1970.