INVESTIGACIONES Y EXPERIENCIAS EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA MATEMÁTICA

Carlos Armando Cuevas-Vallejo
Magally Martínez Reyes
Judith Alejandra Hernández-Sánchez
Coords.

Universidad Autónoma del Estado de México

ALDVS

Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática

Universidad Autónoma del Estado de México

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados

Maestro en Ciencias de la Computación
Joaquín Morales Alfaro
Encargado del Despacho de la Dirección del Centro Universitario UAEM Valle de Chalco

Maestra en Administración
Susana García Hernández
Directora de Difusión y Promoción de la Investigación y los Estudios Avanzados

INVESTIGACIONES Y EXPERIENCIAS EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA MATEMÁTICA

Carlos Armando Cuevas-Vallejo
Magally Martínez Reyes
Judith Alejandra Hernández-Sánchez
Coords.

Universidad Autónoma del Estado de México

ALDVS

C273i Cuevas-Vallejo, Carlos Armando; Magally Martínez Reyes y Judith Alejandra Hernández-Sánchez (Coords.)
2023 *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática*
1a edición, Ciudad de México : Aldus | Universidad Autónoma del Estado de México, 2023
336 pp., 20.5 x 27.5 cm
Texto para nivel superior.
ISBN 978-607-633-573-4 (impreso Universidad Autónoma del Estado de México)
ISBN 978-607-633-578-9 (PDF Universidad Autónoma del Estado de México)
ISBN 978-607-99872-4-4 (impreso Aldus)
ISBN 978-607-99872-5-1 (PDF Aldus)
Materia: 510.1 - Filosofía y teoría de las matemáticas
Clasificación Thema: P - Matemáticas y ciencias | YPMF - Educativo: matemáticas y aritmética
PBK - Cálculo y análisis matemático

Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática
Cuevas-Vallejo, Carlos Armando; Magally Martínez Reyes y Judith Alejandra Hernández-Sánchez (Coords.)

Primera edición: marzo de 2023

ISBN 978-607-633-573-4 (impreso Universidad Autónoma del Estado de México)
ISBN 978-607-633-578-9 (PDF Universidad Autónoma del Estado de México)
ISBN 978-607-99872-4-4 (impreso Aldus)
ISBN 978-607-99872-5-1 (PDF Aldus)

Libro sometido a sistema antiplagio y publicado con la previa revisión y aprobación de pares doble ciego externos. Expediente de obra 323/02/2022, Dirección de Difusión y Promoción de la Investigación y los Estudios Avanzados, adscrita a la Secretaría de Investigación y Estudios Avanzados de la Universidad Autónoma del Estado de México.

Hecho en México

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Carlos Armando Cuevas-Vallejo

En el mes de marzo del año 1975 nace en la Ciudad de México la Sección de Matemática Educativa. Desde su fundación se contempló como parte del Departamento de Investigaciones Educativas, del organigrama del Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINESTAV-IPN). Aunque en aquellos años no existían muchos reportes e índices de aprovechamiento escolar, los indicios del grave problema que representaba la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en todos los niveles escolares, ya era alarmante. Las especialidades profesionales estaban aisladas y separadas unas de las otras; ciencias como física, química, biología, economía y matemáticas eran disciplinas aisladas a pesar de su enorme relación. En aquellos años, existían dos escuelas pioneras en ciencias, la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, y en ambas, los sesenta fueron un despegue al desarrollo de las escuelas de ciencias del país, al incorporarse los primeros estudiantes que habían salido al extranjero a especializarse en Topología, Análisis Matemático, Variable Compleja, Probabilidad, Álgebra y otras especialidades. Precisamente en los años sesenta empieza a resquebrajarse el proyecto de reforma curricular llamado "matemáticas modernas". Este importante movimiento, que modificó los planes y programas de estudio de las escuelas primarias y secundarias de los Estados Unidos y que influyó enormemente en toda América Latina, arrancó por 1952, cuando distintos grupos de profesores de matemáticas empezaron a plantearse la necesidad de modificar la enseñanza de esta ciencia y la manera de llevarlo a cabo, sobre todo en la educación elemental y básica (Little and High school). La mayor crítica era que la matemática escolar era totalmente descontextualizada, era mecánica y sin sentido para los estudiantes. Inesperadamente el 4 de octubre de 1957 fue lanzado al espacio sideral el Sputnik 1, el primer satélite artificial, desde el cosmódromo de Baikonur, en Kazajistán, antigua Unión Soviética o URSS. Al día siguiente, el afamado diario *New York Times* publicaba en primera plana "Sonda soviética sobrevuela Estados Unidos quince veces cada 24 horas". Aquel suceso, en plena Guerra Fría, conmocionó las estructuras sociales y políticas estadounidenses, que sintieron herido su orgullo nacional.

De inmediato el gobierno estadounidense se preocupó por la escasa capacidad científica de su país, y con presteza solicitó remediar este desequilibrio en la educación. Se requería de más científicos en el área dura de las ciencias. Ahí inicia la famosa reforma educativa de las matemáticas modernas, en donde se le daba a la educación elemental un fuerte contenido de rigor y formalidad. Esta reforma, que inicia en los sesenta, con fuerte influencia de la escuela francesa Bourbaquiana, encuentra reflejo en Latinoamérica y en particular en nuestro país.

> En el paroxismo de su propósito totalizador, se llegó a proponer la introducción en la Educación Secundaria del Lenguaje de Categorías (abstracciones de segundo orden que estructuran aspectos comunes a diversas estructuras), con un programa de 17 teoremas y conceptos como los funtores "que toda persona bien educada debe conocer" (Peter J. Hilton. Conferencia en el Primer Congreso Internacional de ZWIN. 1972. Centro Belga de Pedagogía Matemática (Sorando, 2002, p. 122).

Esta embriaguez de la matemática moderna influyó enormemente en la educación matemática desde los sesenta, e inclusive ochenta. Sin embargo, en 1976 Morris Kline sepulta esta reforma con la publicación de su famoso texto: *El Fracaso de la Matemática Moderna ¿Por qué Juanito no sabe sumar?*

A finales de los sesenta un grupo de profesores del Departamento de Matemáticas puras encabezados por el eminente matemático Carlos Imáz Yahnke, inician un proyecto *sui generis* para los objetivos de dicho departamento. La escritura de un libro de matemáticas para las primarias en México por encargo de la SEP. A ese proyecto se sumaron muchos de los más connotados colegas del Doctor Imáz del Departamento de Matemáticas y sus alumnos. De hecho, la tarea de programas de estudio y libros de texto oficiales era delegada a profesores normalistas, quienes mantenían un contacto casi nulo con las escuelas de ciencias. El Doctor Imaz coordinó, de 1970 a 1976, el trabajo de elaborar los libros de texto gratuito de matemáticas para la educación primaria en México, que fueron utilizados por más de una década.

"La impresión más general sobre los textos tradicionales es que son insufriblemente pesados. La mayor parte de los autores de libros de texto, parecen creer que una obra científica debe ser fría, sin imaginación, mecánica y seca (Kline, 1976. p. 18)". Y posiblemente el entusiasmo e investigación de este trabajo sembró la semilla de la preocupación por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en 1975, para ser precisos, un subgrupo de matemáticos, de este mismo departamento, inicia un proyecto que parecía descabellado para aquellos años y sobre todo para la línea formal y rigurosa del departamento de matemáticas. Con arrojo y valor, los doctores Carlos Imáz (†), Eugenio Filloy (†) y Juan José Rivaud (†) crean la Sección de Matemática Educativa y se constituye lo que hoy es el Departamento de Matemática Educativa (DME).

"Para muchos de nosotros no había duda: allí estaba un grupo destacado de matemáticos profesionales poniendo su talento y sus conocimientos al servicio de un proyecto educativo: solo cabía esperar lo mejor (Moreno *et al*., 1995, p. 26)". El propósito fue establecer investigaciones y propuestas científicas que abordan el problema de la enseñanza de la matemática en México. Cabe mencionar que esto era inédito dentro de la investigación científica en el mundo y que si bien había indicios en Francia con la creación de los IREMs (L'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) en 1968, por primera vez un grupo eminente de matemáticos abría una disciplina científica con todos los riesgos que esto supone.

Desde sus primeros años, los fundadores hicieron una convocatoria internacional y se sumaron muchos matemáticos interesados en la investigación de educación matemática, como François Pluvinage (†), Guy Brousseau y Narasiman, Luis Puig, entre otros.

Desde sus inicios, una grave preocupación fue el estudio de los fundamentos y la historia de la matemática e incluso dentro de sus primeros cursos se encontraban las materias "Matemática y conocimiento científico" y "Fundamentos e historia de la matemática"; ahí se estudió el desarrollo conceptual del cálculo diferencial e integral y análisis de textos de la misma materia. Y fue cuando el Doctor Rivaud (†), en uno de sus cursos, nos mostró que el cálculo diferencial e integral era un hueco en los programas de estudio de las universidades en la enseñanza tradicional, mencionó que la enseñanza del cálculo se polarizaba en dos extremos, por un lado, el uso indiscriminado de fórmulas de derivación e integración, sin contexto o significado alguno y por el otro, el esquema formal donde se enseñaba principios de análisis matemático con el estudio de series y sucesiones y procesos de convergencia. Es decir, los significados y aplicaciones del cálculo diferencial e integral, quedaban fuera en esta disciplina, "Si no se da significado a las matemáticas es como si se enseñara a los estudiantes a leer la notación musical sin permitirles interpretar música" (Kline, 1976, p. 18).

Planteada esta inquietud a los Seminarios de investigación internos dentro del DME, en el año de 2006, el Doctor François Pluvinage y el Doctor Carlos Armando Cuevas Vallejo deciden crear un Seminario Nacional sobre la Enseñanza del Cálculo de manera virtual, para abordar la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. La idea fue establecer una estrecha comunicación entre investigadores en matemáticas y matemática educativa con profesores e investigadores de todo el país. Nuestra tarea consistió en realizar un análisis y selección de artículos internacionales publicados en revistas acreditadas, esto fue posible gracias a la infraestructura del CINVESTAV, para ser compartidos y discutidos por la comunidad, que entre otras cosas no tenía tal facilidad de acceso a esta información. Para nuestra fortuna, el proyecto tuvo buena acogida por el sistema educativo y, en aquel inicio, profesores de diversas universidades y de escuelas de nivel medio superior se adhirieron con entusiasmo. Sin capital y sin apoyo económico alguno, llevados por el entusiasmo, decidimos hacer una convocatoria para realizar un primer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo. El evento se llevó a cabo en las instalaciones del CINVESTAV-IPN y contó con una participación solidaria y entusiasta del medio académico y colegas del DME.

El Seminario se ha llevado a cabo de manera ininterrumpida durante más de 15 años, y cada vez se incorporan más universidades de Europa, América Latina, Canadá y otros países. Al crecer la comunidad educativa fue indispensable la extensión del estudio del cálculo hacia todos los tópicos y temas de matemáticas y ciencias y a todos los niveles educativos. El primer Encuentro Nacional sobre la Enseñanza del Cálculo tomó un carácter general agregando Enseñanza de la Ciencia y Matemática, con la colaboración solidaria de investigadores de todos los países del orbe. Sería muy largo enumerar a todos los científicos nacionales e internacionales que nos han y siguen apoyando en este proyecto de investigación, pero sí podemos mencionar con orgullo que hemos tenido en nuestros eventos a destacados investigadores nacionales y extranjeros en nuestra disciplina. Y precisamente en el intento por dejar un testimonio más imperecedero de las contribuciones científicas, en el año 2013, decidimos el Doctor Pluvinage y un servidor, darnos a la tarea de publicar un libro con contribuciones internacionales que pudiera ser útil a toda la comunidad educativa y así nace el libro *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en Matemática Educativa* (Cuevas y Pluvinage, 2013a), publicado por la editorial Pearson.

Años después y ante múltiples dificultades económicas nace el segundo libro: *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes* (Cuevas-Vallejo, Martínez-Reyes y Cruz, 2018), publicado por la misma editorial, y hoy presentamos a ustedes, en un esfuerzo conjunto, el tercer libro: *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática* publicado por la Universidad Autónoma del Estado de México y editorial Aldus.

Estimados lectores, con el fin de facilitar la búsqueda y ubicación de contenidos, hemos separado en cuatro grandes apartados los artículos que presentan los investigadores:

1. Educación matemática y cálculo diferencial e integral. Nivel medio superior y superior.
2. Educación matemática y álgebra lineal y sus aplicaciones. Nivel medio y superior.
3. Educación matemática y aplicación de las tecnologías digitales. Nivel básico, medio superior y superior.

4. Educación matemática y modelación. Nivel básico, medio superior y superior.

El contenido de cada capítulo abarca enseñanza de la matemática y ciencia en todos los niveles educativos. Comprende desde aplicaciones en el aula con tecnología hasta propuestas de corte cognitivo.

El lector tendrá en sus manos propuestas metodológicas, teorías de conocimiento, uso de tecnología digital, entre otras, que son producto de años de estudio y reflexión de cada uno de los autores. Agradecemos a cada uno de ellos su colaboración y solidaridad en este libro dedicado a la memoria del Profesor François Pluvinage.

Confieso que de no ser por el enorme entusiasmo, trabajo y amor a la ciencia del Doctor Pluvinage, yo no hubiera podido continuar con esta noble pero compleja tarea. Vaya pues, hacia donde quiera que esté François, nuestro agradecimiento y recuerdo.

Bibliografía

Cuevas-Vallejo, C. A., Martínez-Reyes, M. y Cruz R. (eds). (2018). *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes*. Pearson, https://ri.uaemex.mx/handle/20.500.11799/112758

Cuevas-Vallejo, C. A. y Pluvinage, F. (2013a). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en Matemática Educativa*. Pearson.

Cuevas-Vallejo, C. A. y Pluvinage, F. (2013b). *Investigaciones sobre la enseñanza del cálculo. El cálculo y su Enseñanza; Enseñanza de las Ciencias y la matemática*, 4; p. 47-64. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/156

Freudenthal, Hans. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Kline, Morris. (1976). *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Siglo XXI.

Moreno, L., Michèle Artigue, Régine Douady. (1995). La Educación Matemática en México. En: *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Pedro Gómez (ed.). pp. 25-31. Grupo Editorial Iberoamérica.

Sorando, M. José M. (2002). ¿Os acordáis de los conjuntos? Reseña del libro El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar? por Morris Kline. *SUMA Revista sobre la enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, N° 39: 123-128. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/39/SUMA_39.pdf

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. NIVEL MEDIO SUPERIOR Y SUPERIOR

CAPÍTULO 1. INTERPRETACIONES DE CONCEPTOS DEL CÁLCULO CON USO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Eloísa Benítez Mariño, elobenitez@uv.mx
José Rigoberto Gabriel Argüelles, jgabriel@uv.mx
Eliseo Gabriel Argüelles, egabriel@uv.mx
Universidad Veracruzana, México

Resumen

Proponemos una serie de etapas a seguir para modelar matemáticamente un fenómeno. El problema a modelar es el comportamiento del número de infectados por coronavirus en algunos países. Con el uso de un proceso de regresión encontramos una función que nos da información sobre el número de personas infectadas desde que inició la pandemia hasta un día específico. Utilizando conceptos de Cálculo, como son, primera, segunda y tercera derivada de la función que representa a los infectados, y apoyados en la tecnología, proporcionamos interpretaciones de estos conceptos en el contexto de la pandemia. Consideramos que esta propuesta didáctica puede tener un impacto favorable en Cálculo y cursos relacionados, principalmente en el nivel universitario.

1. Antecedentes

Desde los tiempos antiguos, las matemáticas han estado relacionadas con diversos fenómenos, en un principio con fenómenos naturales, después con fenómenos de tipo social, económico y tecnológico, entre otros. Grandes matemáticos han trabajado en el área de las matemáticas aplicadas, entre ellos podemos mencionar a Arquímedes de Siracusa, Isaac Newton, Leonhard Euler, Joseph Fourier o Albert Einstein. Cabe hacer mención que Newton, Fourier y Einstein son considerados físicos, sin embargo, sus contribuciones a la matemática son tan representativas que también son considerados grandes matemáticos. Tres matemáticos que ameritan mención son Wassily Leontief, Leonid Vitálievich Kantorovich y John Forbes Nash, quienes ganaron el Premio Nobel de Economía por sus trabajos sobre la modelación matemática de problemas en esta materia. En algún momento de la historia surgieron áreas de las matemáticas que se desarrollaron con la finalidad de generar conocimiento matemático sin poner énfasis en las aplicaciones, lo cual generó una separación de la matemática con otras disciplinas en lo referente a las aplicaciones. Así, se generó una gran cantidad de conocimiento que se puso a disposición de las diferentes disciplinas para desarrollar modelos matemáticos.

En México, lo anterior tuvo un impacto en los planes de estudios en diferentes niveles educativos, considerando que el objetivo principal de la mayoría de las materias de matemáticas es dotar a los estudiantes de conocimiento matemático; por ejemplo, conceptos, algoritmos, métodos y en algunos casos se contextualiza la matemática con ejemplos de aplicaciones. Sin embargo, no existe un énfasis en la modelación matemática, incluso en carreras como las ingenierías, donde un estudiante cursa en promedio siete materias de matemáticas, entre las que se encuentran álgebra, cálculo en una variable, cálculo en varias variables, álgebra lineal, probabilidad y estadística, ecuaciones diferenciales y métodos numéricos. Estos cursos dan conocimiento al alumno sobre diferentes temas y en algunos casos se trabaja con ciertas aplicaciones de las matemáticas; sin embargo, en la mayoría de estos cursos, no se tiene explícitamente el objetivo de desarrollar en los estudiantes la competencia de la modelación matemática.

En los últimos cincuenta años se ha realizado una extensa investigación en modelación matemática y en las aplicaciones de la misma, desde el enfoque de la Didáctica de las Matemáticas. Varios grupos de investigadores se han dedicado a desarrollar proyectos en el tema, cabe hacer mención al ICME (*International Congresses on Mathematical Education*), donde se presentan una gran variedad de trabajos sobre modelación matemática y temas relacionados con el ICTMM *(International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*), donde se analizan resultados de investigación.

Entre los productos del ICME se encuentra el 14 Estudio ICME (Blum *et al*., 2007), donde se presentan investigaciones en las áreas de epistemología y modelación, competencias de modelación, aplicaciones y modelación para matemáticas, pedagogía y modelación, implementación y práctica, valoración y evaluación, entre otros. Podemos pensar que las aplicaciones de las matemáticas corresponden sólo al nivel universitario, sin embargo la prueba PISA (*Programme for International Student Assessment*), que se aplica cada tres años a estudiantes de secundaria y bachillerato, es un proyecto que considera las relaciones del mundo real y las matemáticas. El proyecto PISA es considerado una literacidad matemática, en el sentido que los estudiantes deben tener la capacidad para identificar y entender el papel que juegan las matemáticas en el mundo.

Otros resultados de investigación se muestran en el ICME-13 Topical Surveys (Greefrath y Vorhölter, 2016), donde se presentan resultados sobre el desarrollo de la discusión en países de habla alemana, así como análisis de los diferentes ciclos de modelación y perspectivas de la modelación, la modelación matemática como competencia en la educación estándar, el papel de la tecnología en la enseñanza —aprendizaje de la modelación y resultados de investigación empírica sobre modelación matemática en países de habla alemana.

La ICTMM ha producido libros acerca de la modelación matemática en la práctica e investigación educativa, considerando las influencias cognitivas, sociales y culturales (Stillman *et al*., 2015) y Modelación matemática y aplicaciones: cruzando e investigando fronteras en educación matemática (Stillman *et al*., 2017). Algunos de los temas tratados en estas obras son: prácticas innovadoras en investigación y enseñanza de la modelación, investigación y evaluación de la enseñanza y aprendizaje en modelación, aspectos pedagógicos para enseñanza y aprendizaje de la modelación, evaluación en escuelas y universidades, nuevos enfoques en la práctica, enseñanza e investigación, fronteras de la investigación en modelación matemática, asuntos pedagógicos para profesores y educadores con el uso de la modelación matemática y aplicaciones, la influencia que tiene la tecnología en la modelación matemática y aplicaciones junto con evaluación de modelos matemáticos en las escuelas, entre otros.

Como podemos observar, es muy amplio el trabajo que se ha realizado desde el enfoque de la didáctica de las matemáticas sobre modelación matemática y aplicaciones. Por lo tanto, se tienen bases firmes para proponer actividades didácticas, llevarlas al aula y observar las implicaciones que pueden tener en los estudiantes. El objetivo de este trabajo es mostrar una actividad, con fines educativos, de modelación matemática del número de infectados y nuevos contagios en algunos países a causa de la pandemia del coronavirus. Se propone un procedimiento matemático que encuentra un modelo, a partir de los datos reportados por ciertos países; esto es una función que proporciona información sobre el número de infectados desde un día inicial, hasta un día específico. Después, utilizando conceptos del Cálculo y con el uso de un *software*, se interpretan los resultados del modelo y se enfatiza en el uso de conceptos matemáticos como son: la primera, segunda y tercera derivada de una función, puntos críticos, máximos y mínimos locales, regiones de crecimiento y decrecimiento, entre otros.

2. Modelación matemática

En la literatura existen varios procesos de cómo construir un modelo matemático, en la Figura 1 proponemos un diagrama sobre los caminos que se pueden seguir para construir, resolver e interpretar un modelo matemático. Dicho proceso lo podemos describir de la siguiente manera:

1. Elegir un problema a modelar. La elección de un problema (fenómeno) a modelar, no sigue en general alguna regla establecida. Algunas razones para elegir un problema son: está de moda, el problema es relevante, es actual, algún ente (institución, autoridad, etc.) solicitó estudiar el tema, entre otras. Es claro que el problema a estudiar debe tener un interés científico y debe dar respuesta a una problemática que se presenta en alguna área del conocimiento.

2. Buscar información pertinente sobre el problema. Es fundamental contar con la información necesaria para tener un panorama general sobre el problema, esto implica contar con fuentes de información fidedignas y confiables, que nos aporten un estado del fenómeno que queremos estudiar. En algunos casos, se debe recurrir a un experto en el área de estudio, quien podrá aportar conocimiento valioso para la comprensión del problema.

3. Recopilación de datos. Los datos del problema pueden ser cuantitativos y cualitativos, se pueden obtener de alguna base de datos o se pueden recopilar mediante encuestas o mediciones que uno realice directamente. Es importante que las bases de datos sean tomadas de instituciones de reconocido prestigio y que los instrumentos que utilizamos para recopilar datos estén validados por expertos.

4. Propuesta y solución del modelo matemático. Cuando contamos con la suficiente información sobre el problema debemos identificar el tipo de variables que vamos a estudiar y, sobre todo, debemos identificar qué información queremos obtener a partir de los datos con los que contamos. Es complejo establecer los tipos de modelos matemáticos que existen, en virtud de que hay una gran variedad de ellos; por ejemplo: una ecuación algebraica, un sistema de ecuaciones algebraicas, ecuaciones lineales y no lineales (menos conocidas), puede ser un problema de optimización, una ecuación diferencial ordinaria o una ecuación diferencial parcial, podemos modelar mediante procesos estacionarios o procesos estocásticos, entre muchos más. Por lo anterior, es necesario contar con un conocimiento amplio en el campo de las matemáticas. Se puede dar el caso que las matemáticas que se requieran para modelar un fenómeno todavía no se han desarrollado o aún cuando el modelo se pueda plantear, posiblemente no se cuente con las herramientas matemáticas para dar solución al modelo. Las soluciones para un determinado modelo matemático, por lo regular, son soluciones analíticas, soluciones numéricas o soluciones algebraicas. Sin embargo, existe la posibilidad de que la solución se dé en términos gráficos o tabulares.

5. Validación del modelo matemático de los resultados. La solución obtenida para el modelo matemático la debemos validar con los datos del problema, para corroborar que existe consistencia entre lo observado y los resultados obtenidos. En ocasiones se hacen algunos supuestos sobre el comportamiento del fenómeno, lo que nos genera un modelo matemático "ideal"; es decir, no tan apegado a la realidad. Si esto sucede, los resultados obtenidos tendrán alguna discrepancia con los datos del fenómeno y entonces debemos valorar qué tan eficientes son nuestros resultados.

6. Interpretación del modelo matemático con relación al problema. El último paso que sugerimos es interpretar de la manera más adecuada nuestros resultados y realizar predicciones sobre el comportamiento del fenómeno. En algunas ocasiones el modelo nos ayuda a entender mejor el problema y los conceptos o procesos matemáticos o también nos ayuda a realizar simulaciones sobre diferentes situaciones que se pueden presentar.

El proceso de modelación descrito en esta sección es un proceso que puede llevar a cabo una persona con conocimientos en matemáticas aplicadas. En las próximas secciones ilustraremos este proceso, con énfasis en la enseñanza de la modelación matemática para estudiantes universitarios.

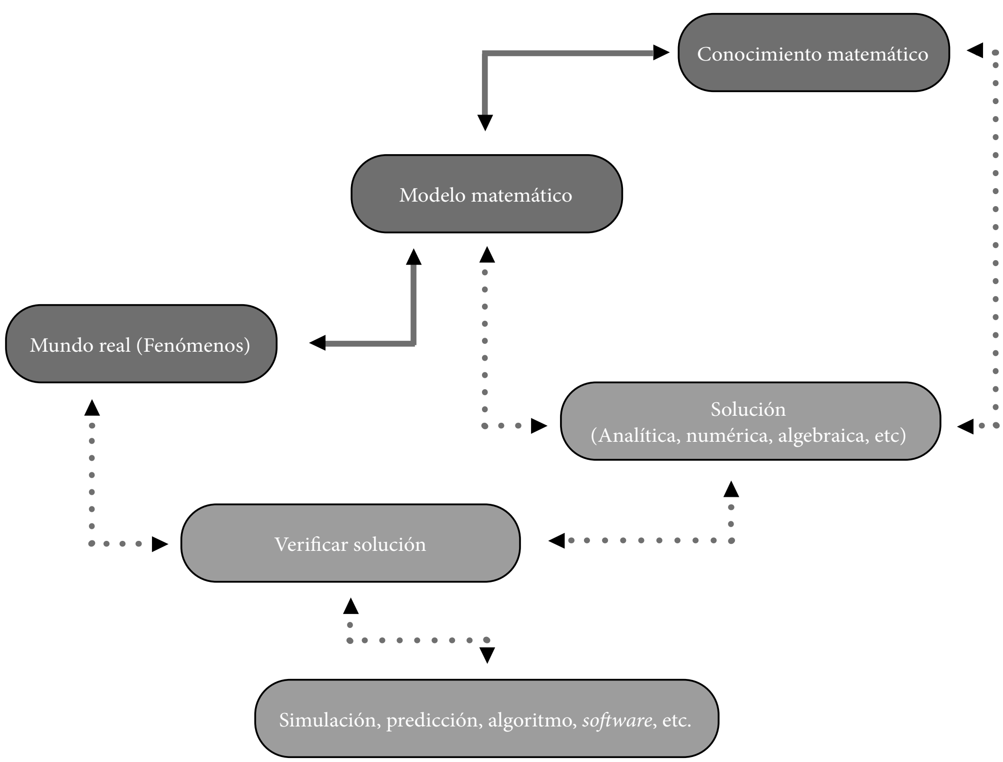


Figura 1. Un esquema para el proceso de modelación matemática. Elaboración propia.

3. La pandemia del coronavirus

En esta sección ilustraremos el proceso, propuesto anteriormente, para desarrollar un modelo matemático del comportamiento de la pandemia del coronavirus. Siguiendo los pasos establecidos tenemos:

3.1 Elección del problema a modelar

Para este capítulo se tomaron como modelo algunas epidemias ocurridas a lo largo de la historia:

> Para Lüthy, Ritacco y Kantor (2018) fue probablemente Cristóbal Colón y su tripulación, en su segundo viaje a América, quienes trajeron un virus de influenza [...] la primera pandemia de gripe documentada con datos relativamente reales, fue en 1580 y se originó en Rusia [... la llamada] gripe española de 1918, al parecer se originó en Estados Unidos, donde se dio el primer caso [otros autores como Pumerola y Antón (2018) consideran que esta gripe fue devastadora para la población y estimaciones consideran] que se infectó un tercio de la población mundial [y al estar situada] después de la Primera Guerra Mundial [donde se considera que] murieron alrededor de 20 millones de personas y no se tiene un consenso de la cantidad de muertos que ocasionó la gripe pero se estima que hubo entre 20 y 200 millones de muertos (Gabriel *et al*., 2018, s/p.).

Lo anterior indica que a lo largo de la historia han ocurrido numerosas epidemias y pandemias que han afectado a gran parte de la población, comunidades y/o familias, ocasionando un gran número de decesos y serios problemas económicos para distintas naciones. Por lo tanto, para el tratamiento de la información, resulta importante encontrar modelos matemáticos que ilustren el comportamiento del número de contagiados por un virus o bacteria. En este contexto, se determinó estudiar el número de personas infectadas por coronavirus en un determinado país.

3.2 Información sobre el coronavirus

De acuerdo con diversas fuentes de noticias, el 31 de diciembre de 2019 se informó que en Wuhan, provincia de Hubei, China, se habían presentado 27 casos de una neumonía atípica. El primer caso fue reportado el 8 de diciembre de 2019. El 7 de enero de 2020 las autoridades de China identifican como causante de las neumonías a un nuevo virus de la familia Coronaviridae, que posteriormente fue llamado Sars-CoV-2 y su secuencia genética fue compartida al mundo.

Para el 13 de enero de 2020 se detectaron casos del virus en varios países con un denominador común: las personas infectadas habían estado en la ciudad de Wuhan. El 19 de enero de 2020 se encuentran casos en Beijing y Shenzhen, que indican la propagación del virus y más tarde se detectan contagios en Japón y Estados Unidos. El 11 de marzo de 2021, la Organización Mundial de la Salud (OMS) declaró que existía una pandemia mundial, causada por el virus Sars-CoV-2. Hasta el 27 de mayo de 2020, la Johns Hopkins University (2020) reporta los siguientes datos:

- 5,685,512 personas infectadas en todo el mundo.
- 324,983 personas fallecidas en todo el mundo.
- 1,699,933 personas infectadas en eua.
- 100,442 personas fallecidas en eua.
- 411,821 personas infectadas en Brasil.
- 370,680 personas infectadas en Rusia.
- 158,086 personas infectadas en India.
- 84,106 personas infectadas en China.
- 11,265 personas infectadas en Corea del Sur.

Una de las hipótesis sobre el origen del coronavirus es que evolucionó a través de un intermediario (a saber, los pangolines). La transmisión del virus pudo haber ocurrido a través de secreciones respiratorias y/o material procedente del aparato digestivo o entre el contacto de personas portadoras del virus y personas sensibles. Hasta ese momento, todavía no existía una vacuna contra este virus, lo que implicaba que, en un principio, todas las personas eran susceptibles de contagio. También se encontraron casos asintomáticos, es decir, personas que habían sido infectadas, pero que no presentaban síntomas de la enfermedad o sólo muy débiles, y además desconocían que eran portadoras y por lo tanto eran fuente de contagio para otras personas (Díaz-Castrillón y Toro-Montoya, 2020).

3.3 Los datos del problema

Para este problema se utilizará la base de datos de Johns Hopkins University, donde se encuentra el número de infectados por el virus Sars-CoV-2 de varios países del mundo. Tomamos la información a partir de un determinado día, el cual llamaremos "día uno" y se pueden tener datos sobre el número de infectados en los subsecuentes días. Cabe hacer la aclaración que el "día uno" es diferente para cada país, dado que es el día en que esta institución empezó a contabilizar los casos de cada uno. Existen algunas incongruencias con esta base de datos, por ejemplo: el 23 de abril de 2020 se reportan en España 213,024 infectados y un día después, el 24 de abril de 2020, se reportan 202,990. Como podemos darnos cuenta el número de infectados disminuyó de un día para otro, lo cual no es posible; es decir, los infectados aumentan o permanecen en la misma cantidad de un día para otro. Lo que ocurrió fue un mal recuento del número de infectados y se corrigió. Lo anterior, genera no poder conocer, con precisión, el número de infectados del 23 y 24 de abril de 2020.

Otro problema detectado ocurre con los datos de Francia. El 24 de diciembre de 2020, por ejemplo, se reporta un incremento de infectados de 26,467 personas, el 25 un aumento de 2,140, el 26 una adición de 13,502, el 30 de diciembre un agregado de 49,044 y el primero de enero de 2021 se reporta un incremento de 2,117. Tomando en consideración que el número de infectados es proporcional a la población infectada, no se pueden tener cambios abruptos en el número de contagiados; es decir, tener un día 26,467 y al otro día 2,140 y al siguiente 13,502. Por lo tanto, también hubo un error en la medición.

Un caso extremo es el ocurrido en Turquía, donde se reporta el día 9 de diciembre de 2020 un incremento de 31,712 infectados, el 10 de diciembre de 2020 un aumento de 823,225 y el 11 de diciembre de 2020 una ampliación de 32,106 infectados. Este tipo de comportamiento es poco creíble, debido a que no puede existir un crecimiento tan alto en un día en comparación con el anterior y el subsecuente. Lo que probablemente ocurrió fue que había una gran cantidad de infectados que no había sido reportado y se decidió hacer el reporte de todos estos casos atrasados en un solo día.

Los ejemplos anteriores nos ilustran la complejidad que se tiene con las bases de datos. A pesar de contar con una base confiable, existen errores en las mediciones del número de infectados en los distintos países. Actualmente contamos con técnicas y procedimientos para corregir este tipo de errores, sin embargo, en este trabajo se escogieron países cuyos datos, en principio, son consistentes.

Presentaremos el caso de Estados Unidos de América y tomaremos como primer día de la pandemia el 4 de marzo de 2020, cuando había 103 infectados, y haremos una cohorte de la información el 11 de septiembre de 2020, que corresponde al día 192. A continuación, se presentan los datos en parejas ordenadas, donde la primera coordenada corresponde al número de día de la pandemia y la segunda coordenada corresponde al número de infectados, del mismo día.

Tabla 1. Número de infectados en Estados Unidos del día 1 al día 192. Tomado de Johns Hopkins University (2020).

Día	Casos	Día	Casos	Día	Casos	Día	Casos	Día	Casos
1	103	40	556522	79	1584512	118	2590668	157	4941755
2	172	41	581813	80	1608653	119	2636414	158	4997929
3	215	42	608878	81	1630476	120	2687588	159	5044864
4	337	43	637974	82	1651289	121	2742049	160	5094400
5	450	44	669272	83	1670280	122	2795361	161	5141208
6	515	45	701996	84	1689163	123	2841241	162	5197411
7	713	46	730266	85	1707445	124	2891124	163	5248958
8	1105	47	756544	86	1730260	125	2936077	164	5313252
9	1530	48	783931	87	1754764	126	2996098	165	5361165
10	2115	49	809295	88	1779214	127	3054699	166	5403213
11	2814	50	837627	89	1799124	128	3117946	167	5438325
12	2986	51	871617	90	1816479	129	3185737	168	5483388
13	4354	52	907908	91	1837374	130	3245925	169	5529824
14	5970	53	940829	92	1857332	131	3304942	170	5573847
15	8386	54	968518	93	1878683	132	3364157	171	5622470
16	12674	55	990983	94	1903907	133	3431574	172	5667070
17	18736	56	1015518	95	1926639	134	3498902	173	5701645
18	24508	57	1043038	96	1944370	135	3576157	174	5739536
19	33152	58	1072667	97	1961785	136	3647715	175	5777710
20	43850	59	1106829	98	1979912	137	3711413	176	5821819
21	54112	60	1136024	99	2000706	138	3773260	177	5867785
22	66055	61	1161611	100	2023656	139	3834677	178	5913941
23	83611	62	1184086	101	2048986	140	3899211	179	5961094
24	102101	63	1208271	102	2074542	141	3970121	180	5996431
25	122059	64	1233527	103	2094366	142	4038816	181	6030587
26	141200	65	1261409	104	2114026	143	4112531	182	6073840
27	162707	66	1288587	105	2137731	144	4178970	183	6113510
28	188744	67	1314320	106	2163290	145	4233923	184	6150016
29	214205	68	1334084	107	2191099	146	4290337	185	6200518
30	244610	69	1352962	108	2222579	147	4356206	186	6244970
31	276547	70	1375152	109	2255328	148	4426982	187	6276365
32	309699	71	1396110	110	2281767	149	4495015	188	630062
33	337573	72	1423727	111	2312303	150	4562107	189	6327009
34	367215	73	1449027	112	2347491	151	4620592	190	6360212
35	397992	74	1474128	113	2382426	152	4668172	191	6396100
36	429686	75	1493132	114	2422299	153	4713540	192	6443743
37	464442	76	1514901	115	2467554	154	4771080		
38	497943	77	1535350	116	2510259	155	4823890		
39	527969	78	1559157	117	2549864	156	4883582		

3.4 El modelo matemático

Existen en la literatura varios modelos matemáticos para fenómenos de pandemia, algunos se basan en un crecimiento logístico de los infectados, esto es, al inicio el número de infectados es pequeño, después crece de manera exponencial y finalmente el número de infectados tiende a un número fijo. Sin embargo, los contagios debido al virus Sars-CoV-2 tienen particularidades especiales. En un inicio, el número de contagios se comportó como una función exponencial, incrementándose rápidamente el número de contagiados, sin embargo, los gobiernos aplicaron medidas de higiene y medidas de aislamiento, lo que provocó que el número de contagios disminuyera y entonces "se aplanara la curva", lo que significa que la gráfica del número de infectados dejara de crecer exponencialmente y tendiera a un número fijo, por ello, el comportamiento del número de infectados sigue un crecimiento logístico.

En algún momento se pensó que la pandemia estaba controlada cuando el número de contagios por día disminuyeron, sin embargo, al eliminar las medidas de aislamiento y, por consecuencia, el retorno a las diversas actividades, se generó un "rebrote de la enfermedad", lo cual significa que se vuelve a tener un comportamiento exponencial en el número de infectados y se debe volver a tomar medidas de aislamiento para disminuir los contagios. Estos procesos van a continuar hasta que se logre tener una vacuna y un proceso de vacunación adecuado o exista un número grande de infectados que hayan logrado tener inmunidad al virus o una combinación de ambas cosas.

En nuestro caso, partiremos del siguiente supuesto: el número de contagiados por virus Sars-CoV-2 tiene un comportamiento continuo; es decir, la función que relacione el número acumulado de infectados en un determinado día es una función continua, con respecto al tiempo. Bajo el supuesto enunciado anteriormente, podemos usar el siguiente resultado matemático.

Teorema: Sea *$f: [a,b] \rightarrow R$ una función continua, entonces existe una sucesión de polinomios $\{P_n(t)\}$ que converge uniformemente a f en el intervalo* $[a,b]$, ver (Bartle y Sherbert, 1996, p. 189).

Acorde al teorema y a los datos que tenemos, para encontrar un polinomio que nos dé un acercamiento al comportamiento de la epidemia, se debe hacer un proceso de regresión polinómica, es decir, encontrar un polinomio cuya gráfica esté lo más cercano a los puntos de la Tabla 1. Existen muchos métodos para hacer esto, incluso existe *software* especializado para encontrar algún polinomio. En Gabriel (2019) se da un procedimiento para encontrar un polinomio de mínimo grado que relaciona la variable dependiente y la variable independiente de un conjunto de datos, lo cual permite en particular tener una visualización gráfica de la curva del número de contagios por día. Para el caso de Estados Unidos el mejor polinomio que se encontró es el siguiente:

$$P(t) = 0.0000006678917\, t^7 - 0.00004274958\, t^6 + 0.01031969\, t^5$$
$$-1.149938\, t^4 + 56.68786\, t^3 - 699.1771\, t^2$$
$$+ 1761.538\, t + 1003.051$$

3.5 Validación del modelo matemático

Para este caso, el modelo matemático es una función. Su validación está implícita en el proceso de regresión que se utiliza, en virtud de que dicho proceso utiliza el método de los mínimos cuadrados para garantizar que la distancia de los puntos (datos reales) a la gráfica del polinomio es la mínima. Sin embargo, en la Figura 1 podemos corroborar de manera visual que los puntos que representan la medición de infectados se encuentran prácticamente sobre la gráfica del polinomio.

3.6 Interpretación de los resultados

En la Figura 2 podemos observar que la gráfica del polinomio es estrictamente creciente y no se puede determinar si existe una tendencia a una asíntota horizontal, lo cual nos indicaría que la pandemia está llegando a su fin. Al parecer seguirá con una tendencia a crecer. La Figura 2, ilustra que existen intervalos donde la gráfica tiene un crecimiento más rápido e intervalos donde la gráfica crece de manera más lenta. Es poca la información que da la función encontrada. Sin embargo, se aprovecha que este polinomio tiene derivadas de primer, segundo y tercer orden, para obtener más información sobre el fenómeno.

La primera derivada de la función de crecimiento de los infectados es:

$$P_1(t) = 0.000000467524\, t^6 - 0.000256497\, t^5 + 0.0515985\, t^4 - 4.59975\, t^3 + 170.064\, t^2 - 1398.35\, t + 1761.54$$

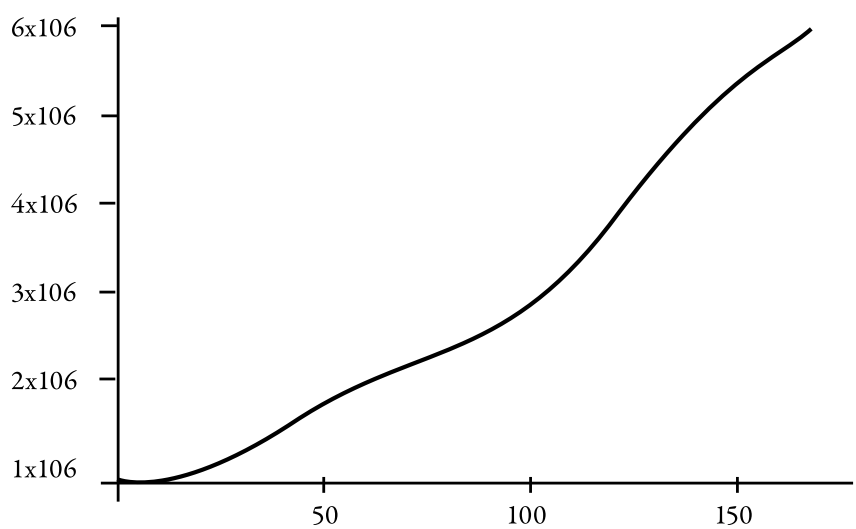


Figura 2. Gráfica del polinomio y de los puntos con los datos reales. Elaboración propia.

La Figura 3 muestra la gráfica de la primera derivada de nuestra función de infectados. Como se puede observar, la función primera derivada toma valores negativos en el intervalo [1,9.11235], lo cual es una inconsistencia, porque como la función de infectados es estrictamente creciente entonces su derivada debe ser no negativa. Esta inconsistencia surge de la técnica de aproximación al polinomio, a pesar de que es muy precisa para la función de contagios pueden existir errores de redondeo para la primera derivada. Sin embargo, podemos estudiar a la primera derivada en el intervalo [10,192] y obtendremos información relevante. Es preciso aclarar que el número $q = 9.11235$, es un cero de la función $P_1(t)$ y se obtuvo utilizando un *software* para matemáticas.

La interpretación que tiene la primera derivada de la función es que $P_1(t)$ representa la razón de cambio en la población infectada, es decir, $P_1(t)$ nos da el incremento de infectados en el tiempo t. También se puede interpretar como la velocidad con la que están desarrollándose los contagios. Como la $P_1(t)$ es positiva en el intervalo [10,192], entonces el número de infectados crece conforme pasan los días. También observamos en la Figura 3 que la gráfica tiene un aumento a partir de $t = 10$ hasta un determinado t_1, después la gráfica decrece hasta un cierto t_2, vuelve a incrementarse hasta un t_3, decrece hasta un cierto t_4 y después continúa en ascenso. Utilizando Cálculo podemos encontrar los intervalos donde $P_1(t)$ es creciente y dónde es decreciente y se pueden calcular máximos y mínimos locales de $P_1(t)$.

La derivada de $P_1(t)$ que corresponde a la segunda derivada de $P(t)$ es:

$$P_2(t) = 0.00000280515\, t^5 - 0.00128249\, t^4 + 0.206394\, t^3 - 13.7993\, t^2 + 340.127\, t - 1398.35\, t - 1398.35$$

La Figura 4 ilustra la gráfica de $P_2(t)$. Los puntos donde la gráfica corta al eje t son los puntos críticos de $P_1(t)$, es decir, son los tiempos en los cuales la velocidad de los incrementos de contagios por día son cero. En estos tiempos es justamente donde existe un cambio en el signo de la velocidad. Con el uso de un *software* para matemáticas se calculan los ceros de $P_2(t)$, los cuales son: $t_1 = 45.5254$, $t_2 = 83.6841$, $t_3 = 143.611$ y $t_4 = 179.288$.

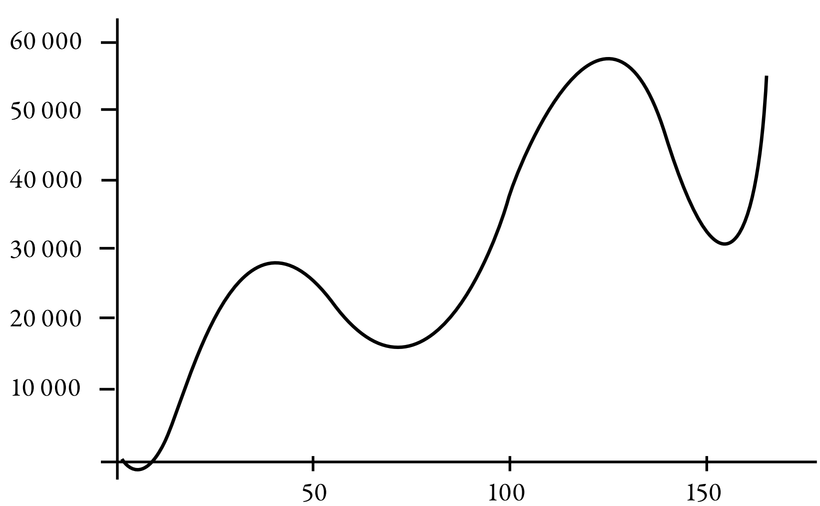


Figura 3. Gráfica de la primera derivada del polinomio. Elaboración propia.

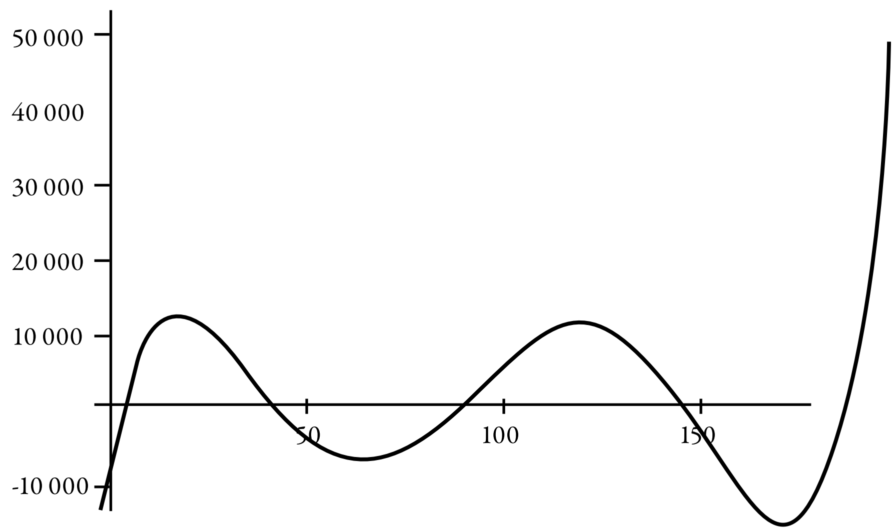


Figura 4. Gráfica de la segunda derivada del polinomio. Elaboración propia.

Ahora calculemos si estos puntos son máximos o mínimos. Para ello utilizamos el criterio de la segunda derivada de $P_1(t)$, que en este caso corresponde a la tercera derivada de $P(t)$. Esta función es:

$$P_3(t) = 0.0000140257\, t_4 - 0.00512995\, t_3 + 0.619181\, t_2 - 27.5985\, t + 340.127$$

A continuación evaluaremos los puntos críticos t_1, t_2 t_3 y t_4 en la función $P_3(t)$ y observaremos el signo que se obtiene: $P_3(t_1) = -56.7989 < 0$ entonces t_1 es un máximo local de $P_1(t)$, $P_3(t_2) = 48.2043 > 0$ entonces t_2 es un mínimo local de $P_1(t)$, tenemos que $P_3(t_3) = -814922 < 0$ entonces t_3 es un máximo local de $P_1(t)$ y $P_3(t_4) = 222.948 > 0$ entonces t_2 es un mínimo local de $P_1(t)$.

A modo de conclusión, se proporcionan algunas interpretaciones sobre la pandemia en Estados Unidos:

- El número de infectados hasta el 11 de septiembre de 2020 sigue en aumento y no se pronostica que los próximos meses se pueda aplanar la curva.
- La función $P_1(t)$ pronosticó que después del 11 de septiembre de 2020 el número de contagiados por día seguiría aumentando y efectivamente se corroboró, con el paso del tiempo. El 2 de enero de 2021 se reportaron 300,280 contagios más, cifra muy alarmante, considerando que, del 4 de marzo al 11 de septiembre de 2020, el número máximo de contagios reportados ocurrió el 16 de julio de 2020 con 77,255 contagios reportados ese día.
- La pandemia ha tenido varios intervalos de tiempo donde los contagios por día han aumentado, estos ocurrieron del 4 de marzo al 18 de abril de 2020 y del 26 de mayo al 25 de julio de 2020. En estos lapsos el gobierno fomentó medidas para evitar los contagios. Del 18 de abril al 26 de mayo de 2020 y del 25 de julio al 29 de agosto de 2020 los contagios por día disminuyeron. En estos lapsos se tuvo la esperanza de que la pandemia se podría controlar y posiblemente erradicar. Sin embargo, al continuar con las diversas actividades del país, las personas estuvieron expuestas al contagio. Por tal motivo, a partir del 29 de agosto de 2020 los contagios diarios volvieron a crecer.

- Según el modelo propuesto, el número de contagios diarios ha tenido dos "picos"; es decir, los contagios diarios tuvieron dos valores máximos el 18 de abril y 25 de julio de 2020, siendo este último más grande que el anterior.
- El modelo ilustra adecuadamente el comportamiento de la pandemia y se espera que el crecimiento de contagios diarios siga creciendo, a menos que se vuelvan a tomar medidas de aislamiento, sin embargo, en el momento que disminuyan tales medidas, los contagios aumentarán. La esperanza que se tiene para el control de la epidemia es contar con una vacuna y una campaña de vacunación efectiva, lo cual aumentaría la inmunidad en la población y, por lo tanto, los contagios disminuirán.

4. Referencias

Bartle, R. G. y Sherbert D. R. (1996). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Limusa.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI study. Springer.

Díaz-Castrillón, F.M. y Toro-Montoya, A.I. (2020). SARS-CoV-2/COVID-19: el virus, la enfermedad y la pandemia. *Medicina y Laboratorio*, 24(3), 183-205. https://doi.org/10.36384/01232576.268

Gabriel, E. (2019). *La regresión logística y la regresión no paramétrica: una propuesta para seleccionar el mejor modelo de regresión logística* [Tesis de Doctorado, Universidad Veracruzana].

Gabriel, E., Gabriel J.R. y Benitez, E. (2018). Coronavirus ¿pánico, exageración o realidad? Aportes teóricos. (Plan de contingencia). Universidad Veracruzana. https://www.uv.mx/plandecontingencia/files/2020/03/CoronavirusUV1.pdf

Greefrath, G. y Vorhölter K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and development from German speaking countries*. The 13 ICME topical surveys. Springer Open. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-45004-9.pdf

Johns Hopkins University (2020). COVID-19 *Dashboard by the Center for Systems Science and Engineering*. https://gisanddata.maps.arcgis.com/apps/opsdashboard/index.html#/bda7594740fd40299423467b48e9ecf6

Stillman, G.A., Blum, W. y Biembengut, M.S. (2015). *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences*. Springer.

Stillman, G.A., Blum, W. y Kaiser, G. (2017). *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education*. Springer.

CAPÍTULO 2. ¿CÓMO APRENDEMOS? DE LA ARITMÉTICA AL CÁLCULO Y AL ANÁLISIS *NON STANDARD*

Ricardo Cantoral Uriza (†)
DME-CINVESTAV-IPN, México

Resumen

La enseñanza del cálculo es un tema de interés para la educación contemporánea. Su masificación hacia el final del siglo XIX incrementó el interés por explorar nuevas formas de enseñanza tanto en Europa como en América. Un movimiento estadounidense denominado *reforma para la enseñanza del cálculo* influyó en diversos estados y países hace unas décadas. Este movimiento de reforma se expresó fundamentalmente a través de los libros de texto de la época, los cuales contenían enfoques con un mayor número de aplicaciones, una cierta diversidad de recursos digitales y la utilización sistemática de un lenguaje más cercano a una mayor diversidad de procedencias del estudiantado; digamos que se redujeron aspectos formales. Fue en ese contexto que se introdujeron en la enseñanza dos ideas fundamentales que modificaron el *discurso Matemático Escolar*: el empleo de representaciones múltiples (numéricas, gráficas y analíticas) por un lado, y por otra, la idea de la *linealidad local* para funciones de clase C^1 como recurso para el estudio del Cálculo. Sin embargo, la investigación reciente muestra que el aprendizaje de esas ideas precisa de algunos aspectos adicionales que develaremos en este escrito.[1]

1. Introducción

Este escrito, de naturaleza teórica, procura sostener que el método descrito en el resumen impregnó por igual a las clases de matemáticas del nivel preuniversitario (aritmética, álgebra y geometría analítica y precálculo), así como propiamente a la matemática universitaria (cálculo diferencial, cálculo integral, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, o bien el análisis matemático clásico). Dicho enfoque consistía en considerar que toda función $f(x)$ de clase $C^1(R)$ puede aproximarse localmente mediante una línea recta $y = mx + b$ tangente a f en el punto $(a, f(a))$.

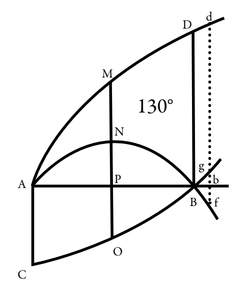
Se partía así, en las primeras clases de Cálculo, del acercamiento denominado *linealidad local*, lo cual pone en práctica dos ideas de la reforma, aquella de que la tangente es la recta que mejor aproxima a f en a, en este caso esto se expresa justamente: $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Pero no se discutía cuál sería la función polinomial de grado n que mejor aproxime a f en $(a, f(a))$, esto abría el paso a una nueva noción, el contacto y el orden de éste, más usual del Análisis Matemático y de la Geometría Diferencial; así se pedían funciones cuya aproximación fuese del orden $o(n)$.

1. El presente capítulo fue presentado en el XI EICAL durante el desarrollo del Grupo Temático GT7: *Enseñanza de las Matemáticas o Ciencias en Bachillerato*. Por lo tanto, algunos de los fragmentos podrían coincidir con lo expuesto en el video y resumen de este encuentro internacional. El video se encuentra en: https://www.youtube.com/watch?v=UQfDXtakgwY&list=PL883zdttugq6N-NFyCkhgQ31ue3zR5UzS&index=5&t=142s El resumen se encuentra en el enlace: https://recacym.org/eical11/files/GruposEical11.pdf.

Para confirmar la "buena aproximación", L'Hôpital propuso una interesante representación.

Tabla 1. Representación, versión de la Regla de L'Hôpital. Fuente: Fragmento e imagen traducidos por el autor y rescatados de la obra de L'Hôpital (1696, p. 187 y 201).

Sea AMD una línea curva (AP=x, PM=y, AB=a) tal que el valor de la ordenada y esté expresado por una fracción, en la cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando x=a, es decir, cuando el punto P caiga sobre el punto dado B [fig. 130]. Se pregunta cuál debe ser entonces el valor de la ordenada BD.



Se compara, entonces, al cociente de dos funciones f y g de clase C^1 cuyas gráficas se cruzaban en el eje x en la abscisa $x = a$. Es decir $f(a) = g(a) = 0$. Se trata de una forma indeterminada 0/0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La conclusión gravita entonces en una hipótesis válida al nivel local y se suple a la curva por su tangente, así las ideas infinitesimales para fines didácticos apoyan el enfoque y se valen de algunos elementos adicionales. Un acercamiento que vincule lo variacional, la tendencia de x hacia a, con lo infinitesimal $x - a$, lo dinámico con lo estático y lo contextual y funcional con lo formal. De ahí que la propuesta muestra que la variación ($x \to a$) antecede y acompaña a la *formalización*; es decir, la *praxis* (el cambio y la variación) antecede a la *semiosis* (la representación) y ésta, antecede a la *noesis* (la significación).

2. Desarrollo de la investigación

Como dijimos, la enseñanza del cálculo se constituyó como el paradigma de la educación universitaria, lo que proyectó el tema a un interés mayor para la educación. En este capítulo se usa como punto de partida la idea de base que se extrae del Teorema de L'Hôpital respecto de la linealidad local. Se considera como ejemplo una función racional (como la siguiente), con una sola indeterminación en $x = 1$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)}$$

La pregunta intencionalmente se cambió, en vez de solicitar el cálculo de un límite o de graficar la función racional f, se pregunta cómo definir f en $x = 1$, para que la función sea derivable. Este pequeño cambio en la tarea produce un debate interminable, pero fascinante. A continuación se muestra una tabla de valores numéricos que plantea la misma pregunta, ¿cuál debe ser la imagen en $x = 1$ para que f sea localmente lineal?

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 0.6\ 1.6 \\ 0.7\ 1.7 \\ 0.8\ 1.8 \\ 0.9\ 1.9 \\ 1.0\ \# \\ 1.1\ 2.1 \\ 1.2\ 2.2 \\ 1.3\ 2.3 \\ 1.4\ 2.4 \\ \vdots \end{array}$$

Aunque el grupo de colegas conocía la teoría matemática detrás de la pregunta, entendieron su intención didáctica y tomaron el rol de aprendices. Aparecieron varias respuestas: debe valer 2 pues "se ve" (se deduce) del comportamiento numérico. Aunque no se pueda dividir 0/0 se observa que la tabla tiene a 2. Algunos dijeron: "es que el cociente es una función lineal", pero ¿si no lo fuera? Se dieron también otras respuestas.

A continuación se muestra que las principales ideas en la reforma seguían una antigua idea de A.A. Cournot, propuesta en 1841. En esas charlas se seguían los pasos propuestos por la reforma para la enseñanza del cálculo; al respecto se publicaron los hallazgos en Cantoral (1997). En seguida se trata una función cuyo cociente no sea lineal, por ejemplo, una variante de la propuesta por Cournot. (1841). Él sostenía que existía una categorización de las funciones en dos clases, entre aquellas que serían matemáticas y otras empíricas, que expresaba una filosofía de uso del saber matemático que en su época se denominó matematización de la naturaleza y que acompañó a lo que hoy llaman modelación matemática. El énfasis está puesto en las propiedades generales, ya sea de la naturaleza o de la matemática, en este caso es la búsqueda de la linealidad. Esto queda de manifiesto en el texto de L'Hôpital de 1715 respecto de *su regla*. Ver figura anterior.

Es justo durante la primera mitad del siglo XIX cuando el énfasis estuvo en la matematización de los principios y leyes que daban lugar a teoremas y teorías matemáticas bajo el programa newtoniano. En particular, por ejemplo, esas ideas se usaron en la dinámica de fluidos relativas a la matematización de la naturaleza (Dalmédico, 1992). En el contexto de la época, usando notación actual, la idea consistía en considerar un cociente de funciones f y g de clase C^1, con la propiedad que de ambas valgan cero en $x = a$. Es decir $f(a) = g(a) = 0$. De modo que lo que buscó fue tratar el límite que corresponde a la forma indeterminada 0/0. El enunciado sería:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Veremos a continuación el ejemplo referido, pero partiendo del acercamiento de linealidad local, basado en una de las ideas de la reforma de la enseñanza del cálculo. De todas las aproximaciones, la mejor aproximación lineal de p en a, es justamente: $p\,(x) = p\,(a) + p'\,(a)\,(\,x - a)$. Con este elemento tendríamos que:

$$\frac{f(x)}{g\,(x)} = \frac{f(a) + f'\,(a)\,(x{-}a)}{g\,(a) + g'\,(a)\,(x{-}a)} = \frac{(f'(a)}{(g'(a)}$$

El primer paso fue desarrollar el tratamiento numérico para mostrar la plausibilidad del resultado, como se observa a continuación (Cantoral, 1997, p. 118):

> Cournot planteó que las funciones, ya sean matemáticas o empíricas, disponen de ciertas propiedades generales que son de gran importancia, no solamente para la teoría abstracta del cálculo, sino más bien para la interpretación de fenómenos naturales. Señaló, además, la conveniencia de tratar a las funciones en sus representaciones múltiples, tablas de valores, gráficas, enunciados, o fórmulas algebraicas. Citamos al respecto aquella que él mismo consideró la más destacada de las propiedades de esas funciones, que consiste en saber que las variaciones del valor que tiene una función, a partir de un valor determinado, son sensiblemente proporcionales a las variaciones correspondientes de la variable dependiente, cuando estas variaciones son muy pequeñas. Comentó también que ya el lector habría visto una aplicación muy importante de este principio, en la manera de usar las diferencias proporcionales anexas a las tablas de logaritmos. Con estos mismos elementos, dos siglos después se han estructurado algunas de las propuestas actuales como la de Tall *et al*. (1986), Demana *et al*. (1992), Hugher (1992), O'Callaghan *et al*. (1993).

Trataremos enseguida algunos ejemplos. El primero de Cantoral y Farfán (2010, p. 215):

> Respetando el calendario, iniciamos con uno tomado del texto de Cournot. Considera la función algebraica
>
> $$f(x) = \frac{(x^2 - 7\,x + 6)}{(x - 10)}$$
>
> representada por las dos ramas de la curva hiperbólica (*ilmn*, *suv*, en su notación) que se separan por una ordenada asintótica, correspondiente a la abscisa x = 10. Se presenta el siguiente tratamiento numérico para apoyar su argumentación.

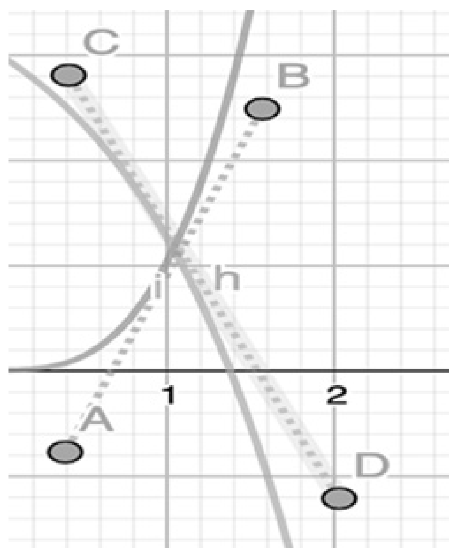
Tabla 2. Estudio de diferencias. Fuente: (Cantoral, 1997, pp. 118-119).

x	y	diferencia	x	y	diferencia
x = 1.00	y = 0.00000		x = 6.00	y = 0.00000	
x = 1.01	y = +0.00555	+0.00555	x = 6.01	y = −0.01256	−0.1256
x = 1.02	y = +0.01109	+0.00554	x = 6.02	y = −0.02523	−0.1267
x = 1.03	y = +0.01662	+0.00553	x = 6.03	y = −0.01278	−0.1278
...	...	...	...	...	...

> La ley de proporcionalidad se verifica con una gran aproximación en los dos casos. A pesar de que se ha hecho variar el valor de x por grados iguales y se han considerado crecimientos iguales de x, equivalentes a un centésimo –esta no es una fracción muy pequeña–, los valores de y varían más rápidamente en el segundo caso que en el primero. Si hubiéramos puesto una serie de valores de x equidistantes por un milésimo, la proporcionalidad de variaciones correspondientes de y se tendría de una manera mucho más próxima.

El siguiente paso es dar un sentido visual a la propiedad estudiada. En esta representación las gráficas de las funciones diferenciales son localmente líneas rectas como se observa en la siguiente imagen:

Tabla 3. Representación gráfica de la aproximación local. Elaboración propia.



3. Pensamiento Matemático Avanzado

En los años ochenta se impulsa un programa de investigación que busca dilucidar el pensamiento matemático avanzado cuando trata de temas complejos e incorpora generalización, abstracción y demostración en Matemáticas. El objetivo es entender cómo entienden las personas contenidos matemáticos específicos, cercanos a la comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos. El atributo avanzado obedecía a los conocimientos y a los procesos del pensamiento.

Los investigadores interpretan cómo entienden las personas un contenido específico matemático, caracterizan los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos. Según Sierra (2018, p. 33) citando a Cantoral *et al*. (2000)

> Algunas versiones sobre cómo se interpreta el desarrollo del pensamiento matemático lo entienden como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Otras, como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas.

En otra visión, Cantoral (2019) declara que el pensamiento matemático también se desarrolla al enfrentarse con situaciones cotidianas, es decir, se desarrolla en todos los seres humanos ante tareas múltiples. En un sentido moderno, el pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y, por otro, procesos avanzados del pensamiento como serían la abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. Según narra Garbin (2015, p. 139):

> [...] se reunieron Gontran Ervynck y David Tall en 1986, para formar un grupo de estudio sobre Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y trabajar en un libro (Tall, 1991) con el mismo nombre [en el cual] consideraron las matemáticas de secundaria y las de universidad, tratando de conectarlas con la manera de pensar de los matemáticos. Es decir, desde este comienzo, estarían incluidos bajo el nombre del PMA los últimos años de la escuela secundaria hasta el pensamiento formal axiomático basado en definiciones y demostraciones. Años después, en otras publicaciones, se ha debatido el significado de la frase Pensamiento Matemático Avanzado. ¿Debería el término "avanzado" referirse a las Matemáticas o al pensamiento o ambos? Sternberg (1996) escribió en el último capítulo de su libro sobre la naturaleza del pensamiento matemático, "no existe un acuerdo sobre qué es el Pensamiento Matemático". En este capítulo se consideran ambas perspectivas, como fue la intención de los fundadores del primer grupo de estudio (Harel, Selden y Selden, 2006).

Un ejemplo paradigmático de este programa es el artículo de Tall y Vinner sobre *concept image* y *concept definition*. En él se muestra un modelo simple del entendimiento humano muy cercano al planteado por Règine Douady con su propuesta de Dialéctica Herramienta-Objeto. En todos los casos, se sostenía que las ideas matemáticas tenían dialécticas constructivas y procesos de significación.

La propuesta que, desde esa época, yo sostenía, era socioepistemológica, combinaba la matemática en todos sus aspectos a la par de su dimensión histórica, social y cultural. Donde los procesos del pensamiento se analizan con ayuda de la epistemología y la cognición. Unos años después, propuse la creación del enfoque socioepistemológico que a la postre derivaría en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

3.1 Las propuestas más innovadoras

Consideramos algunas propuestas, una en particular se basa en los modelos infinitesimales, otra en las lógicas *non standar* y una más denominada modelos variacionales. Para la primera de éstas, se emplea la idea de cantidades infinitamente que no se corresponden con nuestra idea de número real. Por ejemplo, un infinitesimal es un número cuyo valor absoluto es menor que cualquier positivo dado, sin ser nulo. Es decir, si q es un infinitesimal positivo, entonces para todo real positivo r, se cumple que $0 < q < r$. ¿Cómo podrían ser tales números?

En términos modernos diríamos que un elemento no cero de un campo ordenado F es un infinitesimal, si y solamente si su valor absoluto es más pequeño que cualquier elemento de F de la forma $1/n$, para n un número natural estándar, es decir $n \in N$.

Esto llevó a una definición de un campo nuevo denominado hiperreales, denotado como $^*R$. Donde R es el campo de los números reales y N el semianillo de números naturales, se define a R^N como el conjunto de sucesiones de números reales. En este esquema $^*R$ es definido como un adecuado cociente de R^N como sigue tomando un ultrafiltro no principal $F \subseteq P(N)$. En particular F contiene el filtro de Fréchet. Considere un par de sucesiones u y v en R^N decimos que u y v son equivalentes si ellas coinciden sobre un conjunto de índices que es un miembro del ultrafiltro, o más precisamente: $\{n \in N \mid u_n = v_n\} \in F$. El cociente de R^N con la relación de equivalencia resultante es un campo hiperreal $^*R$, situación que se resume por la fórmula $^*R = \frac{R^N}{F}$.

Los profesores Ímaz y Vorel (1968) y Takeuchi, *et al*. (1963) no siguieron la ruta anterior. Construyeron, más bien, un campo propio sin usar la teoría de filtros y ultrafiltros. El primero se basó en campos no arquimedianos con base en el modelo de Levi-Civita, y el segundo se apoyó en un caso del análisis *non standard*.

La última propuesta que deseamos señalar consiste en asumir a la variación como noción clave para el cálculo, sea esta variación infinitamente pequeña o variación finita. Esta idea fue desarrollada originalmente por Leibniz y Euler, para quienes la expresión infinitamente pequeño es una acepción relativa, pues dx es infinitamente pequeña respecto de x, pero a la vez, infinitamente grande respecto de $d^2 x$. Aquí el aspecto de importancia fue una nueva noción, la de variación sucesiva y, en consecuencia, la de órdenes de magnitud. Ésta ha sido llevada por el grupo de investigación sobre Pensamiento y Lenguaje Variacional del CINVESTAV, IPN. Así mismo, se precisa de dos aspectos de la variación, su temporización y su causalidad, así como la construcción de un sistema de referencia variacional específico para tratar el cambio. Para mayores detalles puede consultar (Cantoral *et al*., 2018; Cantoral, 2019).

De este modo, con una diversidad de encuadres metodológicos, entre hermenéutica, estudios cualitativos de casos, investigación, acción, macro y micro ingenierías didácticas y etnometodologías, pudimos evidenciar la presencia de patrones culturales en la construcción social del conocimiento matemático. Muy en especial nos referiremos en este apartado al origen de la noción de predicción en el programa newtoniano de la filosofía de la naturaleza. Veamos la relación particular entre predicción, el conocido binomio de Newton, para quien P y PQ representan magnitudes variables tales que PQ es menor que P.

En ese sentido, la expresión P + PQ, tiene el mismo significado que el $x + dx$ *leibniziano*, o la expresión finita de $x + h$. De modo que Newton estaba interesado en saber cómo cambia la variable, o f en general, el esquema –el modelo–, la ley si cambia un instante o un infinitesimal la variable x. Newton buscaba determinar el carácter estable del cambio. De hecho, le interesaban los cambios instantáneos, o como él los llamaba momentos (son magnitudes infinitamente pequeñas que representan los principios nacientes de cantidades finitas). Detrás de esta idea podemos reconocer, a todas luces, el *prædiciere* de la actividad científica, el origen de las cosas, pues con él se oculta la posibilidad de determinar el estado ulterior del sistema.

Esa idea la buscamos en las producciones de las y los estudiantes en diversos ámbitos formativos, estudiantes de cálculo, física, economía y más recientemente en medicina. En todos los casos, el pensamiento comparado en sus estados y cambios. El esquema general es el siguiente, si A es el estado primero y B el estado segundo y f, la transición, el pensamiento centra su atención primeramente en los cambios de A en B, lo que permanece de A en B y lo que B aporta casi sin la huella explícita de A. Digamos que compara A con B.

$$A \ \Delta\!\rightarrow B$$

En el lenguaje usual del cálculo se tendría:

$$f(x) \to f(x+h)$$

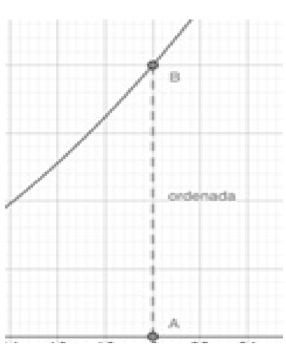
Lo que introduce una nueva operación, la variación $\Delta = f(x+h) - f(x)$. Dicha operación, para efectuarse, debe definir un sistema de referencia, una temporización *h,* a partir de un sistema cada vez más pequeño. Finalmente eso sólo es posible si se establece una organización de las variaciones sucesivas, digamos $\Delta, \Delta^2, \Delta^3, \ldots$ que será la base de la teoría de las ecuaciones diferenciales $f(x, y, y',$ $y', \ldots, y^{(n)} = 0$.

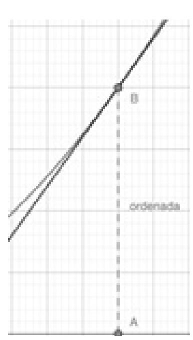
4. Resultados y discusión

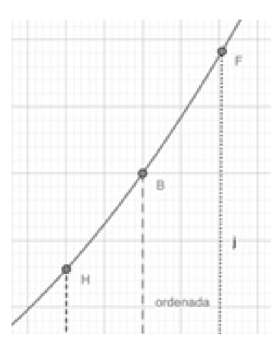
Con los ejemplos mencionados, retomamos la pregunta inicial, ¿cómo aprendemos?, y la respondemos sintéticamente, variando, estableciendo comparaciones entre estados vecinos y prolongando o recortando propiedades del estado inicial. Es así como el pensamiento opera mediante la comparación de estados. Llamaremos a ésta la *variación conceptual*. Surge entonces una pregunta, cómo desarrollar en el pensamiento infantil, juvenil y adulto formas variacionales del pensamiento. Al momento tenemos en claro que se precisa de un sistema de referencia de naturaleza variacional, digamos que no sólo ubique puntos en el plano, sino que permita comparar variaciones del mismo orden entre sí y comparaciones de órdenes diferentes.

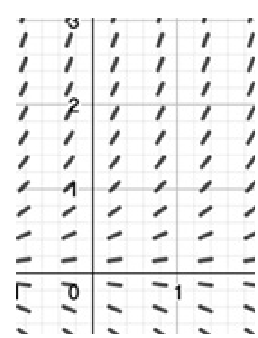
Tabla 4. Sistemas de referencia variacional. Elaboración propia.

(x, y)	$(\Delta x, \Delta y)$	$(\Delta x^2, \Delta^2 y)$	$f(x, y, y', y'') = 0$
$Y = f(x)$	$y' \approx$	$y'' \approx$	$y^{(n)} \approx$









Este esquema es consecuencia de estudios particulares en donde el contexto en el que se plantea el problema exige un relativismo epistemológico. Se trata de un caso de estudio respecto al cambio en situaciones limítrofes en el contexto de la medicina, particularmente en el ámbito de la cardiología de Moreno-Durazo (2018), aplicado además a los principios de conservación de la materia entre estudiantes de bachillerato, siguiendo a Caballero-Zavaleta (2019), y el examen de la naturaleza cualitativa de las ecuaciones diferenciales en Fallas-Soto (2019).

¿Cómo se expresa esto en términos de lenguaje, por ejemplo, en Geometría Analítica? Los estados de la variación serían: ordenada, pendiente y concavidad; en física los estados de variación, en forma lingüística y conceptual serían: posición, velocidad y aceleración. En los sistemas autónomos de las ecuaciones diferenciales aparecen las fases, las direcciones y así un largo etcétera. En todos ellos, se establece una transversalidad de la variación entre las matemáticas y otras disciplinas académicas, científicas y tecnológicas.

Esto exigirá cambios en la formación inicial de profesores y en la formación continua y un cambio curricular como el que se señala en José-Luiz (2019). En breve, la variación será un enfoque sobre el aprendizaje en diversos niveles etarios, pero esa ya es otra historia. Todo esto dará lugar en unos años a un libro sobre el estado que guarda esta línea del pensamiento.

Agradecimientos

Quiero agradecer a la Doctora Angélica Moreno por sus comentarios a este artículo y a la Doctora Judith Hernández por el impulso a su publicación.

5. Referencias

Caballero-Pérez, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* [Tesis de Doctorado, CINVESTAV].

Cantoral, R. (1997). Los textos de cálculo: Una visión de las reformas y contrarreformas. *Revista EMA. Investigación e Innovación en Educación Matemática*, *2*(2), 115–131.

Cantoral, R. (2019). *Los caminos del saber. Pensamiento y lenguaje variacional*. Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2010). Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas. En Matos, J. M y Rodrigues, W. (Eds.). *A reforma da Matemática Moderna em contextos iberoamericanos* (pp. 209-230). UIED-Coleção Educação e Desenvolvimento.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. y Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 50(1), 77-89.

Cournot, A. A. (1841). *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*. Blanchard.

Dalmédico, A. (1992). *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et L'École Francaise*. Éditions du Choix.

Fallas-Soto, R. (2019). *Variación Acotada y Predicción. Prácticas socialmente compartidas en la significación de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial* [Tesis de Doctorado, CINVESTAV].

Garbin, S. (2015). Investigar en Pensamiento Matemático. En J. Ortiz y M. Iglesias (Eds), *Investigaciones en Educación Matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 138-153). Unidad de Investigación del Ciclo Básico (UICB) de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES), Universidad de Carabobo (UC), Campus La Morita.

Hernández-Zavaleta, E. (2019). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de "lo errático"* [Tesis de Doctorado, CINVESTAV].

Ímaz, C. y Vorel, Z. (1968). *Ecuaciones Diferenciales*. Limusa-Wiley.

José-Luiz, E. (2019). *Derivadas e suas aplicações em cursos de engenharia na perspectiva Socioepistemológica* [Tesis de Doctorado, Universidade Luterana do Brasil].

L'Hôpital, G. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris.

Moreno-Durazo, A. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas* [Tesis de Doctorado, CINVESTAV].

Sierra, J. (2018). *Factores de uso en la práctica pedagógica de materiales didácticos manipulativos estructurados y no estructurados para la enseñanza de la suma de cantidades de una y dos cifras* [Tesis de Maestría, Universidad Externado de Colombia].

Takeuchi, Y., Ramírez, A. y Ruíz, C. (1963) *Ecuaciones diferenciales*. Limusa.

CAPÍTULO 3. EDUCACIÓN Y PANDEMIA DE COVID-19. CASO: CÁLCULO DIFERENCIAL

Carlos Armando Cuevas-Vallejo, ccuevas@cinvestav.mx
dme-cinvestav-ipn, México

Resumen

La inusitada pandemia de covid-19 o Sars-CoV-2 ha paralizado a los países del orbe y la educación ha tenido que cambiar abruptamente su modelo presencial tradicional a clases en línea o televisivas. Esta situación plantea nuevos paradigmas e interrogantes a la educación: ¿Cuáles son los inconvenientes que la actual situación plantea? ¿Cuáles serán los frutos de esta situación? ¿Cuáles cambios serán necesarios en esta nueva normalidad? ¿Serán permanentes o temporales? Este capítulo analiza y propone respuestas. Además, la pandemia ha puesto de relieve lo necesario de los matemáticos y con ello la importancia de la enseñanza de las matemáticas en el preuniversitario y universitario. La información del avance de la pandemia se muestra a través de gráficas de modelos matemáticos de propagación del virus, por lo tanto la lectura obligada de gráficas y el uso de un vocabulario propio de matemáticos plantea la necesidad de una cierta cultura mínima de precálculo y cálculo.

1. Introducción

En marzo del 2020 el mundo se detuvo, la pandemia del coronavirus o Sars-CoV-2 o covid-19, declarada por la Organización Mundial de la Salud (oms) ha impactado a nuestra sociedad de forma violenta, dejando cientos de miles de muertos a su paso. La educación, sensible a cualquier cambio social, se ha visto conmocionada, obligando inesperadamente a todas las instituciones educativas a cerrar sus puertas y a migrar su forma de enseñanza presencial en el aula a una enseñanza en línea. Los estudiantes de distintos niveles educativos interrumpieron sus cursos tradicionales presenciales y se vieron en la necesidad de utilizar las tecnologías digitales para comunicarse y recibir clases. Según la onu, alrededor de 1,370 millones de estudiantes en el mundo y 156 millones en América latina (Boletín onu, 2020). En contraparte, los profesores, obligados por las circunstancias, tuvieron que modificar su práctica escolar, materiales y didácticas específicas de manera abrupta, teniendo que improvisar en la mayoría de los casos para ajustarse a esta nueva modalidad (DeVaney *et al.*, 2020).

1.1 De los inconvenientes o problemas

La epidemia tomó por sorpresa al medio educativo y los profesores tuvieron que impartir clases utilizando recursos digitales en todos los sectores educativos. A su vez, millones de alumnos fueron obligados al confinamiento en casa. Se reporta que 91% de los estudiantes de diferentes niveles educativos del mundo debieron utilizar las tecnologías digitales para comunicarse y recibir clases (DeVaney *et al.*, 2020).

La pandemia ha puesto en evidencia las grandes diferencias sociales y económicas de nuestra sociedad, mientras la OMS recomendaba severas medidas de higiene y lavado de manos, muchos hogares carecen de este vital líquido. Las zonas suburbanas de las grandes capitales y las rurales sufren de graves carencias, además la atención hospitalaria pública es en muchos sentidos insuficiente y deficiente (Aguirre, 2020).

La pandemia también vino a evidenciar un problema ya detectado del fracaso de la educación matemática presencial, como lo demuestran las normas internacionales (OCDE, 2019). La última evaluación del PISA, en 2019, demostró que los países latinoamericanos obtuvieron una puntuación inferior a la media en lectura, matemáticas y ciencias; sólo el 1% de los estudiantes mexicanos superaron los estándares más altos (nivel 5 o 6); además, no se había producido ningún avance significativo en la puntuación en las dos últimas décadas. A partir de este abrupto cambio se detectaron problemas como los siguientes:

Muchos estudiantes no contaban con dispositivos digitales como computadora para la clase. En el hogar, si existía una laptop o dispositivo digital, tenía que ser compartido por la familia.

Muchos hogares no tienen acceso a la red de Internet (Engelbrecht *et al.*, 2020). La mayoría de las instituciones no contaban con material realizado y diseñado para la educación en línea o autoaprendizaje ni con plataformas adecuadas, por lo que los profesores tuvieron que recurrir a diversos programas comerciales para la comunicación vía web. Como Yahoo Messenger, IRC Hispano, Whatsapp, Facebook Messenger, Facetime, Hangouts, Line, entre otros y también de videoconferencia como Google Hangouts, Jitsi, Skype, ooVoo, Zoom, Slack, Microsoft Teams, GoToMeeting, Google Meet o BlueJeans.

Sin embargo, tanto profesores como alumnos no estaban familiarizados con el manejo de dichas plataformas y tuvieron serias dificultades para la comunicación, entre las cuales podemos anotar: no saber si los estudiantes están efectivamente atendiendo a la clase; se tiene mucha dificultad para escribir las fórmulas matemáticas en documentos digitales y transmitirlas; no se tiene certeza si los estudiantes resuelven por sí mismos los problemas o recurren a programas o ayudas de otros; no se tiene evidencia de que la evaluación sea respondida por los estudiantes; la mayoría utiliza teléfonos inteligentes en donde la interfase es muy pequeña y el consumo de datos enorme; el abandono estudiantil en los cursos es grave; los profesores tienen que asumir el costo de internet, energía, equipo y plataforma; el estrés al que estaban sometidos los estudiantes por la muerte o enfermedad de familiares y amigos dificulta su concentración; se desconocen muchas de las herramientas matemáticas que se ofertan en línea; los estudiantes no contaban con un espacio privado para llevar a cabo las lecciones y por ende el ajetreo usual de casa era un distractor importante; no se puede obligar al uso de internet.

1.2 Del lenguaje de los epidemiólogos

Esta pandemia ha puesto de relieve la necesidad de los matemáticos y con ello la importancia de la enseñanza de las matemáticas en el preuniversitario y universitario. En efecto, la información del avance de la pandemia se muestra por gráficas de curvas que representan modelos matemáticos de propagación del virus. Día a día nos presentan diversas curvas asociadas a la propagación del virus en nuestra sociedad. Cuando los médicos comunican a la población el estado de la pandemia en nuestro país, usan términos como: aplanar la curva, crecimiento exponencial, decrecimiento, no-crecimiento, tasa de contagios y de mortalidad, campana de Gauss y muchas más, de tal manera que, términos reservados para los matemáticos se han naturalizado en nuestra sociedad. Esto ha causado gran controversia, puesto que muchos gobernantes y políticos no han querido aceptar los pronósticos y establecen debates en donde se manifiesta el enorme desconocimiento de lo que un modelo matemático aporta y lo que la gráfica indica. Recientemente el gobierno, a través de un epidemiólogo, mencionaba que se podía apreciar que el número de contagios de ayer a hoy había disminuido y lo mismo el de ayer con el de anteayer e igual con el de anteayer con el anteanteayer, lo cual indicaba una disminución del impacto. Esto motivó disputas, burlas y ataques de los lectores de noticias y políticos, cuando lo que mencionaba el médico es un hecho matemático conocido, llamado de decrecimiento. Veamos algunos términos popularizados por médicos y autoridades:

Para dimensionar el nivel de propagación del virus dicen: “Cuando se habla de que el virus no se propaga de uno en uno, sino de primero uno, luego, dos, luego, ocho, después 16… es exponencial y no de uno a uno, lineal”

El lenguaje representa la sucesión o progresión del tipo: 1, 2, 4, 8, 16, 32…

Y se define el término de la función exponencial: $f(x) = 2^x$ con $D_f = [0,\infty)$ a diferencia de la función lineal de uno en uno que es $g(x) = x$ con el mismo dominio (ver figura 1).

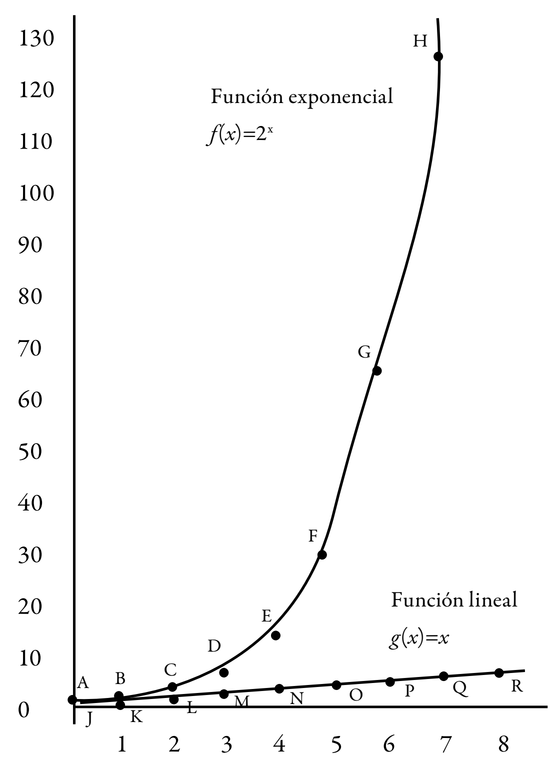
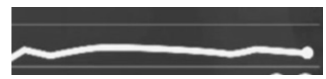


Figura 1. Comparación de funciones. Elaboración propia.

Para decir que la propagación del contagio va disminuyendo dicen: “Vemos que la pandemia disminuye en su propagación ya que el número de contagios de ayer a hoy había disminuido o no había crecido y lo mismo el de ayer a anteayer e igual con el de anteayer a anteanteayer”, lo cual indicaba una disminución del impacto.

A este fenómeno se le conoce como una curva DECRECIENTE o NO-CRECIENTE y significa que la función $f(x)$ cumple que $f(x) \geq f(x+h)$ para una $h > 0$ pequeña, en un cierto intervalo (14 ,28) o bien, en caso de ser continua y diferenciable o aproximada por una de ellas, se cumple

$$\frac{df(x)}{dx} \leq 0 \text{ para } x \in (14, 28)$$



Detalle de curva. Si se observa el último intervalo del 14 al 28 de mayo veremos el segmento de la curva.

Figura 2. Segmento de curva no creciente. Fuente: Secretaría de Salud (2021).

En el mismo sentido se menciona la frase: "Hemos logrado domar la pandemia" para decir que lograron disminuir la velocidad del contagio (ver figura 3).

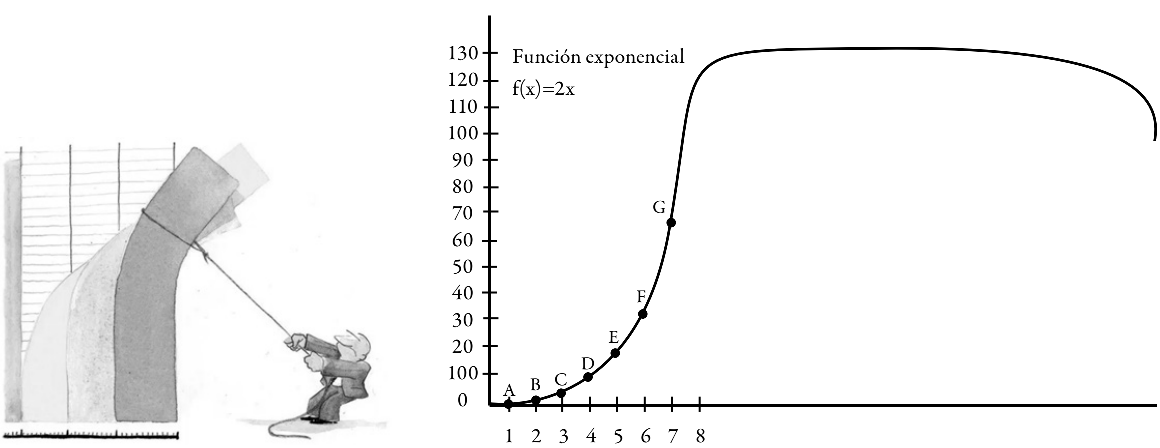


Figura 3. Domar la pandemia o la curva. Elaboración propia con datos de la Secretaría de Salud (2021).

Este concepto, "domar la curva", se refiere matemáticamente a cuando una curva pasa de creciente a no creciente y finalmente a decreciente. Esto es: si la curva se representa por una función f(x) que para un primer intervalo se tiene que:

$$\frac{df(x)}{dx} \geq 0, \text{ para } x \in (a, b) \text{ de esto pasa a } \frac{df(x)}{dx} \leq 0, \text{ para } x \in (b, c) \text{ y finalmente}$$

$$\text{a } \frac{df(x)}{dx} < 0, \text{ para } x \in (c, d).$$

Veamos otra cita frecuente "hemos logrado aplanar la curva" (ver figura 4).

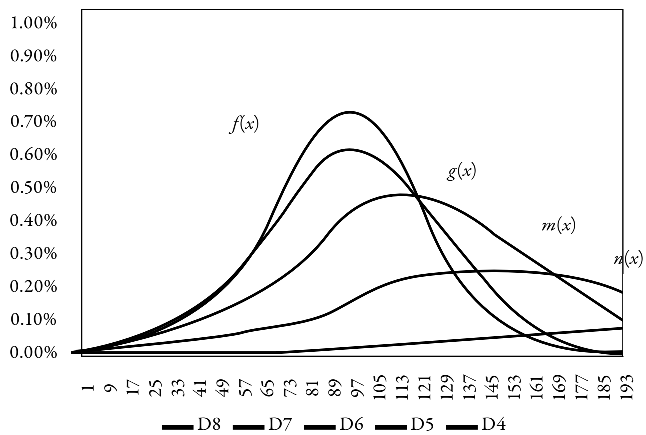


Figura 4. Hemos logrado aplanar la curva. Fuente: Secretaría de Salud (2021).

¿Qué significa esto? Se nos muestra que el pronóstico de un crecimiento acelerado (la curva más elevada), mediante acciones de cuidado como sana distancia y aislamiento se logró disminuir el crecimiento.

Pero ¿qué significa crecer aceleradamente? Pues significa que la pendiente del segmento de curva es elevada y aplanarla significa disminuir la pendiente.

Y ¿cómo se mide la rapidez del cambio en una curva? O equivalentemente ¿cómo se mide la variación de una función? Pues precisamente la derivada es una medida de la variación de una función o de la rapidez con la que la misma cambia, así se entiende entonces que para ciertos intervalos:

$$\frac{df(x)}{dx} > \frac{dg(x)}{dx} > \frac{dm(x)}{dx} > \frac{dn(x)}{dx}$$

Otra frase frecuente de los epidemiólogos es: "La tasa de contagios va disminuyendo" (ver gráfica 5). Como ustedes saben, la tasa de crecimiento se refiere a la variación de la función cuya gráfica se visualiza y de nuevo esta tasa está definida por la derivada. Hemos superpuesto en la gráfica que muestran los epidemiólogos segmentos de recta tangente, para visualizar cómo las respectivas pendientes van disminuyendo (ver gráfica 5).

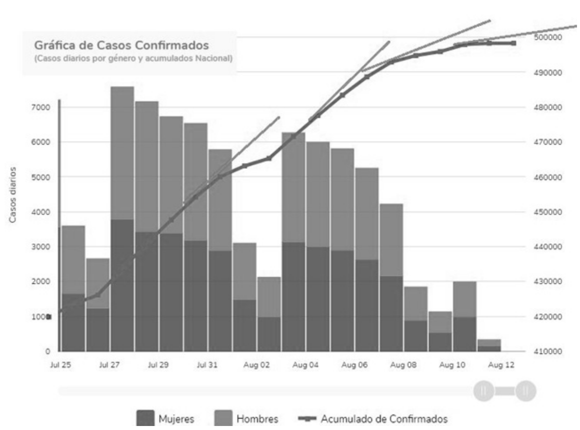


Figura 5. La tasa de contagios va disminuyendo, o las respectivas pendientes de tangentes van disminuyendo. Fuente: Secretaría de Salud (2021).

Al mostrar gráficas, como la figura 6, mencionan: “Hemos pasado el pico o cresta de contagios”.

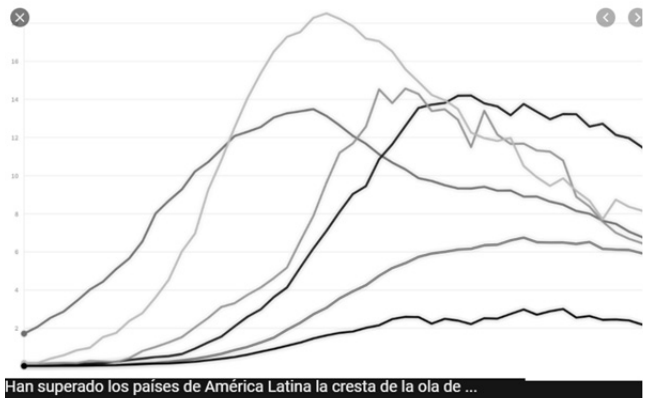


Figura 6. Hemos superado el pico o cresta de contagios. Fuente: Secretaría de Salud (2021).

La cresta se refiere a cuando una curva pasa de creciente a decreciente, esto es si la curva continua se representa por la función $f(x)$ definida en un cierto intervalo (a, b) entonces si $\forall\, x_1, x_2 \in (a, x_0)$ y $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_1) < f(x_2)$ y si también $\forall\, x_3, x_4 \in (x_0, b)$ y $x_3 < x_4 \rightarrow f(x_3) > f(x_4)$, entonces en $f(x_0)$ se tiene un máximo. O si la curva es además diferenciable, entonces si $\forall\; x \in (a, x_0)$ se cumple que $\frac{df(x)}{dx} > 0$ y si además $\forall\, x \in (x_0, b)$ se tiene que $\frac{df(x)}{dx} < 0$ entonces en $f(x_0)$ se tiene un máximo.

De esta manera podemos seguir ilustrando el lenguaje de los médicos epidemiólogos, asesorados por matemáticos. Las burlas de ciertos locutores o personas se deben a la enorme ignorancia de cierta matemática elemental.

2. De los modelos matemáticos del covid-19

Aunque existen varios modelos de transmisión del virus, mostraremos el modelo SIR (Castro *et al.*, 2020, p. 3).

> Para medir el nivel de propagación del Sars-CoV-2. Para ello, se tiene una función que se determina mediante la solución al sistema de ecuaciones diferenciales:
>
> $$\frac{ds(t)}{dt} = -\beta s(t) i(t)$$
> $$\frac{di(t)}{dt} = (\beta s(t) - \alpha) i(t)$$
> $$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha i(t)$$
>
> En donde, s(t) representa las proporciones de susceptibles, i(t) de infectados y r(t) de removidos, todos respecto al tamaño N de la población (constante):
>
> Asimismo, los parámetros: β es la tasa de infección y α es la tasa de recuperación, en el supuesto de que las proporciones iniciales $s(0) = s_0 > 0$, $i(0) = 1 - s_0 > 0$ y $r(0) = 0$.

> La primera ecuación nos dice que la velocidad $\frac{ds(t)}{dt}$ con la que decrece (signo negativo) el número de susceptibles es proporcional al producto $s(t)i(t)$, donde este producto se puede interpretar como la probabilidad de que una persona susceptible se encuentre con una infectada y el parámetro β mide la probabilidad de que el contagio sea exitoso. Es interesante entender que β tiene tanto que ver con el número promedio de "encuentros" entre personas susceptibles e infectadas, como con el resultado de esa infección. Como discutiremos más adelante, esto tiene implicaciones en las políticas de aislamiento y de higiene.
>
> Una sencilla interpretación de los signos de las derivadas de *s(t), i(t) y r(t)*, garantiza que la proporción de individuos susceptibles disminuirá ($s(t) \leq s_0$) hacia su valor final
>
> s_∞ = s(t) y la proporción de removidos se incrementará hacia un valor final $r_\infty = r(t)$ mientras que, en ambos casos, existan individuos infectados. Por el contrario, la proporción de infectados aumentará si $\beta s(t) > \alpha$ y disminuirá si $\beta s(t) < \alpha$.
>
> La principal propiedad del modelo SIR, aplicado a Sars-CoV-2 o a cualquier otro patógeno, es que la propagación de la enfermedad termina con el paso del tiempo (es decir, la enfermedad es *no endémica*) o $i_\infty = i(t)$ (Castro *et al.*, 2020, p. 3).

Podemos concluir, de esta primera fase, que muchos de los informes de médicos epidemiólogos sobre avance y propagación de la pandemia no serán posibles de interpretar si no se tiene una cultura básica de cálculo y precálculo.

Pero de esta información surgen las preguntas: ¿cómo se construye una gráfica?, ¿cómo se lee o interpreta una gráfica?, ¿es difícil leer la información de una gráfica?

La respuesta a todas ellas nos lleva a la necesidad de entender elementos del Cálculo Diferencial; esto es debido a las gráficas de los modelos que se presentan para mostrar el avance o retroceso de la enfermedad, así como el número de infectados y decesos, se potencializa la necesidad de elementos del Cálculo Diferencial e Integral, la herramienta matemática por excelencia para construir y analizar las gráficas de funciones y estudiar la variación de la función modelo.

2.1 De los inconvenientes o problemas

La epidemia tomó por sorpresa al medio educativo y los profesores fueron obligados a impartir clases en línea en todos los sectores educativos. A su vez millones de alumnos fueron obligados al confinamiento en casa, 91% de los estudiantes de diferentes niveles educativos del mundo se vieron obligados a utilizar las tecnologías digitales para comunicarse y recibir clases (DeVaney *et al.*, 2020). Es temprano para hacer un diagnóstico del daño que causó la epidemia: a la educación, a la salud mental, a la administración de las escuelas, entre otros. Uno de los más graves fue que los estudiantes carecieron del contacto e intercambio educacional en una institución, es decir, del conocimiento que se da con la socialilización estudiantil. Si bien en la educación elemental este factor es fundamental, también lo es en el posgrado y licenciatura. Se perdieron al menos dos años de escolaridad —en algunos casos rescatada con el uso de la tecnología, pero en la mayoría fue pérdida total—. Lo cierto es que alrededor del 67% de las instituciones de educación superior cambiaron a la enseñanza en línea; la cuarta parte cerró para buscar soluciones y el 7% canceló sus operaciones (Regional & National Perspectives on the Impact of covid-19 on Higher Education). Esto fue una advertencia que el sector educativo debe tomar con seriedad y pensar en un futuro en una educación hibrida o a distancia.

Particularmente la enseñanza del cálculo a nivel universitario reporta un índice de reprobación o falla del 70% al 80%. Encuestas internacionales reportan que la mayoría de los docentes llevan a cabo una enseñanza de corte operativo, en donde el cálculo viene a ser un repertorio de fórmulas y algoritmos, a este problema se le llamó *algebrización del cálculo* (Tall, 1992; Cuevas y Pluvinage, 2009; Bressoud *et al*, 2016).

En otras encuestas se observa que un gran porcentaje de profesores de cálculo no emplean las tecnologías digitales como apoyo a sus cursos de cálculo, aún más en ciertos sectores docentes se detectó un cierto analfabetismo digital. Otros inconvenientes observados:

> La educación en línea deja mucho que desear, puesto que tanto docentes como alumnos no tienen experiencia en el manejo de plataformas e incluso del manejo de dispositivos digitales; muchos estudiantes no contaban con dispositivos digitales como computadora para la clase; en el hogar, si existía una laptop o dispositivo digital, tenía que ser compartido por la familia; muchos hogares no tienen acceso a la red de Internet; no contaban con material realizado y diseñado para la educación en línea o autoaprendizaje; el estrés al que estaban sometidos por la muerte o enfermedad de familiares y amigos dificulta su concentración; desconocían muchas de las herramientas matemáticas que se ofertan en línea; no tenías espacios privados para llevar a cabo las lecciones y por ende el trajín usual de casa era un distractor importante (Cuevas *et al*., 2020).

2.2 De las ventajas

Una de las pocas ventajas es que de manera obligada por las circunstancias, muchos docentes tuvieron que tomar cursos para el uso de plataformas digitales como Team, Zoom, y demás. Cursos de classroom, Google forms y de algunos *softwares* de apoyo. Esto obligó a reflexionar sobre la importancia de actualizarse en tecnologías digitales (Engelbrecht *et al*., 2020). Indudablemente las herramientas digitales ofrecen oportunidades para mediar en las actividades de aprendizaje en las que participan los estudiantes (Sfard y McClain, 2002), sin embargo, esto crea nuevos paradigmas y nos lleva a interrogantes como: ¿cuáles serán las mejores herramientas?, ¿qué tipo de herramientas se ofrecen en el mercado?, ¿modifica las formas de escritura tradicional?, ¿cómo se debe modificar el currículo escolar para integrar a las tecnologías digitales de manera preponderante?, ¿cómo se debe de modificar la forma tradicional de la enseñanza? Y esto, insistimos obliga a establecer cursos continuos de actualización docente. Otra ventaja importante es que al modificar nuestra forma de enseñanza se cuestionan las formas y métodos de la educación actual y se vuelve necesario repensar la educación matemática en general.

3. Repensar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática

Usualmente en los sistemas escolares tradicionales, a los maestros se les proporciona un programa de estudios, un texto y un avance programático donde se señala de forma exacta lo que deben enseñar y en qué tiempo. Enseguida se delega al docente toda la autoridad en el salón. Es decir, el saber es propiedad del maestro quien, a su vez, lo entrega al estudiante y con frecuencia el saber se encuentra dentro de la institución. Mediante el programa de avance programático, la instrucción se ejerce de forma autoritaria y jerárquica y se basa en la persona. Con frecuencia a los alumnos se les considera meros receptores y los profesores vienen a ser el recurso dominante. A los estudiantes se les enseña de manera uniforme y en este sentido, las escuelas se consideran islas tecnológicas; es decir, la tecnología se acepta y promueve para apoyar las prácticas existentes y para lograr mejoras en la eficiencia. Pero desde hace tiempo eso cambió y el acceso al saber es generado por el estudiante por medio de los dispositivos digitales. Y a veces a pesar del profesor. El día de hoy, la información ya no es controlada por el maestro, ni siquiera por el Estado; los estudiantes tienen diversas maneras de acceso a la información y el maestro ha perdido este control. Mientras el maestro ilustra un tema o un problema, el alumno puede estar indagando en la red diversas informaciones de éste, con distintos enfoques, o resolver el problema mediante el auxilio de algún *software*. Necesitamos aceptar la diversidad y establecer prácticas pedagógicas diferenciadas. Personalizar las experiencias educativas; es decir, construir la instrucción de acuerdo con las capacidades de los estudiantes, ayudándolos a personalizar su aprendizaje y evaluarlos de manera que se promueva la participación y el talento (Saltiel y Viennot, 1985).

Se requiere utilizar el potencial de las tecnologías digitales, liberar el aprendizaje de las convenciones anteriores y conectar a los estudiantes de maneras nuevas y poderosas. Si bien el conocimiento ha dejado de ser propiedad del profesor, también lo es que el profesor puede sugerir sitios en donde la información sea confiable, recordemos que en la red de internet se encuentra tanto información falsa como veraz. Es necesario establecer proyectos de aprendizaje participativos, de situaciones reales e interesantes para los estudiantes (Cuevas y Pluvinage, 2003; Viennot, 1979).

Aprovechar los recursos tecnológicos para hacer de la enseñanza de la matemática y las ciencias naturales un ejercicio experimental, en donde el dispositivo digital se puede convertir en un laboratorio portátil (Vázquez, 2014). Promover un aprendizaje colaborativo y a la vez personalizado y diferenciado, en donde cada alumno pueda desarrollar su aprendizaje a su propio ritmo y eso significa cambiar las normas de trabajo. En el mundo plano, todo lo que es nuestro conocimiento mañana será una mercancía disponible para todos.

Debido a que la tecnología nos ha permitido actuar sobre nuestra imaginación, el éxito será de aquellos que dominen las nuevas formas de colaboración. Estamos viviendo el cambio de tecnologías y acciones con conocimientos que se apilan en algún lugar depreciándose rápidamente en un mundo en el que el poder de la actividad colaborativa está aumentando. Sin duda alguna, la promoción de proyectos reales en forma cooperativa puede ser la alternativa de solución. La situación económica y social actual nos muestra que necesitamos preparar a los estudiantes para cambios económicos y sociales imprevistos, para empleos que no han sido creados, para usar tecnologías que aún no han sido inventadas y para resolver problemas sociales que todavía no podemos imaginar.

Nuestra función, más que adoptar ciegamente un cierto texto educativo, es aceptar el acceso a la información libre y proveer de sitios de información fiable, de actividades atractivas que promuevan la autonomía y la inteligencia, la transversalidad de los temas y la integración de contextos de aprendizaje. Estar conectado con contextos del mundo real y permeable a los recursos ricos que surjan de nuestras comunidades.

Es nuestra convicción que establecer políticas autoritarias, punitivas, carecería de sentido. Intentar controlar de forma autoritaria el acceso a la información es una tarea imposible, establecer la uniformidad puede ser un cometido o tarea fallida, establecer sistemas de enseñanza únicos será casi imposible. Es necesario que el profesor se actualice y establezca una verdadera cultura compu-digital.

El reto que enfrenta el docente del día de hoy es: ¿cómo proponer proyectos interesantes a los estudiantes, de manera que los mismos sean codescubridores?, ¿cómo implementar en el aula diversas pedagogías que permitan avances significativos?, ¿cómo diseñar actividades en donde la tecnología sea más un aliado que un enemigo? Y donde el estudiante sea un co-creador de la actividad y *software* empleado.

Referencias

Aguirre, M. (2020, 7 de abril). *The impact of* COVID-19 *is all down to inequality.* Open Democracy. https://www.opendemocracy.net/en/impact-COVID-19-all-down-inequality/

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8

Castro, M., León de M. y Gómez A. (2020). Las matemáticas del coronavirus COVID-19. Matemáticas y sus fronteras. Blogs Madrid. http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2020/03/28/147534

Cuevas, C.A. y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *8*, 273-292.

Cuevas, C. A. y Pluvinage F. (2009). *Cálculo y Tecnología*. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *1*(1), 45-59. https://recacym.org/index.php/recacym/issue/archive

Cuevas, A., Delgado, P., González, O., Martínez-Reyes, M. y Orozco-Santiago, J. (2020). La encrucijada de la enseñanza en línea en tiempos de pandemia. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *15*(1), 35-50. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/59

DeVaney, J., Shimshon, G., Rascoff, M. y Maggioncalda, J. (2020). Higher Ed Needs a Long-Term Plan for Virtual Learning. *Harvard Business Review*. https://hbr.org/2020/05/higher-ed-needs-a-long-term-plan-for-virtual-learning

Engelbrecht, J., Borba, M., Llinares, S. y Kaiser, G. (2020). Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? *ZDM Mathematics Education*, *52*, 821-824. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01185-3

OCDE. (2019). *Programa para la evaluación internacional de los alumnos* (PISA). PISA 2018-Resultados. Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico. http://www.oecd.org/PISA/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

ONU [Organización de las Naciones Unidas]. (2020, 26 de marzo). *Más de 156 millones de estudiantes están fuera de la escuela en América Latina debido al coronavirus*. Boletín ONU. https://news.un.org/es/story/2020/03/1471822

Saltiel, E. y Viennot, L. (1985). ¿Qué aprendemos de las semejanzas entre las ideas históricas y el razonamiento espontáneo de los estudiantes? En J. Carrascosa (Trad.). *Enseñanza de las Ciencias*, 137-144.

Secretaría de Salud. (2021). Reporte diario de contagios por COVID-19. https://coronavirus.gob.mx/

Sfard, A. y McClain, K. (2002). Special Issue: Analyzing tools: Perspective on the role of designed artifacts in mathematics learning. *Journal of the Learning Sciences*, *11*, 153-388.

Tall, D. (1992, Agosto). *Students' Difficulties in Calculus* [Conferencia Plenaria], Working Group 3 ICME, Quebec.

Vázquez, E. (2014). Mobile distance learning with smartphones and apps in higher education. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *14*(4), 1505-1520. https://doi.org/10.12738/estp.2014.4.2012

Viennot, L. (1979). *Le Raisonnement Spontané en Dynamique Élemetaire*. Hermann.

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA CONCEPTUAL DE LA DERIVADA EN CURRÍCULOS HISPANOS DE MATEMÁTICAS

Judith Alejandra Hernández-Sánchez, judith700@hotmail.com
Eduardo Carlos Briceño Solís, ecbs74@gmail.com
Alexis Castro-Soto, lexysoto_94@live.com.mx
Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Resumen

La complejidad de las nociones del cálculo se debe, entre otras cosas, a la multiplicidad de sus significados; en particular, la forma en la que se presenta en los diferentes tipos del currículum incide en su comprensión. Por tal motivo, se revisan 14 artículos sobre los significados de la derivada en diferentes planes de estudio del Nivel Medio Superior y Superior de países hispanohablantes. La finalidad es describir el campo conceptual y procedimental mediante la técnica del análisis de contenido. La evidencia apunta a que el campo procedimental de la derivada se centra en la aplicación y desarrollo de reglas de derivación. Para el campo conceptual son dos los referentes más potenciados: a) Pendiente de la recta tangente y b) Límite del cociente incremental. Sin embargo, la forma tradicional de presentar la estructura conceptual de la derivada podría dificultar el tránsito hacia significados más funcionales como la variación.

1. Introducción

La enseñanza y el aprendizaje del cálculo es de los tópicos más estudiados dentro del campo de la Matemática Educativa, dada la complejidad de las nociones que lo conforman (Pino-Fan, 2017). Esta complejidad se debe, entre otras cosas, a la multiplicidad de significados inherentes a los conceptos matemáticos. Para el caso del concepto de derivada, estudios han reportado los significados presentes en algunos tipos del currículum: oficial (propuesto por la institución), potencial (materiales didácticos y de apoyo para el profesor), impartido (lo que enseña el profesor) o aprendido (lo que sabe el estudiante). Algunos se realizaron en países de habla hispana, como el de Herrera *et al*. (2017), quienes presentan los significados de la derivada en dos textos de cálculo del nivel universitario español. Un estudio similar, pero en el nivel preuniversitario, fue realizado por Inglada y Font (2003). En Castro *et al*. (2015) y Silva (2016) se describen aquellos presentes en un material didáctico y en las producciones de los estudiantes para una universidad de Colombia y Venezuela, respectivamente.

Para el caso del currículum mexicano, Díaz (2009) estudia el conocimiento en torno a la derivada de un grupo de 9 profesores de cálculo del preuniversitario que imparten clases en diferentes preparatorias del Estado de México. En Morales (2018) se revisan las planeaciones de 4 profesores de cálculo del Nivel Medio Superior (NMS) del estado de Zacatecas, para identificar los significados del concepto de derivada que los profesores podrían potenciar en su práctica docente. Finalmente, en Pino-Fan *et al*. (2013), realizan un análisis del significado pretendido de la derivada en el plan de estudios mexicano del NMS (programa propuesto por la SEP en el 2010) y algunos libros de texto de este nivel educativo.

Un problema identificado en estas investigaciones es la desconexión de significados en los diferentes tipos de currículum y sus posibles causas e implicaciones. Entre las causas se encuentran: la libertad que el profesor tiene para abordar temas (Gómez y Velasco, 2017), el conocimiento del profesor (Díaz, 2009; Fernández-Plaza *et al*., 2016; Jennings *et al*., 2019), o bien que los libros de texto carecen de intencionalidad (Ibáñez y Dolores, 2012). Por otro lado, entre las implicaciones de esta desconexión está su influencia en el aprendizaje del estudiante, creando deficiencias en su conocimiento matemático (Díaz, 2009; Dolores *et al*., 2020; Fernández-Plaza *et al*., 2016; Hitt y González-Martín, 2016) o bien dando lugar a diversas dificultades (Feudel, 2019), como inconsistencias entre lo que construye el estudiante y lo que proponen los libros de texto (Sánchez *et al*., 2008). Por tal motivo, el objetivo de esta investigación es: identificar los significados de la derivada que se presentan en diversos tipos del currículum en matemáticas de países de habla hispana.

Los resultados de la presente investigación permitirán una mejor organización de la derivada como contenido matemático escolar en los diferentes tipos del currículum; o bien su relevancia radica en que, como dice Pino-Fan (2017), los estudios de los significados de las nociones claves del cálculo que, además es una línea de investigación vigente en los diferentes niveles educativos. Enseguida se presenta el sustento teórico y metodológico que permitió lograr el objetivo propuesto.

2. Método

Para lograr el objetivo de la investigación se utilizó el método del análisis de contenido propuesto en Rico y Fernández-Cano (2013). Este método, tiene varios alcances: interpretar mensajes o inferir significados como es el caso del presente capítulo. El proceso que se siguió se muestra en la Figura 1. La aplicación de éste se describe en las siguientes secciones, excepto la última etapa que correspon de a la presentación de resultados que se desarrollan en el siguiente capítulo.

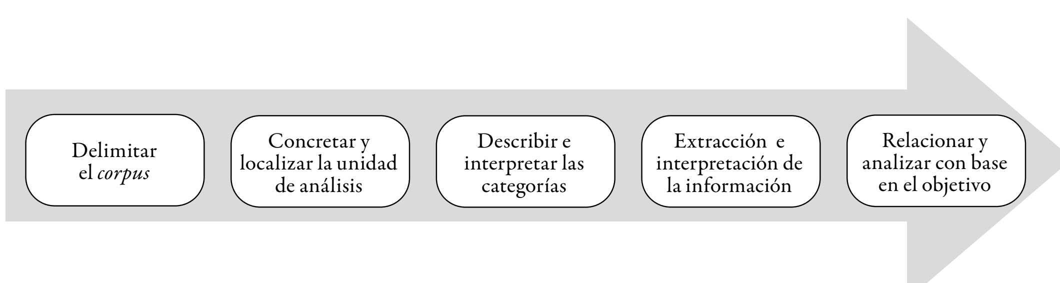


Figura 1. Etapas del Análisis de Contenido (realizada con información de Rico y Fernández-Cano, 2013).

2.1 Delimitar el *corpus*

Se buscaron textos académicos que reportaran significados del concepto de derivada, pero estos deberían hacer referencia a algún tipo del currículum (oficial, potencial, impartido y aprendido). Bajo esta delimitación del *corpus*, quedaron fuera documentos que reportaban diseños o situaciones didácticas que tienen como origen a la investigación del campo de la Matemática Educativa, pues el interés se centró en un estudio descriptivo de lo que se propone institucionalmente; lo que planea y ejecuta el profesor y lo que aprende el estudiante sobre la derivada en diferentes currículos hispanos en matemáticas del NMS o Superior. La búsqueda del *corpus* se realizó en Google Académico utilizando como frase "significados de la derivada". El buscador obtuvo 274, 000 resultados y se revisaron los primeros 40 para determinar cuáles cumplían con los requerimientos establecidos en la limitación del *corpus*. Se encontró que 14 de ellos (tesis y artículos) reportaban significados de la derivada en el NMS o Superior en algún contexto de habla hispana.

2.2 Concretar y localizar las unidades de análisis

La unidad de análisis se conformó por los párrafos de los documentos académicos (artículos y tesis) donde se presentaban los resultados que hacían alusión a los significados identificados en alguno de los tipos de currículum analizados. Estos párrafos, al ser localizados fueron extraídos como imagen y se les etiquetó mediante un sistema de códigos conformado por la referencia que incluía el autor o autores, el año y la página donde se ubica el párrafo.

2.3 Describir e interpretar categorías

El significado de un concepto matemático ha sido abordado por autores como D'Amore (2005); Godino *et al*. (2007) y Rico (2012), por mencionar algunos. Dar una definición precisa no es una tarea fácil; sin embargo, Saussure (Serrano, 2005) se aproxima determinando el significado de algo como el concepto (noción, percepción o conocimiento) que alguien tiene sobre ese algo. Así, desde la diversidad de acercamientos se rescata al signo como un componente necesario para comprender y representar objetos abstractos como los que conforman las matemáticas; pero estos signos están asociados a una estructura matemática del contenido en cuestión.

La estructura matemática se refiere a los conceptos, definiciones, propiedades, argumentos, proposiciones, procedimientos y relaciones que se derivan del contenido matemático escolar que se está analizando (Rico, 2012; Rico y Fernández-Cano, 2013). En Cañadas y Gómez (2014) se propone una visión cognitiva de este componente dividiéndolo en dos campos: uno conceptual y otro procedimental. Cada campo tiene 3 niveles: el primero categorizado en hechos, conceptos y estructuras sobre los que puede actuar el segundo, a través de destrezas, razonamientos o estrategias (ver Figura 2).

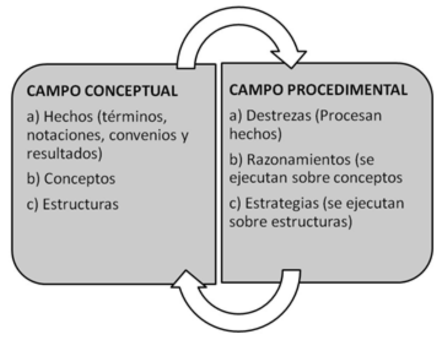


Figura 2. Clasificación cognitiva de la estructura conceptual del conocimiento matemático escolar (realizada con información de Cañadas y Gómez, 2014).

La estructura conceptual que conforma al significado puede corresponder o provenir de diferentes tipos de currículum. Por tal motivo, la estructura conceptual del significado puede brindar información de quien lo propone institucionalmente, lo organiza y aplica en el aula o de quien lo aprende. Estos tipos de currículum son descritos en Alsina (2000) de la siguiente manera: *currículum oficial*, como el conjunto de objetivos o documentos que oficializan las instituciones educativas; *currículum potencial*, conformado por los libros o cualquier material que utilizan o producen los profesores para planear sus clases; *currículum impartid*o, es lo que el profesor realmente desarrolla o enseña en el aula; *currículum aprendido*, es aquel que hace alusión a los estudiantes siendo entonces el que brinda información sobre lo que los estudiantes aprenden. De esta manera, la estructura conceptual fue categorizada en alguno de sus dos campos (conceptual o procedimental) y ubicada en alguno de los tipos de currículum.

2.4 Extracción e interpretación de la información

Para la extracción e interpretación de los significados de la derivada, se identificó el campo conceptual y procedimental y el tipo de currículum al que refiere (ver Figura 3); enseguida, se procedió a llenar el instrumento con la información obtenida (ver Tabla 1). En el caso del currículum potencial, se tuvo que incluir un referente más preciso, dado que en esta categoría tenemos varias opciones que pueden ser materiales que ayudan o produce el profesor para sus clases. En este tipo de currículum están libros de texto, planeaciones realizadas por el profesor o su propio conocimiento, por mencionar algunos.

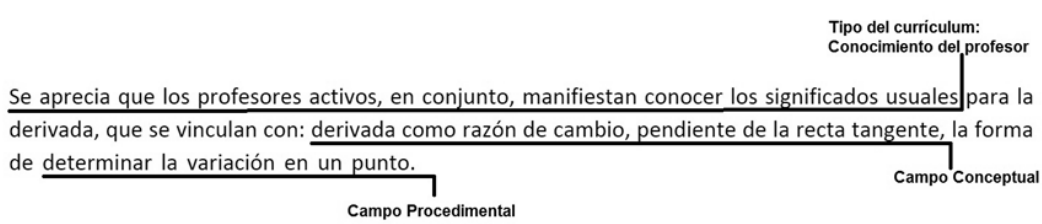


Figura 3. Interpretación del significado de la derivada y tipo de currículum en un fragmento de Castro *et al.* (2015).

Tabla 1. Instrumento de recolección con información de fragmentos de Castro, Pino-Fan y Font (2015). Elaboración propia.

Código del corpus	**Tipo de Currículum/País**	**Estructura Conceptual**	
		Campo Conceptual	**Campo Procedimental**
Castro *et al.* (2015, p. 1594)	Potencial (conocimiento del profesor)	Razón de cambio Pendiente de la recta tangente	Determinar la variación en un punto

3. Estructura conceptual de la derivada en algunos currículos hispanos en matemáticas

Aquí se identifica la estructura conceptual del significado de la derivada que más se potencia, según los documentos analizados. Por lo tanto, no se pretende ser exhaustivos respecto a los hechos, conceptos, estructuras, destrezas, razonamientos o estrategias reportados, sino aquellos que en los resultados se consideran los de mayor frecuencia, importancia o presencia. La diversidad de intereses, enfoques teóricos, metodologías, tipos de currículum y países hace posible que el campo conceptual y procedimental se presente de manera diversa; sin embargo, fue posible encontrar coincidencias.

En las tablas 2 y 3 (resultados para el NMS y Superior, respectivamente) se puede identificar que algunos estudios se enfocan en más de un tipo de currículum por lo que al final se tienen significados de 20 de ellos (4 oficiales, 10 potenciales y 6 aprendidos). En este caso, no se encontraron estudios de los significados de la derivada que hagan referencia al plan de estudios impartido. Lo anterior pues, aunque si bien encontramos estudios con profesores, éstos se enfocan en encuestas, entrevistas o resolución de tareas, pero ninguna realiza una observación del profesor en su clase de matemáticas. De esta manera, considerando la descripción adoptada del currículum impartido, no se presenta en este estudio información sobre el significado de la derivada proveniente de los significados desarrollados en una clase por los profesores de matemáticas. Otra cuestión es que no hay predominio del nivel educativo, pues 10 de los estudios se realizaron en el NMS y 10 en el nivel Superior. En cuanto a su distribución por países: 4 corresponden a Colombia, 5 a México, 8 a España y 3 a Venezuela. En los artículos analizados, el de mayor porcentaje (50%) son los realizados al currículum potencial. Las fuentes de este tipo de currículum son diversas, por tal motivo, en la información presentada (Ver Tabla 2 y 3) se aclara a qué fuente corresponde: libros de texto, planeaciones de clase, exámenes o el propio conocimiento del profesor.

Al analizar el campo conceptual y procedimental de la derivada en los diferentes tipos de currículum del NMS (Tabla 2), se encontró que son 3 los referentes conceptuales que más se ligan a la derivada. Estos son: a) La pendiente de la recta tangente, b) La razón de cambio y c) El límite del cociente incremental. Además, para el campo procedimental, el referente de mayor presencia son *las reglas de derivación*. Los resultados para el campo conceptual de la derivada en los currículos del NMS son más coincidentes que los obtenidos para el campo procedimental. La razón es que en el campo procedimental se incluyen destrezas o razonamientos sobre términos o conceptos que no aparecen en el campo conceptual. Un ejemplo de esto es el caso de encontrar máximos y mínimos. Esto da idea de que, en esos casos, el centro está en el procedimiento, más que en los conceptos. Finalmente se observa que en el campo procedimental se pierde la razón de cambio como un referente conceptual de la derivada que puede tomar un sentido funcional. Es decir, aunque la razón de cambio aparece como un referente conceptual central, éste no se relaciona con ninguna destreza, razonamiento o estrategia propuesta en el campo procedimental.

Tabla 2. Estructura conceptual de la derivada según tipo de currículum y país para el NMS. Elaboración propia.

Documento	Tipo de Currículum/ País	Campo Conceptual	Campo Procedimental
Castro *et al*. (2015)	Potencial (conocimiento del profesor)/Colombia	Razón de cambio; Pendiente recta tangente.	Determinar la variación en un punto.
Díaz (2009)	Potencial (conocimiento del profesor)/México	Límite del cociente incremental; Razón de cambio; Pendiente de la recta tangente.	Reglas de derivación.
Inglada y Font (2003)	Potencial (libros de texto)/España		Cálculo por límites Cálculo por reglas de derivación.
	Aprendido/España		Usan notación incremental; Usan el diferencial.
Morales (2018)	Potencial (planeaciones del profesor)/México	Límite del cociente incremental; Razón de cambio; Pendiente de la recta tangente.	Reglas de derivación.
Pino-Fan *et al*. (2013)	Oficial (Plan de estudios 2010)/México	Límite el cociente incremental; Razón de cambio.	Máximos o Mínimos.
	Oficial (de una universidad)/México	Límite del cociente incremental.	Reglas de derivación; Encontrar máximos y mínimos y razones de cambio.
	Potencial (Libros de texto)/México	Límite del cociente incremental.	
Pino-Fan *et al*. (2013)	Potencial (conocimiento del profesor)/México	Límite de cociente incremental (tasa instantánea de variación); Razón de cambio; Pendiente de la recta tangente.	
Vargas *et al*. (2020)	Potencial (libros de texto)/España		Reglas de derivación.

Para el caso de los currículos analizados del nivel Superior (Tabla 3), se encontró que la estructura conceptual es más diversa. Es posible que esto ocurra dado que en el nivel universitario los planes y programas de estudio no obedecen a una propuesta nacional, al menos en México. En contraparte, los estudios del Nivel Superior muestran más información respecto a las categorías establecidas en ambos campos. Lo anterior permite mayor precisión respecto a la forma en la que se estructura el concepto de derivada.

Tabla 3. Estructura conceptual de la derivada según tipo de currículum y país para el Nivel Superior. Elaboración propia.

Documento	Tipo de Currículum/País	Campo Conceptual	Campo Procedimental
Briceño *et al*. (2018)	Aprendido/México	Tangentes; Pendiente recta tangente; Límite del cociente incremental; Razón de cambio.	Reglas de Derivación.
Castro *et al*. (2015)	Potencial (examen)/ Colombia	Tangentes.	Derivabilidad y Derivadas laterales por definición; Verificación de derivadas; Reglas de Derivación; Aplicaciones (Graficación, Razones de cambio relacionadas y Optimización).
	Aprendido (estudiantes)/Colombia		Derivabilidad y Derivadas laterales por definición; Verificación de derivadas; Reglas de derivación.
Herrera *et al*. (2017)	Potencial (dos libros de texto)/ España	Límite del cociente incremental; Derivada en un punto; Función derivada; Valor extremo; Máximo y Mínimo; Pendiente de la recta tangente.	Calcular derivadas; Reglas de derivación; La función derivada describe la variación de otra función en el caso específico de la velocidad.
Jiménez-Fernández (2017)	Oficial (examen de ingreso)/España	Términos: tangente, extremo, intervalos de crecimiento o decrecimiento; Interpretación como: Pendiente de la recta tangente.	Interpretación como: Algoritmo (Reglas de derivación); variación de la función.
Parra y Castro (2020)	Aprendido/ Colombia	Pendiente de la recta tangente; Velocidad instantánea; Variación (cambio de una función).	Procedimientos según la tarea planteada.
Rodríguez y Rodríguez (2019)	Aprendido/México	Pendiente de la recta tangente; Límite del cociente incremental.	
Silva (2016)	Oficial y Potencial (libros de texto)/ Venezuela		Bosquejo de curvas aplicando derivadas en el área de Economía y Administración.
	Aprendido/ Venezuela		Aplicación de la derivada.

Para el campo conceptual se identifican términos como: *tangentes*, *extremos*, *intervalos de crecimiento o decrecimiento*, *máximos* y *mínimos* y a *la velocidad instantánea* como un hecho relevante. Se hace un mayor énfasis en la diferencia entre el *concepto de la derivada en un punto y la función derivada*. Además, al igual que en el NMS, entre los referentes con mayor presencia se encuentran la interpretación de la derivada como *el límite del cociente incremental y la pendiente de la recta tangente*. Una diferencia respecto al NMS es que la razón de cambio y la variación tienen una presencia marginal en el campo conceptual de los significados de la derivada en el Nivel Superior.

En el campo procedimental el principal referente son *las reglas de derivación*, lo que coincide con los resultados en los currículos del NMS; sin embargo, una diferencia para el Nivel Superior es que aquí se propone de manera más precisa la aplicación de las reglas de derivación para la resolución de problemas en diferentes contextos, dejando en claro que las destrezas o razonamientos dependen de la tarea o carrera en donde se desarrollan. Finalmente, es importante mencionar que, la razón de cambio sólo aparece de manera explícita en el campo conceptual de un currículo del Nivel Superior, aunque lo hace de manera implícita en el campo procedimental de otros currículos a través del estudio de la variación como destrezas y razonamientos para la graficación o el estudio de funciones, respectivamente.

4. Resultados y discusión

La estructura conceptual presentada en las tablas 2 y 3 determina que existen algunas coincidencias en cuanto a los referentes conceptuales y procedimentales relacionados a la derivada para los currículos hispanos de matemáticas del NMS y Superior. Esto permite inferir que *la pendiente de la recta tangente, el límite incremental y las reglas de derivación* son los referentes de la estructura conceptual de la derivada que conectan los currículos de ambos niveles educativos. Sin embargo, esta estructura identificada en los currículos hispanos de matemáticas da evidencia de que la enseñanza del cálculo diferencial, como dicen Eichler y Erens (2014) se sigue presentando de manera canónica. Es decir, fundamentada principalmente en el concepto de límite (Pino-Fan *et al*., 2013).

Es importante mencionar que, si bien se encontraron coincidencias en la estructura conceptual de la derivada, también existen otros componentes de los significados que podrían hacerlos diferentes. Estas son las representaciones y la fenomenología, componentes del significado que junto con la estructura conceptual conforman el triángulo semántico del significado de un contenido matemático escolar propuesto en Rico (2012). La posibilidad de la multiplicidad de significados a pesar de algunas coincidencias es explicada en Herrera *et al*. (2017) de la siguiente manera:

> Por lo tanto, hemos apreciado dos significados diferentes del mismo concepto, la derivada, en dos textos de reconocido prestigio a nivel internacional [...] Aunque se intente transmitir el mismo concepto, la forma de notarlo, la forma de representarlo, o los enfoques con los que se presenta, determinan significados diferentes del mismo (pp. 303-304).

Aunado a lo anterior, se suma un fenómeno externo que produce significados diferentes del mismo contenido matemático escolar. Este fenómeno puede ser explicado por el modelo de las cuatro fases del plan de estudios propuesto por Stein *et al*. y que fue recuperado en Eichler y Erens (2014) en la

Figura 4. Aquí lo explicamos contextualizando para el caso de los significados y los tipos de currículum establecidos por Alsina (2000).

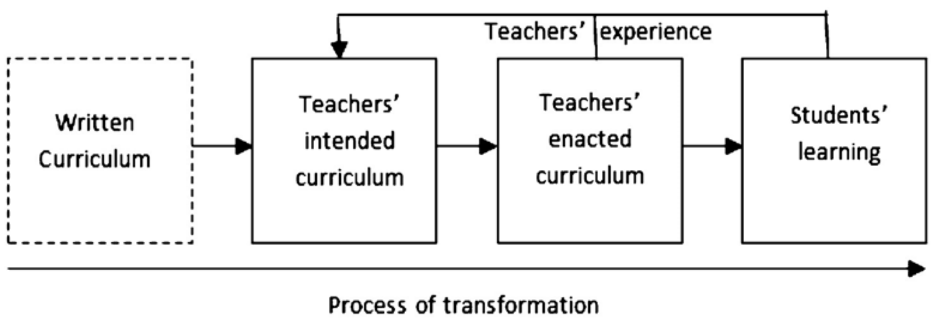


Figura 4. Modelo de un currículum (Eichler y Erens, 2014, p. 650).

Los significados propuestos en el currículum oficial (*written currículum*) al ser interpretados por el profesor mediante una selección y organización de estos, dan como resultado un currículum potencial (*Teachers´ intended currículum*). Pero éstos significados seleccionados y organizados por el profesor, pueden estar lejos de lo que termina desarrollando en el aula, pues la interacción con los estudiantes crea algo diferente a lo que existía en la mente del profesor. De esta manera, los significados potenciados en el currículum impartido (*Teachers´enacted currículum*) podrían diferir de los previstos por el profesor. Finalmente, los estudiantes también transforman los significados desarrollados en clase y los convierten en significados personales que conforman el currículum aprendido (*Students´ learning*).

El proceso de transformación expuesta en la figura 4 deja en claro que las coincidencias y diferencias entre los significados dependen de varios componentes. Por lo tanto, tener conciencia de estos elementos intrínsecos y extrínsecos que podrían estar propiciando inconsistencias entre los significados permitirá plantear una mejor enseñanza de la derivada.

Para cerrar esta sección, se discierne con más detalle las implicaciones sobre la forma en la que aparece la variación en los currículos de matemáticas de habla hispana. Este componente de la estructura conceptual de la derivada forma parte de los significados globales de este concepto, según el estudio reportado en Pino-Fan *et al.* (2011). Sin embargo, la forma en la que se presenta en los currículos se concentra en un caso particular: la velocidad instantánea. De esta manera, se dejan fuera otras interpretaciones más generales de la variación surgidas en el siglo XIV. Entre las aportaciones realizadas en este tipo de estudios, queremos mencionar dos propuestas de Oresme: el estudio geométrico del cambio y las cualidades que podrían observarse en este tipo de representaciones y que él llamaba intensidades de las cualidades. Estas intensidades hacen referencia por medio de figuras geométricas a cualidades que no varían, que varían o no de manera constante, estableciendo una relación entre dos variables que se modela vía la variación (Suárez y Cordero, 2010).

Este tipo de interpretaciones más generales son propuestas en las nuevas tendencias educativas que proponen alcanzar unas matemáticas escolares más funcionales teniendo como eje rector y articulador a la variación. Este nuevo enfoque ha tratado de implementarse en el nuevo currículum de matemáticas del NMS en México; sin embargo, existe una carencia de enfoques metodológicos acordes a la reforma que ha tratado de atenderse por parte de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS) y un grupo de investigación en matemática educativa (Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas —PIDPDM) cuyo producto más reciente se puede consultar en el currículo para la educación media superior, titulado "Propuesta de adecuación de contenidos de las asignaturas del componente de formación propedéutica", tanto para el bachillerato general como el tecnológico, en el campo disciplinar de matemáticas (SEMS, 2017). En ella se encuentra integrada una línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PYLV) que ha cobrado importancia en el currículum oficial de matemáticas en México, presentándose como uno de los ejes de aprendizaje fundamentales en el campo disciplinar de matemática para la educación obligatoria establecida en el Modelo Educativo 2016 (SEP, 2016).

El PYLV se ha centrado en investigar o bien en desarrollar un pensamiento centrado en el estudio del cambio y el análisis de la variación de situaciones y fenómenos donde se requiere predecir estados futuros (Caballero y Cantoral, 2013). Es decir:

> [...] el desarrollo del pensamiento variacional tiene lugar dentro de una SV, donde el uso de las EV genera el estudio de la variación, pues estos resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos al permitir identificar aquello que cambian en una situación, cuantificar ese cambio y analizar la forma en que se dan los cambios (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1204).

Esta propuesta nace en los años noventa del siglo pasado como una de las líneas de investigación de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013). Dicha propuesta se centra en transitar de objetos abstractos y secuenciados hacia las prácticas que dan sentido y significado a lo aprendido. Como forma de pensamiento estudia, entre muchas otras cosas, los significados de los objetos matemáticos relacionados con la variación, que son asignados a partir de las intuiciones y concepciones primarias de los estudiantes, siendo éstas una de sus líneas de interés. En Ramos (2019) se concreta una explicación sistemática del PYLV que se caracteriza en dos sentidos, como línea de investigación y forma de razonamiento (figura 5).

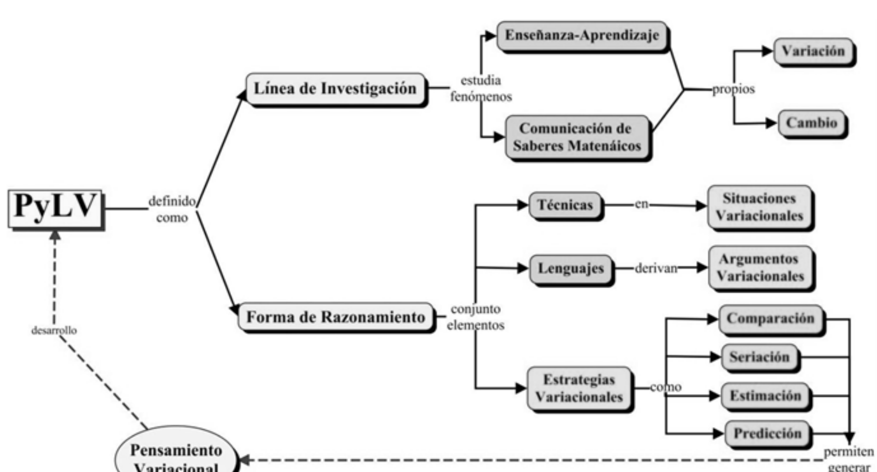


Figura 5. Definición esquemática del PYLV (Ramos, 2019, p. 52).

Si bien, como línea de investigación esta propuesta se ocupa de proponer o estudiar fenómenos que involucren la variación para la enseñanza y aprendizaje, con el fin de favorecer el razonamiento en los estudiantes. Por otra parte, como forma de razonamiento considera aquellas técnicas, lenguajes y estrategias variacionales que permiten dotar de sentido al concepto de derivada en el análisis de la variación (Briceño *et al*., 2015). Sin embargo, con base en los resultados de la presente investigación, existe ausencia de significados de la derivada relacionados con la variación en los currículos de matemáticas del NMS de habla hispana. El enfoque algorítmico por medio de reglas de derivación es el más potenciado soslayando el aspecto variacional. En ese sentido, la variación como componente de la estructura conceptual de la derivada es un elemento que podría renovar la forma de enseñar dicho concepto.

5. Conclusiones

La transformación que sufre un contenido matemático en las diferentes fases de implementación de un currículum está sujeta a la afinidad, interpretación y entendimiento de aquellos que son responsables de seleccionarlos y organizarlos. De esta manera, los aprendizajes de los estudiantes están condicionados a las selecciones de los profesores; a su vez, estas decisiones están influenciadas, entre otras cosas, por la formación del profesor y las prioridades establecidas por la institución en donde realizan la docencia (Hitt y González-Martin, 2016). Es por esta razón que un mismo profesor puede potenciar diferentes significados dependiendo de la institución o los contextos donde desarrolle su práctica docente (Bingolbali *et al*., 2006). Aunado a lo anterior, la selección y clasificación del *corpus* se consideró un elemento central dentro de la metodología.

También se identificó que los estudios que predominaron son aquellos realizados sobre el currículum potencial y el aprendido. Estas investigaciones centradas en los libros de texto (principalmente) y los aprendizajes de los estudiantes, son consideradas clásicas dentro de la Matemática Educativa. En contraparte, aquellos que analizan los significados de la derivada en el currículum oficial fueron escasos; pese a que Rojano y Solares (2017) consideran este tipo de estudios como un indicador de la calidad educativa. Además, no se encontraron estudios sobre los significados de la derivada para el currículum impartido. Es importante aclarar que a pesar de que existen diversos estudios sobre el profesor de matemáticas y la derivada, la brecha que existe entre lo que el profesor prevé o utiliza (incluyendo sus conocimientos) y lo que se desarrolla en clase, se hace evidente en los procesos de transformación explicados en el modelo de un currículum presentado en la figura 4.

Respecto a la estructura conceptual de la derivada, el campo procedimental, enfocado en el cálculo (NMS) y aplicación (Nivel Superior) de las *reglas de derivación*, supera a los componentes del campo conceptual, como el significado por excelencia. Este enfoque tradicional que permea en los significados de la derivada en los currículos hispanos analizados deja fuera interpretaciones que doten de sentido a este contenido matemático escolar. Esto sin duda afectará los aprendizajes de los estudiantes pues "un aprendizaje sin sentido es un aprendizaje a corto plazo, que no está relacionado con el desarrollo de la competencia matemática, cuya característica principal es la utilidad de las matemáticas al solucionar problemas reales" (Vargas *et al*., 2020, p. 930).

Aunque en esta revisión la variación aparece como parte del significado de la derivada, ésta se enfoca en hacer cálculos oscureciendo razonamientos que brindan significados más funcionales de la derivada. Es decir, no se evidencian o no forman parte del discurso las estrategias o razonamientos variacionales, dada la fuerte influencia de lo algorítmico. A lo anterior se suma lo reportado por otros autores como Briceño *et al.* (2018), donde la falta de los contextos geométricos al abordar la derivada hace difícil la adopción del significado de la variación propuesto en el nuevo currículum de matemáticas. En este mismo tenor, Castro *et al.* (2015) mencionan la falta de tareas que permitan explorar la comprensión gráfica de la derivada en el contexto de fenómenos de variación. Así, la necesidad de estudios que indaguen en el currículum oficial, potencial, impartido y aprendido sobre los significados de la derivada relacionados con la variación se hace evidente. En estos tipos de currículos deberán incluirse aquellos dirigidos a la formación de futuros profesores de matemáticas. Lo anterior, dada la reciente implementación del nuevo currículum de matemáticas en México (a partir del 2019) y lo escaso de este tipo de investigaciones.

6. Referencias

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J. M. Goñi (Coord.). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo 21* (pp. 13-21). Biblioteca de Uno.

Bingolbali, E., Monaghan, J. y Roper, T. (2006). Service teaching: Mathematical education of students of client departments. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková, (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 169-176). PME.

Briceño, E., Hernández, J. y Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes del nivel superior. *El cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las ciencias y la matemática*, *10*(1), 31-47.

Briceño, E., Ramos, J. y Zaldívar, D. (2015). Estrategias variacionales en estudiantes de bachillerato de la UAPUAZ en situación experimental. *El cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las ciencias y la matemática*, *6*(1), 145-166.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*(1), 463-468.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cañadas, M. y Gómez, P. (2014). *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD 3* [Manuscrito no publicado]. Universidad de los Andes.

Castro, W., Cadavid, G. y Pino-Fan, L. (2015). *Significados para la derivada en un curso universitario de Matemáticas* [Ponencia]. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México. http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/03/CIAEM_COMUNICACION_DERIVADA_CORREGIDA_254_2206_1_autores.pdf

Castro, W., Pino-Fan, L. y Font, V. (2015). El conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la derivada de profesores colombianos activos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *28*(1), 1591-1598.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Reverté.

Díaz, M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza*, *1*(1), 75-90.

Dolores, C., Rivera, M. y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, *1*(120), 104–115.

Eichler, A. y Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM Mathematics Education*, 1(46), 647-659. doi: 10.1007/s11858-014-0606-y.

Fernández-Plaza, J., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. *Investigación en Educación Matemática XX*, *1*(1), 259-268.

Feudel, F. (2019). Required knowledge of the derivate in economics. Results from a textbook análisis. En J. Monaghan, E. Nardi y T. Dreyfus (Eds.). *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics-Conference proceedings* (pp. 95-98). MatRIC. https://matric-calculus.sciencesconf.org/

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* [manuscrito no publicado]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Gómez, P. y Velazco, C. (2017). Complejidad y coherencia de documentos curriculares colombianos: derechos básicos de aprendizaje y mallas de aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, *1*(73), 260-280.

Herrera, M., Velasco, M. y Ruiz-Hidalgo, J. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA*, 11(4), 280-306.

Hitt, F. y González-Martín, A. (2016). Generalization, covariation functions and calculus. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.). *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 3-38). Sense Publishers.

Ibáñez, G. y Dolores, C. (2012). Relación entre el currículum oficial y el currículum potencial. El caso de los textos de preparatoria. En C. Dolores y M.S. García (Eds.). *¿Hacia dónde reorientar el currículum de las matemáticas del bachillerato?* (pp. 87-109). Plaza y Valdés Editores.

Inglada, N. y Font, V. (2003, 3-6 de abril). *Significados institucionales y personales del concepto de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental* [Ponencia]. XIX Jornadas del SI-IDM, Córdoba, Colombia.

Jiménez-Fernández, A. (2017). *Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad* [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_JIMENEZFERNANDEZ.pdf

Jennings, M., Goos, M. y Adams, P (2019). Teacher and lecturer perspectives on secondary school students understanding of limit definition of the derivative. En J. Monaghan, E. Nardi y T. Dreyfus (Eds.). *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics – Conference proceedings* (pp. 111-114). MatRIC. https://matric-calculus.sciencesconf.org/

Morales, J. (2018). *Los significados potenciados por los profesores desde sus planeaciones de clase, para el tema de la derivada* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas].

Parra, J. y Castro, W (2020). *Significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios* [Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/13988/1/ParraNaranjoJhonatan_2020_SignificadosDerivadaEstudiantes.pdf

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. En J.M. Contreras, P. Arteaga, G.R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M.M. López-Martín (Eds.). *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-16). Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, *34*(2), 123-150.

Pino-Fan, L. Godino, J. y Font, V. (2011). Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada, *Educ. Matem. Pesq.*, *13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada, *REVEMAT*, *8* (especial), 1-47.

Ramos, J. (2019). *Nivel de Desarrollo de pensamiento variacional usando recursos tecnológicos* [Tesis de Doctorado, INFOES].

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares, S.L.

Rojano, T. y Solares, A. (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países*. INEE-CINVESTAV.

Rodríguez, C. y Rodríguez, F. (2019). Evidencia de las concepciones de futuros profesores sobre el concepto derivada. En J.M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 649). SEIEM.

Sánchez, G., García, M. y Linares, S. (2008). La comprensión de la Derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2016). *Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016*. https://www.gob.mx/modeloeducativo2016

Serrano, W. (2005). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista pedagógica*, *26*(75), 1-22.

Silva, L. (2016). Los significados de la derivada en un proceso de estudio en la asignatura matemática del DAC-UCLA. Estudio de caso. *Revista científica del decanato experimental de ciencias económicas y empresariales*, *10*(1), 85-110.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4), 319-333.

Subsecretaría de Educación Media Superior [SEMS] (2017). *Nuevo currículo de la Educación Media Superior. Campo Disciplinar de Matemáticas Bachillerato General. Propuesta de ade-*

cuación de contenidos de las asignaturas del componente de formación propedéutica. http://sems.gob.mx/curriculoems/campos-disciplinares

Vargas, M., Fernández-Plaza, J. y Ruíz-Hidalgo, J. (2020). Significados de derivada en las tareas de los libros de 1º de Bachillerato. *Bolema*, *34*(68), 911-933.

CAPÍTULO 5. TRABAJO MATEMÁTICO EN ANÁLISIS: IDENTIFICACIÓN Y CONSTRUCCIÓN. HOMENAJE A FRANÇOIS PLUVINAGE

Alain Kuzniak, alain.kuzniak@u-paris.fr
Laboratoire de Didactique André Revuz
Universidad de París, Francia

Resumen

El objetivo principal de esta contribución es explorar el trabajo matemático en Análisis, al final del Liceo e inicio de la Universidad. Se utiliza la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) para identificar y elaborar, según criterios epistemológicos y cognitivos, el trabajo específico que realizan los estudiantes cuando resuelven problemas. Tras introducir el marco de los ETM, se exponen algunos elementos fundamentales de nuestro enfoque didáctico del Análisis Matemático: los tres paradigmas del Análisis estándar, las perspectivas de localización, la dialéctica discreto-continuo y las interacciones entre las génesis. A continuación, nos centramos en la ruptura entre el ETM de la escuela secundaria y el de la universidad, prestando especial atención a la enseñanza de las funciones.

François Pluvinage, mi colega y amigo

No puedo comenzar este capítulo sin mencionar a mi colega y amigo François Pluvinage, con quien mantuve durante más de veinte años una intensa relación de trabajo, en particular en el marco del comité de redacción de los *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, del que era pilar esencial, pero también en un marco menos formal durante breves estancias en la Dordoña o en México.

En relación con esta contribución, rememoro su pasión por el uso de herramientas técnicas tanto en la vida cotidiana como en su investigación. Esta pasión, está ligada en primer lugar a su convicción de que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deben aprovechar la revolución tecnológica ligada a la informática con la creación de herramientas digitales cada vez más eficaces. Para él, la apropiación de estas herramientas y su integración en la escuela era una obligación moral que se imponía a cualquier investigador en didáctica de las matemáticas y a cualquier profesor que quisiera convencer a sus alumnos del interés y la belleza de las matemáticas. Una pasión que se traslada a su vida cotidiana, la de un aficionado especialmente imaginativo y perseverante.

En términos más personales y en relación con mi investigación, me siento orgulloso y nostálgico al pensar ahora que fue el atento presidente de la defensa de mi tesis. Más tarde fue mi colega en la Universidad de Estrasburgo, entonces conocida como Universidad Louis Pasteur. Allí acompañó mis primeros esfuerzos para desarrollar los Espacios de Trabajo Matemático. Los acogió con simpatía, pero también con interés, aportando sus valiosos comentarios durante discusiones intensas. Después, siguió el desarrollo de los ETM como teoría y no puedo olvidar su presencia en el último simposio ETM6, en 2018 en Valparaíso, ciudad y puerto míticos que descubrió con su pasión de navegante.

Para concluir y completar esta evocación demasiado breve, quisiera señalar al lector el homenaje científico que los editores de *Annales* me ofrecieron escribir junto con Jean-Claude Rauscher (ver Kuzniak y Rauscher, 2020).

1. Identificar el trabajo matemático en Análisis y pensar su desarrollo

La enseñanza del Análisis aparece tarde en el currículo francés, al final de la escolaridad obligatoria y, de hecho, concierne relativamente a pocos alumnos. Este número es aún menor si se tiene en cuenta que el verdadero Análisis Matemático, en su forma más elaborada, sólo se enseña en las especialidades matemáticas de la enseñanza superior. Sin embargo, no es porque se rechace en los confines de la enseñanza que los alumnos no se enfrenten a lo largo de su escolaridad a cuestiones y problemas relacionados con el Análisis: funciones, números reales, secuencias, áreas y límites son algunas de las nociones que se encuentran en el liceo. Así, si bien resulta que paradójicamente, y en su mayor parte, estos alumnos nunca tendrán acceso a respuestas que entren en el ámbito del Análisis Avanzado, lo cierto es que desarrollan un trabajo matemático específico relacionado con este dominio de las matemáticas. La ausencia de la forma más elaborada y sofisticada de este trabajo no significa que haya una ausencia de trabajo matemático. ¿Qué forma adopta entonces el trabajo matemático en Análisis en el Liceo y en el inicio de la enseñanza superior? ¿Cómo se negocian las transiciones entre formas de trabajo *a priori* muy diferentes?

La identificación de este trabajo matemático bajo estas diferentes formas es compleja y conlleva una postura didáctica reflejada en la escolaridad que aborde diversas dificultades, en particular para límites y funciones, va junto en todos los países donde se introducen estas nociones (Oktaç y Vivier, 2016).

Para fundamentar nuestro estudio, utilizaremos la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) cuyo objetivo es permitir el análisis y la descripción de la actividad matemática efectiva de los estudiantes que afrontan tareas matemáticas en el contexto escolar. Tras una aclaración de este marco metodológico y teórico, trataremos, a la luz de esta teoría, la cuestión de la identificación y la construcción de los ETM en el Análisis al final de la enseñanza secundaria y al inicio de la enseñanza superior.

Esta contribución se basa específicamente en un curso dado en la escuela de verano de didáctica de las matemáticas (Kuzniak *et al.*, 2017). Como homenaje final y para ilustrar mi desarrollo, he utilizado también el último artículo escrito por Rosa Páez con François Pluvinage sobre las asíntotas (2019)

2. Espacios de trabajo matemático (ETM)

2.1 El trabajo matemático en el contexto escolar

La introducción de la noción de trabajo en el ámbito de la educación no es menor porque esta noción implica un tipo de necesidad de producción que se opone a la visión de una escuela desinteresada. Pero ¿qué sentido puede darse a las actividades de los alumnos en matemáticas si nada las orienta hacia un objetivo general, un motivo en el sentido de las teorías de la actividad, que las subsume? Desde los primeros trabajos de didáctica de las matemáticas, algunos investigadores han considerado al alumno como un "matemático en ciernes" y han establecido así la actividad del matemático experto como modelo para el alumno. Pero ¿cuál es exactamente esa actividad específica que hace que el matemático sea reconocido? Freudenthal (1971) intenta definirlo dirigiéndose a una comunidad de matemáticos: "what is mathematics? Of course, you know that mathematics is an activity because you are an active mathematician. It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter"[1] (p. 414).

Así, Freudenthal define la acción del matemático como una tarea de resolución y búsqueda de problemas, pero también como una actividad de organización de un campo específico. ¡Así, el trabajo del matemático es el resultado de su actividad como tal! Para Thurston (1994), esta dificultad para definir de manera fácil y directa las matemáticas se debe a la naturaleza esencialmente recursiva de la actividad matemática. Por lo tanto, sólo será posible acceder a este trabajo haciéndolo y añadiendo constantemente nuevos conceptos. En el marco de la enseñanza de las matemáticas, los profesores tendrán que ayudar a los alumnos a construir su propio Espacio de Trabajo Matemático. Para ello, pueden aprovechar los esfuerzos de los matemáticos que, a lo largo del tiempo, han sido capaces de resolver problemas cada vez más complejos con herramientas y métodos cada vez más accesibles. Esto puede verse en el caso del cálculo, donde los estudiantes de secundaria utilizan ahora las herramientas del cálculo integral que sólo unos pocos matemáticos del siglo XVIII dominaban.

2.2 La teoría de los Espacios de Trabajo Matemático

Recordamos sólo algunos elementos que nos parecen esenciales[2] para entender esta contribución. Algunos de ellos tendrán que ser especificados de acuerdo con el dominio particular que estamos estudiando aquí, es decir, el del Análisis Matemático. Por ETM entendemos un entorno "pensado y organizado para permitir el trabajo de los individuos que resuelven problemas matemáticos" (Kuzniak y Richard, 2014, p. 17); es una estructura evolutiva diseñada para dar cabida a las actividades matemáticas. Parte de la distinción entre tarea y actividad, y diferenciar tareas asignadas y actividades realizadas por el estudiante, ya sea principiante o avanzado.

> El ETM articula dos niveles, uno de carácter epistemológico, estrechamente relacionado con los contenidos matemáticos del dominio estudiado, y otro de carácter cognitivo, que se refiere al pensamiento del sujeto en la resolución de tareas matemáticas. El trabajo matemático es entonces el resultado de un proceso que dará progresivamente sentido a cada uno de los niveles epistemológicos y cognitivos a través de diferentes génesis (Kuzniak y Richard, 2014, p. 18).

El proceso completo se ilustra con los dos diagramas siguientes (Figura 1 y Figura 2). El primero muestra las diferentes interacciones entre los niveles epistemológicos y cognitivos gracias a las génesis. La segunda muestra las diferentes interacciones entre los planos verticales que asocian estrechamente dos génesis.

---

1. ¿Qué es son las matematicas? Por supuesto, sabes que las matemáticas son una actividad porque eres un matemático activo. Es una actividad para resolver problemas, para buscar problemas, pero también es una actividad que nos ayuda a organizar un tema [traducción propia].

2. Para una presentación más completa, véase, por ejemplo, Kuzniak (2011) o Kuzniak y Richard (2014).

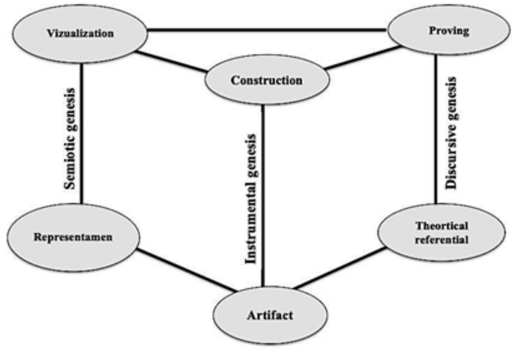


Figura 1. El diagrama de los ETM y las génesis.
Elaboración propia.

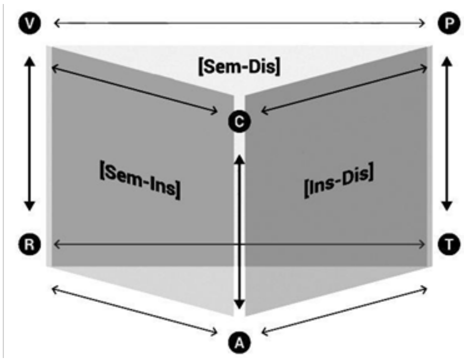


Figura 2. Los tres planos verticales del ETM.
Elaboración propia.

Se consideran tres génesis como centrales en el trabajo matemático: una génesis semiótica relacionada con los signos y las representaciones, una génesis instrumental relacionada con los artefactos como las herramientas de construcción o de cálculo, una génesis discursiva para producir una prueba basada en propiedades organizadas en un marco de referencia teórico.

La dinámica del trabajo matemático implementado por el profesor en su clase (ETM idóneo) se describe a través de caminos dentro de este modelo. Estos ETM idóneos dependen del profesor y deben estar relacionados con los ETM de referencia, propuestas por las instituciones educativas y con los ETM personales de los alumnos.

3. Algunas cuestiones sobre la didáctica del Análisis

El ETM debe poder ser una herramienta para el análisis, tanto *a priori* como *a posteriori*; para la descripción de las tareas y también para la interpretación de las actividades de los alumnos. Para una tarea determinada, debe ser posible identificar las circulaciones, las trayectorias dentro de un ETM o entre dos ETM, también es necesario identificar la posible resonancia de los tres génesis, semiótica, instrumental y discursiva.

3.1 Las entradas en el trabajo

Desde el punto de vista de los signos, los problemas implican una gran variedad de registros de representación de forma específica para el Análisis. ¿Cuáles son los registros privilegiados y cómo se coordinan, o no?, ¿cuál es la naturaleza particular de los tratamientos internos en los registros o las conversiones entre estos registros?, ¿cómo se tienen en cuenta los juegos entre lo local y lo global o entre lo discreto y lo continuo?

Desde el punto de vista de los artefactos, el Análisis enseñado se nutre de la aportación de *software* y herramientas que facilitan tanto el cálculo y la construcción de gráficos como la exploración y el descubrimiento de estos objetos, ¿qué cambió en los ETM produce esta introducción masiva de herramientas tecnológicas tanto en la gestión del aula como en el desarrollo del trabajo personal de los alumnos?

Desde el punto de vista de la prueba, ¿cómo se tiene en cuenta el discurso de la prueba deductiva en este ETM tan rico en signos complejos y artefactos impactantes?, ¿cómo se estructura el discurso de las pruebas? y ¿en qué referencial teórico se basa?

3.2 Los eventuales bloqueos y rupturas en ciertas génesis

La riqueza potencial de los ETM en el Análisis conduce de hecho a una complejidad cognitiva que puede llevar a bloqueos o formas de trabajo restringidas en uno de los planos verticales que hemos mencionado anteriormente. Una de las formas más esperadas de este confinamiento en una dimensión del trabajo es, sin duda, la que consiste en dejar a los alumnos que exploren los objetos, que hagan conjeturas, pero que dejen de lado las demostraciones. En Análisis, ¿encontramos, y de qué forma estos deslizamientos entre los dominios matemáticos que hacen que los estudiantes se concentren en tareas que a menudo se limitan a la aplicación de técnicas de cálculo y que a veces ya no están relacionadas con el saber esperado?

3.3 Orientar el trabajo matemático en el Análisis

Hemos subrayado que el trabajo matemático en Análisis se caracteriza por la gran diversidad de representaciones semióticas, técnicas y métodos de cálculo. ¿Cómo guía el profesor a los alumnos a través de esta profusión de herramientas?, ¿en qué objetos o métodos se centra? Por último, ¿cuál es la línea general de trabajo de este ETM?

4. Los tres paradigmas del análisis estándar

4.1 Introducción

El Análisis tiene dos facetas bastante comunes en el desarrollo de las matemáticas. Es la resultante de un trabajo de modelización de situaciones del mundo real y también se apoya en objetos que pueden tener otra naturaleza matemática: geométrica en relación con las curvas o las áreas, algebraica para la escritura de muchas funciones. Esta diversidad, tanto de los objetos como de su representación, es una fuente de conflicto potencial con los hábitos de trabajo propios de estos dominios y de fricción con las formas de ver y razonar que deben cambiar mientras los objetos parecen idénticos. Para dar cuenta de estas proximidades y diferencias nos apoyaremos en los diferentes paradigmas específicos que pueden impulsar el trabajo matemático en el ámbito del análisis y también explicaremos las frecuentes interferencias con otros dominios matemáticos como la geometría o el álgebra.

Aunque inspirada en su obra, la noción de paradigma que utilizamos no debe confundirse con la introducida por Kuhn (1966). Al igual que estos últimos, los paradigmas en las teorías de los ETM tienen en cuenta tanto las creencias de los individuos que participan en los grupos sociales como la naturaleza de las teorías científicas con sus técnicas y formas de plantear y emprender correctamente la resolución de problemas. En la idea de Kuhn, la interacción entre paradigmas es conflictiva y explica las revoluciones científicas. En nuestra opinión, esto no es cierto en el caso particular de las matemáticas y, más especialmente, en el contexto escolar de la educación. Por el contrario, consideramos que hay una necesaria cohabitación de paradigmas para tener en cuenta tanto la complejidad epistemológica de los objetos matemáticos como su complejidad cognitiva, que varía según el nivel de desarrollo ontológico de los alumnos.

Los paradigmas orientan y guían el trabajo al cambiar el significado de los objetos estudiados y la forma de utilizarlos. Por lo tanto, en Análisis, y dentro de un paradigma determinado, no se debe confiar exclusivamente en la información y las conclusiones dadas por un trabajo geométrico sobre curvas. Del mismo modo, el trabajo sobre cuestiones de aproximación relacionadas con los límites dependerá del paradigma en cuestión. El paradigma de referencia permite interpretar los contenidos de los componentes epistemológicos de la ETM. A su vez, a través de sus diferentes funciones en el trabajo, estos componentes contribuyen a la especificidad de los diferentes paradigmas.

4.2 Los tres paradigmas del Análisis Estándar (AE)[3]

Hemos retenido aquí tres paradigmas cuya existencia histórica se puede percibir (Edwards, 1979) y Montoya-Delgadillo y Vivier (2016) han mostrado el impacto en la enseñanza actual.

> El paradigma Aritmético-Geométrico (AG), que permite interpretaciones procedentes, con implícitos, de la geometría, del cálculo aritmético, pero también del mundo real. Muchos problemas de análisis encuentran su origen intuitivo en este paradigma: cálculo de longitudes o áreas, continuidad y tangencia [...] La aritmética y la geometría están estrechamente vinculadas históricamente en el desarrollo de este paradigma al que hay que añadir todos los problemas de cinemática cuyo papel en la elaboración del Análisis ha sido fundamental.
>
> El paradigma del Análisis Computacional (AC). En este cálculo algebraico generalizado, las reglas de cálculo se definen, de forma más o menos explícita, y se aplican independientemente de una reflexión sobre la existencia y la naturaleza de los objetos introducidos. En este paradigma, las funciones se identifican con su escritura, recuperando así el ideal perdido de asimilar todas las funciones a las funciones analíticas.
>
> El paradigma del Análisis Infinitesimal (AI). Esta vez, un trabajo específico y formal se basa en la aproximación y la localidad: límites, desigualdades, trabajo sobre las *voisinages* (vecindades), negligibilidad [...] La precisión de las definiciones asociada al rigor del razonamiento, que ya no puede basarse simplemente en pruebas intuitivas, a menudo geométricas, marca una ruptura epistemológica con los dos paradigmas anteriores (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2018, p.136).

De hecho, en la práctica del Análisis asistimos a una intrincación de paradigmas que es a la vez natural y problemático. Como puede verse, por ejemplo, con la introducción, en Grado 11, del número derivado en diferentes formas, todas ellas necesarias para comprender bien la noción:

- [Paradigma AG] Pendiente de una línea recta tangente al gráfico de una función, si este gráfico admite una tangente.
- [Paradigma AI] Ratio de la variación infinitesimal del valor de una función a un cambio infinitesimal de la variable

3. En este documento no consideraremos el caso del Análisis No Estándar (ANE), que puede considerarse como una alternativa al Análisis Estándar (AE).

- [Paradigma AC] Resultado de un cálculo simbólico sobre expresiones algebraicas

Todos estos enfoques se resumen en el macro-signo siguiente que sirve como emblema unificador.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Por desgracia, este símbolo es difícil de entender en este nivel educativo y es más bien una especie de ceremonia de iniciación para introducir a los alumnos en una nueva forma de hacer matemáticas.

Esta diversidad de paradigmas en juego será, naturalmente, una fuente constantemente renovada de problemas didácticos que volveremos a encontrar más adelante. Sin embargo, es inevitable, como acabamos de ver en el número derivado, pero también de forma más amplia, comprender y estudiar los objetos del Análisis cuyo origen es geométrico. En el caso de la geometría diferencial, se puede hacer un tratamiento de los puntos críticos en AG sin utilizar necesariamente los otros dos paradigmas. Sin embargo, como muestra López (2021), el paso por el AC y la AI aporta otros necesarios elementos de validación y comprensión.

5. Particularidades del trabajo matemático en Análisis

Acabamos de ver la importancia de las interacciones entre paradigmas para explorar la complejidad de los objetos de análisis. En esta parte, consideraremos dos oposiciones fundamentales en este dominio matemático: el vínculo entre lo local/global y la dialéctica discreto/continuo. Los abordaremos considerando los diferentes juegos posibles entre paradigmas y también entre las diferentes génesis de la teoría.

5.1 Perspectivas de localidad: global, local y puntual

Para abordar esta cuestión utilizaremos el estudio de Páez y Pluvinage (2019) sobre las asíntotas consideradas como "un enredo problemático". En esta investigación, los autores utilizan los paradigmas de análisis para arrojar luz sobre diferentes visiones de las asíntotas. En primer lugar, insisten en el origen intuitivo de las asíntotas vinculado a la geometría. En el marco del Paradigma AG, precisan que esta aproximación de las asíntotas se debe a la relación inicial de asíntotas con hipérbolas. Algo valioso es el hecho de que la descripción que acabamos de ver no necesita el concepto de límite. Así, la definición de *asíntota* publicada por la Real Academia Española (RAE) en su diccionario, es perfecta para el caso de hipérbolas:

- Asíntota. f. Geom. Línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca de continuo a una curva, sin llegar nunca a encontrarla (RAE, 2020, p. 337).

Esto conduce a una definición problemática que da lugar a interpretaciones que pueden considerarse obstáculos epistemológicos. Otra aproximación a las asíntotas se basa esta vez en el uso del álgebra y tiene cabida en el paradigma del AC basada en una técnica de estudio rutinaria que ambos autores definen como una atracción algorítmica que dividen en tres etapas (RAE, 2020, p. 338):

Etapa 1: Estudio de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$,

Etapa 2: Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, estudio de $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right]$,

Etapa 3: Si $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] = n$, resultado: la recta $y = mx + n$ es asíntota de la función f.

Esta vez, este significado es apoyado sobre el concepto de límite en el diccionario *American Heritage Dictionary of the English Language*:[4]

> Asymptote. A line whose distance to a given curve tends to zero. An asymptote may or may not intersect its associated curve (AHDEL, 2020, p. 337).[5]

Estos dos paradigmas ya dan una visión ampliada de las asíntotas, pero es insuficiente para abordar algunos casos particulares en relación con las funciones no algebraicas, como las funciones circulares. Obtenemos así gráficos exóticos que sólo se pueden resolver con el paradigma AI. Así, en el siguiente caso de la situación del eje Oy relativamente a la gráfica de la función 1/x sen (1/x). Todo punto del eje Oy está a una distancia nula de la gráfica.

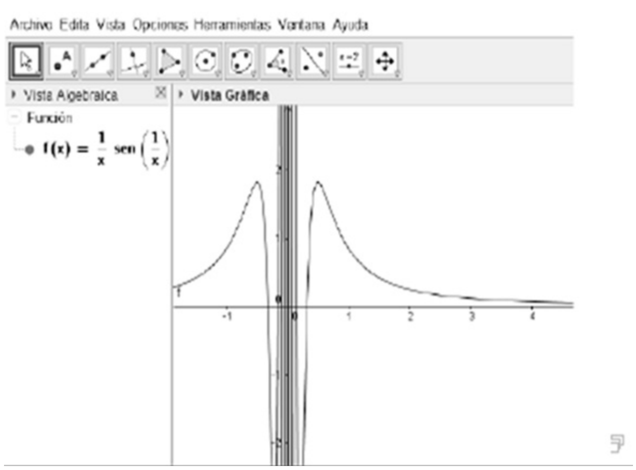


Figura 3. Gráfico de la función 1/x . sen (1/x) (Páez y Pluvinage, 2019, p. 338).

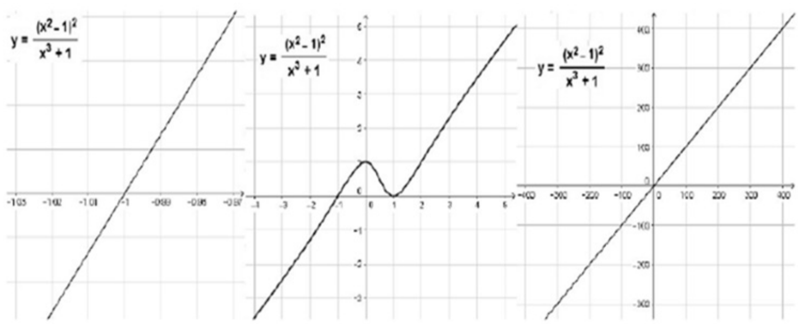
¿Cómo salir entonces de este mal paso al que conducen las definiciones formales alejadas de la intuición geométrica? En este caso, como en otros temas de estudio en el análisis, se hace imprescindible variar los puntos de vista y apelar a las perspectivas de localidad que juegan con la dinámica local vs. global. Podemos ver esta dinámica en funcionamiento en la siguiente figura donde la misma función es graficada, pero con diferentes perspectivas con el uso de los comandos Aproximar y Alejar

4. Obsérvese el amor de François Pluvinage por los diccionarios antiguos como fuente inagotable de descubrimientos.

5. Asíntota. Línea cuya distancia respecto a una curva dada tiende a cero. Una asíntota puede o no intersecarse con su curva asociada [traducción propia].

que dan tres representaciones con tres escalas diferentes: centésimos a la izquierda, unidades en el centro, centenas a la derecha.

Este uso del *software* permite una exploración basada en el plan [Sem-Ins] con un trabajo de génesis semiótica e instrumental utilizando diferentes perspectivas de localidad y deconstrucciones puntuales y locales.



$$f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^3+1}$$

Figura 4. Diferentes perspectivas sobre la misma función (Páez y Pluvinage, 2019, p. 345).

Todo esto en relación con una validación discursiva mediante el cambio de paradigmas de AG a AC.

$$f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^3+1} = \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

De hecho, como señalan Páez y Pluvinage (2019), sólo es bajo esta última escritura que se ve que −1 es una singularidad removible, y que la fracción toma el valor 0 cuando x es igual a −1. Pero, en el cálculo que Excel hizo se usó en la fila 12 un valor muy vecino de −1 en vez del valor exacto −1. De hecho, si se selecciona un formato de 18 dígitos decimales en la celda A12, se obtiene −0.999999999999999000.

5.2 Dialéctica Discreto-Continuo y Deconstrucciones

Esta oposición clásica y fundacional del Análisis Moderno se manifiesta de una manera nueva y persistente con el uso de herramientas tecnológicas como lo ilustra el siguiente ejemplo basado en resultados dados nuevamente en un artefacto numérico, aquí se presenta una hoja de cálculo que da los valores de una secuencia numérica. Durand-Guerrier y Vivier (2016) propusieron el enunciado de la Tabla siguiente a estudiantes universitarios de primer año.

Tabla 1. Enunciado del problema numérico para estudiantes universitarios. Fuente: Durand-Guerrier y Vivier (2016).

Para estudiar dos sucesiones (u_n) y (v_n), entramos en una hoja de cálculo:

- los números 3, en A2, et 2, en B2
- y las fórmulas siguientes:

A3: = 0.5*(A2+5/A2)
B3: = 2+1/(2+B2)
Las fórmulas introducidas en A3 y B3 se han copiado hasta la línea 14. El resultado es una tabla de valores como la que se muestra en el extracto de la hoja de cálculo al lado.
¿Se puede deducir de estos datos que las secuencias (un) y (v_n) convergen hacia el mismo límite? Justifica precisamente.

	A	B
1	u_n	v_n
2	3,000000000000	2,000000000000
3	2,333333333333	2,250000000000
4	2,238095238095	2,235294117647
5	2,236068895643	2,236111111111
6	2,236067977500	2,236065573770
7	2,236067977500	2,236068111415
8	2,236067977500	236067970035
9	2,236067977500	2,236067977916
10	2,236067977500	2,236067977477
11	2,236067977500	2,236067977501
12	2,236067977500	2,236067977500
13	2,236067977500	2,236067977500
14	2,236067977500	2,236067977500

Entre treinta y cinco estudiantes de primer año de matemáticas de la Universidad de Montpellier (Francia), doce responden correctamente (es decir, un tercio).

Seis responden que las sucesiones tienen un límite y nueve que las sucesiones son estacionarias. Las últimas quince (6+9) respuestas pueden interpretarse como afirmaciones en el paradigma AG basadas casi exclusivamente en la génesis semiótica. Además, la perspectiva de la localidad del infinito está ausente en estas respuestas. Los nueve estudiantes que responden "estacionaria" demuestran una comprensión del número que se limita, aquí, a 12 decimales. Se está en una percepción discreta del número que no permite pensar la infinidad de decimales necesarios para los números no decimales. El paso a un conjunto continuo de números no parece realizarse para estos estudiantes.

Por lo tanto, parece necesario reconstruir el continuo a partir de lo discreto; esto puede iniciarse con la cuestión de una validación discursiva que provoque un cambio de paradigma para entrar en AI. El estudio desde la introducción de las funciones exponenciales en Grado 12 en los textos escolares y en las aulas (Kuzniak *et al.*, 2017) confirma que no parece que se tenga en cuenta explícitamente la dialéctica discreto/continuo. El trabajo sobre esta dialéctica varía de un libro de texto a otro, de una sección de la clase a otra. A menudo notamos un cambio de artefacto, o la introducción de un nuevo artefacto, cuando se pasa de lo discreto a lo continuo o de lo continuo a lo discreto sin que esto sea explícito.

6. Identificación de los ETM idóneos en Francia a partir de las formas de trabajo sobre las funciones

6.1 A partir del estudio de los ETM parciales y de los ETM de funciones en particular

Como hemos señalado, el encuentro con el Análisis se inicia con el uso de una serie de objetos específicos, algunos ya conocidos por los alumnos, como las funciones, y otros nuevos, como las sucesiones. Estos objetos son numerosos y particularmente complejos de aprehender en su totalidad: números reales, límites, derivadas, integrales, etc. Y de hecho, la institución educativa favorece la implementación de formas de trabajo que se estructuran dentro de ETMs dedicadas a objetos específicos más que al Análisis en su totalidad. $\text{ETM}_{\text{Funciones}}$, $\text{ETM}_{\text{Succesiones}}$, cada uno de los cuales puede a su vez dividirse en ETMs particulares asociados por ejemplo a la proporcionalidad con funciones lineales y afines, funciones cuadráticas, etc.

La relación de estos ETM parciales con un ETM general y englobante es un problema clásico, pero aún mal resuelto en la didáctica de las matemáticas: cómo dar cuenta de lo general a partir del estudio de casos particulares. Es imposible observar y describir exhaustivamente todas las situaciones didácticas que alimentan el ETM estudiado. Por lo tanto, es necesario seleccionar ciertas situaciones emblemáticas y también ciertos subdominios que puedan dar cuenta de todo el ETM. Esto nos ha llevado a estudiar el ETM de las funciones.

6.2 El caso particular de las funciones

El ETM parcial sobre funciones es un ejemplo emblemático de cómo el ETM de Análisis se organiza a lo largo de la escolarización entre formas de trabajo que parecen más yuxtapuestas que complementarias. Según Vandebrouck (2011), existen tres formas de trabajo: F1, F2 y F3, que detallamos a continuación.

- Una forma de trabajo F1 asociada al paradigma AG.

En primer lugar, desde el final de la escuela media hasta el comienzo del Grado 11 sección científica, se espera que los estudiantes desarrollen una forma de trabajo F1 en el paradigma AG. En este caso, las representaciones semióticas de las funciones (incluidas las tablas de variaciones, los gráficos y las fórmulas algebraicas) son múltiples y se manipulan sin dar especial importancia a las fórmulas algebraicas. El reto de aprendizaje parece ser que los alumnos conceptualizan las funciones como un objeto global, coordinando los distintos registros de representaciones y relacionando las funciones con otros dominios matemáticos, como la geometría, o externos a las matemáticas, como la física, la economía, etc. Por lo tanto, hay un desarrollo de actividades de modelización intra y extra matemáticas con un apoyo deseado en artefactos tecnológicos como el *software* de geometría dinámica o las hojas de cálculo en particular.

Este trabajo de exploración y descubrimiento conduce a la enunciación de un cierto número de propiedades, ya sean globales, como las nociones de paridad, periodicidad, crecimiento, o locales, como las nociones de extremo global (máximo o mínimo).

- Una forma de trabajo F2, asociada al paradigma AC, que se vuelve dominante al final de la escuela secundaria.

A partir de la clase de Grado 10 (pero sobre todo de Grado 11) y hasta la universidad, donde se vuelve más compleja, se desarrolla una segunda forma de trabajo F2, asociada al paradigma AC y yuxtapuesta a la forma F1. El registro algebraico, ya importante para el estudio de las funciones en los textos de Grado 11, se vuelve predominante en los textos de clases científicas de Grado 11 y 12.

Las nociones locales se introducen progresivamente: límites, continuidad, derivabilidad, esta última es introducida en los programas de Grado 11 científica antes de la noción de límite. De hecho, estas nociones locales se movilizan principalmente en los ejercicios en los que las funciones se expresan a partir de una fórmula algebraica, generalmente polinómica, mezclando luego exponenciales y logaritmos en Grado 12. Todos ellos pueden representarse con gráficos. Las búsquedas de límites se procesan mediante cálculos algebraicos. La minimización, la mayoración y el encuadramiento con funciones de referencia casi han desaparecido. No hay más definiciones rigurosas del concepto de límite y aparece una perspectiva intuitiva.

Al final del liceo, las preguntas se refieren a estudios globales, pero son algebraicas. En particular, las funciones son siempre globalmente derivables y sus variaciones se estudian a partir del signo de la derivada, lo que devuelve las propiedades globales a las propiedades puntuales universales y oculta el carácter global de estas propiedades. Los problemas locales (límites, continuidad, derivabilidad en un punto) se encapsulan en procedimientos algebraicos.

- Una forma F3, al inicio de la universidad, con la aparición del paradigma AI.

La tercera forma de trabajo de F3 se introduce desde el principio de la universidad, especialmente en los cursos magistrales. Las demostraciones son desarrolladas en los talleres bajo el impulso del profesor. Se trata de un primer descubrimiento del paradigma AI en un Análisis no algebrizado y con nuevas reglas como las de cuantificación que aquí se vuelven obligatorias. El cambio de paradigma implica nuevas técnicas y enfoques diferentes a los utilizados en el paradigma AC: técnicas de adición, sustracción y encuadramiento, juego entre condiciones suficientes y/o necesarias con para muchos una perspectiva local sobre las funciones.

Las nuevas tareas que utilizan expresiones como “cerca de” o “acercándose a” no pueden utilizarse sin el uso de cuantificadores en el tratamiento de las expresiones algebraicas. Los fundamentos de esta forma de trabajo F3 asociada al paradigma AI son los de la completud R generalmente admitida. El primer teorema local del Análisis, relativo a la imagen de una sucesión convergente por una función continua, se demuestra en un curso magistral. Su demostración requiere el uso de la cuantificación y definiciones precisas de las nociones de convergencia y continuidad.

- Un trabajo matemático muy compartimentado y una difícil transición del liceo a la universidad.

Estas diferentes formas de trabajo F1, F2 y F3 se integran en ETMs idóneos, que los estudios didácticos de Gagatsis y Monoyiou (2013) y Vandebrouck (2011) han señalado que en realidad conducen al desarrollo de un trabajo matemático muy compartimentado que no tiene en cuenta las descomposiciones y recomposiciones dimensionales, cuya importancia es crucial para acceder a un trabajo rico y completo en Análisis Matemático. Este punto es especialmente significativo cuando se toma como hilo de análisis la posible dialéctica entre las tres perspectivas de la localidad: global, local y puntual.

En la escuela secundaria, a pesar de las situaciones introductorias de descubrimiento y exploración en el plano [Sem-Ins] basadas en el paradigma AG, el trabajo es relativamente homogéneo en el paradigma AC. Debido a la falta de trabajos específicos sobre las perspectivas de localidad (global, puntual y local), las diferentes génesis aparecen desconectadas con la dificultad de dar sentido a ciertas reconstrucciones instrumentales y, sobre todo, de iniciar pruebas no icónicas y discursivas basadas en propiedades claramente identificadas. Centrarse en el paradigma AC conduce a un empobrecimiento del posible juego entre las diferentes representaciones semióticas, el cual está unido a una fuerte rutinización de las técnicas algebraicas, que limita la iniciativa de los alumnos y conduce a una concepción errónea del trabajo matemático en Análisis. Este último parece reducirse a un álgebra particular.

En la universidad, esta vez se hace hincapié en la validación discursiva apoyada en un importante marco teórico referencial. Por lo tanto, es más bien el plano [Sem-Dis] el que se activa con la introducción del paradigma AI que no fue preparado en la escuela secundaria. También es necesario subrayar la casi desaparición de las calculadoras gráficas, lo que dificulta el uso de las representaciones gráficas cuando no están a disposición de los estudiantes. El trabajo matemático deseado se basa en un juego entre las diferentes perspectivas de la localidad, en un tratamiento complejo de las representaciones simbólicas formales que supone una transferencia del mismo tipo de actividad a las representaciones algebraicas. También hay que destacar la relativa pobreza de los trabajos rutinarios específicos sobre técnicas de cálculo.

¿En qué medida esta observación, en el caso de la enseñanza del análisis en Francia, se encuentra en otros países? Este es un tema típico de la investigación comparativa que el enfoque de la teoría de la EFP pretende promover: comparar y comprender las diferencias entre las instituciones educativas sin clasificar necesariamente los países y sus sistemas de valores y educación.

7. Avanzar en la construcción de formas de trabajo más completas y ambiciosas

En esta sección, comentamos brevemente las investigaciones que pretenden ir más allá de la simple observación de las dificultades o insuficiencias en un intento de desarrollar un trabajo matemático que implique todas las dimensiones del ETM), pero en consonancia con la orientación de este trabajo, nos remitimos de nuevo al trabajo de Páez y Pluvinage (2019), que utilizan de forma especialmente eficaz la teoría de ETM para construir un proyecto de enseñanza sobre las asíntotas. Presentamos los principios teóricos de su propuesta de enseñanza, que tiene la ventaja añadida de mostrar cómo es posible combinar diferentes enfoques teóricos para armar una sesión y evaluar el trabajo personal de los estudiantes a través de la teoría ETM utilizando una estrategia de formación tomada de la teoría de la actividad (ACODESA).

Desde el principio, los autores señalan que para el diseño de actividades, se apoyan sobre el marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático que les conduce a distinguir tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. Dan su propia comprensión de la génesis tal y como la pudieron aplicar posteriormente:

- En la génesis semiótica se adquieren el vocabulario y el significado de las representaciones. La génesis instrumental refiere a las construcciones, y la génesis discursiva establece la firmeza del "edificio" matemático gracias a los razonamientos de tipo lógico.
- Por supuesto, cada génesis se relaciona con las otras dos, pero también tiene su especificidad, que permite considerarla específicamente.

- De manera general, separar y luego combinar es un plan de trabajo aconsejable en la enseñanza, porque permite a los docentes tener una clara percepción de las dificultades de sus alumnos y ayuda a una toma de decisiones relevantes respecto de los aprendizajes a impulsar (Páez y Pluvinage, 2019, p. 348).

Esto lleva a examinar atentamente tres cuestiones principales que sirven de base para el diseño de la situación que deciden poner en práctica.

- ¿Qué tareas se relacionan más específicamente con cada una de las tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva?
- ¿Qué elementos dan cuenta de un avance de los estudiantes en cada una de las tres génesis?
- ¿En qué medida quedan separadas o al contrario se combinan las tres génesis? (Páez y Pluvinage, 2019, p. 348).

Para ello, y en relación con el análisis preliminar mencionado anteriormente (sección 5.1), analizan los diferentes tipos de registros y artefactos necesarios para su experimentación. En la situación que nos interesa se usan los registros de la expresión verbal, de la representación geométrica y de la escritura algebraica.

> Diferentes expresiones de la función pueden corresponder a una misma gráfica. Esto les lleva a distinguir los tipos de registros que se utilizan en la situación y a interesarse de manera sutil por los tipos de artefactos que ofrece el *software* GeoGebra. Por ejemplo, los "tipos de artefactos con la introducción en Entrada de la palabra Asíntota en GeoGebra, provoca la aparición de Asíntota[<Cónica>], Asíntota[<Función>] y Asíntota[<Curva Implícita>]" (Páez y Pluvinage, 2019, p. 348).

A partir de ahí, pueden jugar con diferentes dominios matemáticos (Geometría, Análisis y Geometría Analítica) para articular los diferentes paradigmas que interfieren en la definición de las asíntotas.

8. Conclusiones

En esta conclusión, volvemos a los puntos que nos parecen más innovadores en nuestro enfoque del trabajo matemático en Análisis mediante el uso de la teoría de los ETM.

- Identificar el trabajo matemático a través de la interacción de paradigmas.

Identificar los paradigmas que guían el trabajo en Análisis es un primer paso necesario para caracterizar los ETM. Hemos identificado tres paradigmas que aportan perspectivas diferentes, pero no contradictorias sobre los objetos de análisis.

El primero, AG (Análisis Aritmético-Geométrico), es necesario para desarrollar la intuición requerida para trabajar en los otros dos. De manera natural, este paradigma asegura una primera dialéctica entre las diversas perspectivas de la localidad y entre lo discreto y lo continuo, que luego permitirá entrar en el Análisis Matemático Avanzado.

El paradigma AC (Análisis Computacional) es necesario para asociar un mundo muy específico de cálculos y escrituras simbólicas a los objetos del Análisis. Este paso por el simbolismo induce un cambio gradual del punto de vista geométrico o aritmético a la noción abstracta de función asociada a los conjuntos de números.

Por último, el paradigma del AI (Análisis Infinitesimal) es en cierto modo el paradigma al que se apunta en la perspectiva de las matemáticas avanzadas. Las demostraciones se basan en un importante formalismo que redefine los objetos y métodos en profundidad.

- Un paralelismo con la enseñanza de la geometría.

Paralelamente a los estudios realizados en didáctica de la geometría, estos tres paradigmas sirven para poner de manifiesto una dialéctica entre AG-AC en el liceo que se asemeja a la dialéctica entre Geometría I-Geometría II en el liceo, en la medida en que el paradigma AC está inacabado y no permite un trabajo de demostración estándar basado en un referencial teórico muy estructurado. Por último, el paradigma AI debería permitir una profundización de las cuestiones estudiadas que sólo tiene sentido tras un trabajo previo en los dos paradigmas anteriores, del mismo modo que una entrada directa en el Geometría III no tenía sentido para los estudiantes.

Para comprender el particular trabajo de visualización asociado a la génesis semiótica, hemos conservado la idea de construcción y deconstrucción introducida por Duval para aclarar la ruptura epistemológica entre la evidencia icónica y la no icónica. En el marco del Análisis, se puede poner en paralelo un tipo de deconstrucción/deconstrucción (global, local y puntual) con descomposiciones dimensionales de tipo 1D, 2D o 3D.

- ETM idóneos en la enseñanza secundaria y universitaria.

El diagrama asociado a los ETM permite identificar formas de trabajo con circulaciones muy específicas y características y mostrar así que los ETM del Análisis en el liceo y en la universidad están muy compartimentados, sin conexión explícita, en torno a paradigmas diferentes (AG y luego AC en el liceo; AI en la universidad).

Además, nuestros estudios muestran una dinámica de trabajo relativamente débil (en el sentido de la teoría) porque hay poca conexión entre las diferentes génesis. Así, en el liceo, asistimos a un encierro en el plano [Sem-Ins], ya sea por un trabajo sobre el *software*, a menudo gestionado por el profesor, o la calculadora, o por un trabajo sobre las técnicas algebraicas rutinarias. En cambio, en la universidad, el plano [Sem-Dis] es favorecido por los profesores que suelen dejar de lado el trabajo de rutinización y exploración. Por lo tanto, estas formas de trabajo, que son útiles para entrar en Análisis Avanzado y para fomentar la articulación con el ETM de la escuela secundaria, se dejan al alcance de los estudiantes.

- Más allá del informe...

Nuestras observaciones sobre la compartimentación del ETM y sobre la falta de un trabajo completo con movilización de todos los componentes del trabajo matemático pasaron relativamente desapercibidas en las evaluaciones institucionales porque si el trabajo del alumno, sobre todo al final del bachillerato, puede parecer más bien técnico, en realidad está bien adaptado a exámenes como el bachillerato.

Sin embargo, nos parece posible ir más allá de esta observación para intentar transformar el trabajo jugando conscientemente con los diferentes paradigmas, desarrollando un trabajo más variado sobre las diferentes génesis que puede basarse en particular en las diferentes perspectivas de la localidad. Es en esta línea de investigación en la que los investigadores asociados a nuestro equipo están comprometidos desde 2017. En particular, han dado lugar a trabajos de tesis como los de Reyes (2020) y López (2021). Esta investigación ha sido capaz de integrar la visualización de objetos matemáticos construidos mediante artefactos numéricos para avanzar en un trabajo de demostración. Para ello, utilizaron los paradigmas AG y AC de forma equilibrada para apoyar un primer trabajo de exploración, que se basó en gran medida en las representaciones gráficas y el *software* utilizado por los estudiantes. También mostraron el papel esencial del paradigma AI para entrar en una génesis discursiva que explica perfectamente los resultados gráficos.

9. Referencias

AHDEL (2018). *The American Heritage Dictionary of the English Lenguage*. ahdictionary.com

Durand-Guerrier, V. y Vivier, L. (2016). Densité de D, complétude de R et analyse réelle-Première approche. *First INDRUM conference*. Montpellier, France.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 413-435.

Gagatsis, A. y Monoyiou, A. (2013). Les stratégies des futurs instituteurs dans la résolution de tâches sur les fonctions. Approche ponctuelle ou approche coordonnée? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *18*, 115-137.

Kuhn, T.S. (1966). *The structure of scientific revolutions*, 2nd ed. University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. y Rauscher, J.C. (2020). Implication dans un enseignement renouvelé et recherches en didactique des mathématiques. Hommage à François Pluvinage et à la pensée vagabonde et active d'un chercheur et homme rare. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *25*, 271-290.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático: puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(41), 17-26.

Kuzniak, A., Vivier, L. y Vandebrouck, F. (2017). Le travail mathématique en Analyse de la fin du secondaire au début du supérieur: identification et construction. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble. La pensée sauvage.

Lopez, S. (2021). *L'enseignement et l'apprentissage de l'optimisation des fonctions: la transition d'une à deux variables réelles*. Thèse. Université de Paris.

Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces as an analyzing tool for the teaching and learning of calculus, *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 739-754.

Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2018). El trabajo matemático en análisis y el rol de la visualización en las dimensiones semiótica, instrumental y discursiva. L. Vivier (Ed.). *Actas del sexto simposio ETM6* (pp. 123-136). Valparaíso.

Oktaç, A. y Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition… in research about Analysis. B. Hodgson, A. Kuzniak, J. Lagrange (Eds.). *The didactics of mathematics: approaches and issues* (pp. 87-222). Springer.

Páez, R. y Pluvinage, F. (2019). Estudio de las asíntotas de una función en un ambiente con tecnología dinámica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *39*(3), 331-369.

RAE. (2020). *Diccionario de la Real Academia Española*. https://www.rae.es/

Reyes, C. (2020). *Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique*. Thèse. Université de Paris.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*, 161-177.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pours l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, *16*, 149-185.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES. NIVEL MEDIO Y SUPERIOR

CAPÍTULO 6. SOBRE LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL. UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE VECTORES Y MATRICES: DESDE LO VISUAL HASTA LA MODELACIÓN

Yani Betancourt González, yanibg.mat@gmail.com
Universidad Autónoma de Tlaxcala
Humberto Madrid de la Vega, hmadrid@gmail.com
Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

El Álgebra Lineal es desde hace décadas una de las áreas de la matemática con gran protagonismo en la era digital, desafortunadamente su enseñanza no ha evolucionado de la misma forma. Desafortunadamente son muchos los estudiantes que ven el Álgebra lineal como un mundo abstracto y sin sentido. A razón de promover un cambio, presentamos una propuesta para la enseñanza de dos conceptos fundamentales del Álgebra Lineal: vector y matriz, los cuales promueven la visualización a través de ejemplos específicos relacionados con el mundo digital que, a su vez, conllevan a la abstracción, así como a la promoción de la construcción de un modelo matemático conveniente y una aplicación pertinente. Además, consideramos que esta propuesta de enseñanza puede ser útil no sólo para la educación superior sino también para la educación media superior.

1. Introducción

La era digital ha transformado la forma de hacer y realizar una amplia gama de actividades, quizá la más evidente: la comunicación. Sin embargo, casi todo lo que se nos ocurra, como la compra de comida o el pago de servicios, está mediado por las tecnologias digitales; para que esto suceda y se lleve a cabo sin errores se han desarrollado tecnologías cada vez más sofisticadas, gracias a los avances en el desarrollo del conocimiento científico. Justamente, el Álgebra Lineal ha sido desde el principio de la era digital un instrumento trascendental, imprescindible. Sin embargo, en la enseñanza del Álgebra Lineal podemos encontrar que las cosas parecen no haberse modificado mucho, tanto en estrategias como en actualización curricular, sigue teniendo un enfoque tradicional.

Se ha señalado en diversas investigaciones (Dorier *et al*, 2000; Britton y Henderson, 2009) que uno de los principales problemas en la enseñanza del Álgebra Lineal es que muchos de sus conceptos no tienen referentes familiares para el alumno. Los objetos matemáticos primarios en el Álgebra Lineal son los conceptos de *vector* y *matriz*. Generalmente la primera definición de vector es una colección ordenada de números reales y una matriz es un arreglo rectangular de número reales (Grossman, 2008). Vistos de esta manera resultan conceptos muy abstractos. Sin embargo, a la abstracción le preceden ejemplos con contenidos concretos. Por ejemplo, la hora es una pareja de ordenada de dos números, el primero representa la hora y el segundo número los minutos; una tabla de resultados de una jornada de encuentros de fútbol es usualmente una tabla donde cada renglón es el marcador final de cada juego. A final de cuentas un vector es el nombre que se pone a una lista abstracta de números y una matriz es el nombre de un arreglo rectangular de números. Visto de otra manera, un vector es una colección (ordenada, horizontal o vertical) de números y una matriz es una colección (ordenada) de vectores (como columnas o como renglones); por ello un proceso previo a la abstracción es la visualización en el sentido que Arcavi (2003) menciona: "[una] visualización al servicio de la resolución de problemas, puede jugar un papel central para inspirar la solución completa, más allá de lo meramente procedimental" (p. 10).

Dadas estas circunstancias y bajo una perspectiva de modelación nosotros proponemos una enseñanza específica de los conceptos de vectores y matrices que puede utilizarse desde la educación media superior y, desde luego, en la educación superior, estableciendo niveles de conceptualización. A continuación, presentamos con ejemplos prácticos nuestra perspectiva en torno a la enseñanza de los conceptos de vector y matriz.

2. Vectores y matrices: visualizar y abstraer

Durante nuestros años de experiencia en la enseñanza del Álgebra Lineal hemos llegado a observar y reproducir de manera exitosa una forma significativa de introducir los conceptos de vector y matriz en cursos y talleres de introducción al Álgebra Lineal y sus aplicaciones.

Para nosotros existen tres momentos o etapas fundamentales en el aprendizaje y comprensión de los conceptos de vector y matriz:

1. Visualizar.
2. Abstraer.
3. Construir.

A continuación, explicamos cada fase, presentando y analizando ejemplos específicos.

2. 1. Visualizando vectores y matrices

Para el humano existen las cosas en el momento que se hacen visibles, así logramos identificar y diferenciar de manera natural el mundo que nos rodea. Sin embargo, también hay objetos que son invisibles para el humano, que sólo el ojo educado puede detectar, siendo la enseñanza una de las formas de hacerlos visibles. Para nosotros, una enseñanza que promueva la curiosidad del estudiante y le invite a buscar en el mundo (físico o virtual) que le rodea, los objetos que cumplen con las características que los hacen iguales o semejantes.

Lo anterior también aplica para objetos matemáticos como es el caso de las matrices y los vectores, que en principio podemos encontrar en forma de arreglos de números, acomodados u organizados en forma de lista o tabla. Actualmente existe un mundo virtual que con los años ha ido creciendo, este mundo está conformado en gran parte por datos, por lo general datos numéricos que llegan a formar conjuntos ordenados de datos numéricos en forma de listas y tablas, ahí es a donde necesitamos llevar a nuestros estudiantes para que detecten estos objetos y los visualicen.

A continuación, presentamos varios casos de datos que son visibles y que tienen la forma de un arreglo numérico, ya sea en forma de lista o de tabla:

Ejemplo 1. La hora y la fecha. Actualmente, casi cualquier dispositivo digital presenta la hora, como se muestra en la figura 1:

Figura 1. Fecha y hora. Elaboración propia.

Tanto la hora como la fecha son listas en forma de renglón con la diferencia que la hora tiene dos entradas y la fecha tres,

$$1:02 \rightarrow (1,2)$$
$$7\,/\,22\,/\,08 \rightarrow (7,22,8)$$

Ejemplo 2. Los contactos telefónicos. Con el uso generalizado del teléfono, las agendas telefónicas se hicieron comunes. Actualmente, los dispositivos cuentan con una agenda telefónica interna que el usuario va generando, y basta con escribir el nombre del contacto en otro momento para que aparezca el número telefónico, como se muestra en la Figura 2:

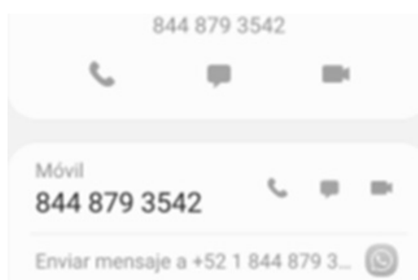


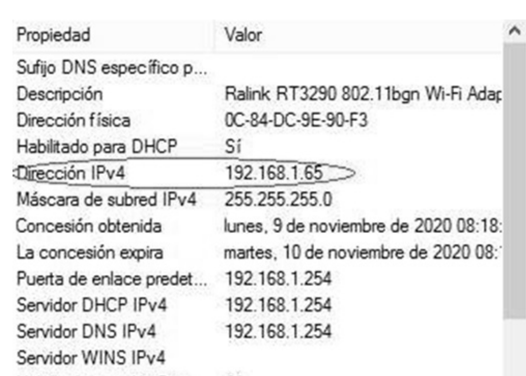
Figura 2. Número telefónico. Elaboración propia.

En este caso tenemos una lista de diez números,

$$(8,4,4,8,7,9,3,5,4,2)$$

es decir, para las compañías telefónicas somos un vector en R^{10}.

Ejemplo 3. Mi dirección IP. Siempre que un dispositivo se conecta a internet le es asignada una dirección IP (*internet protocol*) como se observa en la figura 3:



Propiedad	Valor
Sufijo DNS específico p...	
Descripción	Ralink RT3290 802.11bgn Wi-Fi Adap
Dirección física	0C-84-DC-9E-90-F3
Habilitado para DHCP	Sí
Dirección IPv4	192.168.1.65
Máscara de subred IPv4	255.255.255.0
Concesión obtenida	lunes, 9 de noviembre de 2020 08:18:
La concesión expira	martes, 10 de noviembre de 2020 08:
Puerta de enlace predet...	192.168.1.254
Servidor DHCP IPv4	192.168.1.254
Servidor DNS IPv4	192.168.1.254
Servidor WINS IPv4	
Habilitado para NetBios ...	Sí

Figura 3. Dirección IP. Elaboración propia.

Para internet también somos vectores, en este caso el 192.168.1.65 es el vector que vive en R^4.

Ejemplo 4. Pollo con papas. Es común que las personas busquen recetas por internet, desde guisados hasta postres. Este es el caso del pollo con papas como se muestra en la Figura 4:

INGREDIENTES	CANTIDAD
Pechugas partidas a la mitad	2
Cebolla picada	½
Papas peladas y picadas	2
Tallos de apio picados	4
Lata de sopa de pollo	1

Origen: sección "de todo un poco, vida y salud". Zócalo Saltillo, jueves 11 de febrero de 2010.

Figura 4. Receta. Elaboración propia.

En este caso, tenemos una columna de ingredientes donde cada entrada está en términos de cantidades,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, este vector columna de R^5 representa la cantidad de ingredientes que se necesitan para cocinar el famoso guisado de pollo con papas.

En este punto, está claro que el propósito didáctico es orientar al estudiante mostrando ejemplos como los anteriores y enseguida promover la búsqueda por parte del estudiante de acontecimientos, situaciones o actividades semejantes a los ejemplos, ya sea realizando búsquedas por internet o a través de experiencias personales o de su contexto donde le sea posible detectar y visualizar vectores renglón o vectores columna. De la misma manera, presentar a los estudiantes ejemplos de situaciones donde se puede observar, detectar o visualizar matrices, como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5. El fútbol. Existen acontecimientos o situaciones que acumulan información en forma de tablas numéricas, este es el caso de los deportes, como el fútbol que semanalmente presenta las posiciones de los equipos, Figura 5:

	Club	PJ	G	E	P	GF	GC	DG	Pts	Últimos 5
1	León	17	12	4	1	27	14	13	40	
2	Pumas	17	8	8	1	29	17	12	32	
3	América	17	9	5	3	31	22	9	32	
4	Cruz Azul	17	9	2	6	23	16	7	29	
5	Monterrey	17	8	5	4	26	21	5	29	
6	Tigres	17	7	7	3	27	16	11	28	
7	Guadalajara	17	7	5	5	20	17	3	26	
8	Santos	17	7	4	6	24	20	4	25	
9	Pachuca	17	6	7	4	18	14	4	25	
10	Necaxa	17	7	3	7	16	20	-4	24	
11	Toluca	17	6	3	8	23	28	-5	21	
12	Puebla	17	6	2	9	22	25	-3	20	
13	Juárez	17	4	7	6	16	19	-3	19	
14	Mazatlán	17	4	4	9	24	31	-7	16	
15	Tijuana	17	4	3	10	12	27	-15	15	
16	Atlas	17	3	5	9	13	20	-7	14	
17	Querétaro	17	3	4	10	23	28	-5	13	
18	Atl. San Luis	17	3	2	12	16	35	-19	11	

Figura 5. Tabla de posición de los equipos de fútbol. Elaboración propia.

En este caso una matriz de 18×8 donde cada renglón representa a un equipo en términos de su desempeño: partidos jugados, goles, empates, etc., así, por ejemplo, el quinto renglón es el vector renglón que representa al equipo Monterrey,

$$(17,8,5,4,26,21,5,29)$$

Cada columna representa una característica de desempeño de todos los equipos, como el número de partidos perdidos,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Los ejemplos que hasta ahora hemos mostrado son visualmente observables, detectables casi de inmediato. Sin embargo, existen otros ejemplos donde los vectores y matrices yacen "ocultos" a la vista; sin embargo, están ahí, esperando a ser tratados como un vector o una matriz, como el siguiente ejemplo lo muestra.

Ejemplo 6. El clima. Actualmente es posible consultar en la web el clima de casi cualquier punto en el mundo, la Figura 6 muestra un ejemplo:

Figura 6. Clima. Elaboración propia.

En la imagen se puede apreciar que, además de dar la temperatura específica del día en cuestión, también ofrece un pronóstico. Acomodando la información en una tabla 1, queda así:

Tabla 1. Estimación del clima. Elaboración propia.

Día	Máxima	Mínima
Sábado	22	9
Domingo	23	9
Lunes	22	8
Martes	23	8
Miércoles	23	8
Jueves	24	9
Viernes	24	9
Sábado	24	9

La tabla muestra un arreglo en columnas y renglones que representan las temperaturas máximas y mínimas pronosticadas en una semana, es decir, una matriz de 8×2 donde la primera columna son las temperaturas máximas y la segunda columna son las temperaturas mínimas,

$$\begin{pmatrix} 22 & 9 \\ 23 & 9 \\ 22 & 8 \\ 23 & 8 \\ 23 & 8 \\ 24 & 9 \\ 24 & 9 \\ 24 & 9 \end{pmatrix}$$

Este ejemplo muestra, que bajo cierto tratamiento de la información es posible arribar a una matriz. A continuación, presentamos un ejemplo donde los vectores y matrices son aún menos evidentes.

Ejemplo 7. Arreglos florales. El mundo digital es tan amplio en la actualidad que es posible encontrar y comprar arreglos florales en la web. En particular podemos encontrar canastas de arreglos florales como se muestra en la Figura 7:

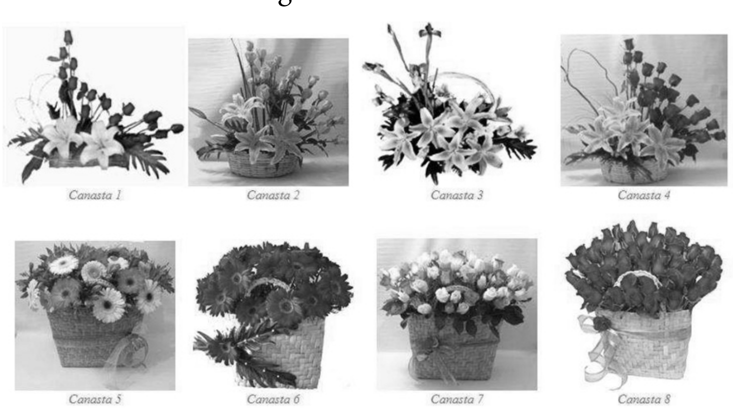


Figura 7. Diferentes tipos de canastas. Elaboración propia.

En este caso, cada canasto tiene una cantidad específica de cierto tipo de flor, esta información es necesaria pues de ello depende el precio de cada canasto de flores, la siguiente tabla muestra la cantidad de colores por tipo de algunos de los canastos,

Canastos	Violetas	Rosas	Tulipanes	Lilis	Azucena	Begonias
1	0	9	0	2	0	0
2	0	15	0	4	5	0
3	6	0	0	5	7	2
8	0	39	0	0	0	0

De esta forma cada canasto es un vector en R^6, así el canasto 2 es el vector $(0,15,0,4,5,0)$.

Como hemos podido ver, existe una diversidad de ejemplos donde se pueden visualizar tanto los vectores como las matrices; en algunos casos la detección es inmediata, digamos que es una visualización concreta; en otros casos, las matrices y los vectores yacen ocultos, por lo que hay que pasar por un proceso de abstracción, en el cual hay que descartar aquellas características que no son comunes y encontrar aquellas características comunes, digamos una visualización relativa. En ambos casos, el propósito didáctico al presentar esta secuencia de ejemplos es desarrollar en el aprendiz de Álgebra Lineal un "ojo" educado para visualizar los vectores y las matrices en casi cualquier situación.

Para resolver un modelo con herramientas matemáticas es necesario construir un modelo, una representación conveniente con el fin de tratar y manipular con herramientas matemáticas la situación. A continuación presentamos algunos ejemplos donde es necesario construir o armar los objetos matemáticos pertinentes respecto a la situación que se plantea, en este caso vectores y matrices.

3. Modelación vectorial: construyendo vectores y matrices

Hemos visto que listas y tablas numéricas aparecen por todos lados, a veces en forma muy explícita y a veces no tanto. Si hacemos una abstracción del significado de las listas y tablas, llegamos a los conceptos de vector y de matriz.

$$R^{n} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\} \mid a_1 \in R\}$$

$$M_{mn} = (a_{ij}) = (a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n}\ \vdots\vdots\vdots\vdots\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn})\ a_{ij} \in R$$

En lo que sigue vamos a introducir artificialmente vectores y matrices para modelar y resolver algunos problemas.

Por otra parte, la era digital es también la era de la información y la era de los datos, diariamente utilizamos alguna herramienta o aplicación digital que implica el uso de información generando así un conjunto de éstos, que si bien no es infinito, es lo bastante grande como para manipularlo sin un tratamiento. En esta sección abordaremos algunos ejemplos donde necesitamos construir un vector o una matriz de datos que nos permita manipular y tratarlos de una forma conveniente que resuelva situaciones específicas de acuerdo con su contexto. Lo anterior es una de las habilidades que consideramos es fundamental desarrollar en estudiantes cuya formación implica resolver problemas en situaciones reales, aplicar el contenido matemático porque se necesita poseer una herramienta potente.

3.1 Buscando libros

Localizar información es quizá la tarea más frecuente que aparece en la vida cotidiana. Si vamos a una biblioteca hay un sistema de búsqueda, si queremos comprar un medicamento en la farmacia usan una herramienta tecnológica para ver si lo tienen en existencia y en internet encontramos información muy variada. Existen muchos sistemas que se usan para ubicar información, se les conoce como motores de búsqueda o simplemente buscadores; muchos de ellos hacen uso de vectores y matrices.

Para entender el funcionamiento de estos sistemas vamos a exponer un modelo de "juguete" de búsqueda en una minibiblioteca. Tenemos el siguiente conjunto de libros:

1. Álgebra de matrices.
2. Álgebra Lineal.
3. Álgebra. Vectores y matrices.
4. Matemáticas divertidas.
5. Malditas matemáticas.
6. Cálculo vectorial.

Queremos ver si se tienen libros que traten de Álgebra y matrices. Por supuesto, es muy fácil responder a esta pregunta por inspección; los tres primeros títulos contienen la palabra Álgebra, el primer y tercer título tienen las dos palabras, Álgebra y matrices. Pero queremos ver si podemos construir una forma de responder este tipo de pregunta que funcione también con un conjunto grande de libros cuya dificultad de buscar la respuesta por simple inspección no es algo sencillo.

Comenzamos con escoger, de los títulos, las palabras que nos parecen relevantes. Por ejemplo, podemos escoger estas palabras clave:

1. Álgebra.
2. Matrices.
3. Vectores.
4. Matemáticas.
5. Cálculo.

Ahora a cada título le asociamos un vector columna, con 5 elementos basados en la ayuda de la lista de palabras clave. Veamos el procedimiento.

Por ejemplo, el primer título contiene solamente las dos primeras palabras clave, entonces,

$$\to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Álgebra de matrices

Es decir, el vector tiene componente 1 o 0, dependiendo de si contiene o no palabras clave. El segundo título tiene asociado el siguiente vector,

$$\to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Álgebra Lineal

Haciendo lo mismo para cada libro, obtenemos un conjunto de 6 vectores columna. Podemos colocar estos vectores como columnas de una matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los renglones representan palabras claves y las columnas los títulos de los libros. Esta matriz contiene toda la información sobre el conjunto de libros. Si se escoge un renglón, es decir una palabra clave, el renglón nos dice cuáles libros contienen esa palabra. Si se escoge una columna, es decir, un libro, la columna nos dice cuáles son las palabras clave que contiene el título del libro. Podemos decir que esta matriz es nuestra base de datos.

¿Habrá libros que traten de Álgebra y matrices? Vectorizamos esta solicitud de información,

$$\to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Álgebra y matrices

Tenemos ahora una matriz (base de datos) y un vector (solicitud de información),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que el vector de solicitud coincide exactamente con la primera columna y que coincide con la tercera en los primeros dos elementos. En esta minibiblioteca la búsqueda puede hacerse fácilmente por inspección.

Si tuviéramos una biblioteca grande deberíamos tener un proceso que realice la búsqueda en forma automatizada, esto es, un algoritmo. Es decir, teniendo el vector de solicitud, debemos encontrar las columnas de matriz más cercanas a dicho vector. Más adelante volveremos sobre este punto.

3.2 Navegando en internet

La búsqueda de información en internet es algo que la gente hace cada vez con mayor frecuencia. El modelo que recientemente describimos para la búsqueda de libros nos puede servir. Como en el caso anterior, vamos a ver un ejemplo pequeño para ver más claramente las ideas. Tomemos estas siete páginas web:

1. Club Monarcas Morelia en el fútbol de México.
2. Ecología de la mariposa monarca.
3. Lista de Monarcas de España.
4. Fundación santuario de la mariposa monarca.
5. El equipo de la fuerza Monarcas Morelia.
6. Federación Mexicana de Fútbol Asociación.
7. Instituto Nacional de Ecología.

Ahora queremos buscar, por ejemplo, mariposa y monarca. Por inspección podemos ver que las páginas 1, 2, 3, 4 y 5 contienen la palabra monarca y las páginas 2 y 4 contienen las dos palabras mariposa y monarca.

Ahora construimos un modelo vectorial. Comenzamos con la siguiente lista de palabras clave:

1. Monarca.
2. Morelia.
3. Fútbol.
4. España.
5. Mariposa.
6. Ecología.

A cada página web le asociamos un vector columna basados en esta lista de palabras clave. Este vector tiene 6 componentes cuyo valor es 0 o 1 dependiendo de las palabras clave que aparecen en el nombre de la página. Por ejemplo,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Club Monarcas Morelia en el fútbol de México

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ecología de la mariposa monarca

Haciendo lo mismo con las otras páginas, podemos formar una matriz donde cada columna corresponde al vector asociado a cada página.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solicitud de información consiste en las palabras mariposa y monarca. A esta petición de información, también le asociamos un vector,

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora nuestro problema es determinar cuáles columnas de A están cerca de q

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que la columna 4 coincide con q y la columna 2 *se parece* a la columna 2. Pero si queremos automatizar la búsqueda, necesitamos un criterio de *cercanía*.

Usualmente se calcula el ángulo que forma q con las columnas de A. En nuestro ejemplo, este es el vector que contiene los ángulos que forman cada columna de A con el vector q,

$$[65.90°, 35.26°, 60°, 0, 60°, 90°, 90°]$$

Como se puede observar, la cuarta columna de A coincide con q. La cuarta página web denominada Fundación santuario de la mariposa monarca, contiene las dos palabras buscadas. La segunda columna de A es la que le sigue en cercanía al vector q. La segunda página web denominada Ecología de la mariposa monarca, la cual contiene las dos palabras buscadas y otra palabra clave (Ecología).

Esto nos dice que el modelo vectorial construido realiza la búsqueda en forma automatizada. Aunque no hemos dicho la forma en que calculamos el ángulo de dos vectores. Esto lo haremos más adelante.

3.3. Generalización y algoritmo

Hemos presentado dos ejemplos de modelación vectorial. En los dos ejemplos se crearon vectores basados en palabras clave. Con estos vectores se crea una matriz de datos. Cada solicitud de información también es *vectorizada*.

Lo interesante de esto, es que podemos aplicar estas ideas en multitud de contextos. Con el fin de generalizar, la matriz de datos se denomina matriz término-documento. La palabra *término* se refiere a las palabras clave. Y *documento* se refiere a los datos en cuestión; por ejemplo, títulos de libros, páginas web, etc.

3.3.1 Algoritmo (Modelo vectorial)

Partimos de una colección de documentos (documentos, libros, páginas web, etc.) y escogemos términos (palabras claves).

- Basados en los términos a cada documento se le asocia un vector.
- Con esos vectores se construye la matriz término-documento A.
- A la solicitud de búsqueda se le asocia un vector q.
- Se encuentran las columnas de A más cercanas a q.
- Los documentos asociados a esas columnas son el resultado de la búsqueda.

3.3.2 Criterios de cercanía

Mencionamos dos criterios de cercanía, ambos requieren del concepto de norma de vectores.

Si x es un vector con n componentes, se define la norma de x como,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Los criterios más usados son:

- Ángulo entre dos vectores columna x, y $\qquad \cos(\theta) = \dfrac{x^T y}{\|x\|\|y\|}$
- Distancia entre dos vectores x, y $\qquad \|x - y\|$

A continuación, presentamos un ejemplo más de cómo se construyen vectores a partir de las redes sociales, así como matrices, y por medio de un modelo vectorial se analiza un caso de cercanía con una interpretación social.

3.3.3 Vectores humanos y redes sociales

Entre la gran variedad de aplicaciones digitales, las redes sociales son sumamente populares, su propósito es conectar a personas en la red. Muchas de estas aplicaciones se especializan en citas o bien en sugerir una pareja "casi" perfecta.

Aquí cabe preguntarnos ¿qué información utilizan para emparejar a sus usuarios? Si bien, estas aplicaciones no muestran de forma abierta la información de sus usuarios, sí muestran indicios claros del tipo de información que requieren de sus usuarios y la forma en cómo la obtienen. Por ejemplo, a través del registro de su actividad en ciertos sitios o bien, por medio de preguntas directas sobre gustos o deseos.

Otro elemento por destacar en el análisis y tratamiento de esta situación es la multidisciplinariedad, es decir, la mezcla de diferentes áreas del conocimiento humano, como ocurre en la siguiente situación donde desde el punto de vista de la psicología, los usuarios tenemos una personalidad, la cual está relacionada con ciertas características, por ejemplo,

1. Introversión.
2. Humor.
3. Romanticismo.
4. Curiosidad.
5. Protagonismo.
6. Observación.
7. Intuición.

Lo que nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta: ¿cómo medir y representar numéricamente estas características asociadas a la personalidad?

Una forma de discretizar es por medio de la escala tipo Likert. Por ejemplo, si tomamos el concepto de curiosidad, podemos representar la nula curiosidad como 0; la poca curiosidad como 1; una curiosidad regular o media como 2; mucha curiosidad 3; y demasiada curiosidad 4. En este sentido, cada característica de personalidad tendrá un valor numérico entre 0 y 4. De esta forma, cualquier usuario (o todo ser humano) puede ser representado por un vector de características de personalidad,

$$C_p = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

donde cada C_1 es una característica de personalidad con valor numérico entre 0 y 4.

Hasta aquí, lo que hemos hecho es construir un vector que representa a un usuario asociado a ciertas características de personalidad en una red social; es importante resaltar este proceso, en el que se construye un objeto matemático asociado a un contexto, en este caso un vector. Una vez alcanzado este nivel de comprensión de la situación, la siguiente fase es la aplicación de la teoría y herramientas matemáticas asociadas al objeto matemático.

Como ejemplo de lo anterior, tomemos cuatro de las características de personalidad para formar el vector de personalidad siguiente:

$$C_p = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{humor} \\ \text{romanticismo} \\ \text{introversión} \\ \text{curiosidad} \end{pmatrix}$$

De esta forma, cada usuario estaría representado por este vector, y si tenemos m usuarios entonces tendremos una matriz de $4 \times m$. Para ejemplificar, por medio de una encuesta en línea aplicada a 17 personas obtuvimos la información de la tabla 2:

Tabla 2. Concentrado en información de una encuesta a 17 personas. Elaboración propia.

	B	C	D	E	F
1	Escribe un alias con el qı	¿Tu sentido del humor es	¿Te consideras romántic	¿Te consideras introverti	¿Eres curioso?
2		3	4	0	4
3	Yanito	2	3	0	4
4	Lila	3	2	0	2
5	Lila	3	2	0	2
6	Mario	2	3	3	2
7	Itzy	3	3	2	2
8	Mari	3	3	2	3
9	Liz	3	2	3	2
10	Lau	2	2	3	4
11	Soy	4	3	3	3
12	Ana	3	3	2	3
13	Wendy	3	4	1	4
14	Ninguno	2	3	1	3
15	Marian	3	3	1	3
16	Rayo	3	2	3	3
17	Kike	3	3	1	4
18	Lau	2	2	3	4

Con esta información es posible establecer alguna manera de determinar la compatibilidad entre los usuarios respecto a los datos sobre su personalidad, en este caso representados como vectores. Como sabemos, entre los vectores tenemos varias operaciones como la suma, la multiplicación y también es posible calcular la distancia entre dos vectores. En este caso, elegimos utilizar la distancia euclidiana como una forma de determinar la compatibilidad entre los usuarios, el criterio es el siguiente:

- $d(P,Q)=\sqrt{(p_1-q_1)+(p_2-q_2)+\ldots+(p_n-q_n)^2}$
- Distancia euclidiana normalizada $\overline{d}=\dfrac{d(P,Q)}{\sqrt{4^2 * N}}$ con N el número total de características humanas de personalidad.
- Si $\overline{d}(C_i,C_j)=0$ entonces la compatibilidad es completa entre la persona i y la persona j.
- Si $\overline{d}(C_i,C_j)=1$ entonces hay una incompatibilidad total entre la persona i y la persona j.

Para aplicar el criterio anterior, tomamos la siguiente matriz de datos de personalidad con el objetivo de determinar con quién es más compatible Lila:

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ & & \uparrow & & & & & \\ & & Lila & & & & & \end{pmatrix}$$

De acuerdo con el criterio obtenemos el siguiente vector de distancias normalizadas,

$$[0.354, 0.306, 0, 0.415, 0.28, 0.306, 0.375, 0.48]$$

Se puede observar que Lila es más compatible en términos de personalidad a las personas P_2, P_5 y P_6, ya que por ejemplo, la cercanía a P_2 es de 0.306; mientras que la persona menos compatible a Lila es la P_8, ya que la estimación de la cercanía entre ellas es de 0.48.

Con este ejemplo, finalizamos el esquema general de nuestra propuesta de enseñanza de los conceptos fundamentales de vector y de matriz como introducción a la enseñanza del Álgebra Lineal, no sólo en educación superior sino también en la educación media superior. A continuación, presentamos una serie de reflexiones y comentarios finales a manera de conclusión.

4. Conclusiones

Sobre la propuesta de enseñanza. Como se ha mostrado, el punto de partida de esta propuesta de enseñanza es la visualización como un proceso de identificación de cualidades y características de vectores y matrices que desde nuestro punto de vista y experiencia permite un pasaje pertinente y adecuado hacia la abstracción y construcciones de vectores y matrices en situaciones variadas, reales, actuales y prácticas. Lo anterior es a la vez un constructo necesario que sirve de base para la aplicación de los conceptos del Álgebra Lineal, en este caso de vector y matriz, permitiendo que florezca una perspectiva en torno a la modelación, que consideramos una habilidad importante de desarrollar y concretar en estudiantes no sólo de educación superior sino también de educación media superior.

Sobre el pasaje de lo contextual a la abstracción matemática. Uno de los errores importantes dentro de la enseñanza del álgebra desde los niveles básicos hasta la educación superior es considerar que sus elementos teóricos son por sí mismos atractivos y comprensibles, y en gran medida se debe a una repetición de patrones de enseñanza; si bien esto parece estar cambiando, esta transformación en algunos casos deja de lado la importancia del contexto tanto regional como mundial. En este sentido, la era digital no sólo es un fenómeno mundial sino también regional, la web 2.0 es sin duda utilizada desde adolescentes hasta adultos siendo importante tomar este contexto para posibilitar la visualización de conceptos y objetos matemáticos como lo son el vector y la matriz, que al final son una abstracción de objetos específicos como una lista de datos necesarios para cocinar una pizza o información dispuesta en un arreglo que permite seguir los resultados del fútbol.

Sobre lo significativo. La era digital ha invadido casi por completo la vida humana. La mayoría de nuestros estudiantes están familiarizados con un gran número de aplicaciones digitales que van desde videojuegos hasta motores de búsqueda. Lo anterior posibilita que los estudiantes elijan una situación a su gusto, haciendo del desarrollo de construcción de un concepto matemático un aprendizaje significativo, por esta razón utilizamos en esta propuesta de enseñanza de los conceptos de vector y matriz una variedad de ejemplos que permitan no sólo visualizar sino también acercar a los estudiantes a un mundo matemático práctico y manejable.

Sobre los objetivos y contenidos en los cursos de Álgebra Lineal. Sabemos que los objetivos y contenidos de casi todo conocimiento proclive a ser enseñado terminan por envejecer, este es el caso en torno al Álgebra Lineal. Desde hace décadas el Álgebra Lineal ha sido una herramienta potencial en el desarrollo de la era digital y esto no se ve reflejado en los cursos de Álgebra Lineal. Además, su contenido no parece obedecer a una valoración sobre su importancia en la resolución de problemas de índole real en lo digital e incluso hay temas relevantes que no son nunca tocados en un curso de Álgebra Lineal.

Sobre la enseñanza de la matemática aplicada. Finalmente, esta propuesta de enseñanza es para nosotros una forma de adentrarnos a la enseñanza de la matemática aplicada, ya que la matemática aplicada tiene un propósito primordial: aplicar la matemática. Aunque parece redundante y trivial, su enseñanza dista de tomar en cuenta el mencionado propósito, dejando muchas veces descuidada la dimensión relacionada con la aplicación de los conceptos matemáticos, digamos que habría que ir pensando en una educación de la matemática aplicada.

5. Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 52*(3), 215-241.

Britton, S. y Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: an attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40* (7), 963-974

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalsky, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.). *On the teaching of linear algebra* (vol. 23, pp. 85-124). Kluwer Academic Publishers.

Grossman, E. I. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.

CAPÍTULO 7. LA TEORÍA APOE Y EL DISEÑO DE TAREAS EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL

María Trigueros, trigue@itam.mx
Departamento de Matemáticas, itam

Resumen

El objetivo de este capítulo consiste en discutir el papel de las tareas de modelación y las tareas conceptuales diseñadas utilizando la teoría APOE en la enseñanza de los conceptos abstractos del álgebra lineal. A partir de la introducción de las estructuras de la teoría y la presentación de un ejemplo de su uso, se ilustran las ideas principales y se considerarán las ventajas que ofrecen en el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal.

1. Introducción

El diseño de tareas juega un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo con Mason y Johnson-Wilder (2004) las tareas son fundamentales para propiciar la actividad matemática de los estudiantes y para brindarles oportunidades de discutir ideas, argumentar y, en general, de profundizar su comprensión. De acuerdo con Breen y O'Shea (2010) la posibilidad de enfrentar a los estudiantes a una gama diversificada de tareas permite que desarrollen una variedad de habilidades de pensamiento. Según Sierpinska (2004) el diseño de tareas es también indispensable en la enseñanza y en la investigación en educación matemática, aunque comenta, con razón, que la mayoría de los estudios en esta disciplina no explicitan la estrategia de diseño de las tareas empleadas en sus instrumentos experimentales. Este sigue siendo el caso actualmente con excepción de investigaciones que usan marcos teóricos en los que las tareas juegan un papel esencial, como, por ejemplo, la teoría APOE y la teoría Antropológica de lo Didáctico (García *et al*., 2019). En los últimos años, el diseño de tareas ha recibido mayor atención por parte de los investigadores (*i.e.* Mason y Johnson-Wilder, 2004; Watson y Ohtani, 2015; Jones y Pepin, 2016, García *et al*., 2019, Trigueros y Oktaç, 2019), y la importancia de su uso en la enseñanza y en la investigación ha sido subrayado por sus beneficios en el aprendizaje de los estudiantes.

El propósito de las tareas en el contexto de la educación matemática es muy variado. A través del trabajo en diversas tareas, los alumnos pueden construir o consolidar sus conocimientos además de proponer conjeturas, argumentos y demostraciones para probarlas. Los maestros pueden motivar la introducción de nuevos conocimientos, detectar dificultades de los estudiantes o estimularlos a buscar estrategias, distintas formas de solución y, en general, a aprender. El uso de tareas bien diseñadas en la clase promueve, además, el trabajo colaborativo, fomenta la discusión en la clase y, particularmente, la creatividad. Por ello, el diseño y análisis de tareas ha adquirido cada vez más relevancia en la investigación (Trigueros y Oktaç, 2019). Dada la diversidad de usos de las tareas matemáticas es comprensible que existan diferentes tipos de tareas, con distintos objetivos y diferente nivel de dificultad.

En este capítulo discutiré el diseño de tareas en la enseñanza del álgebra lineal. En particular, me referiré a tareas de modelación para introducir conceptos abstractos de esta disciplina y tareas diseñadas utilizando la teoría APOE como marco teórico de referencia para apoyar la construcción de conceptos con el fin de responder a las preguntas ¿Qué papel juegan las tareas de modelación en la enseñanza del álgebra lineal?, ¿Qué ventajas ofrece el uso de modelos y de tareas conceptuales en el aprendizaje de los conceptos abstractos del álgebra lineal? Responderé estas preguntas a la luz de la teoría APOE en la que las tareas juegan un papel fundamental en la investigación y en la promoción de un aprendizaje profundo de los conceptos matemáticos de interés. Este capítulo inicia con una breve introducción a la teoría APOE, y en particular, al papel que juega en ella la llamada descomposición genética, en el diseño de tareas matemáticas y de modelación para la enseñanza álgebra lineal y en la investigación de su uso en el aula. Se ilustró esto con la discusión de un ejemplo específico y los resultados de su uso en el aula. El capítulo concluirá con una breve discusión de las ventajas de los modelos en la enseñanza del álgebra lineal.

2. Breve introducción a la teoría APOE

La teoría APOE (Arnon *et al.*, 2014) está basada en la epistemología de Piaget que se ha adaptado para el estudio del aprendizaje de los conceptos matemáticos que se introducen a nivel universitario. Sus estructuras teóricas permiten, por una parte, analizar la forma en que los estudiantes aprenden un concepto o un tema de las matemáticas y, por otra, diseñar estrategias didácticas con base en la propia teoría.

> Las estructuras de la teoría APOE son: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas y constituyen la base del acrónimo que se usa para denominarla. El mecanismo de conocimiento que permite el paso de una estructura a otra es la abstracción reflexiva. De acuerdo con esta teoría, la construcción de un concepto matemático inicia cuando un estudiante "genérico" hace Acciones sobre Objetos construidos con anterioridad; éstas se caracterizan por seguir ciertas reglas o procedimientos provenientes de un agente que puede considerarse externo al estudiante. Cuando las Acciones se repiten y el estudiante reflexiona sobre ellas, se interiorizan en un Proceso que se caracteriza por la posibilidad de trabajar sobre los mismos Objetos que las Acciones, pero sin la necesidad de seguir reglas preestablecidas, o mediante la capacidad de saltar algunos pasos o imaginarlos. Los Procesos pueden coordinarse con otros para formar nuevos Procesos y pueden también revertirse, es decir, usarse en el sentido contrario en el que fueron construidos. Cuando el estudiante tiene necesidad de hacer Acciones sobre un Proceso, éste se encapsula en un Objeto sobre el cual pueden aplicarse nuevas Acciones. Por último, un Esquema es una construcción que se utiliza cuando el estudiante enfrenta un problema. El Esquema está constituido por un conjunto de estructuras que pueden ser Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas construidos con anterioridad entre los cuales el estudiante ha construido relaciones consciente o inconscientemente (Arnon *et al.*, 2014). Los Esquemas son estructuras dinámicas que se están reconstruyendo continuamente mediante los mecanismos de asimilación y acomodación. La evolución de los Esquemas se describe mediante la "Triada" propuesta por García y Piaget que consiste en tres niveles que se identifican por el tipo de relaciones construidas entre los conceptos y se denominan Intra-, Inter- y Trans- (Piaget y García, 1982). Los Esquemas pueden también utilizarse como Objetos sobre los cuales se pueden hacer Acciones, en ese caso, el mecanismo involucrado

> se conoce como tematización. Cuando distintos estudiantes enfrentan un mismo problema o un conjunto de problemas similares, posiblemente evocan Esquemas parecidos, aunque pueden estar compuestos por distintas estructuras y diferentes relaciones entre ellos. La comparación de su trabajo pone de manifiesto estas diferencias que, en la teoría, se asocian con lo que muestra en ese momento que ha aprendido (Arnon *et al*., 2014; Trigueros, 2019, p. 45).

Un elemento indispensable de la teoría APOE es el planteamiento de un modelo hipotético que describe, en términos de las estructuras y los mecanismos de la teoría, las construcciones que se suponen necesarias para el aprendizaje de un concepto o un tema específico de las matemáticas. Este modelo se conoce como Descomposición Genética (DG). La DG puede utilizarse para analizar las construcciones que muestran los estudiantes en su trabajo sobre tareas relacionadas con los conceptos de interés y también puede utilizarse para diseñar actividades para enseñar dichos conceptos. Este modelo no pretende ser único y se pone a prueba mediante estudios de investigación en los que se contrasta con el trabajo real de los estudiantes: si efectivamente predice las construcciones mostradas por los estudiantes, el modelo se valida; en caso contrario, se introducen los cambios necesarios y así la DG se refina tantas veces como sea necesario hasta validarse. Además del modelo teórico, la teoría APOE propone un modelo de enseñanza basado en el trabajo colaborativo de los estudiantes en actividades (A) diseñadas con la DG seguidas de discusión del grupo y el maestro en clase (C) y de ejercicios (E) para completar el proceso de construcción iniciado en las actividades. Esta secuencia se repite cíclicamente hasta cubrir las actividades diseñadas y se conoce como el ciclo ACE, aunque los ciclos no necesariamente se repiten secuencialmente y pueden no incluir la etapa E en algunos de ellos. La teoría APOE contempla la construcción de Conceptos mediante la realización de Acciones sobre Objetos mentales no matemáticos o bien Objetos matemáticos previos, utilizando un proceso de modelación, de la siguiente manera:

> Cuando los estudiantes se enfrentan a una situación de modelación, utilizan sus Esquemas matemáticos conjuntamente con los Esquemas que han construido en otros dominios del conocimiento y que pueden ser útiles en el análisis de los problemas que afrontan. Los estudiantes toman de estos Esquemas las construcciones necesarias para abordar el problema, seleccionar las variables y formular implícita o explícitamente las primeras hipótesis acerca del comportamiento de la solución al problema y su posible simplificación en términos matemáticos. Aprovechando las hipótesis, es posible hacer Acciones sobre las variables y establecer relaciones entre ellas. Estas Acciones se interiorizan en Procesos mediante los cuales las relaciones se manipulan y se transforman. Los Procesos se coordinan con Procesos contenidos en los Esquemas matemáticos y el resultado de estas coordinaciones es un modelo emergente que puede ser encapsulado como un Objeto sobre el cual es posible ejercer nuevas Acciones que permiten, cuando se interiorizan o encapsulan, analizarlo, determinar sus propiedades y plantear nuevas preguntas que podrían modificarlo. Durante el trabajo con el modelo, puede ser necesario construir nuevos Procesos, Objetos o Esquemas para responder las preguntas que se han planteado. Este ciclo puede repetirse hasta que se encuentra un modelo que se considera apropiado en términos de la descripción de la situación original. El trabajo en el modelo permite, además, plantear otras preguntas que posibilitaron ampliar el dominio de aplicación del modelo y los Esquemas construidos. Cuando la modelación se utiliza como una estrategia docente, es necesario apoyar a los estudiantes en la construcción de nuevos conceptos útiles para profundizar en la solución de los problemas asociados con el modelo. Este apoyo puede lograrse mediante la introducción

de actividades conceptuales basadas en la DG del concepto o tema relacionado con posibles acercamientos a la solución del problema (Trigueros, 2018, p. 32).

3. La modelación en la enseñanza del álgebra lineal: un ejemplo

El álgebra lineal es una disciplina difícil de aprender por su naturaleza abstracta (Dorier y Sierpinska, 2001). La investigación en educación matemática muestra que los estudiantes memorizan los algoritmos que les permiten resolver algunos problemas o responder preguntas específicas, pero que no pueden interpretar los resultados que encuentran ni dar significado a los conceptos con los que estos procedimientos se relacionan. Una manera de intentar cambiar esta situación ha sido aprovechar el potencial de aplicación del álgebra lineal para introducir a los estudiantes al significado de los conceptos en estudio (*i.e.* Stewart *et al*., 2018). Pero ¿qué se entiende por un problema de modelación? En general, en la enseñanza a partir del uso de modelos, éstos se consideran problemas más o menos abiertos que se originan en otras disciplinas, en la matemática misma o en situaciones cotidianas reales o "realistas"; es decir, que los estudiantes pueden imaginar para trabajar con ellas y hacerlas suyas. Lo importante es que los estudiantes se interesen en un problema que implique un reto para ellos, pero que no represente una dificultad imposible de salvar y en el que la o las posibles soluciones requieran de algún o algunos conceptos que se desea que construyan.

El uso de los modelos ofrece ventajas en la enseñanza del álgebra lineal. Entre ellas, permite a los estudiantes usar su conocimiento previo y desarrollar estrategias de solución propias; produce el surgimiento de dudas que hacen posible que el maestro reconozca los conocimientos de los estudiantes, desarrolle estrategia para resolver sus dificultades o proponga nuevas cuestiones que promuevan su reflexión y, con ello, la construcción de nuevas estructuras y de relaciones entre ellas, es decir, que aprendan (Trigueros, 2019).

Un ejemplo de un problema de modelación para enseñar los conceptos de independencia y dependencia lineal que ha dado consistentemente buenos resultados en la enseñanza y en la investigación es el siguiente:

> Tres industrias pertenecen a la misma compañía. Cada una manufactura un producto diferente. Una fracción de su producción la usa para su propia producción y otras fracciones de su producción se requieren en las otras industrias (demanda interna). Además, parte de la producción de cada industria se usa para satisfacer la demanda externa. Al final de cada semana, en cada industria se decide cuánto debe producir dependiendo de la demanda externa de su producto. ¿Puedes diseñar un método para que la compañía determine la cantidad de productos que cada industria debe producir para satisfacer la demanda externa e interna? ¿Cuántos datos necesitarías para encontrar la respuesta a la pregunta anterior? Si sabes que la demanda externa del sexto periodo es de 50 para la industria A, 50 para B y 60 para C (ver tabla 1). ¿Puedes usar las fracciones de producción encontradas para verificar la producción necesaria del grupo de industrias en el sexto periodo (ver tabla 2)? ¿Puedes usar las fracciones de producción encontradas para predecir la producción del grupo de industrias en el periodo 10 si sabes que la demanda externa en ese periodo es de 75 para la industria A, 70 para B y 90 para C? Escribe una propuesta para el director de la compañía en la que expliques el método que encontraste y por qué le conviene usarlo (Trigueros y Possani, 2013, pp. 1779-1792).

Tabla 1. Demanda externa para 9 meses en millones de pesos. Elaboración propia.

Industry/Period	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	30	20	30	20	15	50	10	10	10
B	20	20	20	30	10	50	0	0	10
C	20	20	30	30	15	60	10	0	0

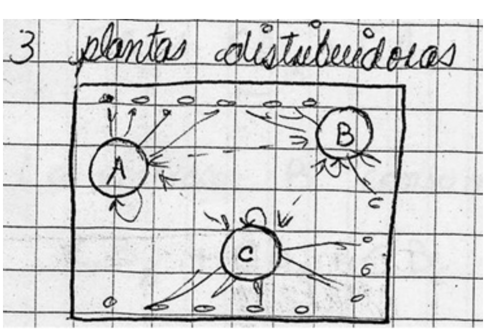
Tabla 2. Producción total para 9 meses en millones de pesos. Elaboración propia.

Industry/ Period	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	53.515	40.470	57.202	47.661	28.601	104.86	16.732	13.044	16.548
B	36.967	34.847	39.687	50.150	19.843	89.836	4.838	2.120	14.704
C	40.470	37.150	53.422	52.408	26.711	105.83	16.271	3.319	5.623

Es importante aclarar que el o la profesora no entrega la tabla completa a los estudiantes. Una vez que ellos exploran y discuten el problema, el o la profesora pregunta a cada equipo cuántos datos necesita y entrega el número de datos solicitados, seleccionando diferentes datos para los distintos equipos tomando en cuenta el tipo de relación entre los datos con el fin de que surjan diferentes conjuntos solución al resolver el problema y, con ello, los estudiantes enfrentan diversos problemas conceptuales cuya comprensión requiere de la introducción de nuevos conceptos, en este caso: combinación lineal, dependencia e independencia lineal.

3.1 Exploración y modelación

Los estudiantes trabajan en equipo y aparecen diferentes estrategias de exploración de la situación. Las dominantes consisten en dibujos o esquemas (Figura 1a) o en el planteamiento de sistemas de ecuaciones (Figura 1b).



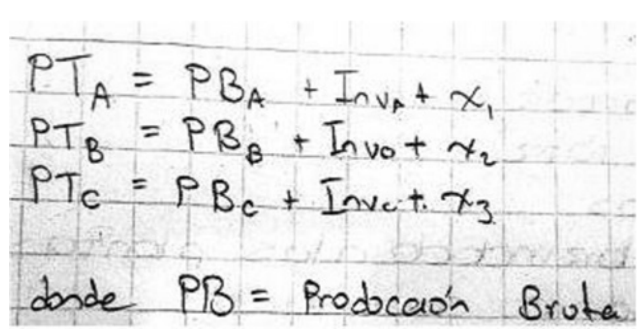
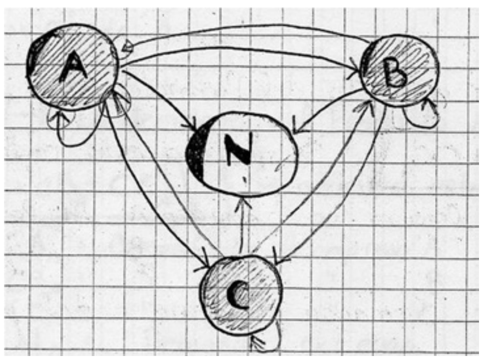


Figura 1a. Uso de esquemas.
Figura 1b. Uso de sistemas de ecuaciones. Elaboración propia.

Las distintas propuestas se discuten en plenaria con el o la profesora, quien deja que sean los estudiantes mismos quienes se cuestionen unos a otros y discutan, aunque en ocasiones puede intervenir para promover el intercambio. En todos los casos de utilización de este modelo, surge la propuesta de un esquema semejante al que se muestra en la figura 2a para representar la situación y el modelo matemático que se deduce de él (Figura 2b) es aceptado, por consenso, por todo el grupo.



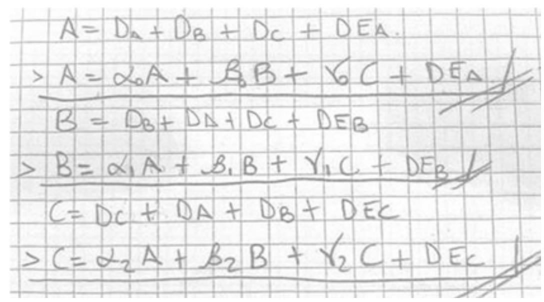


Figura 2a. Diagrama para el modelo.
Figura 2b. Modelo matemático. Elaboración propia.

Los estudiantes encuentran dificultades semejantes en distintos grupos. Surgen preguntas como ¿cuál es la incógnita?, ¿se necesitan varios sistemas?, ¿son suficientes estos datos?, ¿cuáles conviene escoger? Una vez que los equipos resuelvan los sistemas propuestos como modelo enfrentan una situación inesperada: distintos equipos encuentran diferentes conjuntos solución y surgen nuevas preguntas: ¿por qué los sistemas tienen distinta solución?, ¿por qué algunos equipos encuentran la misma solución?, ¿es la diferencia de datos lo que conduce a encontrar una o múltiples soluciones? De la reflexión sobre estas preguntas emergen nuevas ideas: "este vector de datos es múltiplo de este otro, por eso obtenemos solución múltiple, es redundante; creo que debe haber datos que no nos dan información, tal vez está contenida en otros datos", "miren, este vector sale si multiplicas éste por dos y le sumas este otro". En la plenaria todos los equipos que encuentran solución múltiple para sus sistemas de ecuaciones concluyen finalmente que en todos esos casos, en el conjunto de datos hay información redundante, mientras que cuando no la hay, se encuentra una solución única que es, además, la misma. En este momento el o la profesora introduce las primeras actividades diseñadas con la DG para construir los conceptos de interés.

3.2 Introducción de actividades que el o la profesora considera pertinentes

Recordemos que cuando se usa la teoría APOE para enseñar utilizando problemas de modelación o sin ellos es necesario diseñar una DG de los conceptos que se desean enseñar. Ésta, como se mencionó anteriormente, proporciona un modelo de las construcciones necesarias para aprenderlos y permite diseñar actividades que estimulan la reflexión de los alumnos. El trabajo en clase se desarrolla siguiendo el ciclo ACE. Los estudiantes trabajan en equipo en algunas actividades seleccionadas por el o la profesora en distintos momentos de la actividad, conforme considera que los estudiantes las requieren para continuar con su trabajo en el problema de modelación, o para introducir paulatinamente los nuevos conceptos una vez que los estudiantes tienen necesidad de ellos. En la tabla 3 se muestran ejemplos de las actividades diseñadas con la DG con la intención de que los estudiantes construyan las estructuras propuestas para aprender los nuevos conceptos; entre paréntesis se indica el tipo de construcción que la actividad conlleva. La DG empleada y otras actividades pueden consultarse en Trigueros y Posani (2013, p. 1779-1792).

Tabla 3. Ejemplos de actividades. Elaboración propia.

3. Dados los vectores (2,–3, 5) y (6,–9, 15).

a. ¿Qué relación hay entre estos vectores? (*Acción de comparación entre n-adas*).

b. Multiplica a (2,–3,5) por −2, por 4 y por −1/2 ¿Qué relación hay entre los vectores obtenidos y los dados? (*Acción de operación con n-eadas y de comparación*).

c. Encuentra el vector que obtienes al sumar el doble del primer vector más el segundo. ¿Qué relación hay entre el vector obtenido y los anteriores? (*Mismas que la anterior*).

d. Encuentra el vector que obtienes al sumar el doble del primer vector más el triple del segundo. ¿Qué relación hay entre el vector obtenido y los anteriores? (*Mismas que la anterior*).

e. ¿Qué puedes decir de todos los vectores que obtuviste en los incisos anteriores? ¿Qué caracteriza al conjunto de vectores que "generan" los vectores del conjunto dado? (*Interiorización de las Acciones anteriores en un Proceso*).

f. Imagina que encuentras todas las combinaciones lineales de dos vectores usando todas las combinaciones de números reales y que dibujas el resultado en el plano cartesiano ¿qué "generarían esos vectores"? (*Encapsulación del Proceso en un Objeto*).

g. ¿Puedes escribir al vector (−1, 0, 0) de manera única sumando los productos de los vectores dados por distintos números (combinación lineal (c.l.))? ¿Cuáles vectores se pueden expresar como c.l. de esos vectores? ¿Qué representan geométricamente? (*Encapsulación del Proceso en un Objeto*).

5. Diseña un programa que te permita, dado un conjunto de vectores en Znp, determinar si diferentes vectores se pueden escribir como combinación lineal de todos o algunos de los vectores del conjunto, incluyendo al cero. (*Interiorización de Acciones en un Proceso*).

7. Para los siguientes conjuntos de vectores S1 = {(2 1 3) (1 2 1) (4 0 2) } y
S2 = {(3 1 1) (4 1 2) ((2 2 3)} escribe las ecuaciones

i. a(2, 1, 3) + b (1, 2, 1) + c (4, 0, 2) = (0, 0, 0), donde a, b, y c son números reales.

ii. a(3, 1, 1) + b (4, 1, 2) + c (2, 2, 3) = (0, 0, 0), donde a, b, y c son números reales.

Encuentra los valores de los escalares a, b y c que hacen que las ecuaciones se cumplan de manera única (*Acciones sobre elementos de conjuntos y sistemas de ecuaciones*).

a. Añade un vector al conjunto de los vectores de la ecuación (i) multiplicado por un escalar d. Encuentra los valores de los escalares a, b, c y d que hacen que las ecuaciones se cumplan de manera única. ¿Qué encuentras? (*Mismas Acciones*).

b. Repite lo mismo para la ecuación ii ¿qué encuentras? ¿Qué "generan" los conjuntos S1 y S2? (*Mismas Acciones e interiorización en Proceso*).

c. ¿Qué significan estos dos resultados? ¿Qué significa geométricamente? (*Encapsulación en Objeto*).

d. ¿Es el vector (3 1 1) combinación lineal de los vectores de S2? ¿Por qué? (*Encapsulación en Objeto*).

3.3. Aplicaciones del problema de modelación y resultados obtenidos

El problema de modelación se probó con cuatro grupos de estudiantes de distintas licenciaturas: matemáticas, actuaría, ingeniería o economía, enseñados por cuatro distintos profesores en un curso introductorio de Álgebra Lineal. Después de esta prueba, con un total de 112 estudiantes, el problema ha sido utilizado en este tipo de cursos con resultados similares en términos de la participación y el aprendizaje de los estudiantes. En la mayor parte de las experiencias, se utilizaron entre cuatro y seis sesiones de clase de dos horas cada una.

Se identifican cuatro ciclos en el trabajo de los estudiantes. El primero se caracteriza por la exploración y análisis de la situación propuesta por el problema de modelación. En este ciclo, los estudiantes desarrollan hipótesis, dibujan diagramas como los mostrados anteriormente, seleccionan variables y encuentran relaciones entre ellas. El ciclo termina con la selección de un modelo matemático para el problema. El segundo ciclo es de corte operacional. Se utilizan los datos proporcionados para estimar los parámetros del modelo que, en este caso, son las incógnitas de los tres sistemas de ecuaciones que aparecen en el modelo. El tercer ciclo consiste en la comparación y discusión de los distintos conjuntos de soluciones encontrados por los diversos equipos; este ciclo se ha caracterizado por la emergencia de un nuevo lenguaje en los equipos y durante la discusión plenaria con el cual los estudiantes caracterizan las diferencias entre los distintos datos empleados en su trabajo y su relación con el conjunto solución de los sistemas. El ciclo final trata del uso del modelo como herramienta de predicción y como una herramienta de referencia para modelar nuevas situaciones diferentes, pero que comparten la misma estructura matemática.

El tercer ciclo resulta de especial interés. Los estudiantes deben presentar sus resultados y explicarlos. Varios equipos encuentran un conjunto solución con una única solución para cada sistema y los conjuntos coinciden en todos ellos. Estos equipos coinciden en considerar que los valores de los parámetros del modelo encontrados son correctos. La discusión sobre las diferencias en los conjuntos de solución encontrados por otros equipos, que originalmente consideraban que se habían equivocado en algún paso del proceso de solución, pero al revisarlo encontraron que era correcta y tenía solución múltiple, conduce al análisis de los conjuntos de datos con los que se trabajó y a buscar relaciones entre la solución encontrada y las propiedades de los sistemas de ecuaciones como un Objeto y las de los conjuntos de n-adas, también como Objetos. Este cambio en el objeto de análisis conduce a los estudiantes a encontrar relaciones entre las n-adas o entre las columnas del sistema de ecuaciones correspondiente, por ejemplo, que un vector de datos se puede obtener de la suma de otros dos, que un vector es la suma de múltiplos de otros vectores o que en el proceso de solución del sistema hay algunas ecuaciones que "desaparecen". En todas las ocasiones, sin excepción, los alumnos identifican estas situaciones con el hecho de que en sus datos "hay información redundante; hay información que no es útil; este vector ya tiene la información de estos otros" o expresiones semejantes. Para compartir el mismo lenguaje en la discusión grupal se decide, generalmente, utilizar el término de "*información redundante*". En todos los casos, los profesores aprovechan los razonamientos de los estudiantes para introducir los nuevos conceptos a través de actividades diseñadas con la DG. Primero las correspondientes a la noción de combinación lineal y posteriormente aquéllas diseñadas para estimular la reflexión sobre los conceptos de dependencia lineal e independencia lineal, relacionando actividades de trabajo en el modelo y teóricas con la idea de "información redundante" emergente del propio trabajo de los estudiantes con el modelo, e incluyendo representaciones geométricas, cuando es posible, su definición formal y las propiedades de los conjuntos correspondientes.

4. Resultados de los estudiantes

Aunque los estudiantes tienen dificultades al enfrentar el problema, en particular para seleccionar las variables apropiadas y para interpretar las relaciones entre ellas, el trabajo en equipo, la guía de los profesores y la discusión global resultaron apoyos importantes para favorecer la motivación y la generación de ideas importantes que permitieron utilizar su conocimiento previo para plantear sistemas de ecuaciones y para interpretarlos en relación al problema a través del uso del diagrama que hizo posible la reconsideración de las hipótesis y el papel específico de la variable y los parámetros del modelo.

La interpretación de los parámetros como incógnitas de los sistemas de ecuaciones y la forma de utilizar los datos en el modelo resulta un reto importante para los estudiantes dado que en ese momento no tienen experiencia con el uso de datos en la solución de problemas matemáticos. Sin embargo, los alumnos son capaces de examinar los datos y de encontrar patrones en su comportamiento en diferentes períodos. Las ideas emergentes del trabajo de diferentes equipos y la discusión global de las mismas permiten confirmar la linealidad del modelo, entenderlo mejor y trabajar con él. Más aún, hacen posible la emergencia de la idea poderosa "información redundante" que permite a los profesores utilizarla como un eslabón en la introducción de los conceptos de dependencia e independencia lineal a través de actividades diseñadas con base en la descomposición genética. La idea de "información redundante" permite dar un sentido "concreto" a estas propiedades de un conjunto de vectores o de n-adas.

En todas las aplicaciones de este modelo, los estudiantes trabajan con interés tanto en las actividades relacionadas con el modelo como en aquéllas basadas en la teoría APOE que les brindan oportunidades de reflexión sobre los nuevos conceptos que se introducen. Cuando se trabaja la última actividad del modelo, en la que se pide utilizar los parámetros encontrados para predecir la producción de las industrias en un nuevo periodo, los estudiantes la encuentran correctamente. Por otra parte, cuando se introdujeron otros conceptos como los de conjunto generador, espacio generado, base y dimensión, la mayor parte de los estudiantes fue capaz de utilizar la idea de "información redundante" para diferenciar los conceptos de base y conjunto generador, así como de determinar las propiedades de las bases para distintos espacios o subespacios de Rn y de identificar, por ejemplo, la necesidad de que el conjunto de columnas de una matriz sea linealmente independiente para que ésta sea invertible o para que el sistema de ecuaciones asociado a dicha matriz tenga solución única. Otra muestra de aprendizaje de los alumnos se encontró en su posibilidad de reconocer un problema en el que es necesario encontrar las tarifas que deberían cobrar tres obreros que compartían trabajos entre ellos y que atendían además trabajos por fuera como un problema semejante al de producción y de resolverlo correctamente. Pero, tal vez lo más importante, fue la emergencia de una idea poderosa que permitió *concretar* conceptos muy abstractos y darles sentido para después abstraerlos con significado al utilizarlos en nuevas situaciones durante el curso. Ello evidenció la posibilidad de los estudiantes de utilizar el modelo como una herramienta de razonamiento frente a nuevas situaciones (Trigueros y Possani, 2013).

4.1 ¿Cuál es el papel del profesor en este tipo de acercamiento didáctico?

El papel del profesor es crucial en la metodología didáctica de la teoría APOE (Trigueros y Oktaç, 2019) y lejos de lo que parecería a partir de la descripción del ciclo ACE, éste no es un ciclo rígido, es un ciclo que se ajusta a las necesidades que el profesor detecta en sus alumnos. Por una parte, el profesor puede alterar las fases del ciclo para dar sentido y continuidad al trabajo de los estudiantes, por ejemplo, podría dejarlos trabajar con el modelo, introducir actividades y volver al trabajo en el modelo antes de convocar a una fase de discusión con todo el grupo, o proponer trabajo en ejercicios, individual o en equipo durante la clase. Por otra parte, el profesor puede hacer preguntas distintas de las que se proponen en las actividades cuando lo considere necesario o importante. Las decisiones del profesor son fundamentales para que la dinámica de la clase funcione y promueva dichas construcciones.

El profesor puede, además, seguir el trabajo de los distintos equipos y hacer nuevas preguntas ante sus dudas o apoyarlos para encaminar su discusión en la dirección deseada, buscando siempre que reflexionen sobre las tareas realizadas, que reconsidere su trabajo o refinen sus acercamientos, sin imponer su opinión en ningún momento. Al mismo tiempo que sus alumnos aprenden, todas estas oportunidades permiten al profesor cultivar y enriquecer su trabajo.

5. La teoría APOE y la DG en el diseño de tareas

Como puede observarse en la descripción de la teoría APOE, el diseño de tareas permite tanto el desarrollo de instrumentos de investigación como de actividades de enseñanza. Este doble rol ha jugado, desde la creación de la teoría, un papel fundamental. A diferencia de otras teorías, en APOE se ha hecho siempre público el análisis de las tareas que se utilizan. Hay una conexión directa entre la DG y el diseño de todas las actividades a trabajar dentro y fuera de la clase. El problema de modelación se elige y se diseña tomando en cuenta lo que se desea que los estudiantes aprendan. Cada tarea en las actividades tiene una relación directa con alguna de las construcciones predichas en la DG. Esto hace que las tareas diseñadas tomen en consideración aspectos que, sin esta guía, se pasarían fácilmente por alto. La reflexión sobre los distintos detalles incluidos en el diseño promueve la reflexión de los estudiantes y favorece la construcción de conocimiento y la profundidad del aprendizaje. La oportunidad de centrarse en cada construcción en una secuencia de actividades ofrece a los estudiantes múltiples oportunidades de reflexión sobre los conceptos matemáticos en estudio y sus relaciones desde diferentes puntos de vista en los distintos momentos del ciclo ACE. Ello enriquece su aprendizaje. Asimismo, en la investigación, cada una de las actividades que se diseña busca encontrar qué construcciones de aquellas propuestas en la DG ponen en evidencia los estudiantes en su trabajo y permite validar o refinar la DG cuando es necesario.

Cuando en esta metodología se incluye la modelación, la posibilidad de promover la creatividad de los estudiantes, de desarrollar habilidades de pensamiento matemático y de profundizar desde distintas perspectivas en los conceptos que se busca enseñar se favorece.

6. Conclusiones

El uso de modelos en la enseñanza de las matemáticas ofrece ventajas que son dignas de tomar en consideración. Una de ellas, que se menciona en muchos trabajos de investigación en este campo, es la motivación de los estudiantes. En el caso del proyecto de modelación con la teoría APOE, en el que los modelos se han utilizado para introducir a los estudiantes a conceptos abstractos del álgebra lineal, las principales ventajas que éstos ofrecen son la posibilidad de apoyar el aprendizaje de nuevos conceptos a través del reto de utilizar sus conocimientos previos y de reflexionar sobre ellos y sobre las necesidades que el propio problema de modelación plantea; el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático frente a la necesidad de planteamiento de hipótesis, del desarrollo de diversas estrategias para abordar y trabajar los problemas y de la necesidad de expresar sus resultados por escrito de manera comprensible para otras personas; además de la posibilidad de estimular el surgimiento de ideas emergentes que resultan, en la mayoría de los casos, imposibles de encontrar cuando se usa una metodología más clásica de enseñanza de las matemáticas (Trigueros, 2018).

Los retos y las necesidades que surgen del trabajo con los problemas de modelación permiten la emergencia de nuevas ideas entre los estudiantes, mismas que pueden ser aprovechadas por el profesor para propiciar la reflexión de los estudiantes sobre el potencial de sus ideas y su aprovechamiento a través de la introducción de actividades de reflexión que permitan acercarlos a ideas matemáticas poderosas a través de actividades conceptuales diseñadas con la DG de los conceptos de interés.

Otras importantes ventajas del uso de problemas de modelación en la enseñanza de las matemáticas es la posibilidad de identificar una estructura matemática específica en problemas que aparentemente son diferentes, pero que la comparten y la posibilidad de aplicar las matemáticas escolares en contextos y disciplinas diferentes. Estas ventajas contribuyen a la apreciación de la verdadera naturaleza de las matemáticas y su papel en la vida cotidiana y en las ciencias en general.

A través del uso de modelos en la enseñanza se brindan oportunidades a los estudiantes de desarrollar sus propias ideas y de convertirlas en herramientas que les permiten abordar una diversidad de problemas. Y algo aún más importante, los estudiantes tienen oportunidad de aprender los conceptos matemáticos de interés con significado al tiempo que descubren la belleza de las matemáticas como disciplina. El uso de la modelación como herramienta didáctica permite todo esto en un ambiente relajado en el que el conocimiento emerge a través del trabajo compartido con compañeros y el o la profesora.

Es importante subrayar la importante conexión que hay entre la DG y el diseño de la situación de modelación o el problema a trabajar. Cada tarea en este acercamiento se enfoca en detalles que en muchas ocasiones no son consideradas por el profesor o el diseñador si no cuentan con un modelo que guíe el diseño de la actividad como un todo para brindar a los estudiantes la oportunidad de centrarse en cada construcción al concebir la secuencia didáctica, ofreciendo así a los estudiantes múltiples oportunidades de reflexión sobre los conceptos matemáticos de interés detalladamente y desde distintas perspectivas. Así, los estudiantes tienen la posibilidad de discutir el papel que juega cada tarea en términos de la secuencia como un todo y hacer evolucionar sus estrategias de trabajo en diferentes momentos del ciclo ACE.

Por otra parte, la metodología seguida en la estrategia didáctica en la que la modelación se integra a actividades diseñadas con la teoría APOE ofrece oportunidades a los estudiantes para construir relaciones entre distintos conceptos y estas relaciones contribuyen no sólo a la evolución de su Esquema, en el caso analizado aquí, del álgebra lineal, sino a profundizar en los conceptos involucrados.

En términos de la investigación en educación matemática, es importante mencionar que este tipo de acercamiento permite detectar y explicar la diversidad de estrategias que utilizan los estudiantes en términos de la DG. Esto hace posible relacionar la evidencia encontrada en su trabajo con las formas que utilizan para abordar y desarrollar los problemas que se presentan a lo largo del estudio del o de los temas de interés. La DG permite explicar las dificultades que enfrentan los estudiantes y también desarrollar formas de apoyarlos para superarlas mediante el diseño de preguntas o nuevas tareas. Asimismo, apoya la detección de aquellas relaciones entre distintos conceptos que parecen ser necesarias para promover efectivamente el avance del conocimiento de los estudiantes y, nuevamente, desarrollar actividades que orienten su reflexión en esa dirección.

Si bien, ningún acercamiento teórico a la educación matemática y ninguna estrategia didáctica son perfectos, es posible afirmar que existen muchas investigaciones que ponen en evidencia el potencial de la teoría APOE en el diseño de problemas de modelación y de tareas de construcción de conceptos (Weller *et al*., 2003; Arnon *et al*., 2014; Trigueros, 2019). Con su uso es posible lograr que más estudiantes aprendan con profundidad los conceptos de interés y la emergencia de ideas matemáticas poderosas entre los estudiantes que de otra manera sería difícil de observar.

Agradecimientos

Este trabajo fue posible gracias al apoyo del Instituto Tecnológico Autónomo de México y de la Asociación Mexicana de Cultura A.C.

7. Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Breen, S. y O'Shea, A. (2010). Mathematical Thinking and Task Design. *Irish Mathematical Society Bulletin*, 66, 39-49.

Dorier J.L. y Sierpinska, A. (2001). Research into teaching and learning of linear algebra. En Holton, D. (Ed.). *The teaching and learning of mathematics at university level, an ICMI study* (pp. 255-274). Kluwer-Dordrecht.

García, F.J., Baquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (*15*), 75-94.

Jones, K. y Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2), 105-121.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2004). *Designing and Using Mathematical Tasks*. Tarquin.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI.

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the Learning of Mathematics*, 24, 7-15.

Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A. y Zandieh, M. (Eds.). (2018). *Challenges and strategies in teaching linear algebra. ICME-13 monographs*. Springer International Publishing.

Trigueros, M. (2018). Learning linear algebra using models and conceptual activities. En S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman y M. Zandieh (Eds.). *Challenges and strategies in teaching linear algebra* (pp. 29-50). Springer.

Trigueros, M. (2019). The development of a linear algebra schema: learning as a result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM Mathematics Education*, *51*(7),1055-1068.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (*15*), 43-55.

Trigueros, M. y Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*(4), 1779-1792.

Watson, A. y Ohtani, M. (2015). Themes and issues in mathematics education concerning task design. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.). *Task design in mathematics education: An ICMI study* (pp. 3-15). Springer.

Weller, K., Clark, J. M., Dubinsky, E., Loch, S. y Merkovsky, R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS Theory and the ACE teaching cycle. *Research in Collegiate Mathematics Education V. CBM issues in mathematics*, *12*, 97-131. Providence, RI: American Mathematical Society.

CAPÍTULO 8. DISEÑO DE TAREAS INTEGRANDO LA TECNOLOGÍA DIGITAL EN EL AULA

José Orozco-Santiago, jose.orozco@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
Berta Barquero, bbarquero@ub.edu
Universitat de Barcelona, España
Sofía Paz-Rodríguez, sofia.paz@cinvestav.mx
cinvestav, México

Resumen

En la última década ha aumentado el interés en cómo el diseño de tareas influye en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, el diseño de tareas ha sido reconocido como una parte central en los informes de investigación de la enseñanza de las matemáticas, los cuales rara vez dan suficiente detalle sobre los principios y procesos de diseño. Este capítulo presenta dos ejemplos de investigaciones que ilustran dos marcos para el diseño de tareas mediadas por la tecnología digital: el primer ejemplo está centrado en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico para el diseño, implementación y análisis de Recorridos de Estudio e Investigación sobre la previsión de la evolución de usuarios de Facebook y, el segundo, combina la investigación de diseño con los principios del proyecto de Acción-Práctico para el desarrollo de tareas que buscan promover un cambio conceptual sobre el concepto de vector mediante entornos digitales.

1. Introducción

El diseño didáctico siempre ha desempeñado un rol importante en el campo de la educación matemática, pero no había sido un tema de interés teórico en la comunidad (Artigue, 2009). En la última década ha aumentado el interés en cómo el diseño de las tareas influye en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En su discurso ante el grupo internacional de Psicología de la Enseñanza de las Matemáticas (PME, por sus siglas en inglés), Sierpinska (2004) identificó el diseño de tareas y su uso como una cuestión central en los informes de investigación de la enseñanza de las matemáticas. Comentó que los informes de investigación rara vez dan suficiente detalle detrás del diseño de tarea o las variables involucradas en este proceso, que pocos estudios justifican la elección de una tarea o identifican qué características de una tarea son esenciales y qué características son irrelevantes para el estudio, quedando muchos aspectos ocultos.

En la educación matemática, la noción de tarea matemática ha tenido varios nombres: problema, actividad, ejercicio, ejemplos. Sierpinska (2004) considera que una tarea matemática es diferente a un problema matemático en el sentido de que un problema implica conocimientos avanzados para su solución, mientras que en la tarea es suficiente un conocimiento mínimo. La Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (icmi, por sus siglas en inglés) dedicó recientemente uno de sus estudios sobre el diseño de tareas (Margolinas, 2013; Watson y Ohtani,

2015) en educación matemática. Margolinas (2013, p. 10) declara que las tareas: "son las herramientas de mediación para enseñar y aprender matemáticas y los temas centrales son cómo se relacionan las tareas con el aprendizaje y cómo se usan pedagógicamente las tareas". Así mismo, en el XXII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, se celebró un seminario de investigación sobre el diseño de tareas articulando cuestiones como: "¿Por qué diseñamos tareas? ¿Cuáles son nuestros objetivos como diseñadores? ¿Cuáles son nuestros principios de diseño y nuestra metodología?" (García *et al.*, 2019, p. 1).

Una de las prácticas docentes más frecuentes es la utilización de un libro de texto, el cual se sigue de manera fiel y es la principal fuente de tareas. Actualmente, la mayoría de los libros de texto remiten a los usuarios a tareas en la web. En el diseño de tareas pueden participar estudiantes, profesores, formadores de profesores, investigadores, diseñadores o una combinación de ellos. Cuando la tarea se crea desde cero o cuando la tarea es modificación de otra, los principios para el diseño de tareas pueden variar. La secuenciación de tareas es explícita en la educación matemática realista (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2020), así como en el proyecto de acción-práctica (Cuevas y Pluvinage, 2003).

2. Marco teórico

En la Investigación Basada en Diseño (IBD) los investigadores pueden participar en estrecha relación con los profesores para el diseño del entorno de aprendizaje, durante el proceso de implementación del experimento se pueden realizar las mejoras a los materiales educativos durante o después de cada lección (Bakker y Van Eerde, 2015), es así que la IBD aborda la problemática de manera similar a la Ingeniería Didáctica (Artigue, 2014; Godino *et al.*, 2013), esto es, como una metodología orientada al diseño. El libro *Task Design In Mathematics Education an ICMI study 22* (Watson y Ohtani, 2015) presentan siete casos de principios y marcos de diseño (Teoría antropológica de lo didáctico, teoría de la variación, teoría del cambio conceptual, aprendizaje conceptual a través de la abstracción reflexiva, educación matemática realista, Evaluación formativa para desarrollar estrategias de resolución de problemas y lecciones de estudios japoneses) que se utilizan actualmente en todo el mundo en el diseño de tareas en la educación matemática. Estos marcos han evolucionado y siguen evolucionando. A continuación mostramos dos ejemplos de investigaciones, una desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y la otra mediante el proyecto de Acción-práctico. El primer ejemplo presenta el diseño, implementación y análisis de un recorrido de estudio e investigación sobre la previsión de la evolución de usuarios de Facebook; el segundo ejemplo combina la investigación de diseño con los principios del proyecto de acción-práctico de Cuevas y Pluvinage (2003), para abordar un cambio conceptual del concepto vector en estudiantes de ingenierías, ambas investigaciones integran y utilizan tecnología en sus tareas.

2.1 Ejemplo 1: Diseño y análisis de un REI integrando tecnología digital sobre la evolución de usuarios de Facebook

Nos centraremos en el diseño de tareas en el ámbito de la TAD y, en particular, el diseño de tareas dentro del avance de paradigma pedagógico que Yves Chevallard (2013) denota como paradigma de cuestionamiento del mundo. Este paradigma se antepone al paradigma dominante que Chevallard denomina como el paradigma de la visita de las obras en el cual, en términos generales, se presenta a los estudiantes contenidos muy aislados, como monumentos con valor por sí mismos, y sin mostrarles la funcionalidad que aportan las herramientas matemáticas, a menudo, sin justificar su uso y su necesidad, es decir, sus razones de ser, ni actuales ni del pasado. Chevallard (2013) sintetiza distintas consecuencias de esta situación histórica:

> [...] la evolución irresistible del currículum escolar de matemáticas hacia una forma de "monumentalismo" epistemológico, en el que el conocimiento viene organizado en unos trozos y pedazos santificados por la tradición, cuya supuesta "belleza" ha sido realzada por la pátina del tiempo y que los estudiantes tienen que visitar [...] (p. 165).

Esta propuesta hace muchas décadas que está en crisis. Por ello, Chevallard hace un alegato a favor de un contraparadigma emergente, frente al cual invita a indagar en qué niveles y en qué contextos se pueden introducir cambios para ir avanzando hacia un cuestionamiento del mundo, donde las propuestas de enseñanza de las matemáticas y de los programas de estudios se compongan de este conjunto de cuestiones a ser estudiadas y donde la dialéctica entre propuestas y las respuestas generadas contenga el núcleo del estudio de las disciplinas. Más concretamente, nos centramos en la propuesta de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) (Chevallard, 2013; Bosch, 2018). Los REI aparecen como modelos didácticos para lograr esta enseñanza funcional de las matemáticas. A través de su diseño, implementación y análisis nos proponemos crear y estudiar cuáles son aquellas condiciones que pueden favorecer una transición hacia un paradigma más cercano al denominado paradigma de cuestionamiento del mundo y estudiar, también y de forma especial, cuáles son las restricciones que emergen en la integración y difusión de estos dispositivos en las aulas en distintos niveles educativos.

Antes de referirnos a algunas de las características de los REI, empezaremos por describir cuál es la metodología de investigación adoptada por la TAD para el diseño de tareas, que en este capítulo nos ocupa. La metodología de investigación que se sigue es la de la Ingeniería Didáctica (ID), que se introdujo en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) alrededor de los años ochenta y que, algunos años después, los trabajos de Artigue (2009, 2014) explican sus orígenes y desarrollo hasta considerarse una metodología de investigación. En sus orígenes, en el marco de TSD se adoptó la ID para el estudio de fenómenos didácticos a través del diseño e implementación de procesos de enseñanza-aprendizaje, en particular de las matemáticas, aunque también la ID se puede considerar como una metodología de diseño de tareas. En la actualidad, los marcos de la TSD y TAD, adoptan dicha metodología de investigación, y dado su fuerte componente de diseño, permiten explicitar el propio proceso de diseño, así como los fenómenos didácticos que quieren ser estudiados, los principios y herramientas de diseño adoptadas (propias de cada una de las teorías didácticas) y los resultados derivados de las distintas etapas de análisis. La Figura 1 muestra los distintos estadios que Barquero y Bosch (2015) usan para explicitar las cuatro fases en el proceso de ID.

Figura 1. Ingeniería Didáctica como metodología (adaptado de Barquero y Bosch, 2015, p. 252).

De acuerdo con las autoras, en una primera etapa aparece el análisis preliminar que involucra un primer análisis epistemológico de los conocimientos a enseñar, la construcción de un punto de vista propio. Esto es un modelo epistemológico de referencia sobre dichos conocimientos, y la consecuente identificación de los fenómenos didácticos relativos, así como la formulación de hipótesis sobre la problemática didáctica que se quiere abordar. En una segunda etapa, que se centra ahora en el diseño y análisis *a priori* de una propuesta didáctica, se distinguen los niveles de, por un lado, la ingeniería matemática relativa al diseño matemático (o epistemológico) de la propuesta y, por otro lado, aunque indisociable a la primera, la Ingeniería Didáctica que se centra en el diseño de la gestión de aula que se prevé desarrollar. La tercera etapa se focaliza en llevar a cabo la implementación de estos diseños. Dicha etapa experimental requiere de herramientas para el análisis *in vivo* para llevar a cabo la observación y la recolección de datos de la información llevada al aula de las propuestas. En una cuarta etapa, donde tendría lugar el análisis *a posteriori*, se lleva a cabo la validación y el desarrollo de los diseños y, volviendo al punto de inicio, el contraste, refinamiento o reformulación de las hipótesis de investigación y la elaboración de respuestas (a menudo parciales) a los fenómenos didácticos estudiados. En esta etapa, en el ámbito de la TAD, toma mucha relevancia el estudio de la ecología; es decir, el análisis de todas aquellas condiciones que se han podido crear y aquellas restricciones que han aparecido en la puesta en marcha de los diseños y dispositivos didácticos.

Para poder dar una descripción de los Recorridos de Estudio e Investigación, y siendo fiel a la metodología de diseño utilizada, Barquero *et al.* (2019) utilizan el *esquema herbartiano* como modelo didáctico de referencia describiéndola como:

$$[\ S(X;\ Y;\ C_0) \quad M = \{C_1, C_2, ..., C_j, R_1^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, O_n{+}1, ..., O_m, D_m{+}1, ..., D_p\}\ ] \quad R^\heartsuit$$

Éste nos presenta un sistema didáctico S que está compuesto por X, que es un grupo de estudiantes, además de uno o varios guías del estudio Y, que estudia un conjunto de cuestiones problemáticas, denominadas C_0. El estudio de esta cuestión, denominada generatriz: “marcará el punto de partida y eje articulador del proceso de estudio generado. La búsqueda de respuestas, parciales R_i y finales $R^\heartsuit$ a C_0 será el principal objetivo y fin del estudio” (Barquero *et al.*, 2019, p. 499). En la elaboración de esta $R^\heartsuit$ se crea todo un medio didáctico M, en el sentido de *milieu* introducido por la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002). Este medio didáctico se compone de muchos elementos, entre ellos, pueden aparecer cuestiones derivadas C_j de esta C_0, respuestas preexistentes que tenemos disponibles pre-existentes al estudio, $R_n^{\Diamond}$ que existen fuera, en libros de textos, recursos, etc., objetos O_m que sirven para analizar y evaluar la pertinencia de estas respuestas $R_n^{\Diamond}$ y adaptarlas al estudio realizado, y colecciones de datos Dp que podemos encontrar en fuentes externas o derivadas de simulaciones en la propia indagación.

A través del esquema herbartiano se pueden analizar, no solamente los REI, sino cualquier práctica educativa y cualquier proceso de estudio. Desde aquellos más monumentalistas donde no tendríamos una cuestión generatriz C_0 en el punto de partida, si no que podríamos tener un cierto contenido matemático a ser aprendido, un grupo de estudiantes y un profesor que propone el estudio de dicho contenido. El medio didáctico puede ser muy reducido, podemos encontrar poca consulta de respuestas externas, poca recopilación de datos, poco planteo de cuestiones derivadas y que la $R^{\heartsuit}$ sea una respuesta decidida de antemano por el profesor. Pero también nos sirve para analizar procesos de estudio mucho más ricos donde la cuestión generatriz C_0 sea una cuestión que realmente nos lleve a plantear un verdadero estudio e investigación en los cuales X e Y generen conjuntamente un medio didáctico rico, en la búsqueda de respuestas a C_0. Con este esquema herbartiano, el objetivo es analizar distintos procesos de estudio de distintos caracteres. Cuando lo usamos tenemos que preguntarnos muchas cosas, por ejemplo, sobre la cuestión inicial o generatriz y su finalidad: ¿cuál es esta cuestión C_0?, ¿quién la plantea?, ¿qué necesidad hay de darle la respuesta?, ¿para qué nos sirve? ¿a quién va dirigida esta respuesta? Sobre el medio didáctico: ¿qué elementos lo componen?, ¿cómo se usan estos elementos?, ¿cómo evoluciona este medio? Sobre las respuestas esperadas: ¿qué $R^{\heartsuit}$ se espera construir?, ¿se quiere construir una respuesta que tenía el profesor/a decidida de antemano?, ¿cómo se comparte la responsabilidad en esta elaboración de las respuestas entre los estudiantes y los guías del estudio? Son muchas y variadas las preguntas que nos podemos plantear y respondiendo a ellas podemos caracterizar las distintas tipologías de procesos de estudio.

En particular, nos permite caracterizar la propuesta de los REI, que podríamos interpretar como el desarrollo completo del esquema herbartiano. El punto de partida de un REI es una cuestión inicial suficientemente rica C_0 a la que llamamos cuestión generatriz, con suficiente poder generador de distintas cuestiones derivadas C_n. A menudo, la estructura de un REI se representa o simboliza como una estructura arborescente de cuestiones y respuestas (C_n, R_n), que delimitan las posibles trayectorias de estudio e investigación a emprender. Estas estructuras arborescenes las debemos entender como estructuras dinámicas las cuales, a medida que vamos trabajando en el diseño de un REI, su experimentación y análisis, éstas se van enriqueciendo conforme integramos otras posibles cuestiones derivadas y sus respuestas. Con ello, cada vez tenemos estructuras o mapas de cuestiones y respuestas que nos delimitan mejor todas las posibles trayectorias de estudio a recorrer a partir del estudio emprendido de la cuestión generatriz C_0.

Otra de las características es que en el desarrollo de un REI interviene la búsqueda de respuestas externas $R_n^{\Diamond}$ que existen en distintos *medios*. Por media, entendemos aquellos canales de comunicación y difusión, como puede ser la búsqueda por internet o en libros de texto o el propio profesor puede actuar como media, es decir, como canal de difusión de respuestas. Aunque no es suficiente quedarnos con una búsqueda de respuestas externas, sino que éstas deben ser estudiadas y reconstruidas según las propias necesidades en nuestro estudio. Por ello, es importante poner a la disposición de la comunidad de estudio los medios y conocimientos necesarios para estudiar adecuadamente estas $R_n^{\Diamond}$ y que sean interpretadas y aprovechadas para el propio estudio. Por último, cabe destacar que el objetivo y fin de un REI es la elaboración, evaluación y difusión colectiva, por parte de X e Y, de una respuesta final $R^{\heartsuit}$, la cual debe contribuir en construir conocimiento sobre la cuestión o cuestiones que le han dado origen. En trabajos recientes en el ámbito de la TAD, para definir y caracterizar los distintos elementos herbartianos [C_0, Cj, $R_n^{\lozenge}$, O_m, D_p] se utilizan las denominadas dialécticas (Chevallard, 2011; Barquero y Bosch, 2015), centrales en todo proceso de estudio. En particular, la dialéctica de las “cuestiones-respuestas” se usa para describir la estructura arborescente previamente citada en términos de cuestiones y respuestas; la dialéctica de los “medio-media” para analizar qué media se ponen a disposición, qué respuestas permiten encontrar y cuáles son los medios necesarios para que los estudiantes, conjuntamente con los profesores, comprueben y validen su uso y pertinencia para el estudio; por último, consideramos la dialéctica “individuo-colectivo” que se centra en analizar los roles y las responsabilidades se van tomando y compartiendo entre estudiantes y profesores; por ejemplo, sobre cómo se redactan las respuestas, cómo se planifica el estudio y la investigación, qué resultados se comparten, cómo se validan las respuestas, entre otros, para que los avances individuales y colectivos se nutran. A continuación, presentamos el caso de un REI sobre la evolución de usuarios de Facebook en el cual, los distintos aspectos aquí comentados se verán brevemente ejemplificados.

2.1.1 Un REI sobre la evolución de los usuarios de Facebook (lección 1)

Nos centramos en un REI cuyo origen se sitúa en el trabajo de tesis doctoral de Serrano (2013) sobre la previsión de ventas de ciertos productos, el cual ha sido experimentado en nuevas ocasiones en distintos contextos a nivel universitario y de secundaria. Por ejemplo, Barquero *et al*. (2013) presentan el caso sobre la previsión de ventas de la conocida compañía de moda española Desigual, en su experimentación con estudiantes de primer curso de Administración y Dirección de Empresas (ADE). El punto de partida fueron los datos reales sobre las ventas de Desigual, frente a los cuales se pedía ayudar a la empresa en la creación y discusión de “buenos” modelos matemáticos que permitieran ajustar los datos y realizar previsiones de las ventas de Desigual a corto y medio plazo. El caso del REI sobre las ventas de Desigual logró aportar una razón de ser al estudio de las funciones que aparecían como modelos de ajuste de datos reales y modelos de previsión. Nos centramos aquí en una adaptación posterior de este REI ahora sobre la previsión de los usuarios de Facebook. El caso de REI que aquí nos ocupa fue experimentado con un primer curso de ADE en la universidad TecnoCampus-Universitat Pompeu Fabra en la asignatura anual de matemáticas de primer curso. En dicha experimentación participaron un total de 30 estudiantes y 3 profesores de la asignatura. El diseño de este REI se integró dentro del proyecto europeo MCSquared (Mathematical Creativity Squared)[1] que facilitó un entorno virtual para el diseño de esta propuesta didáctica y que facilitó que colaboraran en el diseño, investigadores, docentes universitarios y expertos en modelización matemáticas, más allá del ámbito educativo.

El punto de partida del REI se realiza a través de un estudio realizado por Princeton en 2014 en el que pronosticaban que en 3 años Facebook perdería el 80% de sus usuarios. En dicho trabajo explicaban los modelos usados para justificar sus previsiones. Poco tardó Facebook en responder a dichas pronósticos. Con esta situación de partida, la cuestión generatriz C_0 que se planteó a los estudiantes fue sobre la siguiente pregunta:

1. Se pueden consultar más detalles del diseño de la unidad virtual en: http://www.mc2-project.eu/index.php/technology-and-production/c-books/144-comparing-predictions-against-reality

¿Pueden ser ciertas las predicciones de Princeton acerca de la evolución de los usuarios de Facebook? ¿Cómo podemos modelizar y ajustar los datos reales sobre los usuarios de Facebook y hacer previsiones sobre su evolución?

A continuación, en la Figura 2, se esboza el mapa de cuestiones y respuestas que simboliza el diseño *a priori* de este REI. En este diseño se preveía pasar por tres fases o etapas de estudio e investigación. En la primera, la cuestión derivada principal trata sobre ¿qué datos reales sobre los usuarios de Facebook podemos usar para nuestro estudio? [C_1]; la segunda fase, se centra ahora en ¿qué modelos matemáticos prevén mejor el ajuste de datos? [C_2]; por último, se prevé una tercera fase sobre ¿cómo decidir cuál era el mejor modelo de ajuste?, ¿qué modelos eran más fiables?, ¿los modelos usados por Princeton daban realmente unas previsiones fiables? [C_3]. El esbozo aquí mostrado, que en el diseño completo contiene más cuestiones derivadas en cada fase, permitió tener una primera delimitación del posible territorio por recorrer, siendo una herramienta muy valiosa para el diseño didáctico de esta propuesta y una herramienta muy útil para el profesorado responsable de anticipar aquello que podía ocurrir en su implementación efectiva en el aula.

En la implementación del REI, investigadores-observadores, juntamente con los profesores guiando su implementación, nos fijamos especialmente en la dialéctica que se generaba entre las cuestiones y las respuestas y la dialéctica entre los medios y media. Comentamos aquí algunos resultados importantes.

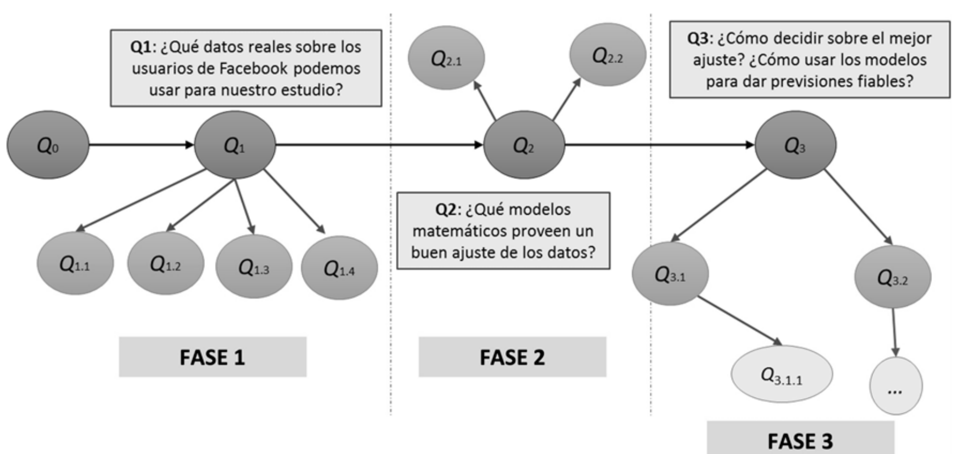


Figura 2. Mapa de cuestiones. Elaboración propia.

A lo largo de toda la primera fase, los estudiantes se pusieron fácilmente de acuerdo en qué datos reales de los usuarios de Facebook querían usar, y aquí emergieron distintas nuevas cuestiones, como siempre suele ocurrir al iniciarse un REI. Por ejemplo, sobre $C_{1.1}$: ¿qué intervalos de tiempo tenemos que usar? $C_{1.2}$: ¿cómo agrupamos los datos? $C_{1.3}$: ¿cómo visualizamos los datos? $C_{1.4}$: ¿cuál ha sido la tendencia histórica?, entre otras cuestiones. Aquí, los estudiantes aportan muchas y variadas respuestas, que tienen que compartirse entre los grupos de trabajo para tomar acuerdos. Hubo una primera fase mucho más larga de la prevista, en la cual los distintos grupos empezaron a crear y a usar modelos gráficos, a fijar una buena terminología para referirse a las variables seleccionadas del sistema a estudiar, empezaron a emerger las primeras ideas sobre qué funciones podrían usar para proponer "buenos" modelos de ajuste, en base a conocimientos previos que ellos tenían. Los *media* consultados fueron, en esta fase, especialmente ricos, porque los propios estudiantes encontraron distintos artículos de investigación por internet, que complementaron con datos reales de los informes mensuales, trimestrales y anuales de Facebook. Todo ello les aportó mucha información que, después de ser analizada, iban integrando en su medio didáctico. Los profesores se encargaron de repartir los datos entre los grupos de trabajo, ya que eran muchos y complejos, y se repartieron de la mejor forma posible para que cada grupo pudiera contribuir y complementar los resultados de los otros grupos (se repartieron países, años, zonas, etc.). Al finalizar esta primera fase, los grupos de trabajo tuvieron que entregar un informe de su indagación, explicitando qué cuestiones habían tratado, con qué datos, qué respuestas podían aportar, y qué fuentes habían consultado y cómo estas fuentes habían enriquecido su estudio.

La Figura 3 muestra la estructura del informe cómo se les pedía responder, a través del libro virtual que sirvió de dispositivo didáctico para la experimentación y redacción de los avances de cada grupo.

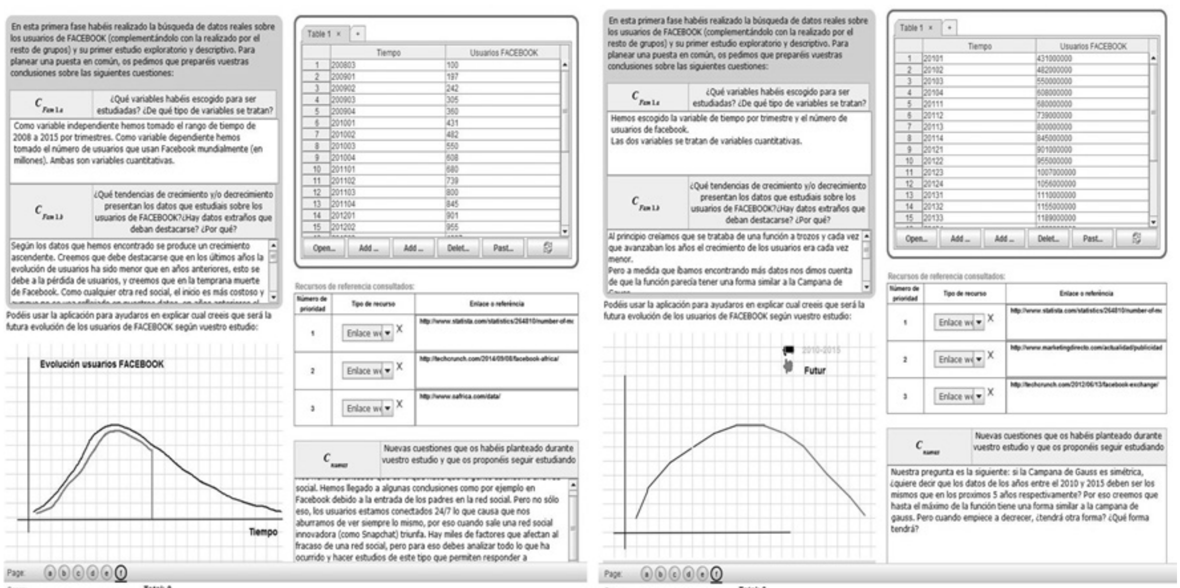


Figura 3. Ejemplos de informes entregados por los estudiantes en la Fase 1. Elaboración propia.

En la segunda fase, la cuestión principal tratada fue que cada grupo indagara qué modelos matemáticos, basados en funciones, proponían el mejor ajuste posible de los datos reales sobre los usuarios de Facebook. Aquí las principales cuestiones derivadas que surgieron fueron: $C_{2.1}$¿Qué modelos basados en las familias de funciones elementales pueden ajustar los datos? $C_{2.2}$ ¿Cómo determinar los parámetros del modelo? Los estudiantes propusieron modelos basados en familias de funciones elementales y, sobre todo, se plantearon cómo determinar, con sentido, los parámetros de estos modelos. En este punto pusimos a disposición de los estudiantes dos *applets* en GeoGebra (ver Figura 4) específicamente diseñados para realizar el ajuste manual de los parámetros de los modelos. Ambos sirvieron de *media* principal para que los estudiantes pudieran simular gráfica y numéricamente las distintas familias de funciones elementales. Los estudiantes lo integraron muy fácilmente en su medio didáctico el dispositivo creado y las respuestas que permitía generar, ya que conocían muy bien funciones elementales –las habían revisado durante el primer trimestre de la misma asignatura de matemáticas– y les permitía realizar a la vez la simulación gráfica y numérica de las funciones y la comparación de dichas simulaciones con los datos reales. Al finalizar esta fase, se pidió la redacción de un nuevo informe grupal para formalizar los avances de su estudio e investigación (ver Figura 4).

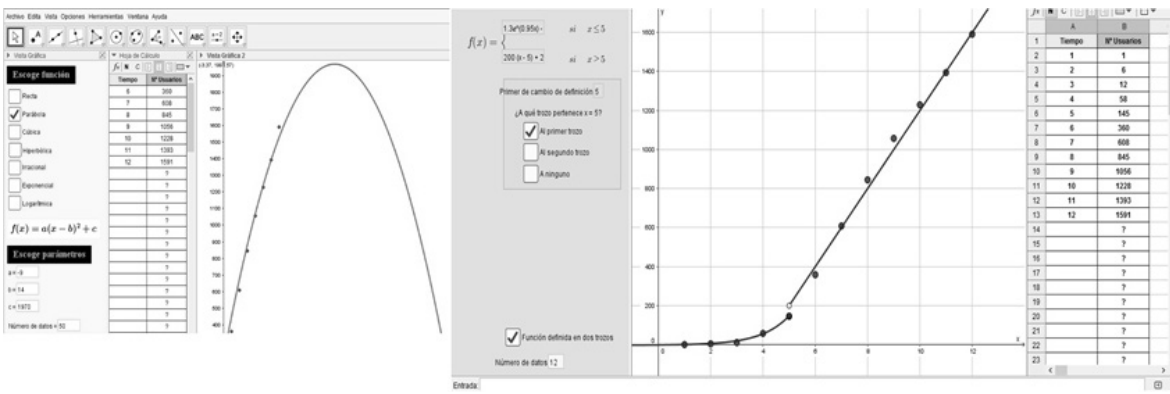


Figura 4. Simulación gráfica y numérica de los modelos basados en funciones elementales. Elaboración propia.

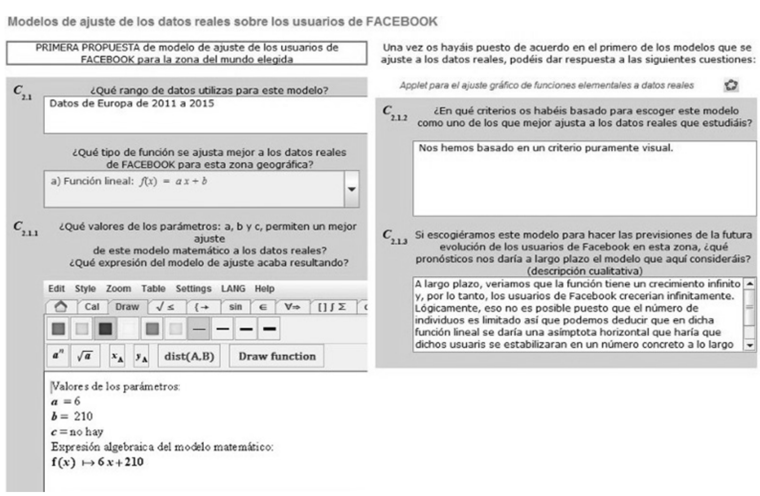


Figura 5. Ejemplos de informes entregados por los estudiantes al finalizar la Fase 2. Elaboración propia.

En la tercera y última etapa los grupos trabajaron sobre ¿cómo decidir cuál era el mejor modelo de ajuste?, ¿qué modelos eran más fiables?, ¿los modelos usados por Princeton daban realmente unas previsiones fiables? [C_3]. Aquí surgieron cuestiones interesantes sobre $C_{3.1}$: ¿qué quiere decir y cómo podemos comparar si un modelo se ajusta mejor o peor que otro? $C_{3.2}$: ¿cómo comparar el error cometido por los distintos modelos? $C_{3.3}$: ¿el mismo modelo sirve para previsiones a corto y largo plazo?

En la tercera etapa cada grupo tenía propuestas distintas, que habían expuesto y justificado, tenían ahora otra problemática abierta sobre si este modelo o estos modelos que proponían (ya que había varios grupos que trabajaban con más de una propuesta) eran los que daban previsiones más fiables. Aquí surgieron necesidades importantes, derivadas del trabajo de los estudiantes, que llevó a tomar varias decisiones. La primera necesidad surgió cuando los estudiantes se preguntaron sobre cómo era mejor comparar los errores cometidos entre simulación de modelo y los datos reales. La segunda fue sobre cómo se podía discutir y/o contrastar qué modelo daba mejores previsiones a corto plazo y largo plazo. Frente a la primera, se diseñó y puso a disposición de los estudiantes un *applet* con el que se comparaban los datos reales con las distintas simulaciones y comparaba los errores absolutos y relativos (ver Figura 6). Sobre la segunda necesidad, se optó por pedir a los distintos grupos que realizaran una previsión para los 1-3 meses posteriores a los datos que se habían usado desde el inicio y a largo plazo. Aunque no tuvieron los datos en el mismo momento de la experimentación, unos meses después pudieron comprobar si habían dado buenas previsiones o no. Lo que coincidieron todos los grupos fue que las revisiones más a largo plazo, como las que ofrecía Princeton a 3 años vista, no se ajustaba en absoluto a sus previsiones.

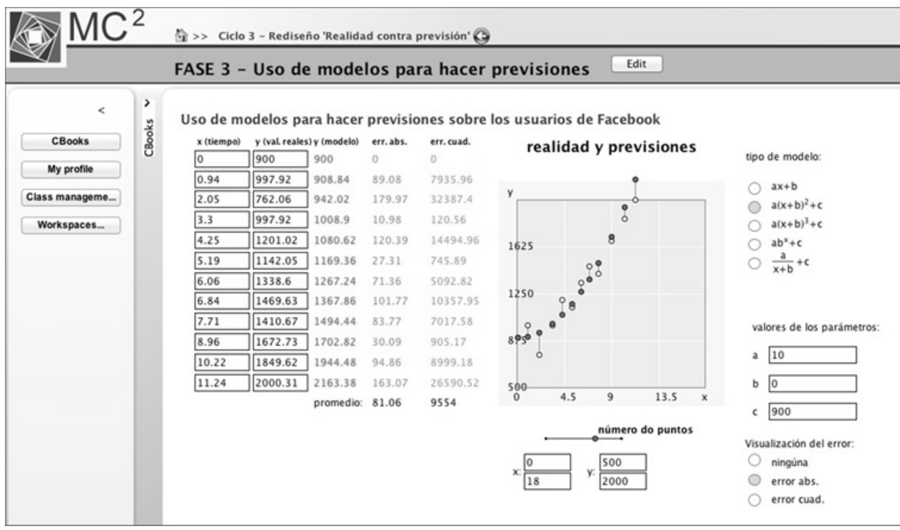


Figura 6: Realidad y previsiones. Elaboración propia.

Para finalizar el REI, los estudiantes tenían que preparar una presentación explicando el proceso de elaboración $R^{\heartsuit}$ y sus respuestas finales a C_0. Hubo un tribunal con los profesores de matemáticas y externos al equipo docente: investigadores en educación matemática y otros expertos en redes sociales, que escucharon y valoraron las presentaciones de cada grupo. Además, tanto los miembros del tribunal como un grupo reactor de la clase podían realizar preguntas sobre la respuesta final que aportan de si la previsión de Princeton podía ser fiable.

2.2 Ejemplo 2: Enseñanza del concepto de vector con estudiantes de ingeniería

El siguiente ejemplo se centra en el diseño y evaluación de tareas diseñadas para introducir el concepto de vector a estudiantes de ingeniería en un primer curso de álgebra lineal. Usamos la metodología de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) por tratarse de una metodología que permite comprender cómo, cuándo y por qué las innovaciones educativas funcionan en la práctica (DBRC, 2003). La IBD posee una característica iterativa que permite la mejora del diseño mediante tres fases de investigación: fase de preparación y diseño, fase de experimentos de enseñanza y fase de análisis retrospectivo. Así mismo, las tareas se organizaron en una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA). De acuerdo con Simon (1995) una THA está formada por tres componentes: (1) los objetivos del profesor para el aprendizaje de los estudiantes, (2) las actividades de aprendizaje y (3) el proceso hipotético de aprendizaje. Bakker y Van Eerde (2015) señalan que el diseño de una THA comienza con una revisión de la literatura que permite formular los objetivos provisionales de aprendizaje; posteriormente, en los experimentos de enseñanza, en los cuales se prueba el diseño en el aula, sirve cómo guía para el profesor y/o investigador; finalmente, en el análisis retrospectivo, sirve para analizar los datos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje con el aprendizaje real de los estudiantes. La THA quedó conformada por cinco tareas diseñadas bajo los principios del marco didáctico propuesto por Cuevas y Pluvinage (2003) o C&P. El marco didáctico C&P es un marco orientado a la enseñanza de las matemáticas en un nivel postelemental constituido por una serie de principios, a partir de los cuales se busca promover una enseñanza activa o participativa para que los estudiantes comprendan, asimilen y doten de un significado los conceptos matemáticos. Estos principios son: (1) la acción, (2) partir de un problema en contexto, (3) la validación de resultados, (4) descomposición en operaciones parciales, (5) la implementación de operaciones inversas y (6) la articulación de registros de representación semiótica. El siguiente ejemplo ilustra cómo se han adaptado estos principios al diseño de tareas con el uso de la tecnología digital para la enseñanza-aprendizaje del concepto de vector.

En primer lugar, se propone iniciar con una descomposición en operaciones parciales del concepto (cuarto principio), mediante un análisis del concepto matemático a enseñar con el objetivo de identificar los conocimientos de matemáticas que los estudiantes requieren para llegar a su comprensión. Este análisis es considerado el punto de partida para el diseño de un pretest, el cual servirá para evaluar los conocimientos previos de los estudiantes. Diversos investigadores como Aguirre y Erickson (1984) y Poynter y Tall (2005) han reportado que el concepto de vector es una noción que los estudiantes encuentran difícil. Por ejemplo, una descomposición preliminar de la idea de vector, indica que, para comprender el concepto de vector, los estudiantes requieren conocimientos de geometría y trigonometría como: teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, plano cartesiano, coordenadas, entre otros. Segundo, se sugiere evitar iniciar con una definición formal y partir de un problema en contexto que represente una situación "real" para el estudiante (segundo principio). En este estudio se seleccionó como contexto de partida el contexto de la robótica (ver Figura 7a). El concepto de vector emerge de un problema de brazo robótico como se verá en los siguientes apartados. Por otra parte, proponemos que, una tarea debe estar conformada por Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI) que promuevan el uso de la tecnología digital en el aula y, por hojas de exploración guiada que contengan tanto las instrucciones para el manejo de los EDVI como ejercicios dosificados que permitan al estudiante estar siempre desarrollando una acción y ser partícipe de su proceso de aprendizaje deseado (primer principio). Con base en lo anterior, es importante considerar que el primer EDVI que se construya debe partir del contexto matemático elegido. Y, de forma simultánea, deben desarrollarse las hojas de exploración guiada, las cuales deben incluir ejercicios de operación inversa cuando se realicen operaciones que conduzcan a conceptos matemáticos (quinto principio) y favorecer la articulación de los diferentes registros de representación semiótica que el concepto matemático permite (sexto principio). Es importante que después de resolver los problemas presentados, el estudiante verifique que la solución encontrada tiene un sentido lógico con el problema planteado (séptimo principio). Finalmente se recomienda evaluar el diseño mediante un estudio piloto. La siguiente secuencia de tareas fue diseñada por un grupo de trabajo integrado por un investigador experto, un investigador y una profesora novatos. Las tareas quedaron organizadas en una THA –los EDVI construidos en GeoGebra y hojas de exploración guiada, así como la THA completa puede consultarse en Paz (2020).

2.2.1 Tarea 1.1: Brazo 1GDL (lección 1)

Esta tarea parte de la noción de vector que tienen los estudiantes de sus cursos elementales de física y se diseñó con el objetivo de promover una significación del concepto de vector en un problema de aplicación. Para significar el concepto de vector en un problema de aplicación, se construyó el EDVI Brazo IGDLE (Figura 7a). Este EDVI simula el movimiento de un brazo robótico básico, dispuesto sobre una mesa en una habitación en la que hay cuatro botones, cuatro focos indicadores y un letrero led. La función del brazo robótico es incidir sobre cada uno de los botones de los tableros para controlar los procesos automatizados de una casa. El escenario cuenta con dos deslizadores que permiten controlar la longitud y posición del eslabón del brazo robótico y con una casilla de control que habilita/deshabilita la representación gráfica del vector (flecha) sobrepuesta al eslabón. Las actividades de aprendizaje de esta tarea incluyen: manipulación del escenario para la visualización del comportamiento de la representación gráfica del vector e identificación de su origen y extremo; construcción de vectores con la misma magnitud y diferente dirección; construcción de vectores con la misma dirección y diferente magnitud; y, asociación del vector con los elementos del brazo robótico.

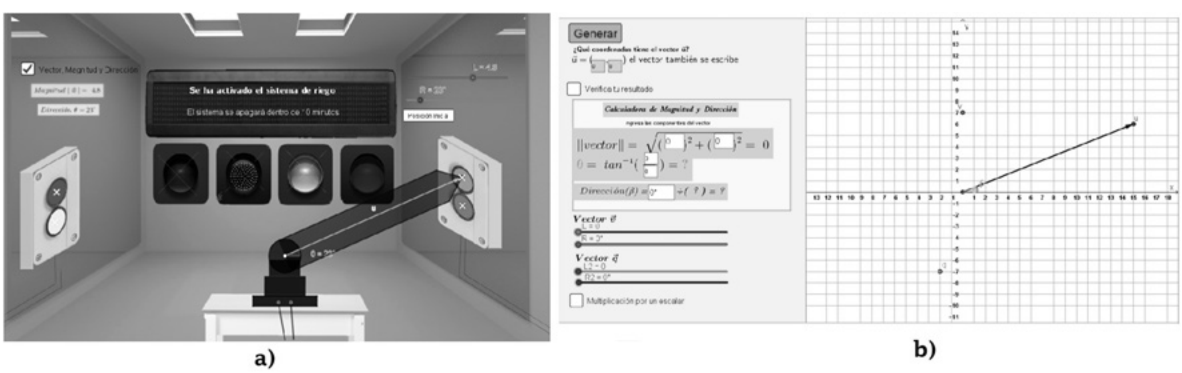


Figura 7 a) EDVI Brazo 1GDLE b) EDVI Coordenadas. Elaboración propia.

2.2.2 Tarea 1.2 Trabajando con parejas (lección 2)

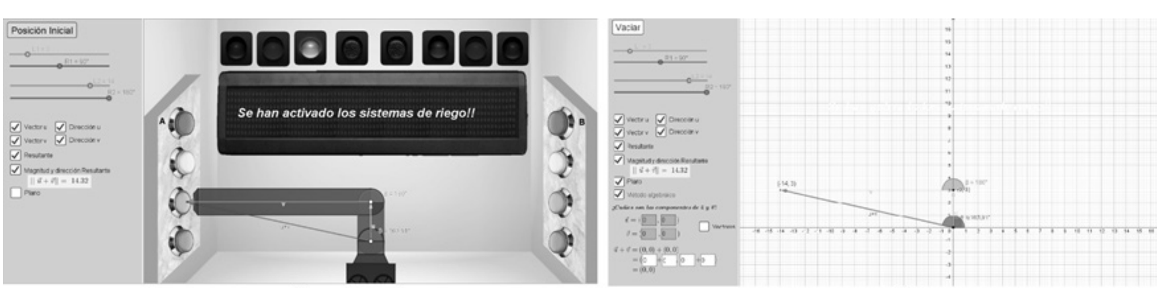
Esta tarea tiene por objetivo promover la comprensión del vector como pareja de números ordenados en el plano y se diseñó para ayudar a los estudiantes a transitar de la representación gráfica del vector a su representación algebraica mediante la interacción con el EDVI Coordenadas Herramientas 1 (Figura 10a). Este EDVI sitúa al vector fuera del contexto del brazo robótico. El escenario está dividido en dos ventanas. La ventana izquierda permite definir al vector dentro de un registro algebraico como pareja de números ordenados e incluye las siguientes herramientas: un botón que genera un vector aleatorio *u*, casillas de entrada para que el estudiante defina las componentes que representen algebraicamente al vector; una Calculadora de Magnitud y Dirección; cuatro deslizadores que permiten crear vectores; y, casillas de control de verificación de resultados. La ventana derecha, ubica a los vectores en un registro gráfico representados como flechas dentro de un sistema de coordenadas cartesianas. Las actividades de aprendizaje de esta tarea incluyen: conversión de representación gráfica a algebraica mediante la identificación de las componentes del vector; deducción de fórmulas para calcular la magnitud y dirección del vector; análisis de la representación algebraica de vectores libres; y, conversión de representación algebraica a la gráfica.

2.2.3 Tarea 2.1 Alargar o comprimir (lección 3)

Esta tarea tiene como objetivo promover la comprensión de la operación multiplicación de un vector por un escalar de forma gráfica y algebraica mediante la interacción con el EDVI Coordenadas Herramientas 2 (Figura 7b). Este EDVI tiene la misma configuración que el EDVI Coordenadas H1, adicionalmente, la ventana izquierda contiene las siguientes herramientas: una casilla de entrada para ingresar el escalar por el que se va al multiplicar el vector; botones que crean un vector **r** que resulta de multiplicar a **u** por un escalar aleatorio; y, una casilla de control de verificación de resultados. Las actividades de aprendizaje de esta tarea incluyen: Visualización gráfica y algebraica del comportamiento de un vector al ser multiplicado por los escalares 1,2 y 2.5 mediante la comparación de flechas y parejas de números ordenados y, deducción de un escalar aleatorio que genera a **r** mediante la comparación de vectores.

2.2.4 Tarea 2.2 Brazo Robótico 2GDL (lección 4)

Esta tarea parte nuevamente del contexto de la robótica con el objetivo de promover una significación de la suma de vectores. Esta tarea consiste en la interacción de los estudiantes con el EDVI Brazo 2GDLE (Figura 8a). Este EDVI está dividido en dos ventanas. La ventana derecha simula el movimiento de un brazo robótico conformado por dos eslabones que amplían su libertad de movimiento, y cuya función es controlar los procesos automatizados de una casa mediante los botones. La ventana izquierda contiene deslizadores que permiten controlar la longitud y posición de los eslabones del brazo robótico; casillas de control que habilitan/deshabilitan la representación gráfica de los vectores (flechas superpuestas a los eslabones); y, casillas de control que habilitan/deshabilitan la representación gráfica del vector resultante, así como los valores de su magnitud y dirección. Las actividades de aprendizaje de esta tarea incluyen: manipulación del escenario para la visualización del comportamiento de la representación gráfica de los vectores e identificación de su origen y extremo dentro del problema de aplicación, análisis del comportamiento del vector resultante y asociación de los vectores con los elementos del brazo robótico.



a) b)

Figura 8. a) EDVI Brazo 2GDLE, b) EDVI Uniendo vectores. Elaboración propia.

2.2.5 Tarea 2.3 Adición (lección 5)

Esta tarea tiene por objetivo promover la comprensión del método gráfico y algebraico de la suma de vectores mediante la interacción con el EDVI Uniendo Vectores (Figura 8b). Este EDVI está dividido en dos ventanas. La ventana izquierda permite definir a los vectores dentro de un registro algebraico como pareja de números ordenados e incluye las siguientes herramientas: deslizadores que controlan la magnitud y dirección de los vectores; casillas de entrada para que el estudiante determine las parejas de números ordenados que representan a los vectores *u* y *v*; y, una calculadora para que el estudiante realice la suma algebraica de vectores. La ventana derecha, ubica a los vectores en un registro gráfico representados como flechas dentro de un sistema de coordenadas cartesianas. Las actividades de aprendizaje de esta tarea incluyen: análisis de la posición de los vectores para deducir el método gráfico para sumar vectores; conversión de la representación gráfica a la algebraica mediante la identificación de las componentes del vector; y, uso de la calculadora para sumar coordenadas.

3. Experimento de enseñanza

Las tareas se implementan en un curso en línea de álgebra lineal con dos grupos de estudiantes de ingeniería de una universidad pública en México. Los resultados que se presentan fueron tomados del primer grupo conformado por 11 estudiantes que tenían una instrucción previa sobre el tema de espacios vectoriales y conocimientos sobre GeoGebra. La experiencia se llevó a cabo mediante la plataforma Zoom en cinco sesiones de sesenta a noventa minutos cada una. Previo a la primera sesión se aplicó una encuesta general, para obtener datos sobre los estudiantes y el uso de las tecnologías digitales y un pretest para identificar los conocimientos previos de matemáticas y las ideas previas de los estudiantes sobre el concepto de vector. Ambos instrumentos fueron diseñados con formularios de Google. En la primera sesión, se proporcionó a los estudiantes los EDVI y las hojas de exploración guiada de cada tarea y se dio una introducción sobre los elementos que conforman la estructura de un brazo robótico. Los datos obtenidos incluyen las respuestas de los estudiantes a la encuesta general, el pretest, las respuestas de los estudiantes a las hojas de exploración y las grabaciones de audio y video de cada sesión. A continuación, se describen los resultados obtenidos en cada una de las tareas.

4. Resultados

El análisis de los resultados de la Tarea 1.1 Brazo Robótico nos permitió clasificar la significación de los estudiantes sobre el concepto de vector en tres categorías: 1) asociación del vector con el eslabón: los estudiantes indican que el eslabón del brazo robótico puede representarse mediante un vector. La mayoría de los estudiantes (8 de 11) coincide con esta respuesta; 2) asociación del vector con el efector final: los estudiantes indican que el efector final del brazo robótico puede representarse mediante un vector —en el EDVI Brazo 1GDL, el efector final está representado por un punto lo cual, nos permite suponer que algunos estudiantes están viendo al vector no sólo como una flecha, sino también como un punto con magnitud y dirección.

La tarea Coordenadas nos permitió identificar que los estudiantes no tienen dificultad para identificar las coordenadas que representan a un vector que parte del origen. Al ingresar las coordenadas en la ventana izquierda y formar la pareja de números correspondientes al vector *u*, los estudiantes pudieron observar que los componentes del vector formaban en el plano un triángulo rectángulo. Esta figura permitió a los estudiantes deducir las fórmulas para calcular la magnitud y dirección del vector mediante el uso de sus conocimientos previos. Por ejemplo, para el cálculo de la magnitud, un estudiante dijo: “como *u* es la hipotenusa tal vez podríamos usar el

Teorema de Pitágoras" y para el cálculo del ángulo teta otro estudiante dijo: "sacando la tangente a la menos uno del coseno opuesto sobre el cateto adyacente". Por otra parte, pudimos observar que algunos estudiantes tienen dificultades para transitar a la representación algebraica con vectores libres, el debate posterior ayudó a que varios estudiantes se percataran de que los vectores con las mismas propiedades podrían representarse por la misma pareja de números ordenados, sin embargo, las dificultades persisten en algunos estudiantes. La sesión concluyó con una actividad de aprendizaje que fomentó la conversión del registro algebraico al geométrico. Se esperaba que, si los estudiantes habían comprendido cuál era la representación algebraica de un vector y cómo podía obtenerse a partir de su representación gráfica en el plano, entonces, de manera inversa, dada una pareja de números ordenados, el estudiante podría dibujar en el plano el vector correspondiente. Observamos que los estudiantes usaron la herramienta vector para trazar en el plano los vectores dados en las hojas de exploración guiada, a partir de lo cual podemos afirmar que los estudiantes lograron realizar conversiones de un registro a otro sin problemas.

En la primera actividad de la tarea alargar o comprimir, los estudiantes exploraron el comportamiento geométrico de un vector al ser multiplicado por un escalar, distinguiendo el comportamiento del vector al ser multiplicado por un escalar positivo o un escalar negativo. La segunda actividad de aprendizaje se usó para confirmar si los estudiantes habían comprendido la operación de multiplicación de un vector por un escalar y consistió en encontrar el escalar que generaba al vector *r*, el cual resultaba de multiplicar a *u* por un escalar aleatorio. Observamos dos formas de resolver el problema: a) comparación gráfica: los estudiantes compararon las propiedades de los vectores, es decir, magnitud, dirección y sentido, para identificar si el escalar buscado era un escalar negativo o positivo; b) comparación algebraica: los estudiantes realizaron una comparación entre las coordenadas del extremo de los vectores.

En la tarea Brazo 2GDL, los estudiantes relacionaron los vectores con los eslabones del brazo robótico. A diferencia de la Tarea 1.1, identificamos únicamente dos categorías sobre la significación de la suma de vectores en el contexto de un brazo robótico de dos eslabones: 1) asociación de los vectores con los eslabones: respuestas de los estudiantes que indican que los eslabones del brazo robótico pueden representarse por un vector. 2) asociación de los vectores con el efector final: respuestas de los estudiantes que indican que el efector final del brazo robótico puede representarse por un vector. Los estudiantes lograron asociar el movimiento de un brazo robótico con la suma gráfica de vectores, es decir, los vectores sumados representan los eslabones del brazo robótico y, el vector resultante representa la posición del efector final.

Las tareas resultaron efectivas para introducir el concepto de vector y sus operaciones en un primer curso de álgebra lineal. Particularmente, en cada sesión se asignó a un estudiante encargado de compartir pantalla y manipular los EDVI y un estudiante encargado de leer los ejercicios de las hojas de exploración guiada. La profesora se encargó de guiar a los estudiantes en la resolución de las tareas y fomentar la discusión grupal, la cual ayudó a promover la reflexión en las ideas de los estudiantes. En las discusiones que se presentan en las siguientes secciones se usaron seudónimos para hacer referencia a los participantes del estudio. Al finalizar la sesión, se les solicitó a los estudiantes que conforme a las actividades realizadas dieran una definición de lo que entendían por vector. Las respuestas de algunos estudiantes se presentan en la Tabla 1 junto con su definición dada en el pretest.

Tabla 1. Definición de los estudiantes sobre el concepto de vector *a priori* y *a posteriori*. Elaboración propia.

Estudiante	Definición Pretest	Definición después de las tareas
Angélica	Una flecha.	Flecha que se puede representar en el plano cartesiano, la cual tiene una magnitud y una dirección.
Dali	Un segmento de recta dirigida que consta de magnitud y dirección.	Puede ser un punto o flecha en cualquier espacio del plano con un sentido, una magnitud que lo componen.
Kylie	Sin respuesta.	Un punto en plano cartesiano o flecha que tienen una magnitud y una dirección.
Hugo	Representación de una ecuación lineal que puede ser gráfica o en forma de un arreglo de números como un renglón o columna de una matriz.	Se puede representar por una flecha en el plano y que tienen sus propiedades que son la magnitud, dirección y sentido y que algebraicamente lo podemos representar con sus coordenadas y ya sea con las coordenadas o gráficamente podemos representar la suma o la resta de vectores.

5. Conclusiones

El diseño y experimentación del REI de este capítulo permitió aportar funcionalidad a muchas de las herramientas matemáticas (funciones elementales, uso de funciones como modelos de ajuste y de previsión, cálculo de errores, etc.) que, tradicionalmente, en los cursos universitarios de matemáticas quedan desprovistas de razón de ser. En la experimentación aquí narrada fue especialmente interesante cómo la asignatura de matemáticas consiguió establecer un vínculo con otras asignaturas: Estadística, Comunidades Digitales, Organización de Empresa, a los profesores de las cuales los estudiantes participantes iban a preguntar con dudas concretas sobre qué herramientas, respuestas existentes, etc., existían que les pudiera ayudar para su propio estudio. Por otro lado, y ahora centrándonos en los aportes de herramientas de investigación, hemos utilizado con bastante éxito los que hemos llamamos “mapas de cuestiones y respuestas” que han mostrado ser unas buenas herramientas tanto para el diseño, para el análisis y para la gestión en aula. Menos usada es la dialéctica de *media*-medio (o media-*milieu*) como herramienta para analizar la diversidad de objetos y recursos que se pueden poner a disposición de los estudiantes, el uso y papel que tienen, y cómo se usan para integrar nuevos elementos en el medio didáctico del estudiante. De modo que apunta ser una muy buena herramienta para analizar los distintos entornos tecnológicos (De Simone *et al*., 2018) diseñados para que ciertas propuestas didácticas se puedan desarrollar de la mejor forma posible.

Asimismo, el diseño y aplicación de las tareas para introducir el concepto de vector y sus operaciones básicas en R_2 como una graduación para llegar a su definición abstracta vista en un curso de álgebra lineal, confirmó que la noción de vector que predomina en estudiantes universitarios, como han reportado Knight (1995) y Orozco (2016), es la noción geométrica de flecha asociada directamente a la concepción de vector vista en los cursos de física en la educación básica. En este sentido, las tareas diseñadas ayudaron a los estudiantes a ampliar y significar la noción de vector y a promover la comprensión de las operaciones básicas de los vectores. Respecto al marco usado para el diseño de tareas, el marco didáctico C&P, nos permitió implementar un método de enseñanza no tradicional y fomentar la participación activa de los estudiantes para la construcción de un conocimiento propio y significativo. En particular, respaldamos la importancia de incluir dos principios del marco didáctico C&P en el diseño de tareas que buscan promover la comprensión de un concepto matemático del álgebra lineal u otra rama de las matemáticas, independientemente de la didáctica seleccionada; el primero es la necesidad de realizar previo al diseño, una descomposición preliminar del concepto matemático para que las tareas diseñadas incluyen problemas dosificados que permitan establecer una conexión con los conocimientos previos; y el segundo es iniciar con un problema en contexto que permita vincular los conocimientos de matemáticas con los conocimientos de ingeniería.

6. Referencias

Aguirre, J., y Erickson, G. (1984). Students' conceptions about the vector characteristics of three physics concepts. *Journal of Research in Science Teaching, 21*(5), 439-457.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winslow (Ed.). Nordic research in mathematics education. *Proceedings from NORMA08 in Copenhagen* (pp. 7-16). Sense, Rotterdam.

Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159-162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Bakker, A. y Van Eerde, D. (2015). An introduction to Design-Based Research with an example from statistics education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.). *Doing qualitative research: methodology and methods in mathematics education* (pp. 429-466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Barquero, B., y Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.). *Task design in Mathematics Education* (pp. 249-272). Springer.

Barquero, B., Bosch, M. y Romo-Vázquez, A. (2019). El uso del esquema herbartiano para analizar un REI online para la formación del profesorado de secundaria. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(4), 493-509. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p493-509

Barquero, B., Serrano, L., y Serrano, V. (2013). Creating the necessary conditions for mathematical modelling at university level. En B. Ubuz, Ç. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of CERME8* (pp. 950-959). Middle East TU.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. de Souza, y M. Viana (Eds.), *International congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001-4022). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in mathematics*. Springer.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Flückiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad del mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182.

Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8*, 273-292.

DBRC. (2003). Design-Based Research: An emerging paradign for educationa inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

De Simone, M., Barquero, B. y Chaachoua, H. (2018). Analyse du milieu via la dialectique medias-milieux : une étude de cas dans le contexte du dénombrement. En: *Espace Mathématique Francophone* (EMF). (pp. 300-310). Laboratoire de Didactique André Revuz. https://emf2018.sciencesconf.org

García, F. (2019). Introducción a "Diseño de tareas en educación matemática: una diversidad de marcos teóricos". *AEIM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 1-4.

García, F., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75-94.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En B. Ubuz, Ç. Haser y M.-A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2810-2819).

Knight, R. D. (1995). The Vector Knowledge of Beginning Physics Students. *The Physics Teacher*, *33*, 74-78.

Margolinas, C. (2013). Task design in mathematics education. *Proceedings of the Conference of the ICMI Study 22*. Oxford, Inglaterra, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3

Orozco, M. G. (2016). *El concepto de vector: un estudio para el diseño de una descomposición genética preliminar desde la mirada de la teoría APOE* [tesis de maestría, CINVESTAV-IPN].

Paz, S. (2020). *Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector. Una aproximación para el diseño de tareas* [Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN].

Poynter, A. y Tall, D. (2005). What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching. *Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education*, (pp. 128-135).

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* [Tesis de doctorado, Universitat Ramon Llull].

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 7-15.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. En Lerman, S. (eds). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Watson, A. y Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y APLICACIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES. NIVEL BÁSICO, MEDIO SUPERIOR Y SUPERIOR

CAPÍTULO 9. EXPERIMENTACIÓN Y TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UNA LARGA HISTORIA DE OPORTUNIDADES Y DESAFÍOS

Michèle Artigue, michele.artigue@univ-paris-diderot.fr
Laboratorio de Didáctica André Revuz (LDAR)
Universidad de París

Resumen

Este capítulo corresponde al desarrollo de la conferencia impartida dentro del grupo temático de instrumentación de propuestas didácticas en EICAL 11 del año 2020, como contribución al homenaje de François Pluvinage. Inicia resaltando el papel que juega la experimentación educativa en la investigación didáctica, especialmente su importancia en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje con tecnologías digitales. Ello debido a las oportunidades y desafíos que el desarrollo tecnológico crea constantemente. Así que en la primera parte se presenta una mirada histórica de la relación entre experimentación e investigación tecnológica. Posteriormente se pasa a la situación actual de pandemia, en la que las condiciones de la enseñanza han sido fuertemente afectadas por el uso masivo de las tecnologías digitales. De ahí que una explosión creativa se haya generado, con un fuerte riesgo de agravar las desigualdades educativas. Finalmente se abre la discusión sobre las consecuencias de esta situación en las agendas de investigación.

1. Introducción

Este capítulo corresponde principalmente a la contribución del homenaje a François Pluvinage, que se celebró en Zacatecas en 2020. La estructuración corresponde a lo solicitado en el Grupo Temático sobre la *Instrumentación de Propuestas Didácticas*, en donde la intención fue realizar una introducción a la temática en cuestión.

Por tanto, quisiera primero señalar que la experimentación siempre ha desempeñado un papel importante en la investigación didáctica. Muy temprano se subrayó la importancia del diseño didáctico y de las experimentaciones en contextos reales de enseñanza. Eso se ve muy bien, por ejemplo:

- En la visión de la didáctica como ciencia de ingeniería expresada por Erich Wittmann ya en 1974 y otra visión mejor conocida gracias al mismo autor (Wittman, 1984).
- En el desarrollo de la Educación Matemática Realista (RME), partiendo de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal y en su teorización en torno a 6 principios de diseño (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2020).
- Y, por cierto, en la metodología de Ingeniería Didáctica y su rol predominante en el desarrollo teórico y empírico de la tradición didáctica francesa desde principios de los años ochenta (Artigue, 1989; 2014; Margolinas *et al*., 2011).

Otras metodologías como las observaciones naturalistas o las metodologías de inmersión han cobrado importancia en las últimas décadas (Bikner-Ahsbahs *et al.*, 2014) debido a la evolución de los enfoques teóricos y problemáticas, por ejemplo, la investigación sobre las prácticas docentes o la etnomatemática, pero la experimentación tiene siempre un papel esencial a desempeñar, y la siguiente cita de Chevallard en la segunda escuela de verano de didáctica de las matemáticas sigue siendo relevante (Chevallard, 1982, p. 41):

> La didáctica será juzgada por su capacidad de realizar los conocimientos que produce, por su ambición de avanzar hacia respuestas prácticas y factibles a las dificultades identificadas concretamente por los practicantes del sistema didáctico; y, entre las modalidades de acción que se relacionan más inmediatamente con su objeto (su problemática y su metodología), la que consiste en producir lecciones y secuencias de lecciones concretamente factibles ocupa obviamente un lugar central (traducción propia).

Sin embargo, me parece que la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje con las tecnologías digitales tiene una relación particular con la experimentación desde el principio y hasta el día de hoy y esto por varias razones. Se ha enfrentado más que la investigación sobre otros temas a la necesidad de crear nuevas formas didácticas y de explorar su potencial para la enseñanza y el aprendizaje. A ello se ha sumado:

- El desafío permanente de una evolución tecnológica cuya temporalidad es desproporcionada con respecto a la temporalidad de los sistemas educativos.
- En las últimas décadas, el desafío de la transformación profunda de las prácticas sociales propias ante la era digital, y sus repercusiones en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Recientemente el terremoto educacional de la pandemia de COVID-19.

Después de estas breves consideraciones generales, paso a una mirada histórica, empezando con un primer trabajo de síntesis, el primer estudio ICMI y las tres publicaciones asociadas (ICMI, 1985; Churchhouse, 1986; Cornu y Ralston, 1992).

2. Una mirada histórica

2.1 El primer estudio ICMI

El título mismo del estudio es significativo: *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. En esta época, como lo decía en una entrevista en 2008, Jean-Pierre Kahane, presidente de la ICMI, quien lanzó el estudio.[1] La cuestión de la posible influencia de los ordenadores y la informática sobre las matemáticas mismas era pregunta abierta. La conferencia asociada al estudio tuvo lugar en la Universidad de Estrasburgo y su organización estuvo a cargo de François Pluvinage, lo que muestra bien su interés precoz en este tema.

Las contribuciones muestran el interés más marcado del estudio en la educación universitaria y preuniversitaria. Hay, por ejemplo, un número importante de contribuciones sobre el Cálculo que

1. https://www.icmihistory.unito.it/clips.php

discuten los nuevos balances permitidos por la tecnología entre lo discreto y lo continuo, cálculo exacto y aproximaciones numéricas, así como también la menor importancia que se debería dar al trabajo técnico.

Ya se han realizado muchos experimentos donde se nota, de modo general, una marcada orientación hacia el estudio del potencial de las perspectivas algorítmicas y de la programación para el aprendizaje, lo que se puede entender, sabiendo que las interfaces gráficas eran todavía recientes en esa época. Es interesante notar que el interés en este tema luego disminuyó, pero está creciendo de nuevo, como lo muestra por ejemplo el reciente estudio ICMI 24 dedicado a las reformas curriculares (Shimizu y Vithal, 2018). La contribución del IREM de Estrasburgo muestra bien esta orientación hacia la algorítmica y la programación, relatando experimentos en formación continua de docentes, con alumnos de primaria programando en Logo y con alumnos de la opción algorítmica de la orientación literaria en el último año del liceo.

Hay muchos experimentos. Sin embargo, como lo señala esta cita de la versión revisada publicada en 1992 por la UNESCO (Cornu y Ralston, 1992, p. 3):

> Casi todos los capítulos que siguen hacen sugerencias a los nuevos elementos curriculares basados en estos nuevos métodos de hacer matemáticas; los lectores encontrarán muchos de estos argumentos estimulantes e incluso persuasivos. Los cambios son sin duda necesarios, y estas sugerencias parecen mejor fundadas que muchas otras. No obstante, hay que reconocer que estas sugerencias son fundamentalmente especulativas a nivel de su implementación a gran escala –es decir que su conversión en un currículo bien desarrollado y probado para profesores y estudiantes típicos sigue siendo un gran desafío [traducción propia].

2.2 El segundo estudio ICMI

Saltamos en el tiempo, 20 años después, cuando la ICMI lanza un segundo estudio titulado *Mathematics Education and Technology: Rethinking the Terrain*, sobre el mismo tema (Hoyles y Lagrange, 2010). Como lo muestra claramente este estudio, la situación ha cambiado sustancialmente debido a:

- La evolución tecnológica y a la creciente influencia social de las tecnologías digitales.
- Las evoluciones curriculares, el uso de calculadoras, programas de geometría dinámica y planillas de cálculo, que al menos son tomadas en cuenta en los planes de estudio de muchos países.
- El desarrollo de la investigación y de las experimentaciones.
- El hecho de que las tecnologías y su utilización educativa ya no están reservadas para los países más ricos. Se debe mencionar que la conferencia asociada al estudio tiene lugar en Hanoi.
- El desarrollo de proyectos a gran escala y a la aparición de nuevas formas de enseñanza y de formación docente utilizando los recursos del internet.

Hay nuevas oportunidades y nuevos desafíos, pero se reconoce también en el estudio que tanto el uso productivo en las clases ordinarias de tecnologías "clásicas" como son las calculadoras gráficas, los programas de geometría dinámica y las planillas de cálculo, como la generalización de los numerosos éxitos experimentales, siguen siendo desafíos mayores.

Aún hoy, desafortunadamente, ese sigue siendo el caso. Lo voy a ilustrar con una investigación reciente de François Pluvinage, quizás una de sus últimas, desarrollada en colaboración con Rosa-Elvira Páez (Páez y Pluvinage, 2019).

3. Una investigación sobre ramas infinitas de funciones

El tema de la investigación es la enseñanza de las ramas infinitas de funciones. Su metodología de investigación se basa en una experimentación con estudiantes de primer año de universidad, movilizando tecnologías clásicas: GeoGebra, la "navaja suiza" como solía decir François Pluvinage, el programa Graph e incluso simples calculadoras científicas.

Se podría pensar que hoy día sabemos cuál es exactamente el potencial de tales tecnologías para la enseñanza de una cuestión como la de las ramas infinitas de funciones reales de una variable real, cómo se puede realizar este potencial, y qué aprovechamos de este conocimiento tanto en la enseñanza secundaria como en la universitaria. Desafortunadamente no es el caso, como lo muestra bien esta investigación, a través de un estudio muy fino del funcionamiento de GeoGebra (véase, por ejemplo, en la Figura 1, un efecto problemático de fenómenos de discretización) y de las dificultades encontradas por estudiantes que ya han encontrado ramas infinitas en la enseñanza secundaria y también en la universidad.

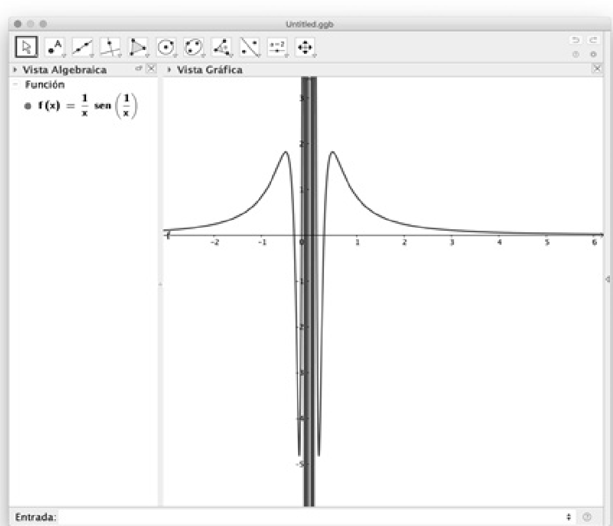


Figura 1: Gráfica GeoGebra (función f(x) = (1/x)*sin(1/x))(Páez y Pluvinage, 2019, p. 336).

Sin embargo, al mismo tiempo, esta investigación nos muestra el progreso de las herramientas conceptuales en las que podemos confiar. En el artículo (Páez y Pluvinage, 2019) ya mencionado, por ejemplo, se utilizan de modo productivo las aportaciones de los ETM, los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak y Richard, 2014; Kuzniak *et al*., 2016), y particularmente los ejes de las génesis semiótica, instrumental y discursiva entre los planos epistemológico y cognitivo, claves en este enfoque teórico como herramientas de análisis. El progreso de las herramientas conceptuales en las que podemos confiar es el punto en el que me enfocaré en la sección siguiente.

4. Evoluciones prometedoras

En esta sección me gustaría destacar brevemente unas evoluciones que han tenido un impacto particular en mi trabajo sobre cuestiones tecnológicas.

4.1 Perspectivas semióticas y de cognición encarnada

La primera es el desarrollo de las perspectivas semióticas (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006; Radford *et al.*, 2011). Este desarrollo permite entender y explotar mejor la multimodalidad de la actividad semiótica. La teorización de esta multimodalidad que propone la teoría APC (Action, Production, Communication) desarrollada por Ferdinando Arzarello con el concepto clave de *semiotic bundle* (Arzarello, 2008) y las experimentaciones asociadas ilustran bien el potencial que ofrece esta evolución.

La segunda, no independiente, es la influencia creciente de la cognición encarnada. Permite entender y explotar mejor el potencial perceptivo-motor de las tecnologías y las influencias bidireccionales entre las tecnologías y los seres que las utilizan. Pienso, por ejemplo, en la metáfora de *Humans-with-Media* desarrollada por Marcelo Borba y Mónica Villarreal en el libro que editaron en 2006 (Borba y Villarreal, 2006).

4.2 Aproximación instrumental

Como lo podrían anticipar quienes me conocen, quiero evocar otro ejemplo en el cual colaboré: el desarrollo de la aproximación instrumental. No entraré en muchos detalles, pero los interesados pueden consultar los 9 módulos sobre este enfoque que hemos creado como parte del proyecto AMOR (*Awardees Multimedia Online Resources*) de la ICMI, y los recursos asociados,[2] o Artigue (2011) para una referencia en español. Sólo voy a indicar unas aportaciones que me parecen esenciales:

- La distinción entre artefacto e instrumento, la revelación de la complejidad de los procesos de *génesis instrumental* (con su doble dimensión de *instrumentalización* mediante el cual el usuario descubre las funcionalidades del artefacto y luego posiblemente crea otras nuevas para satisfacer sus necesidades, y de *instrumentación* mediante el cual el propio usuario se transforma, elaborando o apropiándose de *esquemas de uso*) y, en consecuencia la necesidad de acompañar estas génesis instrumentales en la enseñanza.
- El énfasis puesto por este enfoque en la *doble función epistémica y pragmática* de las técnicas instrumentadas, esencial para su legitimidad didáctica, y la revelación de los desequilibrios entre estas funciones que muestran los usos habituales de las tecnologías digitales; explotan bien el potencial pragmático de estas herramientas, pero en general muy pobremente su potencial epistémico; para explotarlo mejor se necesita la creación de tareas originales que no tienen necesariamente equivalentes en papel y lápiz.
- La puesta en evidencia de los efectos nocivos de la oposición entre actividad conceptual y técnica, recurrente en los discursos didácticos y pedagógicos sobre tecnología, e incluso en

2. https://icmiamor.org/awardee-units/michele-artigue-unit

discursos de investigadores. La actividad técnica y la actividad conceptual no deben pensarse en oposición sino en una relación dialéctica.

Hay también que mencionar las aportaciones que resultan de su extensión al docente con las ideas de *orquestación instrumental* (Trouche, 2005), de *doble génesis instrumental* (Haspekian, 2011) y de *génesis de uso* (Abboud y Vandebrouck, 2013), y también a la actividad documentaria del docente dentro y fuera de la clase, con el desarrollo en la última década del DAD (EDD: *Enfoque Documental de lo Didáctico en español*) (Trouche *et al*., 2020).[3]

En esta breve texto no se pueden dar ejemplos. Sin embargo, muchos se pueden encontrar en los módulos ya mencionados del proyecto AMOR y los recursos asociados. En el EICAL 9 presenté también varios ejemplos especialmente relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo.

Más globalmente, debo destacar la influencia creciente de las teorías socioculturales del aprendizaje y de conceptos tales como los de conectividad, de cognición distribuida, comunidades de prácticas que nos permiten entender y explotar mejor el profundo impacto posible de las TIC sobre la enseñanza y el aprendizaje a través de su impacto en las interacciones sociales, algo ampliamente demostrado por la situación actual.

5. El contexto actual de la pandemia

Vengo al contexto actual de pandemia que necesariamente influirá en la actividad del grupo de trabajo. Vivimos hoy un terremoto educacional que justifica el título del editorial del último número de *ZDM*: "¿Will 2020 be remembered as the year in which education was changed?" coescrito por Marcelo Borba, Johann Engelbrecht, Salvador Llinares y Gabriele Kaiser, dedicado a la educación en línea y el *e-learning* (Engelbrecht *et al*., 2020).

Con esta pandemia asistimos al fin brutal del proceso histórico de lenta incorporación de los avances tecnológicos por los sistemas de enseñanza que observamos desde los años setenta. Porque no había otra alternativa, se impuso el pasaje inmediato y masivo a una enseñanza a distancia, basada en recursos y comunicaciones digitales.

Como lo menciona también este editorial, hemos asistido en los últimos meses a una explosión de creatividad didáctica, que por fin podría revelarse muy productiva. Y por todas partes se multiplican los seminarios virtuales, se lanzan llamadas a proyectos y se financian investigaciones y experimentaciones sobre las nuevas formas educativas que emergen.

Pero, al mismo tiempo, y lo subraya también el editorial, observamos ya los efectos de las desigualdades sociales entre países y regiones e incluso entre alumnos de la misma escuela o clase, frente a estas nuevas formas de enseñanza, y el agravamiento de las desigualdades educativas. Observamos la sobrecarga de trabajo de los profesores, incluso cuando están bien equipados y tienen una buena conexión a internet, lo que está lejos de ser el caso general. Observamos su inquietud por la dificultad de mantener el contacto con ciertos alumnos, a menudo los más frágiles.

Estamos en un momento en que se acumulan oportunidades impensables hace un año e inmensos desafíos. No estamos empezando de cero. Los dieciséis artículos que han sido seleccio-

3. Véase la versión en español de este texto: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02557744v2/document.

nados para el número de *ZDM* sobre la educación matemática en línea y el *e-learning* lo muestran claramente. Y cabe señalar que seis de ellos tienen como autores o coautores a investigadores de América Latina. Sin embargo, la situación es inédita. Tenemos recursos, pero no respuestas y se necesita mucha investigación, experimentación y formación.

Por último, quiero expresar mi convicción profunda de que, en este contexto, debemos poner en lo alto de nuestras agendas de investigación, experimentación y formación las cuestiones de inclusión, equidad y justicia social, cuya importancia nunca debe subestimarse, y menos aún hoy.

6. Referencias

Abboud, M. y Vandebrouck, F. (2013). Geneses of technology uses: A theoretical model to study the development of teachers' practices in technology environments. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of CERME 8* (pp. 2504-2513). http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Artigue M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación en Educación Matemática, 8*, 13-33.

Arzarello, F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.). *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education* (pp. 158-181). Roskilde University.

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. y Presmeg, N. (Eds.). (2014). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Educatio*n. Springer.

Borba, M.C. y Villarreal, M.E. (2006). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Springer.

Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Marseille: IREM d'Aix-Marseille. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=195

Churchhouse, R. F. (Ed.) (1986). *The Influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. ICMI Study Series. Cambridge University Press.

Cornu, B. y Ralston A. (Eds.) (1992). *The Influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. Science and Technology Education n 44* (2nd edition). UNESCO.

Engelbrecht, J., Borba, M., Llinares, S. y Kaiser, G. (2020). Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? *ZDM*, *52*(5), 821-824.

Haspekian, M. (2011). The co-construction of a mathematical and a didactical instrument. En M. Pytak, E. Swoboda y T. Rowland (Eds.). *Proceedings of CERME 7* (pp. 2298-2307). http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/cerme7/CERME7.pdf

Hoyles, C., y Lagrange, J.B. (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. Springer.

ICMI (1985). *The Influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. Supporting papers*. IREM de Strasbourg.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de Vista y Perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-I), 5-15.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, P. y Wozniak, F. (Eds.) (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. La Pensée Sauvage éditions.

Páez, R. y Pluvinage, F. (2019). Estudio de las asíntotas de una función en un entorno de *software* dinámico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *39*(3), 331-369.

Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (Eds.) (2011). Signifying and meaning making in mathematical thinking, teaching and learning: Semiotic perspectives. Special issue. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3).

Sáenz-Ludlow, A. y Presmeg, N. (Eds.) (2006). Semiotic perspectives in mathematics education. Special issue. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2).

Shimizu, Y. y Vithal, R. (Eds.) (2018). *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities. Proceedings of ICMI Study 24 Conference*. University of Tsukuba. https://drive.google.com/file/d/1xR0QOjI8X_mJb5mmhH-G_OqoMaFE54Gy/view

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(1), 91-138.

Trouche, L., Gueudet, G. y Pepin, B. (2020). Documentational Approach to Didactics. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 237-247). Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics Education. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713-717). Springer.

Wittmann, E.Ch. (1974). Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *3*, 119-121.

Wittmann, E.Ch. (1984). Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 25-36.

CAPÍTULO 10. EXPERIENCIA DOCENTE DEL DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LÍNEA. UNA REFLEXIÓN METODOLÓGICA

Eduardo Carlos Briceño Solís, ecbs74@gmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas
Lorena Trejo Guerrero, ltrejog@cinvestav.mx
Universidad Pedagógica Nacional campus Hidalgo, México

Resumen

El presente capítulo evidencia la reflexión que se obtuvo de un posgrado en matemática educativa en línea con profesores de nivel básico y bachillerato que cursaron asignaturas sobre sus proyectos de investigación con el objetivo de indagar el desarrollo de éste, como profesores e investigadores. Para esto se aplicó un cuestionario semiestructurado para identificar dificultades y fortalezas en el proceso de su investigación. Se reportan aciertos y errores de corte metodológico como pautas a considerar en la formación inicial del profesor para su desarrollo profesional.

1. Introducción

La investigación que se desarrolla en la Maestría en Matemática Educativa es importante porque tiene un sesgo cualitativo. En algunos casos, se recarga en la investigación-acción como una metodología, cuyo valor privilegia la mirada del profesor; sin embargo, cuando éste se inicia en la investigación presenta una serie de dificultades metodológicas en el campo de la matemática educativa. La afirmación es puramente empírica respecto a lo que se discute en este documento, al describir una encuesta aplicada a profesores que llevaron una maestría en Matemática Educativa.

Se pretende reflexionar sobre la problemática del profesor que se inicia en la investigación educativa, tomando como punto de partida la naturaleza del contenido de investigación. De manera general, las temáticas de investigación que abordaron los profesores de educación básica (primaria), con niños pequeños, en temas como la enseñanza del valor posicional; las características del sistema de numeración decimal y problemas de reparto y aditivos. Los proyectos de los profesores estudiantes de maestría con funciones técnico-pedagógicas fueron implementados por medio de talleres con temas de geometría, como la enseñanza de conceptos como perímetro y área, enseñanza de ángulos y triángulos donde utilizaron GeoGebra.

Los profesores de secundaria plantearon problemáticas de investigación en temáticas como: el estudio de la conservación de área en figuras geométricas, estudio de los significados de estudiantes en la operatividad de la multiplicación y división de fracciones desde un aspecto geométrico. Diseño didáctico para enseñar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en 1° de secundaria y desarrollo de la estimación en la resolución de problemas para el nivel de secundaria.

Los profesores de educación media superior conciben temas con cierta dificultad de enseñanza como sucesiones, eventos independientes y excluyentes de probabilidad, la operatividad de las literales en el lenguaje algebraico y fracciones, sistema de ecuaciones y temas de cálculo diferencial e integral como sólidos de revolución. Por otra parte, los profesores mencionan que algunos temas requieren mayor tiempo de planeación ya que son laboriosos; sin embargo, algunos reconocen en álgebra el problema de las variables porque el nivel de algunos alumnos está aún en un nivel de lenguaje aritmético. Otras temáticas abordadas son: el desarrollo del pensamiento estadístico mediante uso de gráficas, pensamiento algebraico, solución del sistema de ecuaciones de dos variables por métodos gráficos. Situación didáctica para la enseñanza de las funciones por el método de operatividad gráfica y usos de la variable para la enseñanza de la suma de polinomios.

Sin embargo, la mayoría de ellos reconocen el referente teórico metodológico de la investigación-acción. Se estipula como una metodología de investigación para el cambio en la educación, el cual se desarrolla desde la misma práctica (Elliot, 1993). Donde se pretende mejorar la práctica a través de su transformación, al mismo tiempo de comprenderla, con la participación de los sujetos en la mejora de sus propias prácticas. Esto exige una actuación grupal "en la que los sujetos implicados colaboran coordinadamente en todas las fases del proceso de investigación, conduce a la realización de un análisis crítico de las situaciones, es decir implica planificación, acción, observación, reflexión" (Bausela, 2004, p. 2).

Así, "la investigación-acción está orientada a transformar la práctica educativa, procurando una mejor comprensión de ésta que permita articular de manera permanente la investigación, la acción y la formación" (Latorre, 2003, p. 27). Esta metodología permite acercarse a la realidad vinculando el conocimiento y el cambio, además de ser protagonista en la investigación. Esta idea se traduce a que el estudiante (de maestría) reflexione sobre su propia práctica a partir de un distanciamiento necesario para poder interpretarla y de esta manera, comprenderla y transformarla.

2. Contexto de la aplicación del instrumento de investigación

Sujetos: profesores de educación primaria, secundaria y educación media, de escuelas públicas en el Estado de Tamaulipas, quienes cursaron la Maestría en Docencia de las Matemáticas en Educación en el Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa, campus Ciudad Victoria, Tamaulipas.

2.1 Descripción del instrumento

Para la recopilación de la información diseñamos un cuestionario elaborado en cinco secciones: 1) Información general, con el propósito de obtener información acerca del perfil de formación de los estudiantes y los años de experiencia laboral; 2) En la segunda parte del cuestionario recopilamos los conocimientos disciplinares y didácticos; 3) Procesos cognitivos, donde rescatamos los conocimientos de los profesores con respecto a los procesos de razonamiento que utilizan sus estudiantes; 4) Intervención en el aula, evaluación, con la finalidad de recopilar información de los elementos que consideraron los profesores al diseñar su estrategia de intervención en el aula, cómo la implementó y evaluó; y 5) Su experiencia en la investigación en educación.

3. Resultados

Se envió un cuestionario en línea (Google Forms) a profesores que llevaron a cabo los cursos de Diseño e Implementación de Proyectos de Innovación, que comprenden los niveles básicos y medio superior. Como información general, de un total de 28 profesores, 13 respondieron la encuesta.

3.1 Referente a la formación profesional

Encontramos diversos perfiles; normalistas, matemáticos, ingenieros, licenciados en contaduría y turismo, con una experiencia docente entre los 5 y los 30 años, Figura 1.

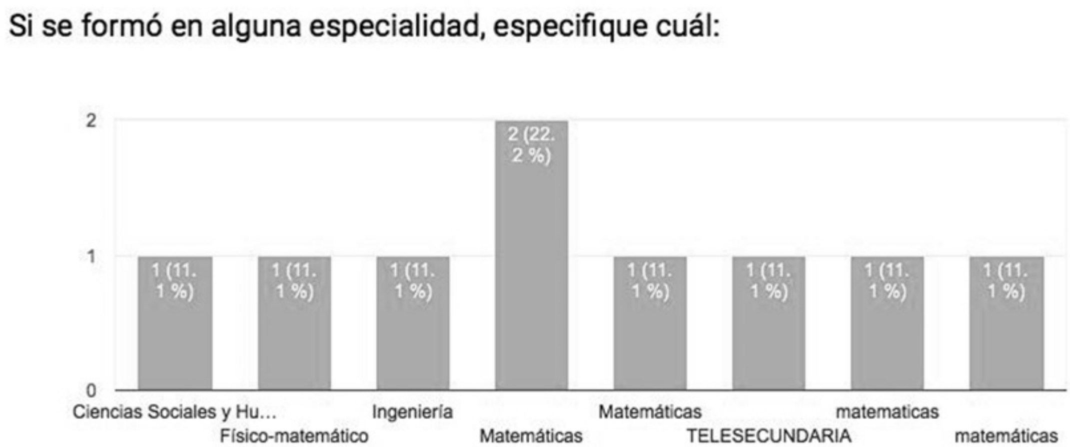


Figura 1. Gráficas obtenidas del perfil profesional de los profesores. Elaboración propia.

3.2 Conocimientos disciplinares de los profesores

Algunos de los recursos didácticos que emplean los profesores para sus clases son: uso de tecnología (cómputo, *software*, material de internet), programas de estudio, libros de texto. Pero, hay que considerar que no siempre cuentan con los recursos necesarios para ejercer su práctica de la mejor manera, por lo que les preguntamos: ¿cuáles son los aspectos que dependen directamente del profesor que podrían ser modificados en la enseñanza de las matemáticas? Los profesores responden:

1. Organizar los temas que requieren más sesiones.
2. Llevar a cabo una planeación didáctica sobre las estrategias, tiempo y uso de recursos (tecnología, material didáctico).
3. Preparar actividades de aplicación en contextos cotidianos de tipo lúdico.

También consideramos importante cuestionarlos acerca de qué aspectos están fuera del alcance del profesor en la enseñanza de las matemáticas. Se refirieron a cuestiones de interés por las matemáticas (motivación), así como factores emocionales y físicos de sus estudiantes. Asimismo, expresaron limitaciones en cuanto a la organización de los planes y programa de estudios, ya sea por su extensión o por la incertidumbre que genera la interpretación personal de cada uno de ellos, además mencionan la falta de tiempo para abordar adecuadamente ciertos temas. Otro factor mencionado fue la estructura deficiente de las instalaciones de las aulas donde desempeñan su labor docente. La Figura 2 lo ilustra de manera precisa:

¿Qué aspectos están fuera del alcance del profesor en la enseñanza de las matemáticas?

14 respuestas

Situaciones que se presentan con los alumnos

cuando uno no hace los programas, cuando te piden que utilices los libros y cuando hay otros que están mejor explicados.

El establecimiento de los contenidos

Planes y programas de estudio, tiempo (no sólo horario diario, sino también, el destinado para término de bimestre)

Tanto problemas emocionales como sociales del estudiante, como problenas fisicos que impidan la adquisición del conocimiento

El tiempo, el ausentismo del estudiante, la apatía de algunos jóvenes y lapoca o nula participación del padre de familia al no involucrarse en los avances de sus hijos.

Las condiciones del aula, la bibliográfica del libro de texto, mobiliario, la asistencia continua, la hora asignada para la clase de matemáticas, la contaminación del ruido exterior...

El apoyo por parte de los padres de familia.

El interes del alumno, la asistencia del mismo, factores internos y externos de la escuela, etc

Los planes y programas de estudio que están muy cargados y dejan poco tiempo a cada tema para su

Figura 2. Aspectos fuera del alcance del profesor. Elaboración propia.

3.3 Procesos cognitivos

Esta sección se refiere a cómo los profesores identifican los procesos cognitivos de sus estudiantes cuando imparten su clase. La respuestas a la pregunta: ¿cómo prevé lo que saben sus alumnos antes de abordar un contenido de matemáticas?, la mayoría responde: "por medio de exámenes diagnósticos, en los cuales se plantea un problema y una serie de preguntas que propician una lluvia de ideas.

Ante la pregunta: ¿cómo nota que sus alumnos están en el proceso de aprender un contenido matemático?, algunos mencionaron que se da en la interacción entre los estudiantes y el profesor; es decir, externando dudas y generando más preguntas, incluso cuestionando al profesor.

Respecto a la pregunta sobre ¿cómo los profesores apoyan a sus estudiantes respecto al uso de procedimientos y a la justificación de la solución de problemas?, algunos mencionaron que tratan de propiciar la discusión entre los estudiantes para que a través de argumentos, los alumnos expresen verbalmente los procedimientos de solución aplicados, ya sea en contextos matemáticos como no matemáticos, Figura 3.

¿Cómo dirige a sus alumnos para que al justificar la solución de los problemas matemáticos, hacia el uso de propiedades, teoremas o definiciones?

12 respuestas

En primer caso su explicación coloquial que lo oriente aún lenguaje matemático más formal para su explicación.

Proponer mediante su lenguaje común poco a poco incorporación del matemático

que explique con sus propias palabras lo que hizo y porque lo hizo después en plenaria se explica si se trata de algún teorema o definición para concluir

Con ejemplos o pistas

les explicó los procedimientos para solucionar un problema, y sobre que teoremas dan solución a un planteamiento, en que consiste el teorema y como se puede aplicar.

Les pido que argumenten sus respuestas, posteriormente escribo en el pizarrón lo que aporten y de ahí les pido que analicen los procedimientos y los dirijo hacia el enunciado de una propiedad o definición.

Mediante actividades con preguntas, para que vallan observando el comportamiento que se va teniendo y puedan llegar a una conclusión

Apegarse a los teoremas y utilizar vocabulario propio de ellos

Con mucha práctica. Haciendo preguntas pequeñas y buscando que el mismo logre dar con las respuestas a la pregunta principal.

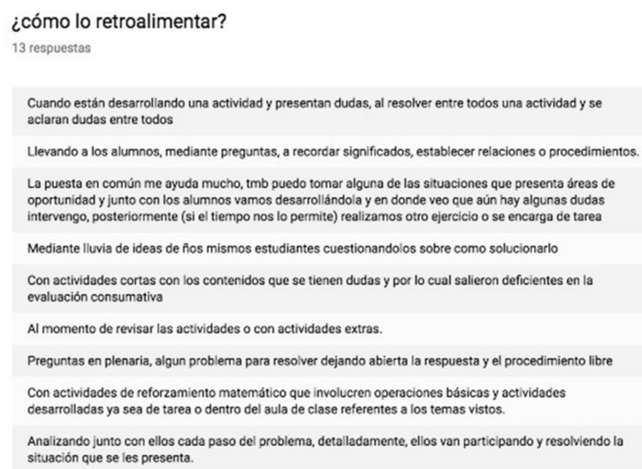
Figura 3. Justificación de resolución de problemas. Elaboración propia.

3.4 Planeación, intervención en el aula y evaluación

En la cuarta sección, respecto a planeación, intervención en el aula y evaluación, se generaron una serie de preguntas para conocer las decisiones de los profesores en su práctica y se presenta una selección de respuestas relevantes. ¿Qué elementos toma en cuenta al planear sus clases de matemáticas? Las soluciones fueron: examen diagnóstico (para identificar conocimientos previos), evaluaciones parciales cercanas a las competencias, diseño de secuencias didácticas, organización del tiempo, conocimientos, los planes de estudio y el entorno que rodea al alumno (propiciar ejercicios en su contexto).

En cuanto a cómo evalúan los profesores el aprendizaje de los alumnos, se encontraron respuestas como: mediante la participación, por medio de la realización de un proyecto, rúbricas, listas de cotejo y exámenes.

A partir de los resultados de las evaluaciones nos pareció pertinente cuestionarlos acerca de la retroalimentación de esos contenidos evaluados. ¿Cómo retroalimentan estos ejercicios? La mayoría responde que por medio de preguntas y problemas de tipo lúdico con más de una estrategia de solución. También mediante proyectos de su agrado relacionados al tema y resolver problemas extras. Ver Figura 4.


¿cómo lo retroalimentar?
13 respuestas

Cuando están desarrollando una actividad y presentan dudas, al resolver entre todos una actividad y se aclaran dudas entre todos

Llevando a los alumnos, mediante preguntas, a recordar significados, establecer relaciones o procedimientos.

La puesta en común me ayuda mucho, tmb puedo tomar alguna de las situaciones que presenta áreas de oportunidad y junto con los alumnos vamos desarrollándola y en donde veo que aún hay algunas dudas intervengo, posteriormente (si el tiempo nos lo permite) realizamos otro ejercicio o se encarga de tarea

Mediante lluvia de ideas de ños mismos estudiantes cuestionandolos sobre como solucionarlo

Con actividades cortas con los contenidos que se tienen dudas y por lo cual salieron deficientes en la evaluación consumativa

Al momento de revisar las actividades o con actividades extras.

Preguntas en plenaria, algun problema para resolver dejando abierta la respuesta y el procedimiento libre

Con actividades de reforzamiento matemático que involucren operaciones básicas y actividades desarrolladas ya sea de tarea o dentro del aula de clase referentes a los temas vistos.

Analizando junto con ellos cada paso del problema, detalladamente, ellos van participando y resolviendo la situación que se les presenta.

Figura 4. Retroalimentación de contenidos. Elaboración propia.

3.5 Su experiencia en la investigación

A continuación, describimos la sección de la experiencia que vivieron los profesores en su proceso de formación en el ámbito de la investigación, producto de los cursos de maestría. Las preguntas anteriores de alguna manera nos hacen ver un precedente profesional de las acciones que realizan los profesores en su práctica docente. La primera pregunta es: ¿qué cambios se aprecian en su proyecto de investigación? Entre las respuestas están: enfrentar problemas de aplicación y formas de evaluación, generar nuevas estrategias, y otras respuestas enfocadas en el tema que desarrollan en su proyecto de investigación.

Respecto a la pregunta: ¿qué dificultades enfrentó y cómo logró resolverlas? Las respuestas fueron variadas. Por ejemplo, de tipo metodológicas: no delimitar las actividades y el planteamiento de la secuencia didáctica a aplicar. También encontramos que los profesores se ven afectados por problemas institucionales. En ocasiones no se les prestan las instalaciones para aplicar su secuencia didáctica (condiciones materiales) y reciben poco apoyo de la planta docente de la escuela seleccionada para aplicar las actividades del proyecto de investigación. Las respuestas se muestran en la siguiente imagen.

¿Qué dificultades enfrentó y cómo logró resolverlas?

13 respuestas

Con preguntas generadoras o guiadas.

La insertidumbre de usar las grabaciones para ser exhibidos o por cuestiones de las evaluaciones del INEE

considero que mas falta de comunicación con nuestros asesores, ya que nuestro proyecto de investigación se esta llevando en linea y existen dudas y no se pueden aclarar, mas apoyo con nuestro centro regional, ya que no apoya en el proceso de la tesis, tanto asesores como los alumnos.

Al aplicarlas en un grupo de segundo grado, que traía un rezago muy notorio en más del 80% de los estudiantes, nos dimos cuenta que no eran factibles, posteriormente, buscamos otro grupo en otra escuela.

La apatia de agunos estudiantes y se logro convencer a participar a algunos proponiendolos a que participaran mas directamente, haciendolos responsables de alguna aplicacion de una actividad

La más dolosa que soy muy recurrente en cuanto a que no delimitó siertas actividades además de no ser muy preciso con lo que se pide realicen los estudiantes. Aún estoy en le proceso de resolverlo...

Actitud negativas hacia el aprendizaje del contenido

El planteamiento de la secuencia didáctica

Las dificultades fueron externas al proyecto. Me encontre con poco apoyo de mis autoridades para llevar a cabo mi trabajo. Se tiene un miedo al cambio, el hecho de innovar en la docencia muchas veces pone en manifiesto los fallos pasados y eso no les gusta.

Figura 5. Dificultades enfrentadas al implementa su proyecto de investigación. Elaboración propia.

Uno de los cuestionamientos que consideramos relevante es el siguiente: ¿cuáles fueron los cambios que pudo observar en su práctica docente después de su paso por la maestría? Figura 6.

Podemos decir que a partir de su proceso de formación en investigación, los profesores pudieron reconocer los factores y las dificultades, su manera de analizar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la implementación en el aula y los logros obtenidos con los estudiantes y profesores con quienes trabajaron, identificando diversas posibilidades de mejorar su desempeño en el ámbito laboral específico en el cual se desenvuelven, ya sea como profesores frente a grupo o con funciones técnico pedagógicas.

¿Cuáles fueron los cambios que pudo observar en su práctica docente después de su paso por la maestría?

14 respuestas

El proceso de análisis y el ajuste de aspectos pedagógicos en los métodos de enseñanza

Entender mejor que el aprendizaje y la enseñanza no es memorización y diactado, que implica un cúmulo de elementos desee la teoría ya evidenciada hasta los materiales y los recursos a implementar, no depende del profesor y alumno únicamente.

trato de enseñar a partir de sus errores eso cambio.

Cómo A.T.P. observas más de manera investigativa y te permite comprender errores pedagógicos a los que se llega con la práctica docente

aplicar mas el software, partir de una mera diferente sobre un tema que no me había funcionado.

Me intereso más por los procesos y procedimientos que presentan mis alumnos que en el resultado, considerando también la importancia de éste. Trato de prepararme y tener un mayor dominio de los temas y contenidos, dando relevancia al proceso y evaluación al abordarlos.

Mayor cuidado al realizar la planeación didáctica, empleo de un lenguaje matemático más amplio, curiosidad por investigar, enseñar a mis alumnos a aprender de sus errores, que ahora llamo áreas de oportunidad, entre muchas otras

Una forma distinta de apreciar los contenidos y a la vez enfocarme mas en el aprendizaje del estudiante sabiendo los errores comunes en los que llegan a caer

Figura 6. Transformación de la práctica. Elaboración propia.

Respecto a la pregunta: ¿qué enseñanza personal, le deja la reflexión profunda de su propia práctica? Podemos ver que hubo repercusiones favorables que les permitieron renovar su práctica y sus expectativas de acuerdo al rol desempeñado. Ver Figura 7.

¿Qué enseñanza personal, le deja la reflexión profunda de su propia práctica?

13 respuestas

cambiar la forma de abordar los contenidos, buscar otra manera de como darme a explicar a los alumnos y lograr un mejor entendimiento.

Que todo puede mejorarse y es necesario darle importancia a cada parte del proceso, viéndolo como un todo integrado.

Deseo de mejorarla día con día

Se requiere poner mayor atencion a los detalles algo que como docentes dejamos por fuera y suponemos que es obvio para los estudiantes, pero no lo es del todo cierto

Que tenemos una gran responsabilidad con los estudiantes en darles a conocer los contenidos de las matemáticas de una manera mas amigable y las ejerciten de manera autónoma y de manera colegiada

Que aún puedo mejorar y que siempre hay algo nuevo que se puede poner en práctica para la enseñanza de algún contenido.

Me ayudo a entender la forma de pensar y expresarse de mis alumnos. Me ha ayudado a ayudarles a aprender matematicas. Utilizar sus propios limites y recursos para aprender.

Como dicen...."sé para tus alumnos el maestro que quieres para tus hijos"

Me deja claro que estoy en donde debo estar por el momento, disfrutando de mi hermosa profesión.

Figura 7. Reflexión profunda de su práctica. Elaboración propia.

Podemos apreciar que los profesores cambiaron la forma de abordar los contenidos. La responsabilidad de proporcionar a los estudiantes nuevas formas de abordar los contenidos de las matemáticas de una manera más amigable, que les den las condiciones para aprenderlas de manera autónoma. De acuerdo con Santos-Trigo (1996) "para llegar a la solución de un problema es solamente el inicio de una actividad que debe incluir buscar otras formas de hacerlo y establecer conexiones entre ellas" (p. 535).

Los profesores mencionan también que la investigación les ayudó a entender sus propios procesos de razonamiento y cómo expresar sus argumentos con el lenguaje matemático apropiadamente, lo cual confluye con lo que menciona Santos-Trigo (1997), "la actividad de reformular o diseñar problemas puede ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades y estrategias que les permitan cuestionar la información desde diversos ángulos y, como consecuencia, ubicar los procesos de solución en marcos matemáticos más generales" (p. 12).

¿Cuáles fueron los cambios que pudo observar en su práctica docente después de su paso por la maestría?

14 respuestas

Entender mejor que el aprendizaje y la enseñanza no es memorización y diactado, que implica un cúmulo de elementos desee la teoría ya evidenciada hasta los materiales y los recursos a implementar, no depende del profesor y alumno únicamente.

trato de enseñar a partir de sus errores eso cambio.

Cómo A.T.P. observas más de manera investigativa y te permite comprender errores pedagógicos a los que se llega con la práctica docente

aplicar mas el software, partir de una mera diferente sobre un tema que no me había funcionado.

Me intereso más por los procesos y procedimientos que presentan mis alumnos que en el resultado, considerando también la importancia de éste. Trato de prepararme y tener un mayor dominio de los temas y contenidos, dando relevancia al proceso y evaluación al abordarlos.

Mayor cuidado al realizar la planeación didáctica, empleo de un lenguaje matemático más amplio, curiosidad por investigar, enseñar a mis alumnos a aprender de sus errores, que ahora llamo áreas de oportunidad, entre muchas otras

Una forma distinta de apreciar los contenidos y a la vez enfocarme mas en el aprendizaje del estudiante sabiendo los errores comunes en los que llegan a caer

Las actividades que se les entrega para que trabajen están más precisas y acotadas a los objetivos y a los

Figura 8. Cambios cualitativos. Elaboración propia.

Respecto a los cambios observados en su propia práctica después de haber cursado la maestría, los profesores mencionaron aspectos relevantes, Figura 8.

Respecto a la pregunta: ¿qué significó para usted reflexionar desde sus propias experiencias con base en reinterpretaciones teóricas y metodológicas de su práctica docente?

Entre las respuestas se encuentra una nueva visión del rol como profesor, reconocer las necesidades de aprendizaje de los alumnos y contribuir a fortalecer el currículum, consideraciones que para Stenhouse (1984) son relevantes. La siguiente pregunta que se presenta en la Figura 9, muestra cómo la investigación permitió a los profesores obtener una visión general de la matemática educativa. Las respuestas se refirieron al trabajo con estudiantes, teniendo entendido el fundamento teórico.

En el reconocimiento de la práctica docente como objeto privilegiado de conocimiento, ¿qué elementos teórico analíticos y metodológico instrumentales diseñó y cómo los implementó en su proyecto de investigación?

10 respuestas

Encontré poca lectura que fuera de investigaciones como mi enfoque, tome las que más de adecuarán en mi trabajo

cuestionarios para profesores y alumnos y situaciones de aprendizajes.

No sé cómo contestar esta pregunta

A base de una secuencia didactica se trataron 5 tareas para inducir a que el estudiante por si mismo llegara a una conclusion acertada

Solo formule y aplique una actividad en dos sesiones que llevara a los estudiantes a demostrar que no existe una sola manera de representar un mismo objeto matemático.

El uso de material didáctico para la enseñanza de operaciones algebraicas. Utilizándose la teoría de registros de representación que reformuló Palarea y Socaa en varias investigaciones.

Diseñe un proyecto de intervencion para enseñar la nocion de volumen usando los elementos que no dependen de nadie mas que el alumno, como la percepción, observacion, comparacion, medicion con parametros no convencionales. Con instrumentos lúdicos de uso diario, que dejan ver el dominio real de los conocimientos del alumno pues ayuda a que el se exprese en sus propios terminos como es que percibe cierto objeto matematico.

Figura 9. Diseño de instrumentos metodológicos. Elaboración propia.

Se puede observar que la mayoría se refirió a los instrumentos para obtener los datos, los cuales fueron: cuestionario, secuencia didáctica, aplicación de actividades y diseño de proyectos. Algunos consideran que el funcionamiento adecuado de estos elementos depende sólo de los estudiantes, lo cual les proporciona una visión parcial de sus herramientas metodológicas. Los resultados que se obtienen al implementar secuencias de aprendizaje o talleres, dependen de múltiples factores, desde su diseño, el uso de materiales adecuados y los incidentes durante su aplicación, ya que tienen que ver con la metodología en investigación matemática de acuerdo a lo planteado por Santos-Trigo (1996), quien recomienda para desarrollar una metodología ligada a la problemática de la investigación, una atención cuidadosa a la instrucción, que ofrezca a los estudiantes la oportunidad de explicar o justificar, matemáticamente, el uso de ciertos recursos y estrategias, además de contrastar y comunicar en forma oral y escrita los procesos utilizados.

3.6 Reflexión de resultados

En los resultados sobresale la importancia de documentar el tipo de recursos matemáticos empleados durante las fases de selección e implementación de estrategias de sus proyectos de investigación, así como las transformaciones en la percepción de la práctica de los profesores después de su paso por la maestría, analizando cómo los profesores advirtieron los cambios en su práctica cotidiana.

En la implementación de los problemas matemáticos diseñados, los profesores enfrentan diversas dificultades, si bien plantean situaciones problemáticas, también se excedieron en el número de problemas, esto provocó dispersión en la temática de investigación. Otra dificultad enfrentada por algunos profesores fue la falta de claridad de su problemática a investigar, así como la manera de implementarlas y evaluarlas. De esta manera se requiere mirar a la investigación-acción como una de las formas que constituyen un acercamiento de los profesores a la práctica de ésta, situándose en el centro de su reflexión, de tipo cualitativo. La investigación-acción está orientada a transformar la práctica educativa, procurando una mejor comprensión de dicha práctica, que permita articular de manera permanente con la formación; acercarse a la realidad vinculando el conocimiento y el cambio, además de ser protagonista de la investigación. Sin embargo, la consideración de cómo el conocimiento se construye o debe enseñarse puede marcar un debate en el análisis de la práctica docente. Por ejemplo, una idea se traduce a que el estudiante reflexione sobre su propia práctica a partir de un distanciamiento necesario para poder interpretarla y de esta manera, comprenderla y transformarla. Sin embargo, según la experiencia en la docencia de estos posgrados, otra idea por la que optan los profesores es la investigación-acción adaptada al campo de la matemática educativa, donde adquiere ciertas características de rigor metodológico y que se distingue de la metodología de otro tipo de temáticas educativas que no sean de ciencias exactas precisamente, pues abarca un marco teórico e instrumentos y categorías de análisis (Shulman, 1989).

4. Conclusiones

En conclusión, podemos decir, con base en la información proporcionada por las respuestas de los profesores al cuestionario, que es importante implementar nuevas formas de ver el aprendizaje alejado de la memorización, desarrollar mejores planeaciones, explicaciones y cambios respecto a la búsqueda de mejores estrategias de enseñanza de los contenidos.

Un dato interesante es que algunos profesores de educación media superior (40%) tienen un nivel bajo de habilidad didáctica en cuanto al tema de razonamiento estadístico y probabilístico, posiblemente debido a que es uno de los últimos temas del programa.

Por otra parte, algo relevante que nos deja la descripción de las respuestas es la necesidad de orientar las investigaciones en matemática educativa, para que exista un equilibrio entre el rigor teórico y la claridad de su uso permitiendo reflexionar y transformar su desarrollo profesional docente. Este puede ser desde el mismo análisis curricular, diseño de problemas, métodos de enseñanza e instrumentos que les permitan, en cierta forma, evaluar el desarrollo de su investigación desde su práctica. Consideramos que es válido analizar la práctica de otros profesores con elementos teóricos que les permita implementarlos y reflexionar junto con el profesor, el desarrollo profesional docente.

Las consideraciones metodológicas en el ámbito de la matemática educativa, nos permiten darnos cuenta de que podemos implementar alternativas en la medida en que podamos reconocer las dificultades que enfrentaron los profesores al implementar sus proyectos de intervención, así como la estrecha relación que guardan sus conocimientos disciplinares con los didácticos, los que sin duda determinan el logro de los objetivos planteados en su proyecto de intervención (Schoenfeld, 1992).

Agradecimiento

Agradecemos al CRETAM, Centro Regional de Formación Docente, de Ciudad Victoria Tamaulipas por la invitación a colaborar en la impartición de los cursos Diseño e implementación de proyectos de innovación educativa en la maestría en Didáctica de las matemáticas en Educación.

5. Referencias

Bausela, H. E. (2004). La docencia a través de la investigación-acción. *Revista Iberoamericana de Educación*, *35*(1), 1-9. https://doi.org/10.35362/rie3512871

Elliot, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Morata.

Latorre, A. (2003). *Investigación acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. Graó.

Santos-Trigo, L.M. (1996). Consideraciones metodológicas en la investigación en educación matemática. *Revista Latinoamericana de Psicología*, *28* (3), 533-549.

Santos-Trigo, L.M. (1997) La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *2*(3), 11-30.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics*. http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF

Shulman, L.S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En Wittrock, M.C. (Ed.). *Paradigmas y programas de investigación en el estudio de enseñanza: una perspectiva contemporánea* (pp. 9-91). Paidós.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículo*. Morata.

CAPÍTULO 11. NEOTRIE VR, REALIDAD VIRTUAL INMERSIVA PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA 3D

Antonio Codina Sánchez, acodina@ual.es
José Luis Rodríguez Blancas, jlrodri@ual.es
Carmen-Santos Morales Rodríguez, cmr373@inlumine.ual.es
Universidad de Almería, España

Resumen

La tecnología y en particular los *softwares* de geometría dinámica han evolucionado enormemente en los últimos 30 años. En este capítulo realizamos un paseo por dicha evolución, describimos NeoTrie VR, uno de los *softwares* más avanzados en geometría dinámica 3D de realidad virtual inmersiva y recogemos tres experiencias de aula con estudiantes de primaria, secundaria y de formación inicial de profesores que muestran la aparición de experiencias de flujo y el poder motivacional del *software*, la utilización de recursos propios sin equivalente en el mundo físico, o la posibilidad de abordar contenidos extracurriculares.

1. Introducción

Estamos ante una sociedad tecnológica en donde los investigadores de todas las ramas científicas que están trabajando en la influencia de las tecnologías desde múltiples ópticas, particularmente en educación. A este respecto, la comunidad de educadores matemáticos no ha sido ajena a ello, distinguiéndose cuatro periodos con frontera difusa en la investigación que involucra tecnología y Educación Matemática.

Primer Periodo (1968-1985). Con la aparición de los primeros ordenadores, programas informáticos y calculadoras, los científicos conjeturan sobre los posibles beneficios atribuibles a las tecnologías cuando son puestas en juego en el ámbito educacional. En ese periodo los costes de dichas tecnologías hacían inviable realizar suficientes experiencias en las aulas para obtener resultados aplicados.

Segundo Periodo (1985-1999). La Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI), en 1985, realizó un primer estudio acerca de la influencia de la tecnología en la Educación Matemática, para así orientar las investigaciones futuras. Es en este periodo, cuando los investigadores empiezan a considerar la tesis que sostiene que la tecnología es un motor para el cambio en la manera de aprender, hacer y enseñar matemática (Cornu y Radson, 1992; Fey, 1993). Así, las investigaciones empezaron a centrarse en torno a cuatro ejes o líneas de indagación: a) el estudio del potencial de la tecnología digital en la adquisición de conocimiento matemático a partir de la resolución de problemas reales; b) el diseño de nuevos recursos o entornos tecnológicos; c) la integración en los currículos; y d) el análisis del rigor científico en los trabajos que indagan acerca de los efectos de las tecnologías digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Balacheff y Kaput, 1996; Healy *et al.*, 1994; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Artigue, 2011; Clements, 2013; Perks *et al.*, 2002).

Tercer Periodo (2000-2010). La incorporación masiva de tecnología en los hogares y escuelas, el tránsito de la Web 1.0 a la Web 2.0, y de ésta a la Web Semántica, provocó "la revolución relacional" donde:

> [...] el valor real de los medios no reside tanto en la información que conllevan sino en las posibilidades de creación de comunidades [...] Las investigaciones comienzan a mostrar interés en las posibilidades de la interactividad de los medios, y de interacción, comunicación e intercambio de información entre humanos, entre humanos y sistemas tecnológicos, y entre sistemas tecnológicos en sí (Codina, 2015, p. 17).

Así y sin abandonar las premisas de periodos anteriores, se indaga acerca del "papel de las tecnologías como mediadores en la construcción del conocimiento compartido (trabajo colaborativo) presencial y on-line" (Codina, 2015, p. 17). De esta manera el diseño de entornos web, entornos de aprendizaje digitales, y/o materiales y actividades, así como el análisis e indagación en los procesos interactivos que acontecen en la dialéctica bidireccional entre sujeto/s y medio/s digitales, están en el centro de las investigaciones (Codina, 2015).

Además, el incremento de los trabajos relacionados con tecnología propició que el ICMI llevara a cabo un segundo estudio, el cual partió de un documento de discusión con 41 preguntas abiertas que están aún marcando la agenda de investigación actual (Hoyles y Lagrange, 2008, 2010; Gadanidis, 2008). Sin ser exhaustivo, se solicita indagar en el diseño de entornos tecnológicos para capturar los momentos significativos del aprendizaje, dónde el término "capturar" se interpreta: "[...] cómo la tecnología puede ser catalizador para que sucedan momentos significativos de aprendizaje" (Drijvers *et al*., 2010, p. 85), e identificar el tipo de actividades matemáticas que pueden potenciar las tecnologías, así como diseñar experiencias que permitan aprovechar dichas potencialidades. En este sentido, Fischer *et al*. (2013) sostienen que hay que indagar en las formas de integrar los medios digitales de tal forma que permitan enfrentar a los estudiantes a situaciones en las que por un lado se potencie el aprendizaje colaborativo, y por el otro, les permita descubrir, probar, revisar y/o refinar formas alternativas de pensamiento para identificar ideas y/o procesos esenciales en la apropiación de conocimiento matemático.

En ese periodo se promueve el diseño de entornos con un alto nivel de interactividad y diferentes modalidades de interacción, de tal forma que facilite el desarrollo de la propia actividad matemática, y el consiguiente aprendizaje a través de la interactividad e interacción del estudiante o de estudiantes con la tecnología (Codina, 2015). Ejemplo de ello son los desarrollos e investigaciones asociadas a repositorios de manipuladores virtuales interactivos como https://illuminations.NCTM.org (National Council of Teachers of Mathematics); http://nlvm.usu.edu/ (National Library of Virtual Manipulatives) o https://www.mathlearningcenter.org/ (The Math Learning Center).

Cuarto Periodo (2011-2015). Durante este periodo se investiga sobre las "relaciones-efectos" educativos derivados de la formación en línea como el *e-Learning*, el *b-Learning* (*blended learning*), el *m-Learning* (*mobile learning*) y los MOOC (*Massive Open Online Course*) y la formación en redes informales.

Existe actualmente un cuerpo considerable de información relacionada con la formación en línea; sin embargo, la crisis sanitaria actual provocada por el COVID-19, desde el 16 de marzo de 2020 nos obliga a ser prudentes y a revisar los hallazgos pasados, e intuimos dos líneas que se desarrollarán con cierta intensidad en los próximos años. La primera aborda el potencial del *m-learning* y las redes informales de conocimiento como Facebook, Twitter, WhatsApp, etc., y la segunda relaciona la enseñanza en línea y el surgimiento de micro-comunidades de aprendizaje en interacción. Respecto de la primera, estas redes pueden potenciar las capacidades de reflexión y metabúsqueda, creando estructuras cognitivas más fuertes en los estudiantes (Álvarez-Bermejo *et al.*, 2015). En cuanto a la segunda, las interacciones colaborativas en ambientes en línea permiten establecer puntos de unión entre diferentes Espacios de Trabajo Matemáticos [ETM][1] personales, promoviendo diferentes génesis entre los planos cognitivos y epistemológicos (Gómez-Chacón y Kuzniak, 2013), así como la "creación" de un ETM Grupal socialmente construido que integra elementos epistemológicos y cognitivos de los estudiantes y de las diferentes génesis de éstos (Codina y Romero, 2016).

¿*Quinto periodo?* (2015 en adelante). Las agendas de investigación de los periodos previos no están desfasadas, pero los recientes avances tecnológicos en representación 3D están propiciando el diseño y creación de *softwares* específicos para la representación matemática 3D como los *Softwares* de Geometría Dinámica 3D (SGD-3D) Cabri3D y GeoGebra 3D. Los SGD-3D están mayoritariamente basados en una "extensión" del mundo plano, y su uso está abriendo nuevos territorios para la exploración educativa, especialmente en modelización, sentido espacial y geometría.

Los primeros resultados señalan que su uso mejora en los estudiantes sus habilidades de razonamiento, el sentido espacial o producen un discurso más coherente en relación con los argumentos y razonamientos puestos en juego cuando utilizan dispositivos táctiles para la exploración dinámica (Güven y Kosa, 2008; Hartaiana *et al.*, 2018).

Paralelamente, la investigación en el ámbito educativo está incorporando el uso de tecnologías emergentes como la Realidad Aumentada o la Realidad Virtual Inmersiva (RVI)[2] (Radianti *et al.*, 2020). Entendemos la RVI como el "dominio científico y técnico que utiliza la informática y las interfaces de comportamientos para simular en un mundo virtual comportamientos de entidades tridimensionales, que interactúan en una inmersión pseudo-natural en tiempo real entre sí y con uno o más usuarios a través de canales sensoriomotores" (Fuchs y Guitton, 2011, p. 7).

En el campo de las matemáticas, han surgido recientemente varios *softwares* que combinan la RVI y la Geometría Dinámica 3D como CalcFlow, GeoGebra MR, o NeoTrie VR. En estos entornos, la interacción se realiza a través de la comunicación de ideas visuales, dinámicas, verbales o gestuales y, por tanto, los recursos semióticos puestos en juego son fundamentales para el adecuado intercambio de información en interacción (Morales, 2019; Morales y Codina, 2020; Rodríguez *et al.*, 2021).

Al igual que con los SGD 3D, las primeras experiencias con SGD 3D RVI apuntan a que los estudiantes mejoran sus actitudes, motivación y habilidades espaciales para la identificación y comprensión de las principales características de los sólidos geométricos, facilitando el manteni-

1. Según Kuzniak (2019, p. 48), el ETM es "un espacio abstracto que permite la organización y distribución de estos diversos elementos del trabajo matemático", dónde por Trabajo Matemático se considera al conjunto sintáctico y semántico que combina trabajo (actividades humanas organizadas para alcanzar unos objetivos) y matemáticas (propósito de dicho trabajo, donde las matemáticas son consideradas como una obra humana construida socialmente).

2. El concepto de Realidad Virtual es utilizado con distintos significados. Una discusión acerca del término y sus modalidades puede consultarse también a Derks (2020).

miento de las estructuras tridimensionales a nivel cognitivo mientras se produce la interacción con el entorno virtual, siendo más significativa en estudiantes con baja capacidad espacial (Hwang y Hu, 2013; Demitriadou *et al.*, 2020; Morales, 2019; Rodríguez *et al.*, 2021). Entre las principales razones que explican esta mejora están las relacionadas con el uso de la habilidad cognitiva kinestésica puesto que: "[...] los usuarios pueden construir objetos matemáticos a través de iteraciones basadas en gestos" (Dimmel y Bock, 2017, p. 323). De esta forma, los estudiantes pueden usar sus manos virtuales para actuar directamente sobre objetos matemáticos, sin la necesidad de mediar intuiciones a través de ecuaciones, sistemas de símbolos, teclados o clics del ratón" (Dimmel y Bock, 2017, p. 325). Así pues, se intuye que al poder los estudiantes construir, observar, manipular, e interactuar dinámicamente con objetos 3D virtuales, mejorarán en su comprensión de la estereometría, de las propiedades topológicas, y de la visualización 3D (Cangas *et al.*, 2019; Rodríguez *et al.*, 2021). Todo apunta a que los SGD 3D RVI están abriendo un campo casi inexplorado en Educación Matemática. A continuación, introducimos uno de los *softwares* en los que participamos activamente y una muestra de actividades que se pueden llevar a cabo con el mismo.

2. El entorno NeoTrie VR

NeoTrie VR es un SGD 3D RVI desarrollado desde 2017 por la *spin-off* Virtual Dor de la Universidad de Almería, en el que participa un equipo multidisciplinar que integra matemáticos, programadores, especialistas en Educación Matemática, y docentes de varios países europeos.

El *software* puede descargarse desde la web http://www2.ual.es/neotrie. El hardware requerido es un equipo de realidad virtual (como HTC Vive, Oculus Rift S, Valve Index, Windows MR) conectado a un ordenador con tarjeta gráfica potente, típica de videojuegos. Dichos sistemas VR incluyen sensores de posicionamiento y controladores con los que el usuario interactúa con el mundo virtual.

La principal característica de NeoTrie VR, que lo destaca de otros *softwares* similares, es la de poder crear y manipular figuras geométricas directamente con las manos virtuales. Entre las acciones básicas que se pueden ejecutar con los controladores (que el usuario ve como manos virtuales) están la creación de figuras con vértices, aristas y caras, el poder modificar la posición de éstas, eliminarlas y desplazarlas rígidamente por el espacio. También se puede invocar figuras a través de comandos de voz, por ejemplo, diciendo "cubo" (por defecto sin caras) o "cubo con caras", "cilindro", etc. Por otro lado, el entorno dispone de una mesa con las herramientas habituales de los SGD, un pincel y una paleta para colorear, un sello para copiar, un borrador para eliminar figuras enteras, un transportador, una cinta métrica, o herramientas de creación como punto medio, paralelas, perpendiculares, intersección, deslizadores, entre otras (Figura 1).

Figura 1. Usuario sujetando un cilindro junto a la mesa de herramientas. Elaboración propia.

Al igual que los SGD conocidos, NeoTrie VR dispone de herramientas que permiten el diseño y el trabajo con actividades para descubrir, probar, revisar, refinar y rechazar formas alternativas de pensamiento, todas con un carácter dinámico a través, por ejemplo, de un deslizador con control de velocidad, herramientas de giro y reflexión de figuras, un escáner o un sistema de planos para visualizar la planta, el perfil y el alzado de los objetos (Figura 2).

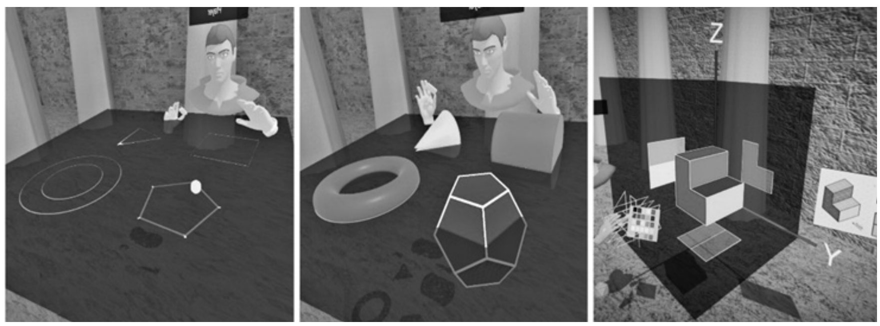


Figura 2. Escáner de objetos y proyecciones en planos ortogonales. Elaboración propia.

A continuación, mostramos brevemente algunas de las posibilidades que nos permite este *software*:
a) Visualizar y explorar las figuras "entrando" o "volando" sobre ellas, "arrastrando o estirando dinámicamente" sus elementos (Figura 3).

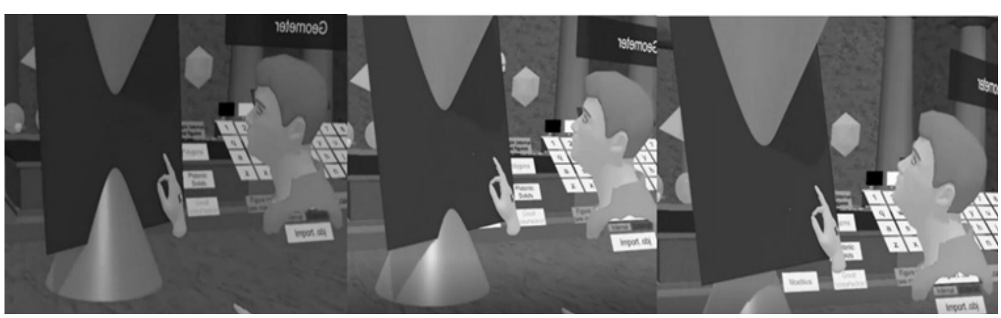


Figura 3. Secciones cónicas por arrastre dinámico de un plano. Elaboración propia.

b) Construir figuras por extrusión. En la figura 4, una vez seleccionada la acción de "extrusión", se estira dinámicamente una cara para obtener un prisma oblicuo o recto, según se desee. También permite extrusión puntual para obtener pirámides.

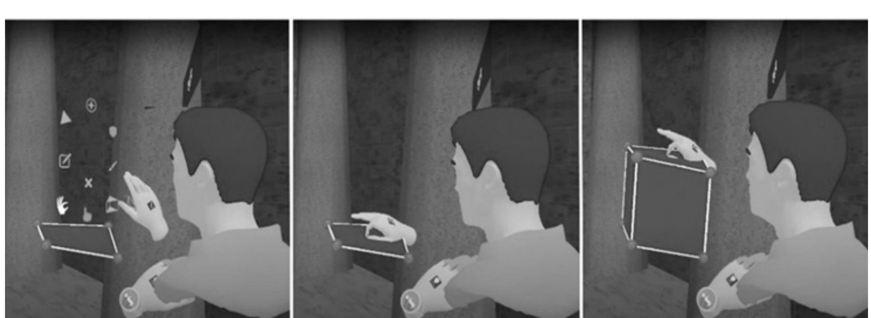


Figura 4. Extrusión de una cara para obtener un prisma. Elaboración propia.

c) Representar gráficos 3D dados por ecuaciones paramétricas (curvas y superficies) por medio de una calculadora gráfica 3D. Una vez creadas las figuras son tratadas como cualquier otra construcción, pudiendo variar los parámetros dinámicamente, o usar las herramientas de geometría dinámica estándar para experimentar (Figura 5).

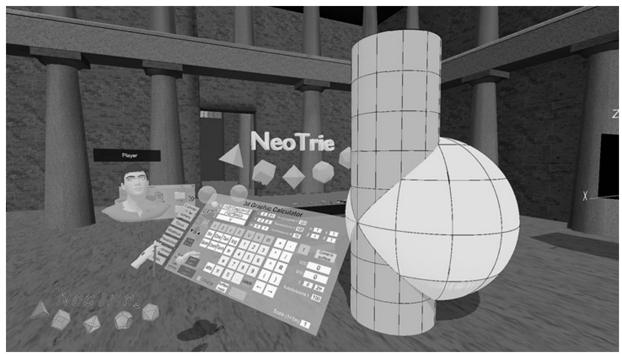


Figura 5. Calculadora gráfica 3D, y la curva de Viviani como intersección de una esfera y un cilindro. Elaboración propia. (Véanse más usos de la calculadora en Rodríguez, 2022).

d) Explorar conceptos y contenidos no incluidos en los currículos como los fractales tridimensionales o teselaciones 3D (véase experiencia 2).

e) Trabajar la extensión de propiedades y construcciones del plano al espacio (Figura 6).

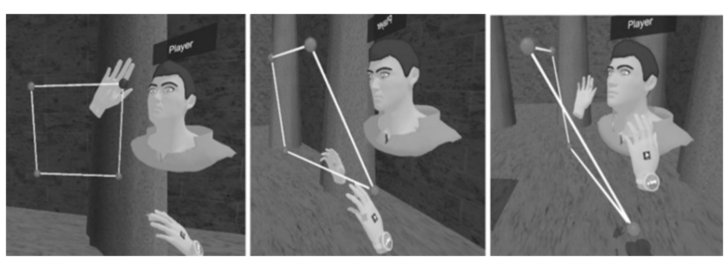


Figura 6. Construcción errónea del cuadrado en 3D. En el espacio, puede perderse la coplanaridad de 4 vértices. Elaboración propia.

3. Experiencias con NeoTrie vr

En lo que sigue, recogemos tres[3] experiencias reales en el aula que reflejan el potencial del *software*: una con estudiantes de primaria, otra con estudiantes de secundaria y una tercera con profesores en formación inicial. En todas las experimentaciones, los estudiantes han trabajado en grupos de 4 sujetos, siendo las sesiones videograbadas para su posterior análisis por el equipo de investigación. Debido a la situación de pandemia, no hemos podido seguir desarrollando las experiencias y, por tanto, los hallazgos deben considerarse incipientes, necesitando ser revisados con más exploraciones.

3. En la web http://www2.ual.es/neotrie/ se ofrecen numerosos ejemplos y algunas actividades que se están poniendo en práctica con estudiantes de diversos niveles educativos.

La primera experiencia (Morales y Codina, 2020) fue llevada a cabo bajo el paradigma de la investigación de diseño en ciclos. Se desarrolló con 16 estudiantes de 4º de primaria de un colegio público de España (9-10 años) trabajando una secuencia de aprendizaje relacionada con poliedros básicos durante 6 sesiones de 90 minutos. El objetivo curricular fue el reconocimiento de los poliedros y sus elementos básicos, mientras que el objetivo de investigación fue analizar el comportamiento cognitivo-metacognitivo y la interacción social producida entre los componentes de los grupos. Como ejemplo de actividad se pidió a los estudiantes nombrar un "cubo con caras" o "hexaedro con caras" en voz alta, colorear las caras, agrandar el cubo y entrar en él. A continuación, debían buscar y clasificar los cuerpos geométricos de una escena, previamente preparada, metiéndolos en dos cajas, una llamada "poliedros" y la otra "no poliedros".

Los hallazgos preliminares muestran que NeoTrie VR aporta una motivación excelente en los estudiantes, especialmente en aquellos con ritmos y necesidades diversas, animándolos a implicarse más en la resolución de las tareas. Además, permite al docente trabajar competencias sociales (trabajo en equipo, respeto a las opiniones, etc.); mejora en los estudiantes el sentido y orientación espacial y específicamente el reconocimiento e identificación de las figuras y sus elementos clave (vértices, caras y aristas); fomenta la aparición de acciones de control relevantes para el desarrollo de las actividades (existencia de vaivenes recurrentes entre los episodios de lectura-control-planificación-control, etc.), es decir, la interacción con NeoTrie VR parece influir para que las acciones metacognitivas sean más relevantes en la obtención de mejores resultados, especialmente en estudiantes con rendimiento bajo en matemáticas, pero en cambio, el trabajo en grupo no parece haber potenciado una interacción social rica en grupos con aptitudes sociales iniciales bajas.

En la segunda experiencia (Chavil *et al.*, 2019) llevada a cabo bajo la investigación descriptiva, participaron 16 estudiantes de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (12-13 años) explorando actividades de un contenido extracurricular, los fractales, durante 5 sesiones de 60 minutos. El objetivo fue detectar la existencia de motivación intrínseca vinculada a la experiencia de flujo derivada de las actividades desarrolladas, y explorar los procesos de aprendizaje desarrollados por los estudiantes utilizando NeoTrie VR. En una de las actividades, se pedía construir la alfombra y el tetraedro de Sierpinski, y también la esponja de Menger. En cada caso, debían buscar información en ambientes de aprendizaje informal. A continuación, debían establecer el patrón de recursividad, encontrar la estrategia de construcción, llevarla a cabo con las herramientas de NeoTrie VR, y finalmente valorar el método aplicado de construcción.

Entre los hallazgos preliminares, encontraron que el uso de NeoTrie VR y de entornos de aprendizaje informales motivó a los estudiantes y facilitó la construcción de los fractales incidiendo en la asimilación de la noción de fractal. Se detectó la concentración y el disfrute acorde con la existencia de una experiencia de flujo; También se detectó el uso de pensamiento estructural, es decir, evolucionan a partir de "pegar" uno a uno los triángulos o tetraedros para formar las primeras iteraciones del fractal, a pegar bloques recursivos, reflejando la identificación de una de las características principales de los mismos. Por otro lado, se detectaron dificultades para establecer consensos entre los estudiantes en la estrategia antes y durante la construcción de los fractales. La construcción de la esponja de Menger fue sensiblemente más difícil tal y como detallan los autores.

Por último, en la tercera experiencia (Martín, 2019) llevada a cabo bajo la investigación descriptiva, participaron 12 maestros en formación inicial de 20 y 21 años, resolviendo actividades de contenido geométrico 3D durante 4 sesiones de 90 minutos. El objetivo fue identificar el comportamiento puesto en juego cuando utilizaban NeoTrie VR. Por ejemplo, en una de las actividades, se les pedía insertar un octaedro dentro de un tetraedro ocupando el máximo volumen posible. Se les preguntaba también si coincidían algunos puntos característicos entre las dos figuras.

Aunque los estudiantes fueron capaces de interpretar adecuadamente los enunciados, tuvieron serias dificultades para trasladar la información expresada en los enunciados proporcionados en papel (2D) al ambiente tridimensional; se detectó un abuso de la exploración errática sin una planificación adecuada, lo que les condujo a la manipulación de las figuras sin aparente intención; entre los recursos más utilizados destaca la acción del "vuelo" para cambiar de punto de vista de las figuras; los estudiantes, aun habiendo obtenido conocimiento y/o respuestas adecuadas, sintieron la necesidad de corroborarlas, bien volviendo a leer el enunciado, o bien revisando la construcción.

4. Conclusiones

Todo apunta a que en los próximos años estaremos inmersos en una nueva realidad educativa, donde la formación en línea y el uso de recursos tecnológicos como la realidad aumentada o la realidad virtual estarán en el centro de atención de educadores e investigadores. En este trabajo mostramos los primeros hallazgos de experiencias de aula utilizando RVI con NeoTrie VR, en tres niveles educativos, primaria, secundaria y universitaria.

Aunque en estado incipiente, las experiencias parecen mostrar el alto poder motivacional de la RVI en los estudiantes, ofreciéndoles un recurso que les permite una exploración más libre en un ambiente simulado tridimensional. Se detecta la existencia de experiencias de flujo que a su vez parecen potenciar la comunicación entre los componentes de los grupos, siendo mayor en estudiantes con menor competencia en geometría.

Por otro lado, NeoTrie VR ha potenciado la utilización de recursos difíciles de poner en práctica en un ambiente físico. Muestra de ello es el uso del "vuelo" para cambiar de punto de vista en la visualización de figuras, el traslado rígido de éstas para la comparación visual, o el arrastre de elementos para la exploración dinámica.

Comparando lo acontecido en los tres estudios, nos llama la atención cómo a mayor edad parece ser que mayor es el nivel de inseguridad de los estudiantes en sus acciones. Sin ser pretenciosos, ello nos sugiere que, para los estudiantes de menor edad, las tecnologías están más naturalizadas, o al menos no las aprecian tan artificiales. De hecho, la curva de aprendizaje y adaptación al ambiente virtual 3D parece ser menor con los estudiantes de secundaria que con los de primaria y universidad.

También se detecta cierto abuso de la exploración errática, ya documentada cuando se emplea *software* de geometría dinámica, así como dificultades en la visualización tridimensional. Nos atrevemos a pronosticar que, con un entrenamiento adecuado, el cual no ha podido llevarse a cabo por el COVID-19, se reducirán ambas dificultades, la primera, a nivel de aprendizaje en resolución de problemas, y la segunda, a nivel de comprensión de visualización de las estructuras tridimensionales.

Por último, somos conscientes que lo presentado aquí está en un estado incipiente, por ello hacemos un llamado a la comunidad de investigadores en Educación Matemática para que exploren e indaguen en el desafío del empleo de Realidad Virtual en el Aula. Necesitamos más experiencias reales de aula, que arrojen luces y sombras sobre su uso, así como también de estrategias para el diseño de actividades ricas usando Realidad Virtual Inmersiva. La rápida evolución de los sistemas actuales de realidad virtual, así como su popularidad, auguran su pronta incorporación en el aula, y el profesorado de matemáticas junto a investigadores deben estar ahí para velar por el buen uso de este nuevo recurso tecnológico.

Agradecimientos

Trabajo apoyado por los proyectos UAL2020-SEJ-B2086 (FEDER-Junta de Andalucía, España), y PIV-055/21 (Proyectos de innovación educativa-Junta de Andalucía, España).

5. Referencias

Álvarez-Bermejo, J.A., Codina, A. y Belmonte, L.J. (2015). Application architecture to efficiently manage formal and informal m-learning. A case study to motivate computer engineering students. *DYNA*, (82), 113-120. https://doi.org/10.15446/dyna.v82n190.43486.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *6*(6), 18-33.

Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). Computer-based environments in mathematics. En A. Bishop (Ed.). *International handbook of mathematical education* (pp. 469-501). Kluwer Academic Publishers. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01775249.

Cangas, D., Morga, G. y Rodríguez J.L. (2019). Geometric teaching experience with NeoTrie VR. *Psychology, Society, Education, 11*(3), 355-366. https://doi.org/10.21071/psye.v11i3.13951

Chavil, D.Y., Romero, M.I., y Rodríguez, J.L. (2019). Introducción al concepto de fractal en enseñanza secundaria a través de realidad virtual. *Desde el Sur, 12*(2), 615-629. https://doi.org/10.21142/DES-1202-2020-0034

Clements, M.A. (2013). Past, present and future dimensions of mathematics education: introduction to the third international handbook of mathematics education. En M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.). *Third international handbook of mathematics education* (Vol. 27, pp. v-xi). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2

Codina, A. (2015). *Interacción e interactividad con nuevas tecnologías en la resolución de problemas* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional UGR, http://hdl.handle.net/10481/41755

Codina, A. y Romero, I.M. (2016). Entornos tecnológicos y su influencia en los espacios de trabajo matemático. *Bolema, 30*(54), 95-115. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a05

Cornu, B. y Radson, A. (Eds.) (1992). The influence of computers and informatics on mathematics and it's teaching. Science and technology education. *Document series 44*. UNESCO. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED359073.pdf

Demitriadou, E., Stavroulia, K.E. y Lanitis, A. (2020). Comparative Evaluation of Virtual and Augmented Reality for Teaching Mathematics in Primary Education. *Education and Information Technologies*, 25, 381-401, https://doi.org/10.1007/s10639-019-09973-5

Dimmel, J. y Bock, C. (2017, 3-6 de julio). HandWaver: A Gesture-Based Virtual Mathematical Making Environment. En G. Aldon y J. Trgalová (Eds.). *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 323-330). Institut Francais de L'éducation. https://ictmt13.sciencesconf.org/data/pages/proceedings_compressed_1.pdf

Drijvers, P., Mariotti, M.A., Olive, J. y Sacristán, A.I. (2010). Introduction to Section 2. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.). *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 81-88). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_6

Fey, J. T. (1993). Technology and mathematics education at ICME-7. En J. A. Dossey (Ed.). *American perspectives on the seventh international congress on mathematical education* (pp. 6-11). NCTM.

Fischer, F., Kollar, I., Stegmann, K. y Wecker, C. (2013). Toward a script theory of guidance in computer-supported collaborative learning. *Educational Psychologist, 48*(1), 56-66. https://doi.org/10.1080/00461520.2012.748005

Fuchs, P. y Guitton, P. (2011). Introduction to virtual reality. En P. Fuchs, G. Moreau y P. Guitton (Eds.). *Virtual reality: concepts and technologies* (pp. 3-10). CRC Press.

Gadanidis, G. (2008, 5-8 de marzo). Rare events: Technology throughout the history of ICMI. En M. Menghini, F. Furninghetti, L. Giacardi y F. Arzarello (Eds.). *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, working group 4* (pp. 1-5). https://unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG4/Papers/GADANID.pdf

Gómez-Chacón, I.M. y Kuzniak, A. (2013). Geometric Work Spaces: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 201–226. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9462-4

Güven, B., y Kosa, T. (2008). The effect of dynamic geometry *software* on students mathematics teacher's spatial visualizations skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 7*(4), 100-107. http://www.tojet.net/articles/v7i4/7411.pdf

Hartaiana, H., Darhim, E. y Nurlaelah, E. (2018). Improving Junior High School Students' Spatial Reasoning Ability Through Model Eliciting Activities with Cabri 3D. *International Education Studies, 11*(1), 148-154. https://doi.org/10.5539/ies.v11n1p148

Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C. y Noss, R. (1994). Messing up. *Micromath, 10*(1), 14-16.

Hoyles, C. y Lagrange, J.B. (2008). *The seventeenth ICMI study: technology revisite*d. En M. Menghini, F. Furninghetti, L. Giacardi y F. Arzarello (Eds.). *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, working group 4* (pp. 1-10). http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG4/Papers/HOYLAGR.pdf

Hoyles, C. y Lagrange, J.B. (Eds.). (2010). *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Hwang, W. y Hu, S. (2013). Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem solving. *Computers & Education, 62*, 308-319. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.10.005

Kuzniak, A. (2019). *La Teoría de los Espacios de Trabajo Matemáticos. Desarrollo y Perspectivas*. En E. Montoya, P. Richard, Vivier, L., I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschieto y D. Tanguay (Eds.). Sexto Simposio sobre el Espacio de Trabajo Matemático (pp.41-60). Universidad Pontificia de Chile. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

Martín, A. (2019). *Geometría a través de Realidad Virtual* [Tesis de Maestría, Universidad de Almería]. Repositorio Institucional. http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/9770/GOMEZ%20ROCAFULL%2C%20JOAQUIN.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Morales, C-S. (2019). *La metacognición en un ambiente de realidad virtual. Geometría con NeoTrie VR* [Tesis de Maestría, Universidad de Almería]. Repositorio Institucional http://repositorio.ual.es/handle/10835/8075

Morales, C-S. y Codina, A. (2020). Panorama de investigación en pensamiento funcional en la Universidad de Granada. En E. Castro-Rodríguez, E. Castro, P. Flores y I. Segovia (Coords.). *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Enrique Castro* (pp. 157-178). Octaedro.

National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Perks, P., Prestage, S. y Hewitt, D. (2002). Does the *software* change the Maths? Part. 1. *Micromath, 18*(1), 28-31.

Radianti, J., Majchrzak, T.A., Fromm, J. y Wohlgenannt, I. (2020). A systematic review of immersive virtual reality applications for higher education: Design elements, lessons learned, and research agenda. *Computers & Education, 147*, 1-29. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103778

Rodríguez, J.L. (2022). Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching. En P. Richard, M., P. Velez y Vaerenbergh, S. V. (Eds.). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (vol 17, pp. 343-363). Springerm, cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0

Rodríguez, J. L., Romero, I.M. y Codina, A. (2021). The Influence of NeoTrie VR's Immersive Virtual Reality on the Teaching and Learning of Geometry. *Mathematics, 9*, 2-22. https://doi.org/10.3390/math9192411

Capítulo 12. Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora

Miguel Delgado Pineda, miguel@mat.uned.es
Universidad Nacional de Educación a Distancia, España
Magally Martínez Reyes, mmartinezr@uaemex.mx
Universidad Autónoma del Estado de México, México

Resumen

La ausencia de representaciones familiares para diferentes tipos de funciones desde el nivel básico hasta el nivel superior motiva alternativas para abordar el estudio de las funciones reales. En este capítulo se presenta una forma de abordarlas mediante situaciones didácticas sencillas (recorrido de una hormiga), observando características esenciales (dominio, rango, continuidad) y haciendo uso de los registros de representación en el sentido de Duval y de Delgado hasta llegar a construir una función periódica desde el hecho de medir la longitud de un segmento rectilíneo. Esta propuesta nace del taller *Explorando funciones con simuladores*, dirigido a profesores desde el nivel secundaria hasta el superior y también en modalidad de formación para profesores. Los resultados muestran actividades acordes al nivel educativo, con aceptación entre los docentes, con opción a implementarse en diversas modalidades (virtual o presencial, en aula o fuera de ella), con o sin uso de tecnología, y sin requerir definiciones formales de función o de función periódica.

1. Introducción

En este trabajo se propone un acercamiento al concepto de *función* mediante una representación gráfica con algunos medios computacionales disponibles actualmente, para facilitar la idealización de conceptos. El propósito inicial es hacer más asequible el estudio real de una función observando características esenciales como son el dominio y el rango de una función. El objetivo principal es el estudio de otras características relativas a los registros de representación de funciones, como elemento de partida para hablar de continuidad, derivabilidad e integrabilidad. Un propósito secundario es el estudio del comportamiento periódico de una función.

El concepto de función ha variado a lo largo de la historia, en ocasiones como un preconcepto, unas veces por su aspecto semántico y otras veces por el aspecto sintáctico, como se indica en Cuevas y Delgado (2016) y Cuevas *et al*. (2018). Sin embargo, ante estos cambios, el modelo de representación gráfica del concepto función parece permanecer invariable.

Al observar la forma en la que tradicionalmente los libros de texto introducen el concepto de función, desde la enseñanza secundaria hasta la enseñanza universitaria, encontramos una secuencia de descripciones de funciones que hacen dudar que el estudiante advierta la necesidad de adquirir tales conceptos tan alejados de su marco de referencia lúdico-educativo y su marco social (Colegio de Bachilleres, 2003; Swokowski, 1989; Apóstol, 1980; Spivak, 1988; Cuevas, 2013). Por lo que tiene poca utilidad disponer de una formación inicial innovadora para el profesor, si su desarrollo profesional está condicionado por el libro de texto que utilizan sus estudiantes. Pensar en eliminar el libro no asegura una mejor comprensión por los estudiantes ni permite vislumbrar las dificultades didácticas que aparecerán ante el relato, excesivamente personalizado, del profesor a sus estudiantes. Pensar en utilizar varios recursos que puedan estar disponibles en internet, no deja de condicionar la labor profesional del profesor. Aunque se puede creer que elegirá sus recursos para la materia, más o menos dinámicos, según sus gustos. La realidad es que los estudiantes tienen sus propios gustos o los desarrollan rápidamente al contacto con internet.

Algunas preguntas progresivas que debe hacerse cada profesor cuando toma decisiones didácticas son: ¿con qué recursos aprenden mejor mis estudiantes?, ¿qué esfuerzo requiere mi decisión?, ¿qué esfuerzo se requiere de mis estudiantes? Quizás, al respondernos encontremos la razón de la existencia del libro como recurso imperecedero.

Los escritos de numerosos autores que han estudiado las dificultades que tienen los estudiantes para adquirir el concepto de función (Castela, 2016; Ellis *et al*., 2014, Loch y Lamborn, 2016; Cuevas *et al*., 2018), no parecen tener mucha influencia en la forma de introducir las funciones en los libros. Este tipo de introducción a las funciones nos hace evocar la estampa 43, *El sueño de la razón produce monstruos*, de la serie Caprichos[1] de Francisco de Goya y Lucientes, pues no es fácil acompasar el proceso de adquisición del concepto con lo contenido en el libro. Así pues, algunos profesores pudieran decantarse por seguir al pie de la letra el libro y dormir su intuición ante la situación de tener que explicar el concepto de función en el aula (ver Figura 1).

Nuestra propuesta no intenta sustituir lo que presenta el libro de texto por las actividades que mostramos. Intentamos que se complementen los contenidos con estas actuaciones del profesor para que se asegure que el estudiante está en disposición de entender el contenido del texto. Es una propuesta de actuación que utiliza la computadora como herramienta, pero que puede desarrollarse sin ella.

Figura 1. Francisco de Goya y Lucientes, *El sueño de la razón produce monstruos*, 1797-1799, Aguafuerte, aguantinta sobre papel verjurado, 306 x 201 mm, (G002131). Madrid, Museo Nacional del Prado.

1. La colección Caprichos está expuesta en el Museo del Prado (Madrid, España). https://www.museodelprado.es/coleccion/obras-de-arte

Hablar de funciones enumerándolas o mostrando su expresión algebraica resulta fácil, lo difícil es hablar del concepto de función, pues está intrínsecamente unido al conjunto de registros semióticos propios del concepto. Con relación al concepto *función* destacamos la categorización de registros semióticos de representación de Duval (1993): registro verbal o relativo a las palabras que se usan para describir la función, registro simbólico o relativo a la sintaxis que empleamos, registro tabular o relativo a valoraciones numéricas de la función, registro analítico o relativo a las estructuras algebraicas necesarias donde tiene sentido el concepto, y registro gráfico o relativo a la forma de representar en forma gráfica, el cual puede verse. A los anteriores registros añadimos los propuestos por Delgado (2016): registro metafórico o relativo a la forma de idealizar el concepto y registro analógico o relativo a la forma de relacionar el concepto con el mundo real.

Algunos autores (Trouche 2016, 2018; Loch y Lamborn, 2016; Ellis *et al*., 2014) destacan que la forma de adquirir el concepto de *función* es esencialmente relacionar unos registros con otros. Entendemos que la forma en que se relacionan esos registros es la base para adquirir ese concepto. Ahora bien, si la relación de registros es parcial, por ejemplo, saber intercambiar los registros: simbólico, tabular y gráfico, no completa la adquisición del concepto de función, sino que se genera una conceptualización estática de función. En muchos casos el investigador-observador acepta esas relaciones parciales; desde luego es preferible tener este tipo de conceptualización que ninguna, pero no es posible asumir que el estudiante adquirió el concepto. Entendemos que debe disponerse de una relación total de registros de representación para alcanzar una conceptualización dinámica. Así pues, abordamos la tarea de afrontar situaciones problemáticas que requieran la interrelación de todos los registros para poder adquirir un concepto dinámico como es el de función.

2. Método

En este trabajo se presenta una forma de abordar la iniciación al estudio de las funciones del estudiante empleando algunas situaciones didácticas fundamentales en el sentido de G. Brousseau (1999). Se postula que cada pieza de conocimiento en Matemáticas está relacionada con alguna situación que permite caracterizarlo y, por tanto, diferenciarlo de otras piezas matemáticas. Además, se argumenta que el conjunto de tales situaciones posee algún tipo de estructura algebraica y puede ser descrito modularmente de forma que una situación puede ser generada por combinación-complementación a partir de una pequeña cantidad de situaciones básicas o fundamentales, haciendo modificaciones en algunas variables didácticas (Brousseau, 2007).

Todas las situaciones expuestas en este trabajo atribuyen la necesidad de resolver un problema elemental sin necesidad de realizar cálculos engorrosos, sin tener que imponer la terminología tradicional de variable independiente y variable dependiente o la expresión de una función, ni utilizar el acostumbrado registro tabular de algunas funciones. No podemos estar más de acuerdo con que las dificultades didácticas yacen en la "distancia" entre las imágenes formadas por el individuo y los objetos matemáticos (Cantoral, 2000).

El contenido de este trabajo fue una de las propuestas de los autores en el taller *Explorando Funciones con Simuladores*, dentro del Undécimo Encuentro Internacional de la Enseñanza del Cálculo, EICAL 11 (México, 2020). El taller de formación estuvo dirigido a profesores de Enseñanza secundaria y preuniversitaria y se desarrolló vía telemática haciendo uso de la plataforma

Zoom, puesto que el evento se celebró en plena pandemia de COVID-19, con un autor en el Estado de México (México) y otro en Madrid (España). Un mínimo número de asistentes (10) telemáticos al taller permitió que participaran en directo con video y audio, e interactuaron con los autores. Cabe destacar que todos eran profesores en activo, al menos dos eran profesores universitarios con docencia en Escuelas Normales (formación de profesorado), cuatro asistentes eran profesores de secundaria y dos más de nivel medio superior. Se presentó una propuesta de situación didáctica fundamentada en Brousseau (2007) para abordar el concepto de función real desde diversos registros de representación (Duval, 1993; Delgado, 2016).

3. Desarrollo

Considerando la indagación como un proceso de acercamiento inicial, se propuso a los profesores que meditaran una respuesta a la pregunta: ¿existen analogías entre el trabajo matemático en el aula y el de extracción en una cantera de mármol? Cabe recordar que en cada bloque de mármol está escondida una magnífica estatua. ¿Existirá un buen matemático en el cuerpo de cada uno de nuestros estudiantes? Las respuestas debían ser enviadas por correo electrónico.

A la hora de iniciar el estudio de funciones hay una dificultad muy importante: la confusión entre incógnitas y variables numéricas. Suele ser normal, en el entorno matemático, la identificación de letras con valores numéricos desconocidos; es decir, las letras suelen entenderse como incógnitas y no como variables. La tarea de adquirir el concepto de función y de los conceptos relacionados con él, que suelen calificarse como características de una función, no puede partir de un concepto básico y no adquirido o no asumido, como es el concepto de variable. Por ello, se aconsejó a los profesores asistentes que desarrollaran una estrategia de aproximación al concepto de variable y de función con algunas metáforas. Se sugirieron algunas extraídas del libro *El Principito* (Saint-Exupéry, 1971).

La primera referencia fue al pasaje en el cual el protagonista solicita al aviador que le dibuje un corderito. El Principito pone unos reparos al primer corderito dibujado. El aviador dibuja otro, hay otros reparos. Ambos corderitos son descartados, ver Figura 2.

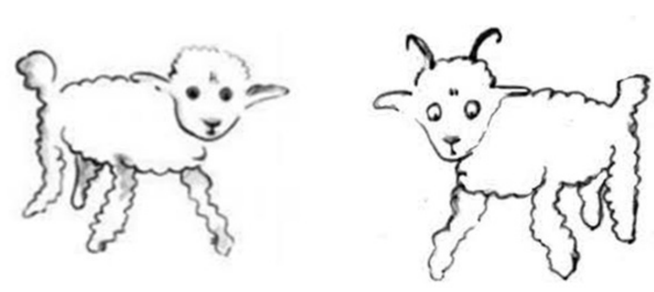


Figura 2. Imágenes de los corderitos de *El Principito* (Saint-Exupéry, 1971, p. 20).

Ante la insistencia de *El Principito*, el aviador dibuja la imagen de la Figura 3. Una simple caja con ventilación, indicando que el corderito está dentro. Desde ese momento el Principito se llena de alegría y reconoce que es el corderito deseado.

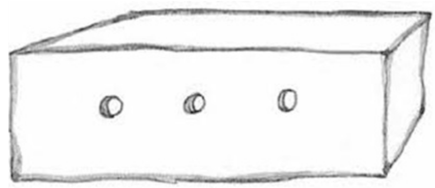


Figura 3. Imagen final del corderito de *El Principito* (Saint-Exupéry, 1971, p.20).

Quizás sea esa caja una de las mejores metáforas del concepto de variable al ver la reacción del Principito, ¿qué corderito ve el lector? Una caja, por su naturaleza, no es un corderito, pero representa a todos y cada uno de los que pudieran verse o imaginarse, pues se supone que cualquier corderito puede estar dentro de ella. De la misma forma una variable numérica, una letra. Una letra, por naturaleza, no es un número, pero representa a uno y a todos los elementos de un determinado conjunto, en este caso, de números. La segunda referencia es a un dibujo realizado por un niño y que los adultos interpretaban como el dibujo de un sombrero. El niño dibujó una boa que se había tragado a un elefante como muestra la Figura 4, pero los adultos no lo entendían.

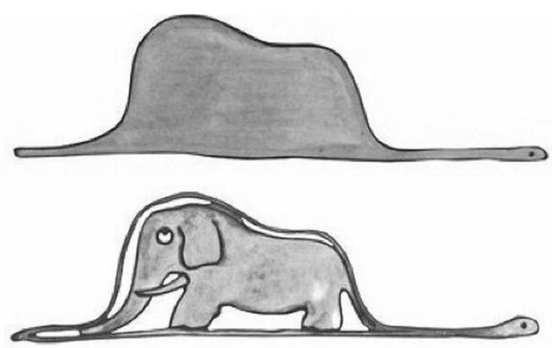


Figura 4. Imagen de la boa de *El Principito* (Saint-Exupéry, 1971, p. 14).

La imagen del elefante dentro de la boa traslúcida permite entender la forma que tiene la boa opaca. La Figura 4 muestra la deformación del cuerpo de la boa para un determinado elefante. Podríamos estudiar cómo se deforma el cuerpo de la boa para cualquier elefante que se tragara. Esta forma, metafórica establece una deformación en función del elefante tragado; es decir, tenemos la función deformación de la boa que está definida sobre el conjunto de todos los elefantes, y genera un conjunto de imágenes posibles de una boa deformada.

3.1 Descripción del inicio de la propuesta

La propuesta del taller consistía en una secuencia de situaciones problemáticas, que a continuación se presentan, y que tienen una denominación común que puede describirse de la siguiente forma: dado un cuadrado[2] de vértices ABCD, con una longitud de lado de una unidad, determinar ¿a qué distancia está la hormiga, situada en un punto P del cuadrado, del vértice A? La hormiga sólo se desplaza por los lados de dicho cuadrado.

2. Se utilizaron cuadrados sin lados paralelos a los ejes en pantalla.

Situación didáctica 1. Para la imagen presentada en la Figura 5, se plantea la siguiente cuestión: ¿a qué distancia está la hormiga del punto situado en el vértice inferior si sólo recorre un lado del cuadrado unitario?

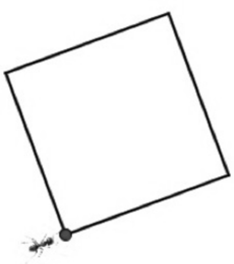


Figura 5. Situación didáctica 1. Elaboración propia.

Situación didáctica 2. La cuestión es la misma, pero cambia la orientación de la hormiga como se aprecia en la Figura 6.

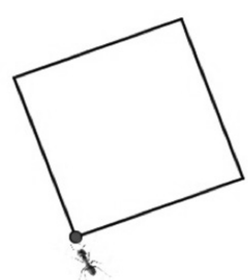


Figura 6. Situación didáctica 2. Elaboración propia.

Los asistentes intuían que dicho recorrido dependía de la forma en la cual se moviera la hormiga, y por tanto del tiempo empleado. Eso obligaba a que la distancia a la que se encontraba la hormiga del punto del vértice inferior, A, dependía del tiempo. Esta consideración implicaba que las soluciones a las situaciones problemáticas podrían ser bastante complejas. Fue una cuestión que preocupó a los asistentes como iniciación. Sin duda, al hacer referencia al movimiento de la hormiga, los asistentes no reconocieron de entrada cuál era la variable que implicaba la variación de la distancia al punto fijado. Sin embargo, lo rápido que la hormiga se moviera a un determinado punto del lado del cuadrado no cambiaba el recorrido que ella hacía. Así pues, se determinó que la distancia sólo dependía de lo recorrido por la hormiga. Luego, se estableció la variable *recorrido*, a, como variable independiente y la variable *distancia*, d, como variable dependiente. Además, la distancia tenía el mismo valor que el valor del recorrido, ver Figura 7. Observe que se evitó utilizar las letras x e y, que conllevan ciertas utilizaciones familiares.

El recorrido no dependía de la orientación de la hormiga, todo quedaba reflejado con la expresión de igualdad $d = a$. Esta expresión no induce explícitamente que a varié, por ello, se usó una expresión más informativa $d(a) = a$. Se reflexionó sobre el uso del símbolo =, puesto que no es una igualdad sino una definición.

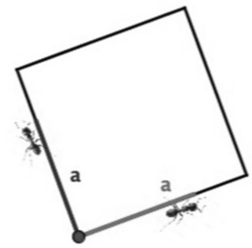


Figura 7. El recorrido de la hormiga según las dos orientaciones. Elaboración propia.

Ninguno de los asistentes cayó en indicar el dominio y uno de los autores debió llamar la atención a que la variable *a* carece de sentido si no tiene un dominio de donde tomar valores. Se admitió que a ∈ [0,1], es decir que $0 \leq a \leq 1$. Así pues, esta primera función se denominó d_1 y se añadió la nomenclatura siguiente:

$$d_1 : [0,1] \to [0,1] \text{ tal que } d_1(a) = a.$$

Además, si se asignan valores y se realiza una primera aproximación al registro gráfico, se obtiene la Figura 8.

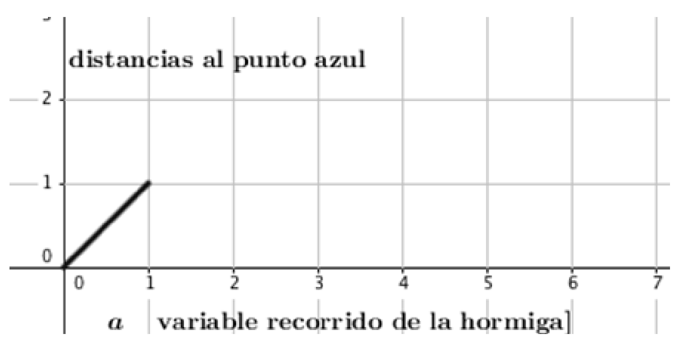


Figura 8. Gráfica de la función d_1. Elaboración propia.

Descritas las dos primeras situaciones se hizo una recopilación de posibles actuaciones que pueden desarrollarse en el ámbito del aula, puesto que al ser un taller telemático no pudieron realizarse las actividades en ese momento. La propuesta que se presenta es válida para cualquiera de las situaciones (presencial o virtual) y pueden ser planteadas tanto en el marco escolar como en el extraescolar, en el aula o fuera del aula y en la computadora en modo simulación, como así se hizo en estas circunstancias.

Aunque no se podía poner en práctica por la pandemia, se indicó la forma en la que cada profesor podría proceder en el aula. El proceso es el siguiente: se solicita al estudiante, sólo o en grupo, que dibuje un cuadrado cuyo lado tenga como longitud una unidad haciendo uso de regla y compás, o juego de escuadras de 30, 45 y 60 grados. Como regla general, el estudiante utilizará una pieza de papel cuadriculada y elegirá un cuadrado de lados paralelos a las cuadrículas. Por tanto, se advirtió que esta experiencia debe hacerse en una pieza de papel en blanco. Reconocemos que la experiencia se inicia con una situación práctica haciendo uso de algunas herramientas ajenas a la materia, pero son herramientas de gran utilidad desde el punto de vista geométrico. Una vez dibujado el cuadrado, el estudiante tiene que ir midiendo distancias y recorridos con una regla numerada.

Fuera del aula, por ejemplo, en el patio o en una pista deportiva, se pide dibujar lo mismo un cuadrado con lado de una unidad. El proceso tiene su dificultad, pues rara vez se dispone de herramientas de "dibujo" de gran tamaño para trazar un cuadrado y así permite apreciar la relación de las matemáticas con el entorno social. Esta tarea también se puede trabajar en grupo, donde la regla se sustituye por una barra y el compás por una cuerda. Para medir recorridos y distancias es necesario el uso de una cinta métrica adecuada al tamaño del cuadrado. Se debe estimular la inventiva del estudiante en usar herramientas.

Tanto en el aula como fuera de ella, hay que establecer el concepto de lo que se acepta por unidad de medida en cada sitio. Por tanto, surge el factor escala, que no es despreciable y que tiene influencia a la hora de captar los datos medidos. También, se aconseja que se establezcan distintos grupos que utilicen distinta unidad en una misma sesión o en distintas sesiones.

Para que el estudiante pueda aprender practicando la experiencia, debe disponer de un protocolo prefijado por el profesor para anotar las medidas de los recorridos y sus correspondientes distancias; bien podría ser un protocolo tabular o uno de conjuntos de pares ordenados. Otra cuestión es que el estudiante no puede anotar las distancias correspondientes a muy pequeñas variaciones del recorrido. Esto obliga a sustituir cada lado por un conjunto de puntos uniformemente distanciados, o no, para que la práctica no sea aburrida. Así pues, esta nube impone construir una tabla de valores con recorridos y distancias. Aunque reconocemos que en el tratamiento simulado sobre la computadora ocurre la misma sustitución de los lados por una nube de puntos, resulta que en este caso el tamaño mínimo de un pixel cuasi imperceptible para el ojo humano da una apariencia de continuidad del lado dibujado. Es importante recalcar que cada *software* elige su nube de puntos según su programación, interpolando pixeles de forma diferencial.

3.2 Registros semióticos de representación empleados

La formación del futuro profesor es el centro sobre el cual debe girar cualquier reforma educativa futura, por ello, el conocimiento a enseñar debe estar muy claro. En este caso se debe hacer comprender la interrelación existente entre registros de representación de una forma explícita, remarcándolas en cada momento. Esta forma de pensar nos obligó a resaltar cada uno de esos registros una vez concluidas las dos situaciones.

El registro verbal es notorio con la descripción de la acción que se realizará: determinar la distancia en relación del recorrido realizado. A los profesores no les causó ningún problema de significado. El registro simbólico queda patente al establecer la expresión $d = a$. El tránsito del registro verbal al simbólico fue claro para los profesores, cuando se auxilian de la imagen del cuadrado.

Del registro tabular destacamos que se refleja en la forma de organizar la captura de medidas. Esta tabulación no se hizo de forma explícita, al ser un taller en el que se empleó la computadora, el registro gráfico queda patente con la representación gráfica en pantalla.

Para que se pudiera interpretar el registro metafórico se realizó la idealización del cuadrado como una nube de puntos muy cercanos unos a otros. Quien pudiera pensar que sólo la realidad de la computadora impone esa nube de puntos imperceptibles, debe intentar tener una vista microscópica del trazado del cuadrado, lo cual es posible con la opción de zoom de la computadora.

Con esa vista microscópica comprobará las discontinuidades del trazo del lado dibujado en el papel y observará la superficie del papel como algo que no es plano. Desde luego el recorrido de la hormiga no puede ser más metafórico.

Experimentar el proceso, sin computadora, en sí y dar respuesta de una forma práctica es lo que nos permite entender el registro analógico de la función. Se destacó que la realización de medidas es totalmente analógica bien con la regla o con la cinta métrica. En cierta medida nuestros asistentes no detectaron fácilmente el registro analítico correspondiente, puesto que entendían que el registro simbólico anterior era el analítico. Presumimos que esto se debe a un uso inadecuado o sobreentendido de los objetos matemáticos. Un simple ejemplo puede hacer entender lo dicho. Hay un uso inadecuado cuando se habla de incógnita referente a la variable de una función, quizás el profesor no sea consciente que le está creando una dificultad didáctica al estudiante. Se destacó que al utilizar la expresión $d_1(a) = a;\ a \in [0,1]$ o la expresión:

$$d_1 : [0,1] \to [0,1] \text{ tal que } d_1(a) = a,$$

es lo que da significado al registro analítico en sí. Son objetos dentro del marco de una estructura matemática bien definida.

Un asistente indicó que dicho registro podría ser $d : [0,1] \to R;\ d(a) = a$. La contestación fue inmediata, la función d_1 es una biyección mientras que su función d no lo es. Alguna diferencia deben tener esas dos expresiones. La segunda puede ser base para una situación problemática de determinación del conjunto imagen, el rango de la función. Sin embargo, la primera no es útil para ese tipo de problema. También se indicó lo inadecuado de escribir la función $d : R \to R;\ d(a) = a$ que aparece en todos los libros de texto al no describir bien ni dominio ni rango en referencia al cuadrado.

Al desarrollar la experimentación con las situaciones didácticas empleadas incidimos en todo el conjunto de registros de manera conjunta, traspasando la información matemática de un registro a otro. Además, insistimos en recalcar la totalidad de registros de representación al momento de que los asistentes intentarán realizar las situaciones de forma práctica con sus estudiantes.

3.3 Segunda parte de la propuesta

Las dos primeras situaciones no han requerido hacer cálculo simbólico alguno, por ello se añaden otras dos situaciones que sí lo requieren.

Situación didáctica 3. Ante la vista de la Figura 9, se plantea la misma cuestión: la hormiga recorre un lado del cuadrado partiendo del punto D.

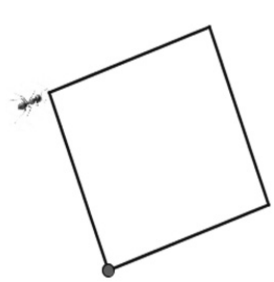


Figura 9. Situación didáctica 3. Elaboración propia.

Situación didáctica 4. La cuestión es la misma a la situación 2, salvo que la hormiga está orientada según se aprecia en la Figura 10 y parte del punto B.

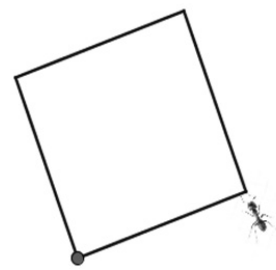


Figura 10. Situación didáctica 4. Elaboración propia.

Al dibujar el segmento con el que se mide la distancia es posible observar que si la hormiga recorre la parte *a* del lado, entonces aparece un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento dibujado. De manera que se puede emplear el Teorema de Pitágoras para determinar la distancia. Ver Figura 11.

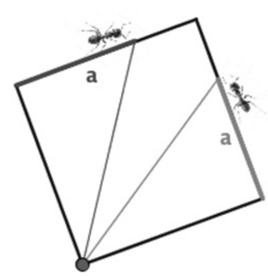


Figura 11. La distancia como la longitud de una hipotenusa. Elaboración propia.

Emerge una expresión del estilo $d = \sqrt{a_2 + 1}$ por lo cual se hace hincapié en que se sustituya por una expresión del estilo $d\,(a) = \sqrt{a_2 + 1}$; $a \in [0,1]$. Así pues, se definió una nueva función

$$d^*_1 : [0,1] \to [1, \sqrt{2}\ ] \text{ tal que } d^*_1\,(a) = \sqrt{a^2 + 1}$$

Los asistentes expresaron cierto desconcierto al obtener la gráfica de esa función y reconocieron que podrían utilizar las situaciones con sus estudiantes puesto que ninguna de las cuatro situaciones requiere de una elevada cantidad de conocimientos matemáticos. Coincidimos con ellos en que esta experiencia puede ser resuelta por un amplio abanico de edades de los estudiantes y es aplicable a los niveles educativos de los profesores asistentes.

Situación didáctica 5. Es similar a la situación 1, con la diferencia que la hormiga puede recorrer sólo dos lados.

Situación didáctica 6. Es similar a la segunda situación, pero recorriendo sólo dos lados.

Tener a profesores como estudiantes nos facilita que respondan a estas nuevas situaciones, ante la cual argumentaron que disponer de una expresión a trozos no era adecuado para sus estudiantes. Las razones aludidas eran fruto de una experiencia profesional en la que nunca se consideró este tipo de expresiones múltiples. No podemos menospreciar la versatilidad de un estudiante y endurecer su imaginación con funciones escritas de una única línea o manera. Quizás ese estudiante no tenga ese registro simbólico, pero sabrá expresar que hay una "variación de fórmula".

Estas dos situaciones extienden el dominio de la función a [0,2], así pues, la variable recorrido es $0 \le a \le 2$. Al aplicar una única vez el Teorema de Pitágoras, la función se escribe de la forma:

$$d_2 : [0,2] \to [0, \sqrt{2}] \text{ tal que } d_2\,(a) = \{a\ 0 \le a \le 1\ \sqrt{1 + (a-1)^2}\ \ 1 < a \le 2\,,$$

puesto que no se reconoce una escritura del tipo

$$d = \{a\ 0 \le a \le 1\ \sqrt{1 + (a-1)^2}\ \ 1 < a \le 2$$

pues el signo = deja de ser el de una igualdad de variables. Si se procede a graficar la función, se obtiene la figura 12.

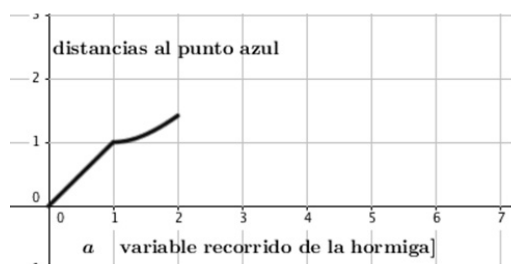


Figura 12. Gráfica de la función d_2. Elaboración propia.

Situación didáctica 7. Es similar a la situación 3, con la diferencia de que la hormiga puede recorrer dos lados.
Situación didáctica 8. Es similar a la situación 4, pero sólo recorre dos lados.
Se mantiene el dominio de la función, [0,2] y al aplicar dos veces el Teorema de Pitágoras se tiene la expresión:

$$d^*_2 :[0,2] \to [1, \sqrt{2}] \text{ tal que } d^*_2\,(a) = \{\sqrt{1 + a^2}\ \ 0 \le a \le 1\ \sqrt{1 + (2 - a)^2}\ \ 1 < a \le 2$$

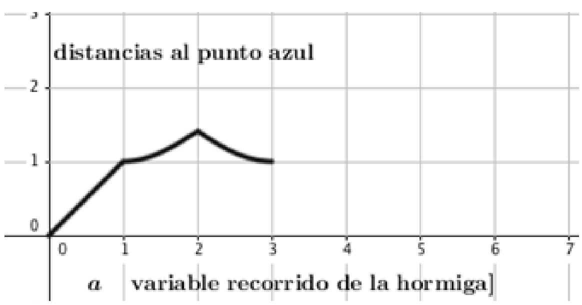
La propuesta prosigue con las situaciones didácticas similares a las anteriores con la simple variación de que esta vez la hormiga recorre sólo tres lados, $a \in [0,3]$,

$$d_3 : [0,3] \to [0, \sqrt{2}] \text{ tal que } d_3\,(a) = \{a\ 0 \le a \le 1\ \sqrt{1 + (a-1)^2}\ \ 1 < a \le 2\ \sqrt{1 + (3-a)^2}\ \ 2 < a \le 3$$

o recorre todo el cuadrado, $a \in [0,4]$,

$$d_4 : [0,4] \to [0, \sqrt{2}] \text{ tal que } d_4\,(a) = \{a\ 0 \le a \le 1\ \sqrt{1 + (a-1)^2}\ \ 1 < a \le 2\ \sqrt{1 + (3-a)^2}\ \ 2 < a \le 3$$
$$4-a\ 3 < a \le 4$$

Las gráficas de las Figuras 13 y 14 corresponden a las dos funciones anteriores, donde se emplean los recorridos según las Figuras 9 y 10.



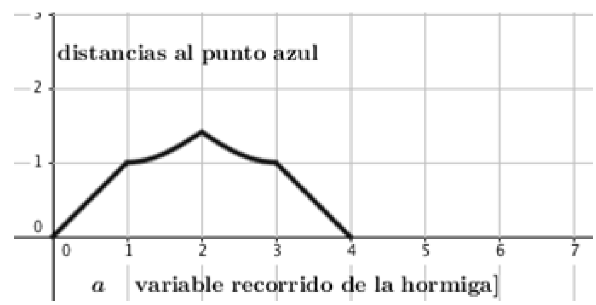


Figura 13. Gráfica de la función d_3 Figura 14. Gráfica de la función d_4. Elaboración propia.

A la vista de las gráficas se puede apreciar la dificultad que podría tener un estudiante para realizarlas. Si bien las situaciones se pueden experimentar en diversos niveles educativos, la representación gráfica de forma manual fuera sólo un proceso apto para niveles superiores. Por otro lado, la ventaja que tiene la utilización de *software* de cálculo es que la representación de las funciones anteriores puede ser editada con cierta facilidad y presenta una imagen simulada de la gráfica de dicha función. Así pues, el inconveniente de la dificultad de disponer de un registro gráfico desaparece.

De la formulación del problema se determina directamente que: la función es una función no negativa, pues la distancia es un número no negativo; y está definida en uno de los siguientes intervalos cerrados: [0,1], [0,2], [0,3] y [0,4]. La distancia máxima a la que la hormiga puede estar es 1 o $\sqrt{2}$ según la situación. Esta última se alcanza para $a = 2$. La distancia mínima es 0 que se alcanza para uno o dos valores de la variable recorrido, $a = 0$ y $a = 4$. El rango de la función distancia es [0,1], [0, $\sqrt{2}$] o [1, $\sqrt{2}$] según la situación, y la función distancia es continua en su dominio puesto que no se aprecian saltos en la distancia para pequeñas variaciones del recorrido.

De las representaciones gráficas se observa que: la región delimitada por el eje horizontal y la gráfica está bien definida y puede ser medida su área. Con d_1 el área es de 0.5 unidades. Para las otras funciones es fácil pensar que cualquier estudiante (profesor) determine una acotación inicial poco fina. Con d_2 el área está comprendida entre 1.5 y 2 (entre 1.5 y $1.5+0.5\sqrt{2}$,). Para d_3 el área está comprendida entre 2.5 y 3.5 (entre 2.5 y $2.5+\sqrt{2}$,). Con d_4 el área está comprendida entre 3 y 4 (entre 3 y $3+\sqrt{2}$).

La gráfica muestra de uno a tres puntos angulosos o picos. Puntos donde la función no es derivable. Estos picos se alcanzan para $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, que se corresponde con los vértices del cuadrado distintos del de partida. Las funciones d_1 y d_2 poseen un mínimo relativo y máximo relativo que coinciden con los absolutos correspondientes a los extremos del dominio. Las funciones d_3 y d_4 poseen dos puntos mínimos relativos en los extremos del dominio y un único punto máximo relativo que coincide con el absoluto.

Estas últimas consideraciones pueden ser introducidas de una manera intuitiva-formal sin necesidad de un engorroso proceso matemático de definiciones y teoremas, siguiendo la estrategia de mirar la gráfica y ver características para familiarizarse con los conceptos. Hay otros espacios en el temario escolar para formalizar esas concepciones intuitivas, que se adquieren con estas situaciones. Esta forma de proceder favorece la imaginación del estudiante que no sufre el efecto de múltiples definiciones formales.

3.4 Final de la propuesta

También se expusieron un conjunto complementario de situaciones similares que únicamente se diferenciaban de las anteriores por la elección del vértice de partida de la hormiga. Aunque los asistentes no demandan este tipo de situaciones, reconocieron su solución una vez presentada la función de la figura 14.

Se presentaron situaciones generalizadas de las anteriores donde la hormiga no para una vez completado el cuadrado, completando el recorrido varias veces. De todas ellas, sólo mostramos una con la hormiga en la posición de la figura 5 y sin detenerse. El número *n* de vueltas completas que efectúa la hormiga determina el dominio $[0,4n]$ y la gráfica de la función está constituida por *n* estampas de la gráfica de d_4, oportunamente desplazadas.

Si la hormiga no para, se tienen nuevas situaciones generalizadas. Es claro que una de estas situaciones no se puede realizar ni en el papel ni en el patio ni en una computadora puesto que no podría concluirse la tarea. Ahora bien, que no se pueda concluir no significa que no pueda ser simulado empleando un número grande de vueltas.

Si la hormiga no para, el dominio de la función distancia es la semirrecta $[0, \infty)$, es decir, $0 \le a < \infty$. La gráfica de la función se construye con el estampado interminable de la gráfica de la función d_4. Es decir, la gráfica se genera por repetición continua de un patrón fijo relativo a una región fundamental. Este patrón es la gráfica de la función d_4 y su región fundamental es el intervalo $[0,4]$.

La propiedad arquimediana del cuerpo de los números reales nos asegura que para cualquier número positivo *k* existe un único número natural *n* tal que $k = 4n + a$ donde $0 \le a < 4$. Así pues, describimos la nueva función distancia de la forma:

$$d_\infty:[0,\infty)\to[0,\sqrt{2}] \quad \text{tal que } d_\infty(4n+a) = \begin{cases} a & 0 \le a \le 1 \\ \sqrt{1+(a-1)^2} & 1 < a \le 2 \\ \sqrt{1+(3-a)^2} & 2 < a \le 3 \\ 4-a & 3 < a \le 4 \end{cases}$$

para cualquier $n \in N$.

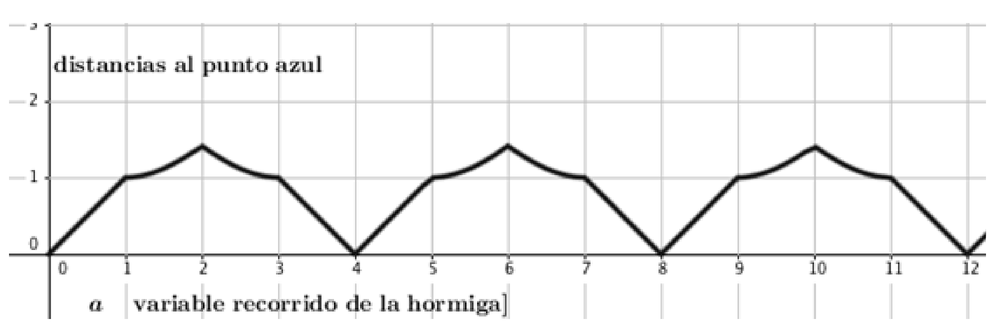


Figura 15. Vista de parte de la función periódica d_∞. Elaboración propia.

La audiencia quedó sorprendida al comprobar la facilidad con la que se definió una función periódica sin necesidad de hacer alusión ni a la función seno ni a la función coseno. Esta sorpresa no resulta extraña pues existe un reflejo en la literatura donde una interpretación de lo periódico es transferencia directa de la propiedad analítica del seno hacia cualquier otra gráfica o movimiento que resulte similar (Buendía y Cordero, 2005). Quizás esto se deba a que fue Euler quien formalizó la periodicidad como una propiedad de la función seno (Euler, 2003).

También se sorprendieron de que en estas últimas situaciones emergiera lo periódico en relación con un movimiento de la hormiga sin hacer referencia al tiempo. Nuevamente pensamos que esto tiene su origen en Euler, que describe el movimiento del oscilador armónico a través del tiempo con el fin de predecir la posición del objeto en un determinado momento. Usaba la variable independiente tiempo en relación con la variable dependiente desplazamiento (Euler 2003).

La literatura relativa a las funciones periódicas desde el punto de vista didáctico reconoce la falta de sentido que tiene la definición de función periódica en el ámbito escolar (Cordero y Martínez, 2001), quizás esto se deba a que regularmente los profesores identifiquen las prácticas de la predicción propia de contextos físicos y determinan leyes que gobiernan el comportamiento de un sistema dinámico, con el uso y reconocimiento de lo periódico (Cantoral, 2001).

En estas últimas situaciones no se requiere la definición de función periódica, simplemente se construye una función periódica desde la práctica elemental de medir distancias. Tampoco se intenta predecir el valor que toma la función distancia para un determinado valor del recorrido, sino que se determina con total seguridad, dejando claro que cuantas veces se realice el experimento, la respuesta será la misma. Sin duda la función construida d_∞ es periódica, de periodo 4, y su gráfica permite establecer una imagen inicial a la hora de formalizar el concepto de función periódica.

4. Conclusiones

El acercamiento al concepto de función mediante situaciones de aprendizaje que parten de un contexto sencillo, en este caso el recorrido de una hormiga en un cuadrado facilita la idealización del concepto observando la necesidad de características esenciales como dominio, rango y continuidad de una función. Lo que a su vez permite el estudio del comportamiento periódico de una función, sin necesidad de definiciones formales y en continuidad. Además, el estudio de estas características de la función en todos los registros de representación en el sentido de Duval (1993) y Delgado (2016) permite alcanzar una conceptualización dinámica de la función, lo que sirve de partida para hablar de continuidad, derivabilidad e integrabilidad

Al presentar esta propuesta como parte del taller *Explorando Funciones con Simuladores*, dentro del Undécimo Encuentro Internacional de la Enseñanza del Cálculo, EICAL 11 (México, 2020), contamos con la participación de 10 profesores, una muestra representativa de los niveles educativos de secundaria, preuniversitaria (medio superior), superior y normal superior (formación de profesores). La audiencia manifestó la versatilidad de las situaciones didácticas al ser introducidas de una manera intuitiva-formal sin necesidad de un engorroso proceso matemático de definiciones y teoremas, además de cierta sorpresa ante la facilidad para definir una función periódica sin necesidad de hacer alusión a funciones trigonométricas.

Las situaciones didácticas se pueden experimentar en diversos niveles educativos, aunque la representación gráfica final de forma manual sería un proceso sólo apto para niveles superiores; evidenciando la ventaja del uso de *software* para cálculo o manipuladores simbólicos. Además, puede implementarse en modalidad virtual, presencial o mixta. Se presentan recomendaciones para realizar las actividades en aula o fuera de ella (patio) indicando las herramientas (regla, escuadra, transportador, gis, etc.) que se requieren en este caso. Por lo que es posible realizar las actividades con o sin uso de tecnología (computadora, tableta, teléfono móvil, etc.).

En una siguiente fase, está en proceso la experimentación con alumnos de nivel secundaria (medio básico), medio superior y superior, ya que la actividad permite graduar la complejidad; donde participen los profesores como parte del proceso de instrumentación de la propuesta y un investigador-observador para el registro de datos; además se contempla realizar la actividad sin el uso de computadora en medios abiertos (aula o patio escolar) y con el uso de tecnología.

5. Referencias

Apóstol, T. (1980). *Calculus* (Volumen 1). Reverte.

Brousseau, G. (1999). Educación y Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática, 12*(1), 5-38.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Zorzal.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowlwdge in a social practuce framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics, 58* (3), 299-333.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en matemática educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*, 54-62.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Castela, C. (2016). When Praxeologies Move from an Institution to Another: an Epistemological Approach to Boundary Crossing. En R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth y H. Rück (Eds.). *Proceedings of the KHDM Conference: Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline* (pp. 153-161). Universitätsbibliothek Kassel.

Colegio de Bachilleres. (2003). *Matemáticas 3*. Limusa.

Cordero, F. y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14*, 422-431.

Cuevas, C. (2013). *Matemáticas 4*. Oxford

Cuevas, C.A. y Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *El Cálculo y su Enseñanza, 7*, 108-119.

Cuevas, C.A., Delgado, M. y Martínez, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. *Logos, Ciencia y Tecnología, 10*(2), 20-38.

Delgado, M. (2016). Registros para una función real cualquiera de variable real. *El Cálculo y su Enseñanza, 6*, 1-28.

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Ellis, J., Kelton, M. y Rasmussen, C. (2014). Student Perceptions of Pedagogy and Associated Persistence in Calculus. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 661-73.

Euler, L. (2003). *Introducción al análisis de los infinitos*. Sociedad Andaluza de Matemáticas Thales.

Loch, B. y Lamborn, J. (2016). How to make mathematics relevant to first-year engineering students: perceptions of students on student-produced resources. *International Journal of Ma-*

thematical Education in Science and Technology, 47(1), 29-44. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1044043

Museo Del Prado. (2020). *El sueño de la razón produce monstruos*. Caprichos 43, Francisco de Goya. https://www.museodelprado.es/coleccion/obras-de-arte

Saint-Exupéry, A. (1971). *Le Petit Prince*. Alianza.

Spivak, M. (1988). *Calculus*. Ediciones REPLA.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Trouche, L. (2016). Didáctica de las matemáticas: Conceptos, raíces, interacciones y dinámicas de Francia. En J. Monaghan, L. Trouche y J. Borwein. *Matemáticas y herramientas, instrumentos para Aprendizaje* (pp. 219-256). Springer.

Trouche, L. (2018). Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza –una historia de trayectorias. *Educación Matemática, 30*(3), 9-40. http://doi: 10.24844/EM3003.01

CAPÍTULO 13. DISEÑO DE SIMULACIONES EN GEOGEBRA PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS

José Iván López Flores, ivan.lopez.flores@gmail.com
Carolina Carrillo García, cgcarolin@hotmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Resumen

El presente capítulo presenta una guía propuesta para el diseño de simulaciones en GeoGebra para la enseñanza de las matemáticas. Si bien el uso de las simulaciones en la enseñanza de las ciencias es extendido y existe un gran número de investigaciones que reportan su uso, no encontramos una metodología para el diseño de éstas con fines didácticos, tampoco existe una caracterización de los elementos que la componen. Por tanto, se presenta el diseño de una simulación para el aula de matemáticas de secundaria mexicana partiendo desde el currículo. En dicho ejemplo, se señala una aproximación frecuencial de la probabilidad, obteniendo como resultado la simulación de una situación del lanzamiento de un dado, frecuentemente usada en la didáctica tradicional.

1. Introducción

Desde hace algunas décadas, el uso de simulaciones por computadora es un factor importante en la enseñanza aprendizaje de las ciencias, fundamentalmente por tres hechos: la aparición de nuevos estándares para la formación de los ciudadanos, en términos de su educación científica, la posibilidad de acceso a fuentes importantes de información científica y el desarrollo de la tecnología que permite el modelado y la simulación (Feurzeig y Roberts, 1999).

Una simulación es, según Alessi (2000):

> [...] cualquier programa que incorpora un modelo interactivo (uno que se puede cambiar y volver a ejecutar repetidamente) y donde un objetivo de aprendizaje es que los estudiantes comprendan ese modelo, ya sea a través del descubrimiento, la experimentación, la demostración u otros métodos (p. 177).

Las simulaciones se han usado para la enseñanza de las ciencias, por ejemplo, para enseñar aspectos relativos a la ingeniería (Dimitrov y Slavov, 2018; Jones *et al*., 2014; Sevim-Cirak y Yıldırım, 2020; Akkoyun, 2017), a la química (Daaif *et al*., 2019; Peng y Jiménez, 2019; Zendler y Greiner, 2020) y la física (Rosenberg y Lawson, 2019; Fennell *et al*., 2019; Palloan y Swandi, 2019), por medio de diversas herramientas tecnológicas.

En la actualidad, entre dichas herramientas, GeoGebra destaca en la enseñanza de las matemáticas ya que se ha mostrado muy útil como medio para la creación de simulaciones de esta asignatura. GeoGebra es un *software* de código abierto, con una gran comunidad que le da soporte, que integra múltiples representaciones y que puede ser usado en diversas áreas de la enseñanza de las ciencias y que posee una gran cantidad de utilidades computacionales para el modelado y la simulación (Bu y Schoen, 2011).

Existen también investigaciones que han usado GeoGebra como medio para la creación de simulaciones y que en su conjunto han tenido diversos objetivos. Caglayan (2018), por ejemplo, explora mediante una simulación del programa Monty Hall Game algunas posibles formas de introducir la noción de probabilidad condicional. Explicita los elementos usados, creación de listas, números aleatorios y el modelo a través de la hoja cálculo de GeoGebra. Por su parte, Gutiérrez *et al*. (2017) usan GeoGebra para observar cómo los estudiantes abordan un proceso de modelado a través de la construcción de simulaciones en el *software*, y se centran en entender cómo construyen el modelo matemático a partir del modelo real. Malgieri *et al*. (2014) usan simulaciones previamente construidas para introducir aspectos de Física Cuántica, describen brevemente el contenido de éstas explicando el contenido de los elementos presentes en las diferentes vistas del *software*.

Sin ser exhaustivos en los tipos o ejemplos de usos de las simulaciones en GeoGebra, podemos apreciar que estas investigaciones muestran una característica común que podemos encontrar de manera frecuente en este tipo de propuestas: se presentan simulaciones terminadas, con diversos fines, que el profesor puede implementar en el aula, pero muy pocas veces puede hacer adaptaciones medulares ya que no se explica de manera explícita cómo construir una simulación de cero, partiendo de ciertos propósitos didácticos, o con necesidades educativas específicas.

Aunque se pueden encontrar en internet diversos sitios que ofrecen simulaciones para la enseñanza-aprendizaje de temas diversos de la matemática y las ciencias, a menudo nos topamos con un tema para el cual aún no existe una simulación que podamos adoptar o adaptar y nos vemos ante la necesidad de construir una. Éste es un problema que puede enfrentar un profesor de matemáticas con cierta regularidad.

En este sentido, el objetivo de este capítulo es proponer una guía para el profesor de matemáticas y ciencias en general para el diseño de simulaciones, teniendo como punto de partida los requerimientos del currículum y posteriormente ir definiendo elementos propios de la simulación como son: el modelo que lo gobierna, así como elementos de control, diseño y orden didáctico.

2. Metodología para el diseño de simulaciones

Existen muchas situaciones clásicas del aula de matemáticas de las que se han hecho simulaciones; en realidad, casi cualquier situación que implique un modelo matemático definido a partir de expresiones analíticas, físicas, geométricas, etc. Es susceptible de ser simulada con fines didácticos.

Por otra parte, observando la simulación como una herramienta más por la cual los profesores pueden optar para incluir en sus aulas, con base en la experiencia docente de los autores, se presentan algunos motivos que podrían justificar su construcción:

1. Dificultad para acceder a una situación real. Una simulación permite abordar situaciones que pueden ser difíciles de recrear de manera real. El lanzamiento de un objeto desde los 100 metros de altura, por ejemplo, o en el caso de la química, el manejo de sustancias peligrosas.
2. Mejor interacción estudiante-situación. La simulación, y las representaciones empleadas en ella, permiten la aproximación controlada a la situación por parte del estudiante. Es decir, aspectos como la variación de parámetros o el dinamismo de la representación permiten un medio para la construcción del conocimiento matemático en juego.

3. Optimización de tiempo. Este aspecto se puede observar en diversos sentidos. Por ejemplo, las simulaciones permiten realizar diferentes experimentos en una sola sesión de clases. Asimismo, el registro de los datos observados puede automatizarse por medio de la simulación empleada.
4. Optimización de recursos. En muchos casos, el costo que implicaría experimentar directamente con la situación real puede ser muy alto.

En este mismo sentido, Clark *et al*. (2009, p. 6) mencionan algunas ventajas del uso de simulaciones:

1. Se requiere poco tiempo para capacitar a los estudiantes y profesores en su uso.
2. Permiten la exploración e investigación en tiempos curriculares cortos.
3. Permiten enfocar al estudiante en lo importante.
4. Son muy flexibles para ser integrados a la currícula.

Además, existen diversas situaciones en las que es posible/deseable construir una simulación. Partiendo de estos aspectos, se presentan en las secciones siguientes las pautas que consideramos pertinentes para la construcción de una simulación. A continuación, ejemplificamos desde su inicio el proceso de creación de una simulación en GeoGebra que puede ser integrada a la actividad del aula de matemáticas.

2.1 Punto de partida: el currículum

Para una simulación que va a ser diseñada con propósitos didácticos es lógico tomar como punto de partida los objetivos requeridos en los planes y programas o en los libros de texto. Así, un primer paso para el diseño es la identificación en el currículum de la situación susceptible de ser modelada.

En la escuela secundaria mexicana, en particular en el subsistema Telesecundaria (11-13 años), en el libro de Matemáticas del profesor se plantea para la secuencia 13 lo siguiente:

Tiempo de realización	Dos sesiones.
Eje temático	Análisis de datos.
Tema	Probabilidad.
Aprendizajes esperados	Realiza experimentos aleatorios y registra los resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial.
Intención didáctica	Conocer diferentes situaciones en las que interviene el azar y realizar algunos experimentos aleatorios para registrar sus resultados y analizar su frecuencia.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *¿Qué es el azar? ¿Qué es aleatorio?* Sesión 2. *Juegos de azar y Matemáticas* **Informático** Sesión 2. *¿Cuántas veces ocurre?*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisuales** *Incertidumbre, azar y aleatoriedad* *Utilización de la hoja de cálculo en la probabilidad*

Figura 1. Objetivos de la secuencia 13 del Libro para el Profesor, Matemáticas 1. Secretaría de Educación Pública, SEP (2018a, p. 67).

Vemos que el libro plantea una aproximación frecuencial a la probabilidad (Batanero, 2005), noción basada en la idea de que la noción de probabilidad emerge de la exploración de los estudiantes de la ley de los números grandes, que se define como el número hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse, en un gran número de ensayos repetidos en las mismas condiciones (Batanero *et al*., 2005). Asimismo, ésta es la primera aproximación que se propone en los libros de texto de matemáticas en la escuela secundaria mexicana (León *et al*., 2020).

En este caso, se propone el uso de un dado, el cual se lanza de manera repetitiva hasta que con suficientes lanzamientos las frecuencias relativas se aproximan a la probabilidad teórica.

b) Lancen 30 veces un dado al aire, observen el resultado y regístrenlo en la tabla. El número de veces que cae cada número del dado es su frecuencia absoluta.

Cara superior del dado que cae (evento)	Conteo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
uno			
dos			
tres			
cuatro			
cinco			
seis			
	Total	**30**	$\frac{30}{30} = 1$

Figura 2. Actividad propuesta para el lanzamiento de dados en el Libro para el estudiante, Telesecundaria, Matemáticas 1. SEP (2018b, p. 91).

a) Si se realizaran otros 30 lanzamientos, ¿se obtendrían los mismos resultados? Justifica tu respuesta. ______________________

b) Si este experimento continuase por varios cientos de lanzamientos, ¿que se esperaría que ocurriera con las frecuencias relativas de los eventos “cae4” y “cae 5”?

Figura 3. Actividad propuesta para el lanzamiento de dados, SEP (2018b, p. 93).

Las actividades planteadas para el estudiante implican dos hechos que justifican el diseño e incorporación de una simulación al trabajo de la secuencia 13, primero se requiere un número grande de repeticiones para aproximar la probabilidad mediante sus frecuencias relativas y es deseable que el estudiante realice más de una vez el experimento.

2.2 Elementos para el diseño: El modelo matemático/físico/geométrico de la situación

Una vez delimitada la necesidad desde el currículum, pasamos a una fase de determinación de elementos de ésta, el primer punto para empezar a trabajar en GeoGebra es la determinación del modelo. Los modelos detrás de las situaciones pueden ser de naturaleza variada, por ejemplo, pueden estar definidos a través de expresiones analíticas, así como por los parámetros que son necesarios, implícitos en la situación.

Es importante señalar que cuando se quiere hacer la simulación de una situación es necesario conocer a profundidad el modelo que está detrás de ella. Por ejemplo, si hablamos del lanzamiento de un objeto, además de considerar las fórmulas que gobiernan el objeto, tenemos que tomar en cuenta el parámetro gravedad y los correspondientes a la velocidad inicial y ángulo de disparo.

Tabla 1. Ejemplos de situaciones, sus modelos y parámetros. Elaboración propia.

Situación	Modelo	Parámetros
Tiro parabólico	Modelo analítico: Función cuadrática $\{x = v0\ cos\ cos\ (\theta)\ \ t\ y = v0\ sen(\theta)t{-}gt^2\ \ /2$	Constante gravedad. Velocidad inicial. Ángulo de tiro.
Lanzamiento de una moneda	Modelo probabilístico, un espacio muestral equiprobable: {águila, sol}.	Número aleatorio. Contadores para águila, sol y lanzamientos totales.
Cicloide	Modelo geométrico de una rueda que gira sobre una superficie sin resbalar. Representación paramétrica: $\{x = r\ (t{-}sen(t))\ y = r(1{-}\ cos\ cos\ (t))$	Radio de la circunferencia.

En este caso, el modelo es un modelo probabilístico, el espacio muestral está formado por los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Con igualdad de probabilidad 1/6 para cada uno de estos casos.

Hay que considerar también los diversos contadores que usamos para llevar la cuenta de la evolución de la situación, uno para el número de veces que sale uno, dos hasta el seis y otro para el número total de lanzamientos. Así como el número aleatorio generado por GeoGebra, en este caso con la función d = AleatorioEntre(1,6).

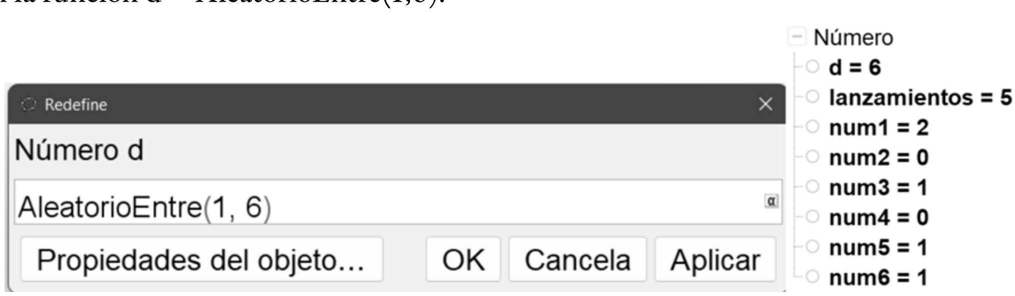


Figura 4. Definición de los parámetros para el caso de lanzamiento de un dado en GeoGebra. Elaboración propia.

2.3 Elementos de control

Los elementos de control son aquellos elementos propios del medio o programa que permiten una interacción controlada entre la situación simulada y el estudiante, tales como botones, deslizadores, segmentos, etc.

GeoGebra tiene un lenguaje con una sintaxis propia, sin embargo, es posible incorporar las funciones de Javascript, lo que le da una potencia y versatilidad mayor. Son tres las formas en las que podemos desencadenar la acción en el *software*: al hacer clic sobre un elemento (tal es el caso del botón que estamos configurando), al actualizar, por medio de la función de arrastre, por ejemplo y por medio de Javascript.

En el caso del lanzamiento del dado, los elementos de control están dados por botones, uno que lo lanza y otro que reinicia la acción. Es decir, la automatización del lanzamiento de la moneda y el otro la posibilidad de empezar con otro experimento.

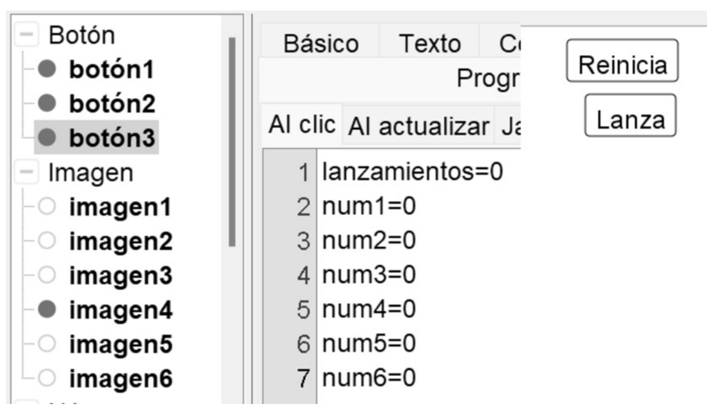


Figura 5. Definición de los botones para el control de la situación del lanzamiento de un dado en GeoGebra. Elaboración propia.

En este punto cabría señalar que para la configuración de los elementos de control es necesario conocer los principios básicos de la programación de GeoGebra: scripts secuenciales, de decisión y repetitivos.

Scripts secuenciales

Son una serie de pasos, uno tras otro, que se ejecutan al desencadenarse la acción. Como ejemplo está el código del botón “Reinicia”, que cada vez que se le hace clic hace las siguientes acciones:

Tabla 2. Script secuencial del botón “Reinicia” en GeoGebra. Elaboración propia.

Código	Acción
ActualizaConstrucción[ ]	Recalcula valores de la construcción.
num1 = Si[d == 1, num1 + 1, num1]	Si sale 1, aumenta el contador num 1 en 1.

Código	Acción
num2 = Si[d ==2, num2 + 1, num2]	Si sale 2, aumenta el contador num 2 en 1.
num3 = Si[d ==3, num3 + 1, num3]	Si sale 3, aumenta el contador num 3 en 1.
num4 = Si[d ==4, num4 + 1, num4]	Si sale 4, aumenta el contador num 4 en 1.
num5 = Si[d ==5, num5 + 1, num5]	Si sale 5, aumenta el contador num 5 en 1.
num6 = Si[d ==6, num6 + 1, num6]	Si sale 6, aumenta el contador num 6 en 1.
lanzamientos = lanzamientos + 1	Aumenta en 1 el contador total.

Scripts de decisión

A veces también llamados condicionales, son usados para discriminar entre realizar una u otra acción en dependencia de una condición, su estructura es la siguiente:
Si (<Condición>, <Entonces>, <Si no>), por ejemplo en la expresión, de la Tabla 2:
Si (d == 1, num1 + 1, num1), Si el número aleatorio es 1, entonces súmale 1 al contador num1, si no, asígnale num1.

Scripts Repetitivos

Son usados cuando queremos repetir una tarea un número de veces conocido, su estructura es la siguiente:

Secuencia(<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>), por ejemplo la expresión Secuencia(x^i, i, 1, 5), devolverá una lista con 5 funciones y en la vista gráfica aparecen graficadas. <Expresión> puede tomar otras funciones como la construcción de secuencias de polígonos, puntos, rotaciones, traslaciones, etc.

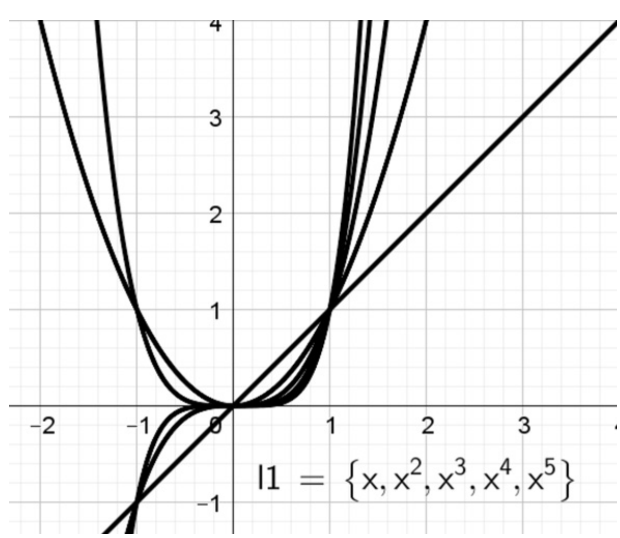


Figura 6. Secuencia de funciones en GeoGebra. Elaboración propia.

Se parte de la idea de que un script es en esencia un proceso automatizado ejecutado por GeoGebra siguiendo alguna lógica definida por el programador. Los tipos descritos anteriormente permiten crear una gran variedad de objetos.

2.4 Elementos de diseño

Son elementos que el programador decide incorporar al diseño, en esencia no contribuyen a la toma de decisiones o control sobre la situación, pero que sí permiten que la situación simulada se sienta más real. Se pueden presentar imágenes, texto o animaciones que nos permiten visualizar la situación con la que estamos interactuando.

Es decir, una estructura definida como la de la Figura 5 permitirá perfectamente realizar nuestro experimento, pero ésta trata de dados y no vemos dados, así que podemos optar por incorporar la aparición de imágenes de los dados con las caras correspondientes al valor aleatorio.

Figura 7. Imágenes que GeoGebra muestra dependencia del valor aleatorio. Elaboración propia.

Estas imágenes se actualizan automáticamente conforme el valor de "d" es actualizado con el botón "Lanza".

Los elementos de diseño pueden ser básicos como éste: aparición de imágenes de modo automático, sin embargo, dependiendo de la pericia, paciencia y tiempo, pueden ser tan elaboradas como se quiera, por ejemplo, simulando el dado en la ventana 3D de GeoGebra y haciéndolo girar mediante el uso de funciones paramétricas. Las posibilidades son infinitas.

Una opción para aumentar los conocimientos sobre este tipo de elementos es analizar el trabajo de otros, en particular en la página web: www.geogebra.org/ se pueden descargar diseños que mediante la vista de *Protocolo de Construcción* permiten conocer los pormenores, paso a paso, de la definición de este tipo de elementos.

2.5 Elementos de orden didáctico

En estos momentos la simulación está casi completa, pero regresando de nuevo al currículum podemos incorporar elementos que contribuyan al cumplimiento de los objetivos curriculares propuestos, en este caso, la comprensión de la probabilidad desde una aproximación frecuencial. El diseñador puede incorporar texto estático:

FRECUENCIA: Es el número de veces que se repite un valor o dato de análisis en una tabla. Hay dos tipos de frecuencia: la absoluta y la relativa.

Figura 8. Texto estático en GeoGebra. Elaboración propia.

O texto dinámico para los distintos contadores de la simulación, y que se actualiza en dependencia de las acciones que el usuario realiza, si al lanzar el dado sale 2, se actualiza el valor correspondiente.

CARA DEL DADO:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Frecuencias:	19	17	15	18	22	12

Figura 9. Texto dinámico en GeoGebra. Elaboración propia.

También podría incluir un gráfico de barras dinámico, del mismo modo que la tabla, éste se actualiza automáticamente.

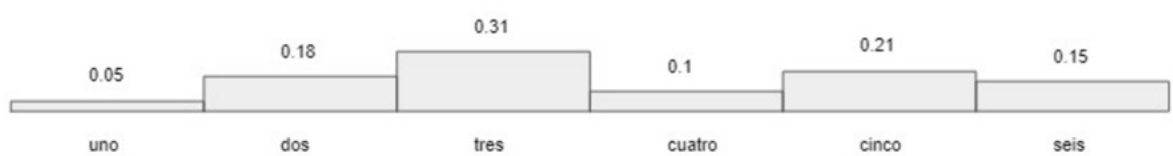


Figura 10. Gráfico de barras dinámico en GeoGebra. Elaboración propia.

De esta forma, el profesor/diseñador puede elegir qué elementos presentar en dependencia de los objetivos curriculares perseguidos. Así, la secuencia del libro de texto puede acompañarse con una simulación construida por el docente tomando en cuenta el referente institucional, el libro de texto y libro para el profesor, así como las características que él considere necesarias acorde con el grupo. Esto, finalmente, constituye un medio didáctico controlado que permitiría al estudiante interactuar con una situación que conoce: el lanzamiento de un dado. Así, incorporados todos los elementos, la simulación puede quedar de este modo:

Figura 11. Vista final de una simulación en GeoGebra para el lanzamiento de un dado. Elaboración propia.

3. Conclusiones

Si bien el uso de simulaciones en la enseñanza de las ciencias y en particular de las matemáticas no es nuevo, pensamos que la elaboración sistemática de ellas, planteada en este documento, permitiría a los profesores construir herramientas tecnológicas útiles para sus estudiantes.

El punto de partida fueron los requerimientos institucionales, el plan de estudio que plantea objetivos que son la guía para el diseño de la simulación. En el caso que atendimos, el plan de estudios nos presenta una situación en la que la noción de probabilidad es construida por el estudiante a través de una aproximación frecuencial. De esta forma dos aspectos son importantes, el número de veces que hay que lanzar un dado y el número de veces que tendríamos que realizar el experimento; en este caso, la simulación permitió atender ambos aspectos.

Consideramos que esta propuesta puede apreciarse como una invitación para aquellos profesores que tienen conocimientos básicos de GeoGebra para animarse a desarrollar sus propias simulaciones. En el proceso de construcción de una simulación el profesor/diseñador tiene la posibilidad de incorporar elementos que, desde su conocimiento y experiencia, contribuyan a la construcción del significado buscado.

En esta simulación se asumió una postura un tanto pasiva para el estudiante en el sentido de que la simulación completa es propuesta por el profesor/diseñador, una vuelta de tuerca deseable, posterior, a esta situación sería dejar parcialmente construida la simulación y permitir al estudiante decidir, por ejemplo, qué información va a mostrarse. Sabemos que es complicado, pues los tiempos escolares pocas veces lo permitirán, pero consideramos que involucrar al estudiante en el diseño es una vertiente que puede explorarse.

4. Referencias

Akkoyun, O. (2017). New simulation tool for teaching-learning processes in engineering education. *Computer Applications in Engineering Education, 25*(3), 404-410.

Alessi, S. (2000). Building versus using simulations. En J. Spector, T. Anderson (Eds.). *Integrated and holistic perspectives on learning, instruction and technology* (pp. 175-196). Springer.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 8*(3), 247-263.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer.

Bu, L. y Schoen, R. (2011). GeoGebra for model-centered learning in mathematics education: An introduction. En L. Bu y R. Schoen (Eds.). *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 1-6). Sense Publishers.

Caglayan, G. (2018). GeoGebra Simulations of the Monty Hall Game Show. *North American GeoGebra Journal, 7*(1) 25-32.

Clark, D., Nelson, B., Sengupta, P. y D'Angelo, C. (2009, Octubre). *Rethinking science learning through digital games and simulations: Genres, examples, and evidence* [Conferencia]. Learning science: Computer games, simulations, and education workshop sponsored by the National Academy of Sciences, Washington, DC.

Daaif, J., Zerraf, S., Tridane, M., Benmokhtar, S., Belaaouad, S. y Wang, S. (2019). Pedagogical engineering to the teaching of the practical experiments of chemistry: Development of an application of three-dimensional digital modelling of crystalline structures. *Cogent Education, 6*(1), 1-14.

Dimitrov, D. M. y Slavov, S. D. (2018, 31 de mayo al 02 de junio). *Application of GeoGebra software into teaching mechanical engineering courses* [ponencia]. MATEC Web of Conferences (Vol. 178). EDP Sciences. https://doi.org/10.1051/matecconf/201817807008

Fennell, H. W., Lyon, J. A., Magana, A. J., Rebello, S., Rebello, C. M. y Peidrahita, Y. B. (2019, Octubre). Designing hybrid physics labs: combining simulation and experiment for teaching computational thinking in first-year engineering [Ponencia]. *IEEE Frontiers in Education Conference (FIE).*

Feurzeig, W. y Roberts, N. (1999). *Modeling and simulations in science and mathematics education*. Springer-Verlag.

Gutiérrez, R., Prieto, J. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación matemática, 29*(2), 37-68.

Jones, B. D., Setareh, M., Polys, N. F. y Bacim, F. (2014). Application of an Online Interactive Simulation Tool to Teach Engineering Concepts Using 3D Spatial Structures. *International Journal of Web-Based Learning and Teaching Technologies, 9*(3), 18-36.

León, J., López-Flores, J. y Carrillo, C. (2020). Significados de la probabilidad presentes en libros de texto de primer año de secundaria en México. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33*(2), 78-88.

Malgieri, M., Onorato, P. y De Ambrosis, A. (2014). Teaching quantum physics by the sum over paths approach and GeoGebra simulations. *European Journal of Physics, 35*(5), 1-21.

Palloan, P. y Swandi, A. (2019). Development of learning instruments of active learning strategy integrated with computer simulation in physics teaching and learning at Makassar State University. *Journal of Physics: Conference Series, 1157*(3). 1-6.

Peng, Z. y Jiménez, J. L. (2019). KinSim: A Research-Grade, User-Friendly, Visual Kinetics Simulator for Chemical-Kinetics and Environmental-Chemistry Teaching. *Journal of Chemical Education, 96*(4), 806-811.

Rosenberg, J. y Lawson, M. (2019). An Investigation of Students' Use of a Computational Science Simulation in an Online High School Physics Class. *Education Sciences, 9*(1), 49.

Sevim-Cirak, N. y Yıldırım, Z. (2020). Educational use and motivational elements of simulation games for mining engineering students: a phenomenological study. *European Journal of Engineering Education, 45*(4), 550-564.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2018a). *Libro para el Maestro, Matemáticas. Primer Grado. Telesecundaria*. Secretaría de Educación Pública-Dirección General de Materiales Educativos en México.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2018b). *Matemáticas. Telesecundaria. Primer grado.* Secretaría de Educación Pública-Dirección General de Materiales Educativos en México.

Zendler, A. y Greiner, H. (2020). The effect of two instructional methods on learning outcome in chemistry education: The experiment method and computer simulation. *Education for Chemical Engineers, 30*, 9-19.

Capítulo 14. Diseño de actividades didácticas que integran entornos tecnológicos, para la enseñanza-aprendizaje del cálculo

Rosa-Elvira Páez Murillo, rosa.paez@uacm.edu.mx
Universidad Autónoma de la Ciudad de México, México

Resumen

En este capítulo se presentan ejemplos de actividades didácticas que integran entornos tecnológicos utilizados en contextos reales de enseñanza. Trabajo que se realiza en el marco del Proyecto de Enseñanza del Cálculo, en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, y que desde los inicios del proyecto, en 2006, a 2020 contó con la colaboración del Doctor François Pluvinage, a quien aquí se rinde homenaje. El diseño de las actividades didácticas está fundamentado en la teoría de Representaciones Semióticas y la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y para su implementación en el aula de clase se utiliza la metodología de enseñanza ACODESA. Dada la situación actual de pandemia que obligó a una modalidad de educación no presencial, se plantean algunas reflexiones de trabajo en estas circunstancias.

1. Introducción

En el interés de instrumentar propuestas didácticas, en contextos de enseñanza del cálculo, un punto medular corresponde al diseño de actividades didácticas, tareas, o en términos generales como lo expresa García (2019), material curricular para la enseñanza. La importancia del proceso de diseño de tareas ha sido mencionada por diferentes investigadores en educación matemática y fue objeto de estudio en ICMI 22 (Margolinas, 2013), en el que se especifica que el diseño de las tareas es fundamental para la eficacia en la enseñanza, pues éstas son la esencia del aprendizaje matemático. Su diseño, según García (2019), obedece a dos fines que no necesariamente son disjuntos. El primer fin hace referencia al interés del investigador por indagar sobre algún aspecto de la enseñanza y el aprendizaje matemático y el segundo corresponde a la puesta en práctica en el aula de clase. Estos dos fines integran un trabajo teórico-práctico que en el quehacer de profesores-investigadores está relacionado con la motivación para la realización de investigación, y en donde el foco principal corresponde al diseño de material para la enseñanza.

El trabajo que se realiza al diseñar actividades didácticas se fundamenta en la Teoría de Representaciones Semióticas y la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático (ETM), las cuales se contextualizan en este capítulo, a través de una tarea. Seguidamente se presentan dos tipos de actividades didácticas que integran entornos tecnológicos: **la actividad didáctica de exploración libre y de exploración guiada**. Continuando con la presentación de la metodología de enseñanza ACODESA en las que se implementan estas actividades y didácticas y finalizando con algunas reflexiones y perspectivas del trabajo realizado.

2. Marco teórico

En este trabajo de investigación, el diseño de tareas y actividades didácticas en relación con conceptos matemáticos del cálculo diferencial está fundamentado en la teoría de sistemas de representación semiótica (Duval, 2006), la cual coloca en relevancia las formas semióticas de representación de los objetos matemáticos y la coordinación entre registro de representación semiótica.

En relación a la conversión del registro gráfico al algebraico, Duval (1988) explica que la dificultad del paso de la representación gráfica a una ecuación tiene que ver con el desarrollo de la habilidad para distinguir las variables visuales que entran en juego y de las características cognitivas propias de la tarea para promover la articulación entre representaciones. De aquí la importancia que tiene el proceso de diseño de tareas, cuyo punto de partida es el registro gráfico, de acuerdo con Duval, la explicitación de variables visuales pertinentes que corresponden a las características significativas de una escritura algebraica. Para el análisis de las *características cognitivas* propias de la tarea a la que se hace referencia, se integra la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak *et al*., 2016).

Para contextualizar al lector dentro de la teoría ETM, y aplicarla de manera concreta a una tarea, los elementos dentro del plano epistemológico, los procesos cognitivos dentro de la dimensión cognitiva, las génesis que articulan los planos mencionados y los planos que relaciona el trabajo entre génesis, se utilizará una de las tareas diseñadas en relación al concepto de asíntotas (ver Figura 1), y el análisis cognitivo realizado para los incisos b y c de ésta.

La figura de la derecha representa la gráfica de una función f, acompañada de sus tres asíntotas proporcionadas por el sistema GeoGebra.

Inciso 1.a: ¿Qué dominio tiene la función f?

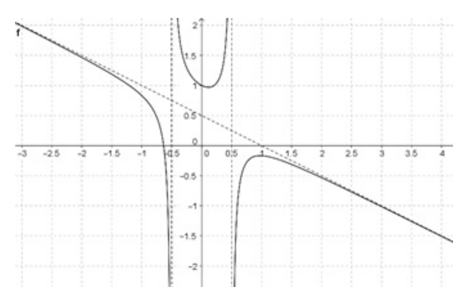
Inciso 1.b: ¿Qué límite m tiene la razón

$$\frac{df(x)}{dx}$$

cuando x tiende a ∞? Justifica tu respuesta.

Inciso 1.c: ¿Qué límite tiene la diferencia cuando x tiende a $-\infty$? Justifica tu respuesta.

Inciso 1.d: Especifica las ecuaciones de cada una de las asíntotas y argumenta por qué corresponden a asíntotas.



Gráfica de una función racional.

Inciso 1.e: Intenta construir con GeoGebra la Figura 1. Entrega la copia de la función introducida con este fin, acompañada de su expresión algebraica, aun cuando no obtengas exactamente el resultado solicitado.

Figura 1. Tarea diseñada para estudiantes de ingeniería en un curso de Cálculo Diferencial en el semestre 2019-I. Elaboración propia.

El ETM permite ubicar los elementos en relación con el concepto matemático en cuestión, las cuales se presentan en el plano epistemológico. Es decir, como lo mencionan Kuzniak y Richard (2014) el plano epistemológico está ligado a la organización matemática. El primer elemento al que hace referencia el ETM considera la representación del objeto matemático, y se etiqueta como **representamen**. Aquí se consideran las diferentes representaciones del objeto matemático al que hace referencia Duval y que son contemplados en la actividad didáctica. Por ejemplo, en el caso de la tarea que se presenta en la Figura 1 se puede considerar en el registro gráfico el plano cartesiano, la cuadrícula, las rectas, la función racional y sus polos, los puntos de intersección con los ejes tanto de las rectas como de la función; en el registro algebraico, la ecuación de recta, la rutina que está relacionada con el proceso algorítmico para encontrar la asíntota oblicua, y los límites que tiene que calcular. Igualmente se considera el vocabulario específico y general como, por ejemplo, función racional, razón, límite, diferencia, asíntotas, ecuaciones, rectas, entre otros. El segundo elemento contemplado en el plano epistemológico corresponde a los **artefactos** necesarios y/o pertinentes para el desarrollo de la tarea como tal. Estos pueden ser, como en el caso de la tarea mostrada en la Figura 1, artefactos de tipo material como la cuadrícula, artefactos de tipo simbólico como las rutinas a desarrollar (procesos algorítmicos) y artefactos tecnológicos como GeoGebra, Graph o la calculadora. Y el tercer elemento es el **referencial**, que corresponde al fundamento matemático necesario para el desarrollo de la tarea, como por ejemplo para nuestro tema, la definición de asíntota, noción de límite, ecuación de la recta, función racional, asíntotas de una función racional y las consecuencias de la forma de la función (grados de los polinomios, polos).

En el plano cognitivo se establecen tres procesos, el de visualización, el de construcción y el discursivo. Estos procesos, como lo especifican Kuzniak y Richard (2014), están relacionados a la actividad y a la ejecución de tareas de los individuos. El proceso de visualización relacionado con la decodificación e interpretación de los signos (Kuzniak, 2018) y en el que se contempla la distinción que establece Duval (2005) entre **visualización icónica** relacionada con la percepción inmediata y la **visualización no icónica** que identifica los objetos sobre la percepción inmediata para hacerlos operatorios. Por ejemplo, para el caso de las preguntas b y c de la tarea mostrada en la Figura 1, la visualización icónica corresponde a una recta con inclinación y dos curvas asociadas con esta recta. La visualización no icónica tiene que ver con la relación que se debe establecer entre los límites solicitados y los elementos gráficos de la recta (pendiente y ordenada al origen). El proceso de **construcción** dependiente de los artefactos utilizados y las técnicas asociadas (Kuzniak, 2018) y que para el caso de los incisos b y c la construcción del tipo algebraica tendrá que ver con un artefacto simbólico que relaciona la rutina algebraica que se establece para obtener la asíntota oblicua con los parámetros m y b de la ecuación de la recta, los cuales puede identificarlos a través del artefacto material de la cuadrícula en que reposa la gráfica dada. Por último, se tiene el proceso discursivo de prueba consistente en razonar y probar.

Los elementos en el plano epistemológico y los procesos en el plano cognitivo se vinculan a través de la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva. Esta activación puede darse a través de las preguntas diseñadas en la tarea o actividad didáctica, y en general, no suele darse de manera individual, sino que integra dos o las tres génesis establecidas, dando lugar a la aparición de los planos que las relacionan como, por ejemplo, el plano semiótico-instrumental etiquetado como [Sem-Ins]. Estos planos muestran el trabajo matemático realizado cuando se activan dos de las génesis, como se ejemplifica en la Figura 2.

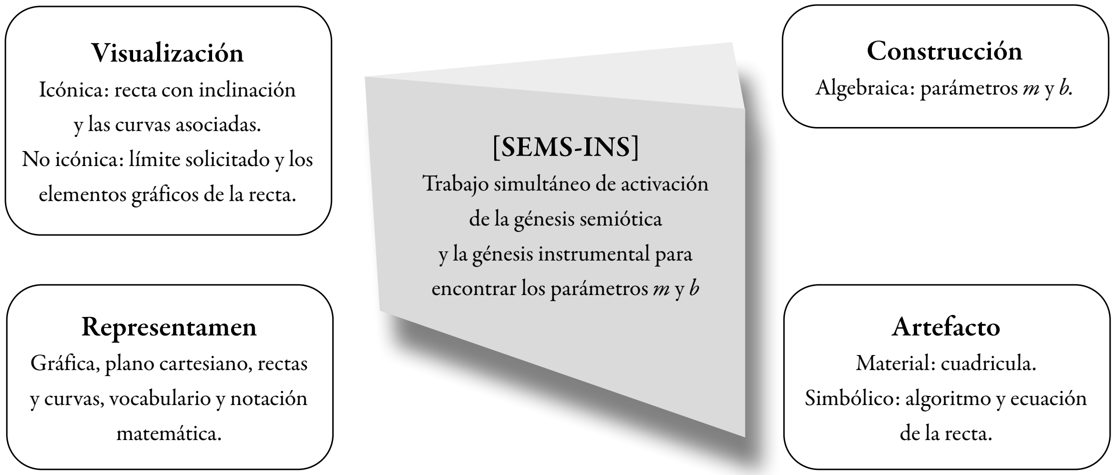


Figura 2. Espacio de trabajo matemático contemplado en los incisos b y c de la tarea de la Figura 1. Elaboración propia.

Para finalizar esta sección, en Páez *et al.* (2019) se puede consultar el análisis cognitivo de la tarea para el inciso e y el proceso de construcción que el estudiante debe desarrollar para obtener éxito. En el desarrollo específico de esta pregunta, una ruta cognitiva de tipo estrictamente instrumental, en la que se haga uso de GeoGebra, pero sin tener control de su eficiencia, no es la más útil, ni tampoco asegura el éxito en la tarea propuesta. Lo que hace reflexionar en que la génesis instrumental de los artefactos considerados, o instrumentación en el sentido de Rabardel (1995), difícilmente se puede adquirir sin intervención del profesor.

3. Actividades didácticas que integran un entorno tecnológico

En Páez y Pluvinage (2018), se manifiesta que "en modalidad presencial con el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC), una primera reflexión del profesor se presenta antes del trabajo de aula: diseñar un documento para el trabajo activo de los estudiantes" (p. 309). Esta afirmación sigue siendo vigente en la actualidad, en una modalidad no presencial, ya que como se menciona al inicio de este capítulo, estas actividades son la esencia del aprendizaje matemático. En este sentido, el profesor debe de explorar primeramente las capacidades y/o limitaciones del artefacto tecnológico. Ello en función de los objetivos de aprendizaje que se proponen en el programa académico y de los aprendizajes y nociones que se pueden obtener de acuerdo con cada artefacto tecnológico. Luego, la actividad didáctica se diseña tomando en cuenta estos elementos, la organización matemática en relación con el concepto matemático en cuestión y a los procesos cognitivos que se pretenden activar en los estudiantes.

En este trabajo, el diseño de la actividad didáctica que integran entornos tecnológicos se ha clasificado en dos tipos. Una actividad que puede ser de **exploración libre**, que corresponde a una familiarización de los estudiantes con el artefacto tecnológico y el tema de estudio, o de **exploración guiada**, en el que instrucciones específicas en cuanto al uso del artefacto son proporcionadas y son planteadas preguntas de reflexión en torno al tema. A continuación se especifica a detalle cada una de las actividades didácticas mencionadas y se proporcionan ejemplos de cada una de éstas.

La actividad didáctica de exploración libre es la actividad diseñada con una consigna breve o indicación inicial de acuerdo con el objetivo de indagación. En esta actividad el estudiante tiene autonomía para explorar. Por ejemplo, para el caso del tema de asíntotas, con el artefacto tecnológico GeoGebra, la indicación puede ser la siguiente: Explorar la(s) respuesta(s) que GeoGebra proporciona en relación con la(s) recta(s) asíntota, mediante la escritura en la barra de entrada de una instrucción de la forma $y = f(x)$, como, por ejemplo, $y = 1/x$, o de la forma general de una ecuación, como por ejemplo $xy - 1 = 0$. Esta indicación puede ser suficiente para que el estudiante empiece a explorar similitudes y/o diferencias del resultado proporcionado en la ventana algebraica y en la ventana gráfica, favoreciendo un ambiente de cuestionamientos alrededor del tema de estudio.

En relación con la exploración del comando de Asíntota, hay que tomar en cuenta las variaciones de éste en relación con la versión que se utiliza. Por ejemplo, en la versión de la calculadora de GeoGebra en línea,[1] la versión 6 y en la versión 5.0.620.0 –d, al utilizar el comando Asíntota en la barra entrada, la ventana emergente, muestra sólo "objeto". Con la diferencia de que en las versiones anteriores a la mencionada o en el manual que aparece en línea,[2] al utilizar el comando Asíntota, la ventana emergente muestra tres opciones de objeto: cónica, función o curva implícita. Factor que se debe de tomar en cuenta al momento de diseñar las actividades.

Este tipo de actividad didáctica aún no ha sido puesta en práctica con estudiantes, dentro del proyecto al que se hace referencia en el inicio de este capítulo. Pero sí se colocó en práctica en un taller para profesores en EICAL10, en relación con la exploración de comando Tangente con GeoGebra. Estas actividades pueden ser consultadas en el capítulo 4 escrito por el Doctor François Pluvinage con relación a la conferencia EICAL10, impartida en 2019.

Sin embargo, y de acuerdo con lo que especifica Pluvinage (en prensa), la exploración libre no produce efectos de aprendizajes completos, por lo que actividades de exploración guiada son necesarias como una segunda etapa de una trayectoria de aprendizaje.

La actividad didáctica de exploración guiada es una propuesta de Carrión, *et al*., (2016), que corresponde a la actividad que se diseña tomando en cuenta el *software* que se va a utilizar, como, por ejemplo, en nuestro caso, GeoGebra o Graph, y en la que se dan instrucciones específicas de su uso, pero a su vez se acompaña con preguntas, que promueven la reflexión del estudiante y que favorecen la construcción del concepto matemático que se esté abordando. Asimismo, estas preguntas pueden promover que afloren las concepciones que pueden estar obstaculizando la construcción de éste (ver Páez y Pluvinage, 2019). En la Figura 3 se presenta un ejemplo de una actividad de exploración guiada diseñada para integrar Graph. Esta actividad fue diseñada en función de la potencialidad de este artefacto. A diferencia de GeoGebra, Graph no cuenta con los comandos Asíntota y Límite. Por lo que el diseño se enfocó a la utilización de la herramienta *Alejar* para tener una vista de la función en el macro-espacio y de esta manera que el estudiante pueda predecir su comportamiento. Así, se pueden evidenciar asíntotas horizontales u oblicuas (con la situación de desaparición de la(s) asíntota(s) vertical(es)). Esto a manera de introducción, ya que también se usó la herramienta *Línea de tendencia* (lineal) para acercar al estudiante a la ecuación de la asíntota oblicua u horizontal, continuando con instrucciones y preguntas de reflexión encaminadas a desarrollar la noción de asíntota de una función en términos de distancia, de acuerdo con la propuesta pedagógica que se plantea en Páez y Pluvinage (2019).

1. https://www.geogebra.org/calculator consultado el 13 de enero de 2021.

2. https://wiki.geogebra.org/es/Comando_As%C3%ADntota consultado el 13 de enero de 2021.

Al igual que en la *exploración libre*, como en la *exploración guiada*, es al profesor a quien le corresponde la organización de una síntesis de los descubrimientos de los estudiantes después de cierto tiempo de trabajo del estudiante. Esto es en una modalidad presencial. Pero en una modalidad no presencial y como lo han manifestado Bakker y Wagner (2020), no sólo hay preocupación en perder aspectos de una comunicación corporal del aprendizaje y la interacción cara a cara con compañeros y profesores, también los estudiantes pierden evidencias del proceso de instrumentalización. Por lo que, en la orquestación realizada por el profesor, puede haber una ausencia de la coordinación de las diversas formas empleadas por los estudiantes al usar los instrumentos en juego. Más aún, factores de desigualdades sociales estarán presentes en la modalidad no presencial, como se explica en el siguiente apartado.

4. ACODESA: Una metodología de enseñanza

La implementación de las actividades de exploración guiada en el aula de clase se ha realizado usando la metodología de enseñanza ACODESA, que integra elementos del aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión. Esta metodología, cuyo origen corresponde a experimentaciones con estudiantes de posgrado (Páez, 2004; Borbón, 2003) también experimentada en niveles de secundaria (Hitt y Quiroz, 2019), de primer año de universidad (Páez y Pluvinage, 2019) y con formación de profesores (Páez y Vivier, 2013), contempla el trabajo a realizar por parte del estudiante en cada una de las sesiones de clase o de experimento de enseñanza, en tres fases: el trabajo individual, el trabajo en pequeños equipos (dos o tres estudiantes), y el debate con todo el grupo. Una cuarta fase es la autorreflexión por parte del estudiante fuera del aula de clase, de la actividad realizada y de la discusión sostenida con sus compañeros para una reconstrucción de ésta. Finalmente, una quinta fase que corresponde a la institucionalización del conocimiento que ocurre después de cierto número de discusiones con todo el grupo y cuando el profesor considera que hay elementos para que los estudiantes puedan realizar la apropiación de este conocimiento. O como sucede en experimentos de enseñanza en contexto real, la institucionalización se realiza cuando el profesor se ve obligado a continuar con el programa académico, de acuerdo con uno de los objetivos que debe de cumplir (Robert y Coulange, 2009).

Las experimentaciones en las que se ha utilizado ACODESA han sido realizadas de manera presencial. Esto hasta antes de este "terremoto educacional"[3] producto de la pandemia de 2020. No obstante, esta metodología de enseñanza permanece vigente en una manera no presencial. A continuación se muestran algunas de ellas.

En la primera etapa que corresponde a un *trabajo individual*, se le entrega la actividad didáctica al estudiante para que inicie la exploración en relación con el tema que se va a estudiar. En la educación presencial, la entrega de la actividad didáctica es de manera impresa y entre los elementos a tomar en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje corresponden: la comprensión de la actividad por parte del estudiante ya sea a través de preguntas verbales y/o sus gestos corporales, su interacción con el artefacto tecnológico (GeoGebra, Graph, Calculadora), los tiempos de desarrollo, y obviamente las respuestas proporcionadas de manera escrita en la actividad. Es decir, el profesor

3. Como lo define Michelle Artigue en su conferencia en EICAL11. https://pt-br.facebook.com/MateduCINVESTAV/videos/experimentaci%C3%B3n-y-tecnolog%C3%ADas-digitales-en-educaci%C3%B3n-matem%C3%A1tica-una-larga-histor/1841075376069035/

de manera directa puede evidenciar en gestos, preguntas verbales y respuestas escritas, la situación en relación con el aprendizaje que se está produciendo en esta primera etapa. En la educación no presencial, la entrega y devolución de la actividad didáctica es de manera digital. Afectando esto a que de acuerdo con los recursos económicos de los estudiantes, sus gustos y/o habilidades digitales, decidan imprimirla o no, utilizar un procesador de texto o no, repercutiendo en la forma de trabajo que incide en la semiótica utilizada en los diferentes registros de representación, y que se va a evidenciar en las respuestas dadas por el estudiante. Una analogía a lo que se hace referencia, se evidencia en la integración de GeoGebra y el impacto en la escritura del estudiante, ya que en los comandos, como por ejemplo el de Límite, la estructura es lineal (Páez y Pluvinage, 2018).

Cinvestav

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Proyecto Enseñanza del Cálculo
Agosto 9 de 2018
Actividad Dos. Trabajo Individual

Nombre: ____________________

Instrucciones:
1. Utiliza lapicero de tinta negra. Si cambias de parecer, escribe con un lapicero de tinta roja. No taches nada de lo que escribes.
2. Si el espacio no te es suficiente, utiliza el reverso de esta hoja.

Gracias por participar

....

Abre **Graph** y realiza las siguientes actividades.

1. En la pestaña de **función**, en **insertar función,** introduce la expresión $f(x)=\left(1-2x^2+x^5\right)/(1-x^4)$.
   a. ¿Tiene esta función asíntotas? En caso positiva identifícalas y explica el procedimiento usado para su identificación.
   b. Utiliza la herramienta **alejar,** repetida veces, y observa en la vista gráfica el comportamiento de la función. ¿Qué puedes decir de este comportamiento?
   c. En la pestaña **Editar,** en **Opciones**, coloca en **Posiciones decimales** 10. Utiliza el icono de **Evaluación** (sexto icono de izquierda a derecha) para encontrar $f(500)$ y $f(-500)$. Vacíe los valores obtenidos en la tabla siguiente.

x	$f(x)$

   d. En la pestaña de **función,** luego **insertar serie de puntos,** introduce los dos puntos hallados en el inciso anterior y dale **Aceptar.** En la ventana algebraica aparece "Serie de puntos 1". Luego en la misma pestaña de función, active **Línea de tendencia,** luego **Lineal** y **Aceptar**.
   ¿Qué ecuación obtienes en la ventana algebraica?
   e. En la pestaña **Zoom,** puedes utilizar **normalizar (Ctrl+D)** y/o **ajustar todo** para tener diferentes visiones de la recta trazada y la gráfica de la función. ¿Qué se puede decir de la recta y esta gráfica?
   f. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la recta obtenida y una de las asíntotas que obtuviste en el inciso a?
   g. En la pestaña de **función**, en **insertar función** introduce la expresión: $\left(\frac{(1-2x^2+x^5)}{(1-x^4)}\right)-(mx+b)$ donde $(mx+b)$ corresponde a la ecuación de la recta hallada en el inciso d.

Cinvestav

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Nombre :

   ¿Qué representa esta nueva función, en términos de la distancia de separación en la abscisa x entre la gráfica de la función $f(x)$ dada inicialmente y la recta?
   h. ¿Cuál sería el $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)$? y ¿cómo explicarías el resultado obtenido con límite en términos de la distancia de separación entre la gráfica de la función $f(x)$ dada inicialmente y la recta?
   i. ¿Cuál sería el $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)$? y ¿cómo explicarías el resultado obtenido con límite en términos de la distancia de separación en la abscisa x entre la gráfica de la función $f(x)$ dada inicialmente y la recta?

En un nuevo archivo de **Graph,** realiza la siguiente actividad.

2. En la pestaña de **función**, en **insertar función,** introduce la expresión $f(x)=x^4/(2x^3-x^2-1)$.
   ¿Tiene esta función asíntotas? En caso positiva identifícalas y explica el procedimiento usado para su identificación.

En un nuevo archivo de **Graph,** realiza la siguiente actividad.

3. En la pestaña de **función**, en **insertar función** introduce la expresión $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.
   Haciendo uso de **Graph**, describe el procedimiento que seguirías para identificar si la función dada tiene o no asíntotas.

4. Se dice que la gráfica de la función $g(x)=\frac{1}{x+2}+\sqrt{x}$, cuando x tiende al infinito, tiene la forma de una **rama parabólica**. Apoyándote sobre la distancia entre los puntos de misma abscisa x *de la función g(x)* y de la semi-parábola $y=\sqrt{x}$, justifica esta expresión.

Figura 3. Actividad didáctica de exploración guiada diseñada para estudiantes de primer año de la licenciatura en ingeniería. Elaboración propia.

Considerando que este capítulo se enfoca en especial a actividades didácticas de exploración libre y guiada, la cual integra entornos tecnológicos para el desarrollo de ésta, y dado que se está realizando una reflexión de ACODESA de manera no presencial, un aspecto fundamental a considerar, en sus dos primeras etapas, es la ergonomía del artefacto tecnológico utilizado para desarrollar la actividad de exploración guiada, que en términos de visualización afecta la exploración pretendida. Por ejemplo, para trabajar en el microespacio, haciendo uso de los deslizadores en GeoGebra para resolver tareas como la que se plantea en la Figura 1, la exploración necesita observaciones detalladas de varias instrucciones y resultados asociados, lo que exige en el caso de estudio de las asíntotas, una pantalla suficientemente amplia. Este aspecto, en la educación presencial, se suple "fácilmente" trasladando a los estudiantes a las aulas de computación y las condiciones en términos de la ergonomía de artefactos, equipamiento del entorno y condiciones óptimas de ambiente son iguales para todos los estudiantes. Es decir, en el desarrollo del aprendizaje de cada uno de los estudiantes se puede partir de una igualdad en cuanto a condiciones de trabajo y ambiente de aprendizaje se refiere. En el caso del artefacto tecnológico, se utiliza un artefacto ergonómicamente adecuado y su uso es en términos de la instrumentalización para la actividad didáctica. No sucede así de manera no presencial, ya que, si el estudiante cuenta con tan sólo un teléfono celular, éste debe de usarse no sólo para el objetivo ya mencionado sino que además es su medio de comunicación en cuanto a las conexiones sincrónicas se refiere. Por lo que el tamaño de la pantalla no es un factor favorable para la exploración que se realiza en cálculo diferencial (ni en el macro ni en el microespacio), ni tampoco quizás para las conexiones sincrónicas que en este momento se requieren.

En la educación no presencial, la desigualdad en relación con artefactos tecnológicos y ambientes de aprendizaje en los que están inmersos los estudiantes deberán considerarse para ir adecuando cada una de las etapas que se contemplan dentro de la metodología de enseñanza. Por ejemplo, en la primera etapa de trabajo individual será conveniente que el estudiante la desarrolle de manera asincrónica. En el caso de la segunda etapa, que corresponde al *trabajo en pequeños equipos* (2 o 3 estudiantes), quizás no es funcional para un grupo de 35 estudiantes o más, la creación de 10 o más pequeñas salas virtuales. Esta etapa es muy vulnerable en esta modalidad ya que se requiere fomentar un trabajo verdaderamente cooperativo y no de tipo colaborativo en donde los estudiantes se reparten el trabajo para hacer la entrega de éste. Para la etapa de *debate científico e institucionalización del conocimiento* la digitalización inmediata de los documentos que contienen las respuestas dadas por los estudiantes, permite compartir de manera textual los diferentes acercamientos a las preguntas planteadas, con el fin de generar discusión, retroalimentación tanto por parte de los estudiantes como del profesor, y permitiendo la conformación de un nuevo material que se comparte con los estudiantes como notas de clase y que junto al documento que se diseña para presentar formalmente los contenidos matemáticos, hacen parte de la institucionalización del conocimiento. Es decir, las notas de clase que usualmente son tomadas por el estudiante son nutridas por las notas de clase digitales, producto de la discusión generada en la misma. La comunicación escrita que se procura en las sesiones sincrónicas de la etapa del debate científico podría nutrir el aprendizaje de los estudiantes con relación al fortalecimiento de la habilidad de justificar y/o argumentar ya que, en las investigaciones realizadas con los estudiantes de primer año de universidad se han evidenciado deficiencias de esta índole.

En resumen, esta metodología de enseñanza, que favorece la construcción social del conocimiento en matemáticas, permite contemplar el ambiente de aprendizaje en el que está inmerso cada uno de los estudiantes, así como factores de equidad social. Por lo que resta seguir implementando en una educación no presencial para tener elementos que ayuden a refinar respuesta a interrogantes de ¿cómo organizar el trabajo en pequeños equipos de una manera eficiente y equitativamente social?, ¿qué tipo de registro y qué signos de representación se privilegian en estos ambientes?

5. Conclusiones

Un aspecto que favorece y hace eficaz la labor del docente, ya sea de manera presencial o no, es contar con un repertorio importante de actividades didácticas, las cuales son la esencia del aprendizaje matemático. Siendo éstas las que dinamizan los entornos virtuales.

Torres y Perera (2010) expresaron que se iba a necesitar tiempo para que las universidades tradicionalmente presenciales llevaran adelante procesos *e-Learning* y *blended-Learning* de calidad que consolidaran el cambio hacia otra forma de enseñar y aprender en la universidad. Pero la pandemia ha obligado a que, en los diferentes niveles educativos se utilicen plataformas y se exploren recursos que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es la necesidad imperiosa de optimizar procesos, de experimentar, de diseñar y/o rediseñar, en pro de la calidad y consolidación del proceso *e-Learning*. Para ello es necesario un espíritu de "exploración", característica principal de un gran hombre, cuyo recuerdo nos llena de gratitud, admiración, respeto y cariño: Doctor François Pluvinage.

Agradecimientos

A la memoria del Doctor François Pluvinage por su permanente colaboración de asesoría en el Proyecto Enseñanza del Cálculo.

A la Universidad Autónoma de la Ciudad de México por el apoyo económico proporcionado al Proyecto Enseñanza del Cálculo en sus diferentes fases y para la realización de la estancia de investigación de agosto 2019 a junio 2020 en el marco de año sabático.

Al Laboratorio de Didáctica André Revuz (LDAR)-Universidad Paris Diderot, Francia, y al grupo de Espacio de Trabajo Matemático, por la invitación a la estancia de investigación.

6. Referencias

Bakker, A. y Wagner, D. (2020). Pandemic: lessons for today and tomorrow? *Educational Studies in Mathematics, 104,* 1-4.

Borbón, A. (2003). Concepciones de profesores sobre varios conceptos del cálculo diferencial [Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN].

Carrión, V, Pluvinage, F. & Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM Mathematics Education, 48*, 809-826.

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235-253.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 10*, 5-54.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

García, F.J. (2019). Introducción a "Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos". *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 1-4.

Hitt, F. y Quiroz, S. (2019). Formation et evolution des representations fonctionelles-spontanees a travers un apprentissage socioculturel. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 24*, 75-106.

Kuzniak, A. (2018, 13 al 18 de diciembre). *La teoría de los espacios de trabajo matemáticos desarrollo y perspectivas* [Ponencia]. Sexto Simposio Internacional ETM Espacio de Trabajo Matemático, Valparaiso, Chile.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de Vista y Perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17* (4-I), 5-15.

Kuzniak, A., Tanguay D. y Elia I. (2016), Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 721-737.

Margolinas, C. (2013, 22 de julio). *Task design in mathematics education* [ponencia]. Conference of the ICMI Study 22, Oxford, Inglaterra. https://hal.archivesouvertes.fr/hal-00834054v3

Páez, R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*. [Tesis de Doctorado, CINVESTAV-IPN].

Páez, R. y Pluvinage, F. (2018, 13 al 18 de diciembre). *Exploración guiada en un ambiente con tecnología interactiva, caso de las ramas infinitas de una función* [ponencia]. Sexto Simposio Internacional ETM Espacio de Trabajo Matemático, Valparaíso, Chile.

Páez, R. y Pluvinage, F. (2019). Estudio de las asíntotas de una función en un ambiente con tecnología dinámica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39(3), 331-369.

Páez, R., Pluvinage, F. y Vivier. L. (2019). Analyse cognitive d'une tâche d'évaluation dans le cadre de la théorie des espaces de travail mathématique. En J. Pilet y C. Vendeira (Eds.). *Actes du séminaire de didactique des mathématiques* (pp. 163-164). IREM de Paris-Université Paris Diderot. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03041140/document

Páez, R. E. y Vivier, L. (2013). Teachers′ conceptions of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*, 209-229.

Pluvinage, F. (en prensa). *Exploración libre, exploración guiada y resolución de problemas* [manuscrito presentado para su publicación]. En Aportaciones en educación matemática, ciencia y tecnología.

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Collins.

Robert, A. y Coulange, L (2009). La double approche didactique et ergonomique. *Tangente Education*, (*11*), 12-13

Torres, J. y Perera, V. (2010). La rúbrica como instrumento pedagógico para la tutorización y evaluación de los aprendizajes en el foro online en educación superior. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, (*36*), 141-149.

CAPÍTULO 15. INTEGRANDO GEOGEBRA A LA MATEMÁTICA EDUCATIVA MEDIANTE DIFERENTES PERSPECTIVAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Sergio Rubio-Pizzorno, sergio.rubio@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, y Comunidad GeoGebra Latinoamericana
Monika Dockendorff, mdockend@uc.cl
Pontificia Universidad Católica de Chile y Comunidad GeoGebra Latinoamericana
Francisco J. Anaya-Puebla, paco_anaya@hotmail.com
Universidad Politécnica de Puebla
William Poveda Fernández, william.poveda@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica y Comunidad GeoGebra Latinoamericana
Diana Bustamante-Hernández, diana.bustamante@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, y Comunidad GeoGebra Latinoamericana

Resumen

Durante la pandemia del covid-19, GeoGebra se ha presentado como una herramienta que le otorga autonomía a las y los profesores a la hora de tomar decisiones docentes en el tránsito hacia los ambientes en línea. Esto se debe a que GeoGebra es un *software* libre y sus herramientas de autor son abiertas. Otro aspecto que le da autonomía a las y los profesores en términos generales, es contar con marcos teórico-metodológicos para fundamentar sus diseños instruccionales.

En este capítulo, se presentan cuatro experiencias educativas que integran GeoGebra (como *software* y herramientas de autor) y se fundamentan en diferentes marcos teórico-metodológicos de la Matemática Educativa, tales como apoe, Resolución de Problemas, Pedagogías de la Práctica y Proceso de Negociación. Estas experiencias dan cuenta de lo importante de considerar el valor epistémico de GeoGebra para una integración digital que ponga en el centro a las matemáticas.

1. Introducción

La integración de tecnología digital en educación es un hecho derivado del confinamiento por la pandemia del 2020, por lo que GeoGebra se presenta como una alternativa para el desarrollo de la educación en ambientes presenciales y en línea, en especial por su distribución abierta, tanto en *software* libre como con sus herramientas de creación y gestión de recursos educativos abiertos. El presente capítulo presenta cuatro experiencias educativas que integran a GeoGebra y se caracterizan por estar fundamentadas en perspectivas teórico-metodológicas de la Matemática Educativa. Las cuatro experiencias presentadas abarcan diferentes escenarios, tales como cursos de educación superior, formación de profesores y desarrollo profesional docente:

- Diseño instruccional para estudiantes de ingeniería, con base en la teoría APOE integrando el *software* GeoGebra.
- Resolución de tareas con profesores de matemáticas en formación, con base en la resolución de problemas integrando el *software* GeoGebra.
- Acercamiento a diferentes facetas de la práctica docente con profesores de matemáticas en formación, con base en las pedagogías de la práctica integrando el *software* GeoGebra.
- Elaboración de diseños didácticos con profesores en ejercicio, con base en el proceso de negociación integrando tanto el *software* como las herramientas de creación y gestión de recursos educativos abiertos de GeoGebra.

Como complemento a este capítulo, el lector o lectora puede revisar el video del grupo de trabajo *El impacto de GeoGebra en la Educación: docencia e investigación* (EICAL 11, 2020) realizado en el undécimo Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas. En este video se encuentran las cuatro presentaciones asociadas a cada una de las experiencias educativas aquí presentadas. Así también, en el Libro GeoGebra (Rubio-Pizzorno, 2020a) puede encontrar los *applets* (construcciones GeoGebra) usados en el capítulo, para explorarlos y complementar su lectura con ejemplos dinámicos y todo el material complementario del grupo de trabajo.

2. Sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución con GeoGebra

En primer lugar, vamos a comenzar con una experiencia educativa de la elaboración de un diseño instruccional sobre sistemas de ecuaciones lineales, el cual se implementó con estudiantes de la carrera de ingeniería en la Universidad Politécnica de Puebla en México.

Este diseño instruccional fue elaborado en el marco del proyecto de maestría de Anaya-Puebla (2020), en el cual se articulan aspectos teóricos de una descomposición genética y la multirepresentación, junto al uso del *software* GeoGebra.

2.1 Fundamentos teóricos-metodológicos del diseño instruccional

En el caso de la *descomposición genética*, ésta corresponde a un constructo de la teoría APOE —por Acción, Proceso, Objeto y Esquema— (Arnon *et al.*, 2014) que consiste en una descripción de la forma en que un concepto matemático de interés se construye cognitivamente. Específicamente se recurre a la descomposición genética desarrollada por Borja (2015) para el conjunto solución a un sistema de ecuaciones lineales.

En cuanto a la *multirepresentación*, Arzarello y Robutti (2010) proponen que el uso de herramientas tecnológicas permite el desarrollo de nuevos entornos en donde las restricciones habituales del papel y lápiz cambian radicalmente, además pueden ofrecer diversas opciones para que los estudiantes puedan interactuar, integrando y utilizando simultáneamente diferentes registros de representación. Estos entornos los consideraremos de representación múltiple o multi-representación, ya que ésta permite al usuario disponer de dos o más representaciones del mismo objeto matemático.

De esta manera, la descomposición genética fundamenta las ideas matemáticas a desarrollar en el diseño instruccional, añadiendo el potencial del ambiente de matemáticas dinámicas de

GeoGebra, en tanto la posibilidad de contar con multirepresentaciones de los objetos matemáticos allí construidos.

2.2 Actividades del diseño instruccional usando GeoGebra

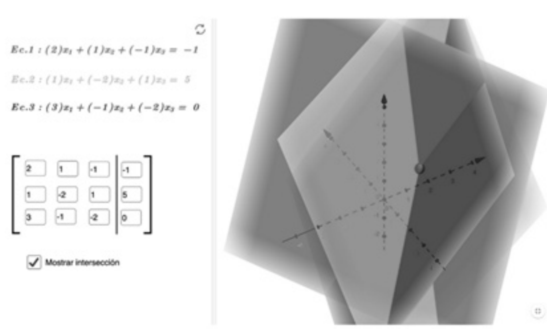
En el diseño instruccional se consideraron temas comunes en un plan de asignatura para las ingenierías. Así también, cabe destacar que si bien la descomposición genética que fundamenta el diseño considera los sistemas en R^n, se consideraron únicamente los sistemas en $\mathbb{R}^3$, puesto que este espacio permite representar geométricamente tanto los sistemas de ecuaciones como su conjunto-solución.

2.2.1 Sistemas de ecuaciones equivalentes

Esta actividad tiene como objetivo promover que los estudiantes reflexionen respecto a ciertas preguntas: ¿en qué consiste el proceso de resolver un sistema de ecuaciones lineales?, ¿qué es un sistema de ecuaciones lineales equivalente?, ¿qué es la solución de un sistema?

Inicialmente se propone un sistema de ecuaciones para que los estudiantes lo resuelvan con lápiz y papel, para que luego puedan capturar cada una de las operaciones realizadas en la representación de la matriz aumentada en el *applet* de GeoGebra (Figura 1a). La casilla de verificación *Mostrar intersección*, hace visible la solución del sistema, en este caso un sistema consistente en una única solución. En caso de que las operaciones capturadas por las o los estudiantes no sean correctas, la intersección de los tres planos no coincidirá con el conjunto solución y, por lo tanto, no será un sistema de ecuaciones equivalentes.

Finalmente, se espera que las y los estudiantes puedan resolver el sistema e incluso contrastar la información proporcionada por la representación matricial del sistema y su representación geométrica (Figura 1b).



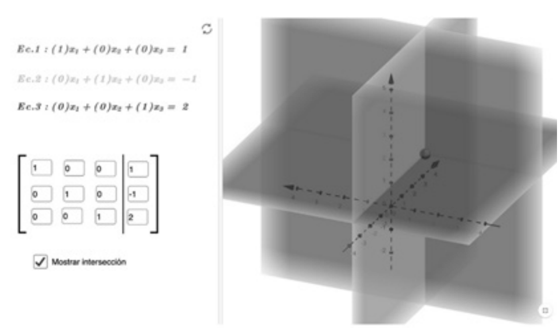


Figura 1a. *Applet* de actividad Sistemas de Ecuaciones Equivalentes
Figura 1b. *Applet* de solución a Sistemas de Ecuaciones Equivalentes. Fuente: Anaya-Puebla (2020).

2.2.2 Sistemas de ecuaciones lineales (n > m)

En esta actividad se propone un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y tres incógnitas $\{x + 2y + z = 3, 2x + 3y + z = 1\}$, junto a un sistema de ecuaciones escalonado y equivalente $\{x-z = -7; y + z = 5\}$. Esta actividad tiene como objetivo promover la reflexión respecto del efecto del procedimiento de solución sobre el espacio en donde habita el sistema originalmente –en este caso R^3–, pues en algunos casos los estudiantes pueden considerar que el sistema escalonado se encuentra en R^2.

La tarea final de la actividad consiste en que el estudiante proporcione el conjunto solución del sistema de ecuaciones en su forma vectorial, es decir, la ecuación de la recta intersección de ambos planos. El *applet* permite a los estudiantes verificar sus producciones, ya que en caso de que el conjunto solución capturado en el *applet* sea erróneo, la recta no corresponderá a la intersección de ambos planos. La Figura 2 ilustra el estado inicial del *applet* (Figura 2a) y la solución de la actividad (Figura 2b).

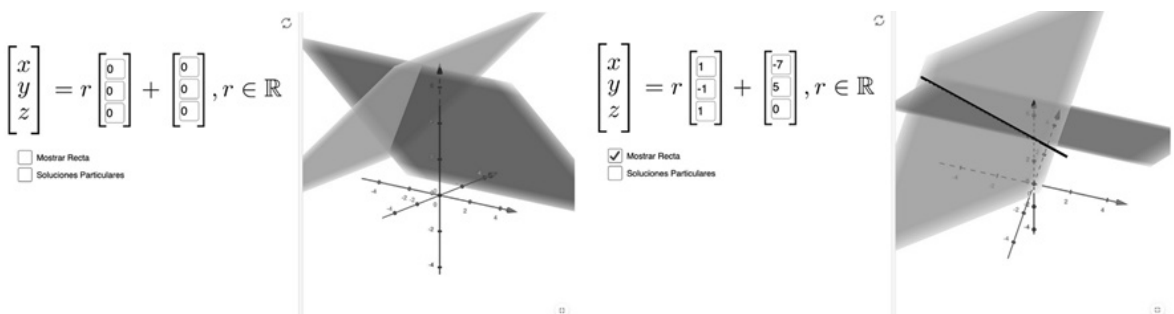


Figura 2a. *Applet* de Sistemas de Ecuaciones Lineales (n>m).
Figura 2b. *Applet* de solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (n>m). Fuente: Anaya-Puebla (2020).

2.3 Reflexiones finales

En ambos ejemplos se nota claramente como el *software* GeoGebra permite disponer de diferentes tipos de representaciones matemáticas (multirepresentaciones), las cuales están dinámicamente relacionadas entre sí, de tal suerte que al modificar una, el resto también se modifica en consecuencia. Así también, añadir más representaciones matemáticas a la algebraica (única considerada en la descomposición genética de base) amplía el alcance matemático y el potencial instruccional.

Si bien la implementación de este diseño instruccional augura una mejor comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto-solución, aún falta más investigación para determinar, por ejemplo, cuáles son los mecanismos o estructuras mentales que promueven el uso de representaciones múltiples en los estudiantes. Debido a estas prospectivas, la investigación continuará como parte de un proyecto de investigación de doctorado en la Universidad Pedagógica Nacional de México, campus Ajusco, con la intención de esclarecer el efecto del uso de la tecnología, específicamente GeoGebra y el uso de representaciones múltiples en la comprensión del tema.

3. Resolución de problemas sobre cuadriláteros usando GeoGebra

En segundo lugar, presentamos una experiencia educativa desde la implementación de tareas sobre cuadriláteros, con estudiantes de tercer semestre de la carrera de formación de profesores de matemáticas de la Universidad de Costa Rica, específicamente en la asignatura de Geometría Euclidiana. Estas tareas fueron elaboradas con base en aspectos teóricos de la resolución de problemas junto al uso del *software* GeoGebra.

3.1 Fundamento teórico-metodológico en la implementación de las tareas

Lesh y Zawojewski (2007) definen la *resolución de problemas* como "el proceso de interpretación de una situación matemáticamente donde intervienen ciclos iterativos tales como comunicar ideas, explorar, conjeturar, justificar y revisar las interpretaciones matemáticas" (p. 782). Esto se realiza a través de ordenar, integrar, modificar, revisar o refinar conceptos o teoremas. En cuanto a la integración del *software* GeoGebra al proceso de resolución de problemas, su ambiente de matemática dinámica permite crear representaciones del problema y explorarlo de manera dinámica. Esto se logra a través del arrastre de los objetos matemáticos y de la cuantificación de sus atributos (longitud de segmentos, medida de ángulos, áreas) (Poveda, 2020).

Al respecto, Leung y Baccaglini-Frank (2017) mencionan que esta exploración dinámica del problema con el uso de ambientes matemáticos dinámicos permite introducir nuevas situaciones al momento de resolver un problema matemático, por ejemplo: procedimientos para construir, argumentar y justificar, lo que fomenta habilidades y contribuye al desarrollo del pensamiento matemático.

3.2 Resolución de problemas usando GeoGebra

La propuesta de resolución de problemas articulada con el uso del ambiente de GeoGebra permite abordar los problemas desde una perspectiva dinámica. Con base en esta idea, se constituyen cuatro fases consecutivas para abordar el problema, las cuales fueron propuestas a profesores para que lo resolvieran:

1. **Entender el problema**: identificar información relevante, dar significado a los conceptos matemáticos involucrados en el problema que permitan representarlo en GeoGebra.
2. **Buscar patrones o invariantes**: utilizar la representación del problema para identificar casos particulares a través del arrastre y la cuantificación de los atributos de los objetos matemáticos.
3. **Formular conjeturas**: identificar, mediante el arrastre de objetos, patrones o invariantes entre los elementos que conforman el problema. La validación de una conjetura se basa, inicialmente, en argumentos empíricos o visuales proporcionados por GeoGebra.
4. **Validar conjeturas**: Demostrar las conjeturas mediante la presentación y construcción de un razonamiento deductivo que involucre conceptos y relaciones matemáticas, a través de procedimientos algebraicos o geométricos.

3.3 Problema sobre paralelismo

A los profesores en formación se les presentó el siguiente problema, el cual fue abordado según las fases recién mencionadas: sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, y los puntos medios de sus lados P, Q, R y S. Considerando el $PQRS$, ¿qué relación existe entre ambos cuadriláteros?

En la fase de entendimiento del problema, los estudiantes realizaron representaciones dinámicas de las condiciones iniciales del problema usando GeoGebra. Este proceso fue realizado sin complicaciones y además pudieron observar el hecho de que el cuadrilátero $PQRS$ existe aún cuando $ABCD$ no es convexo.

En la búsqueda de patrones y conjeturas, los estudiantes arrastraron los puntos *A*, *B C* y *D*, midieron los lados de ambos cuadriláteros y conjeturaron que *PQRS* es paralelogramo. Utilizaron la herramienta Relación de GeoGebra para comprobar la relación entre los lados opuestos de *PQRS* (Figura 3).

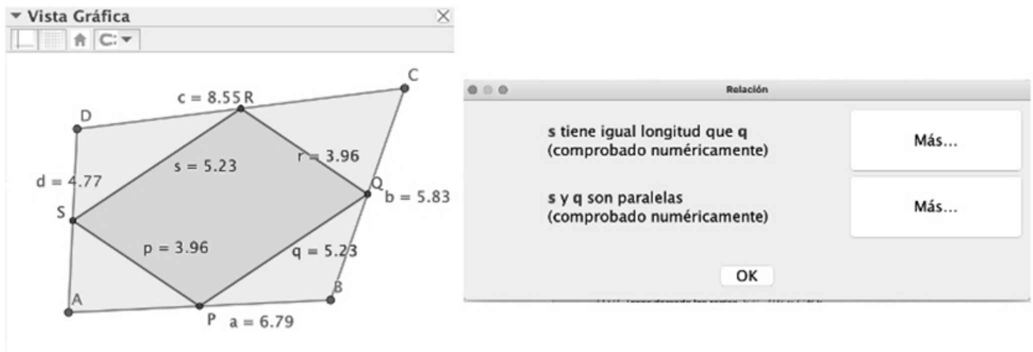


Figura 3. Solución del problema de cuadriláteros presentada por un estudiante. Elaboración propia.

Una vez identificado el tipo de cuadrilátero *PQRS* los estudiantes buscaron las relaciones entre ambas figuras, de lo cual resultaron las siguientes conjeturas: (1) el área de *ABCD* es el doble del área de *PQRS*, (2) el perímetro del paralelogramo *PQRS* es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*, (3) el paralelogramo *PQRS* es un rombo si las diagonales del cuadrilátero tienen la misma longitud, (4) el paralelogramo *PQRS* es un rectángulo si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares y (5) el paralelogramo *PQRS* es un cuadrado si las diagonales del cuadrilátero *ABCD* son perpendiculares y tienen la misma longitud (Figura 4).

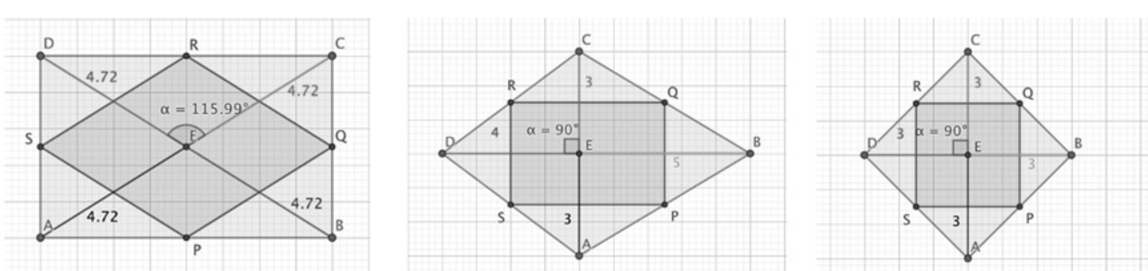


Figura 4. Relaciones encontradas por los estudiantes. Elaboración propia.

En las conjeturas anteriores, la evidencia indica que los estudiantes utilizaron GeoGebra como un medio para explorar el problema y observar patrones o invariantes basados en la cuantificación de las longitudes de los lados de los cuadriláteros. Además, identificaron y utilizaron recursos matemáticos relacionados con los paralelogramos y sus clasificaciones.

Durante la validación de conjeturas, los estudiantes evidenciaron habilidades relacionadas con la argumentación matemática, al conectar múltiples conceptos y teoremas de la geometría euclidiana, lo que, en palabras de Leung y Bolite-Frant (2015), contribuye al desarrollo de su pensamiento matemático. Por ejemplo, las conjeturas (3), (4) y (5) fueron demostradas utilizando la expresión *sí y sólo sí* en lugar de un *sí* como estaban originalmente en la fase 3.

4. Formación docente en matemáticas integrando GeoGebra

En tercer lugar, presentamos una experiencia educativa para propiciar el desarrollo de conocimientos profesionales especializados, con estudiantes de último año de la carrera de formación de profesores de matemáticas en la Universidad Católica de Chile.

Esta experiencia corresponde a un acercamiento en diferentes facetas de la práctica docente por parte de los profesores en formación, lo cual está fundamentado en aspectos teóricos de las pedagogías de la práctica, articulado con el uso de GeoGebra.

4.1 Fundamentos teóricos-metodológicos

Las *pedagogías de la práctica* (Grossman *et al*., 2009) corresponden a métodos que permiten desarrollar habilidades y conocimientos profesionales especializados con distintos niveles de aproximación, progresando hacia contextos cada vez más auténticos. El modo en que la línea formativa la fundamenta es porque se aproxima a contextos cada vez más auténticos, de manera que la línea formativa se fundamenta haciendo progresar las facetas en el ensayo profesional que conlleva el uso de tecnología desde niveles básicos y simulados a niveles cada vez más complejos y reales. De esta manera, cada una de las facetas propuestas integran el uso del *software* GeoGebra para su desarrollo.

4.2 Facetas de la práctica docente usando GeoGebra

En la Tabla 1 se describen las facetas de la práctica docente que progresan con relación al uso de GeoGebra y del rol que adquiere tanto el profesor en formación como el formador de profesores, en cada una de ellas.

Tabla 1. Facetas de la práctica docente. Elaboración propia.

+ Grado de Autenticidad -

Faceta de la práctica	Profesor(a) en formación	Formador(a) de profesores
Conocimiento y uso básico de GeoGebra	Aprendiz como usuario básico del software	Modelo de uso de software para el aprendizaje
Análisis de videos de clase con uso de GeoGebra	Observador de prácticas de aula con uso de software	Problematizador(a) de prácticas de aula
Diseño de applets usando GeoGebra	Autor de material digital de aprendizaje (screencast)	Evaluador formativo de propuestas de applets
Simulación de propuestas pedagógicas (universidad)	Profesor (simulado) que aplica su propuesta	Estudiante (simulado/a) que plantea dudas y errores
Ensayo de propuestas pedagógicas (aula escolar)	Profesor en formación que aplica su propuesta	Evaluador formativo de uso de tecnología en aula

A continuación, se describen e ilustran brevemente las cinco etapas del modelo:

4.2.1 Conocimiento y uso básico de GeoGebra

Para que los futuros profesores se familiaricen con el *software* y vayan realizando construcciones asociadas a los objetivos de aprendizaje del currículum chileno realizan construcciones por eje, guiados por cápsulas de la docente, y discuten en un foro los propósitos con que se integra la tecnología, los cuales se ilustran en la Tabla 2. Se destinan 4 sesiones a estas actividades. Parten por el eje de álgebra y funciones construyendo *applets* para aproximarse a las funciones lineales, cuadráticas y trigonométricas, además de inecuaciones y su representación. En Geometría se abordan las transformaciones isométricas, semejanzas y lugares geométricos apoyados de texto dinámico. En datos y azar se representan datos agrupados y no agrupados, se simulan experimentos aleatorios y se calculan probabilidades. Por último, en geometría 3D se analizan puntos, rectas y planos en el espacio, sólidos de revolución y redes de cuerpos geométricos. Todas estas construcciones se acompañan de foros sobre el propósito pedagógico de las construcciones dinámicas, los que se ilustran en la Tabla 2 para álgebra y datos y azar.

Tabla 2. Facetas de la práctica docente. Elaboración propia.

Álgebra	Datos y azar
Comenta brevemente sobre los posibles beneficios/obstáculos de algunos de los *applets* en general o relativo a cualquiera de los siguientes conceptos:	a) ¿Qué oportunidades ofrecen las representaciones sincrónicas y dinámicas de datos en forma bruta, gráfica y tabular para la enseñanza de la estadística y las probabilidades?
a) Comportamiento de las funciones; familia de rectas; rol de los parámetros; múltiples representaciones; resolución de problemas; equivalencia de formas algebraicas; relaciones y conexiones; generalizaciones; contenido conceptual versus procedimental.	b) En contextos de azar, la aproximación frecuencial vinculada a las tecnologías digitales ha resultado efectiva. ¿Cómo contribuye el uso de datos generados de forma aleatoria a este enfoque?
b) Hay distintas alternativas para animar los deslizadores: incrementalmente (teclado), a mano (*mouse*), automático (*software*). ¿Qué posibilidades ofrecen estas distintas modalidades dinámicas?	c) ¿De qué forma deberían contribuir las herramientas digitales de procesamiento y análisis de datos para lograr habilidades de orden superior en nuestros alumnos (análisis, interpretación y toma de decisiones)?

4.2.2 Análisis de videos de clase con uso de GeoGebra

Para que los profesores en formación analicen críticamente el uso de tecnología en el aula escolar, revisan videos de clase de temáticas y niveles diferentes, que ejemplifican prácticas docentes de integración de *software* GeoGebra.

Se destinan dos sesiones a este tipo de actividad, donde los estudiantes responden preguntas abiertas en torno a estas experiencias. El primer video corresponde a una clase de segundo medio sobre función cuadrática y parábola, donde la docente, ex alumna del programa, analiza el comportamiento de la familia de parábolas según el valor que van tomando los parámetros y las relaciona a las diferentes formas algebraicas de sus expresiones simbólicas. Ella hace uso expositivo del GeoGebra, al proyectar la imagen y ser la única que maneja el *software* (Figura 5a).

El segundo video corresponde a una clase de séptimo básico sobre los elementos secundarios de los triángulos. El profesor trabaja en la sala de computación donde cada estudiante usa un computador con GeoGebra instalado y va replicando la construcción que proyecta el docente. Finalmente analizan cómo se comportan los centros (ortocentro, circuncentro e incentro) si los triángulos cumplen ciertas características (equilátero, isósceles, rectángulo). El profesor hace uso interactivo de GeoGebra (Figura 5b). Los futuros docentes responden preguntas que problematizan ambas propuestas pedagógicas.

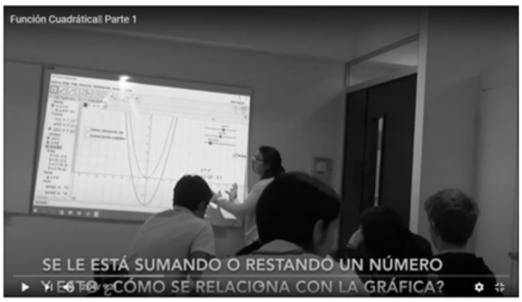


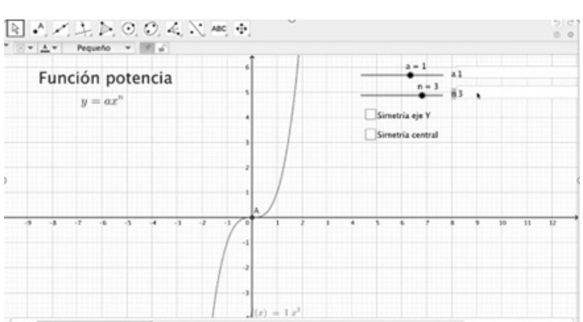
Figura 5a. Video sobre función cuadrática.
Figura 5b. Video de elementos secundarios del triángulo. Elaboración propia.

4.2.3 Diseño de *applets* usando GeoGebra

Para que los estudiantes se apropien del uso de la tecnología para el aprendizaje, en parejas diseñan *applets* de uso interactivo para la exploración o descubrimiento de conceptos o relaciones matemáticas fundamentales en los ejes de álgebra y funciones, y geometría plana. Presentan esta tarea mediante *screencast*; es decir, grabaciones de la pantalla y audio mientras se realiza alguna explicación. Además, formulan las preguntas que plantearían a sus estudiantes para promover su aprendizaje y las justificaciones del uso de la tecnología. Se ilustran producciones de estudiantes sobre función potencia (Figura 6a) y sobre simetría axial (Figura 6b).

Para esta faceta se destinan dos sesiones, donde lo fundamental es entregar retroalimentación detallada a los profesores en formación para que puedan progresar en la competencia relacionada con el espacio de autoría en el diseño instruccional, y que se puedan apropiar de estas herramientas.

Normalmente en esta primera aproximación al diseño de *applets*, los estudiantes ponen mayor relevancia a los aspectos técnicos del *software* (ya que es lo novedoso para los alumnos), sin embargo, es importante dirigirlos hacia un adecuado equilibrio y una articulación efectiva para que la tecnología sirva al aprendizaje del contenido y desarrollo de habilidades matemáticas.



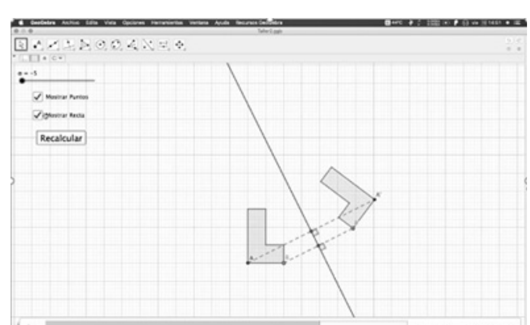


Figura 6a. *Screencast* sobre función potencia.
Figura 6b. *Screencast* sobre simetría axial. Elaboración propia.

4.2.4 Simulación de propuestas pedagógicas (universidad)

Para que los futuros profesores puedan ensayar sus propuestas pedagógicas con uso de tecnología, realizan espacios de microenseñanzas grupales en clase (aula universitaria), donde el resto de sus compañeros y los formadores simulan ser estudiantes, para lo cual se destinan dos sesiones. En esta tarea es clave la posibilidad de que los futuros profesores pongan a prueba distintas propuestas pedagógicas con uso de tecnología, ante una audiencia que, si bien es experta, simula ser del nivel para el que se diseñó la actividad, con el fin de que puedan plantear dudas y preguntas prototípicas y que los expositores respondan a los patrones que detecten. Además, esta instancia sirve de modelamiento del uso de tecnología para el aprendizaje para todos los miembros del curso, ya que la intención es generar diferentes temáticas y recursos, y se entrega retroalimentación entre pares. A continuación se ilustran las presentaciones de estudiantes que abordan el problema de Monty Hall (Figura 7a) y la construcción de los sólidos de Kepler (Figura 7b).

Figura 7a. Espacios de microenseñanza sobre el problema de Monty Hall.
Figura 7b. Espacios de microenseñanza sobre sólidos de Kepler. Elaboración propia.

4.2.5 Ensayo de propuestas pedagógicas (aula escolar)

Para que los profesores en formación apliquen sus propuestas pedagógicas con uso de GeoGebra en aulas escolares reales, en el contexto de su práctica profesional, y la implementen en sus centros de práctica con al menos una experiencia de aprendizaje con tecnología digital, la clave es que los futuros profesores utilicen recursos disponibles en sus centros de práctica, pero que expandan las posibilidades de los estudiantes para acercarse a conceptos y temáticas centrales de la matemática piloteadas previamente, usando tecnología.

Se ilustra la implementación de clases en práctica profesional de un futuro profesor enseñando homotecia (Figura 8a) y otro enseñando función par e impar (Figura 8b). Como consecuencia modelan prácticas pedagógicas de uso de tecnología a sus profesores-colaboradores de los cursos donde realizan sus prácticas, lo que es una externalidad positiva de este modelo de formación. De esta forma, las y los futuros profesores van desarrollando progresivamente habilidades y conocimientos profesionales especializados que les permiten integrar de forma efectiva las herramientas tecnológicas en sus clases.

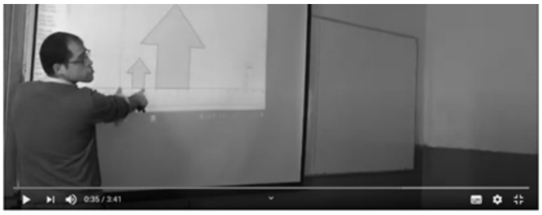


Figura 8a. Práctica profesional sobre homotecia.
Figura 8b. Práctica profesional sobre función par e impar. Elaboración propia.

4.3 Reflexiones finales

Estas facetas de la práctica docente puestas en práctica por profesores en formación contribuyen a que se pongan en situaciones cada vez más auténticas de clases, considerando el uso de GeoGebra en cada una de estas facetas de forma progresiva. Esto es muy importante, ya que los estudiantes se enfrentan a situaciones cada vez más reales de la práctica docente durante su formación, y además lo hacen utilizando tecnología digital, lo cual es un añadido que los prepara ante situaciones complejas que deberán afrontar al momento de estar en situaciones reales de aula.

En cuanto a los formadores de profesores, estos influencian la preparación de los futuros docentes al integrar la tecnología en sus clases, modelar su uso pedagógico, favorecer el ensayo en la cátedra y promover su implementación en la práctica, lo que les ayudará a estar mejor preparados para integrar exitosamente la tecnología en el aula (Uerz *et al*., 2018; Açıkgül, 2020).

5. Desarrollo profesional docente integrando GeoGebra

La cuarta y última experiencia educativa a compartir en este capítulo corresponde a una instancia de desarrollo profesional docente; es decir, trabajo con profesores en ejercicio, específicamente en el diplomado *Diseño de estrategias y recursos educativos*, impartido en el Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (también conocido por sus siglas INAOE) del estado de Puebla (México) en 2019.

El propósito de este diplomado es integrar la tecnología digital a la práctica docente, mediante la elaboración de un recurso educativo abierto con GeoGebra, por parte de los profesores, para abordar un contenido de matemáticas o física que ellos tuvieran que impartir en sus centros de enseñanza (escuela o universidad). Este diplomado se desarrolló con base en la propuesta metodológica del proceso de negociación, integrando el uso de GeoGebra para elaborar el recurso educativo abierto.

5.1 Fundamentos teóricos-metodológicos

El proceso de negociación es una propuesta metodológica de integración digital a la práctica docente, que se desarrolla al poner en funcionamiento de manera horizontal tres polos durante el diseño —por parte del profesor— de un Recurso Educativo Abierto (REA): los resultados de investigación, la experiencia docente y los ecosistemas educativos híbridos (Rubio-Pizzorno, 2018).

De los tres polos del proceso de negociación, es el de los ecosistemas educativos híbridos el que permite considerar el uso de GeoGebra en la elaboración de REA, tanto el *software* de matemáticas dinámicas, como las herramientas de creación y gestión de REA (Rubio-Pizzorno, 2020b).

5.2 Integración digital a la práctica docente usando GeoGebra

Cada polo del proceso de negociación aporta elementos que inciden en el diseño del REA: los resultados de investigación contribuyen con elementos probados científicamente que se transforman en principios de diseño; la experiencia docente permite adaptar los resultados de investigación a los contextos reales de enseñanza, tomando en cuenta las características situacionales; y los ecosistemas educativos híbridos nos permiten reconocer la existencia de diferentes tipos de tecnologías, las cuales se pueden aprovechar por separado y articuladas para aprovechar su potencial en la enseñanza y aprendizaje de nociones matemáticas (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2020).

En el diplomado llevado a cabo en 2019 las y los profesores que participaron diseñaron varios REA, de los cuales en este capítulo se considera uno para abordar el volumen de cuerpos geométricos (Argüelles y Rubio-Pizzorno, 2020).

5.3 Elaboración del REA *El volumen y sus distintos significados*

Este REA consiste en un Libro GeoGebra elaborado para abordar el volumen considerando diferentes significados (físicos, matemáticos y educativos). Estos diferentes significados son rescatados de los resultados de investigación científica, los cuales se convierten en principios de diseño y en la estructura del Libro GeoGebra; es decir, se aborda cada uno de los cinco significados se aborda en cada capítulo del Libro, más uno de introducción: 1) Característica de los objetos-volumen medibles, 2) Capacidad-volumen interno, 3) Volumen externo, 4) Volumen ocupado, 5) Volumen desplazado y 6) Volumen como cantidad numérica (Argüelles, 2019).

El Libro GeoGebra es un espacio para articular diferentes tecnologías y formatos de archivos, ya que es posible incorporar videos, imágenes, texto, *applet* GeoGebra, preguntas de respuesta abierta y opción múltiple, y archivos pdf. En la Figura 9 se observa una de las páginas del Libro GeoGebra donde se utilizan preguntas de respuesta abierta, de opción múltiple, texto y una imagen, articulados en una misma actividad didáctica.

Figura 9. Actividad I. Volumen ocupado. Fuente: Argüelles (2019).

En términos de la experiencia docente, ésta influyó en el diseño del REA al considerar los materiales que se tenían disponibles en la escuela a implementar, así como al prever las respuestas que los estudiantes podrían dar a las preguntas planteadas, lo cual quedó registrado en la trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) que se elaboró como planeación del REA.

5.4 Reflexiones finales

El proceso de negociación brinda la oportunidad de articular diferentes componentes que pocas veces entran en diálogo para abordar un propósito educativo común. Así también, permite robustecer los planteamientos llevados al aula de clases real, al considerar los aportes de la investigación, el conocimiento del profesor sobre su práctica docente, todo esto con el objetivo de integrar tecnologías digitales, en particular GeoGebra.

6. Conclusiones

Los cuatro casos presentados en este capítulo dan cuenta que es posible integrar la tecnología, específicamente GeoGebra, a varios ámbitos de la Matemática Educativa: trabajo con estudiantes, formación docente y desarrollo profesional docente. Cabe señalar que las cuatro propuestas ponen el foco en el valor epistémico (en el sentido de Rubio-Pizzorno y Montiel, 2020) del *software* GeoGebra y su relación con los aspectos didácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, aspecto clave para su exitosa integración. Esto abona al entendimiento de la tecnología digital como parte natural de los ambientes educativos y que ahora más que nunca es imperativo poner atención a las formas en que se puede integrar, tanto a la docencia como a la investigación.

7. Referencias

Açıkgül, K. (2020). The Effect of Technological Pedagogical Content Knowledge Game Activities Supported Micro-Teaching Practices on Preservice Mathematics Teachers' Self-Efficacy Perception. *Acta Didactica Napocensia, 13*(2), 157-173, https://doi.org/10.24193/adn.13.2.11

Anaya-Puebla, F.J. (2020). *Ambiente Virtual de Aprendizaje Para la Construcción del Concepto Sistema de Ecuaciones Lineales Fundamentado en la Teoría APOE* [Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.31981.54249

Argüelles, A. R. (2019). *El volumen y sus distintos significados* [Libro GeoGebra]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/atnkgywp

Argüelles, A. R. y Rubio-Pizzorno, S. (2020). Recurso educativo abierto para la construcción de diferentes significados asociados al volumen de cuerpos geométricos. En F. Macías Romero y D. Herrera Carrasco (Eds.). *Matemáticas y sus aplicaciones 15* (pp. 75-100). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://www.fcfm.buap.mx/cima/public/docs/publicaciones/MatematicasYSusAplicaciones15.pdf

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Arzarello, F. y Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM-Mathematics Education, 42*, 715-731. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0288-z

Borja, I. (2015). *Conjunto Solución a un Sistema de Ecuaciones Lineales: una mirada desde la perspectiva de la Teoría APOS* [Tesis de Doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

EICAL 11. (2020, 2 de octubre). El impacto de GeoGebra en la Educación: docencia e investigación [Video]. YouTube. https://youtu.be/1d7XjVfQnIY

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Williamson, P. W. (2009). Teaching Practice: A Cross-Professional Perspective. *Teachers College Record, 111*(9), 2055-2100.

Lesh, C. y Zawojewski, J. (2007). John Dewey revisited: Making mathematics practical versus making practice mathematical. En R. A. Lesh, E. Hamilton, J. J. Kaput (Eds.). *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 315-348). Routlegde.

Leung, A. y Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.). *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). Springer.

Leung, A. y Baccaglini-Frank, A. (2017). Introduction. En A. Leung y A. Baccaglini-Frank (Eds.). *Digital technologies in designing mathematic education tasks* (pp. vii–xvi).Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0

Poveda, W. (2020). Resolución de problemas matemáticos en GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 9*(1), 26-42. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p26-42

Rubio-Pizzorno, S. (2018). *Integración digital a la práctica del docente de geometría* [tesis de maestría, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados]. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15488.94728/1

Rubio-Pizzorno, S. (2020a). *El impacto de GeoGebra en la Educación* [Libro GeoGebra]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/hnmnp7ac

Rubio-Pizzorno, S. (2020b). Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista del Instituto GeoGebra de São Paulo, 9*(1), 10-25. http://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p10-25

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel Espinosa, G. (2020). Ecosistemas Educativos Híbridos en la investigación en Matemática Educativa. En M. I. Basniak y S. Rubio-Pizzorno (Orgs.). *Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco* (pp. 118-157). Pimenta Cultural. https://doi.org/10.31560/pimentacultural/2020.472.271-312

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.

Uerz, D., Volman, M. y Kral, M. (2018). Teacher educators' competences in fostering student teachers' proficiency in teaching and learning with technology: An overview of relevant research literature. *Teaching and Teacher Education, 70*, 12-23. https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.11.005

Capítulo 16. Interacciones franco-mexicanas para repensar la tecnología en la educación matemática, dos testimonios cruzados

Ulises Salinas-Hernández, asalinas@cinvestav.mx
cinvestav, México/ENS de Lyon, France
Luc Trouche, luc.trouche@wanadoo.fr
ENS de Lyon, France

Resumen

François Pluvinage fue una evidencia viviente de las fructíferas interacciones entre la cultura mexicana y francesa en la educación matemática. En este capítulo pretendemos ilustrar, a través de dos trayectorias de investigación, cómo funcionaron estas interacciones desde hace más de 10 años, para repensar el papel de la tecnología en la educación matemática. Combinando puntos de vista sintéticos y analíticos, así como enfoques teóricos y prácticos, los dos autores bosquejan perspectivas para futuras investigaciones, mirando más allá de las fronteras lingüísticas y teóricas, enriqueciéndose mutuamente a partir de la diversidad e inquietudes teóricas.

1. Introducción

La colaboración franco-mexicana involucró a diferentes instituciones, tanto en México como en Francia. En este capítulo, nos centraremos en las colaboraciones entre el Departamento de Matemática Educativa del cinvestav (dme-cinvestav), por el lado mexicano, y el Instituto Francés de la Educación de la ens de Lyon, por el lado francés.

No es fácil determinar el punto de partida de una colaboración determinada. Diríamos que las razones para iniciar una colaboración franco-mexicana fueron, en primer lugar, la presencia de François Pluvinage en el dme-cinvestav, como intermediario entre dos comunidades y luego, un interés común por los proyectos de *acción práctica* (Cuevas y Pluvinage, 2003) y las cuestiones planteadas por la integración de la tecnología en la educación matemática (Guin y Trouche, 1999). Esta convergencia lleva a la participación de Luc Trouche en el siguiente Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo (eical), desde su segunda edición en Saltillo (Trouche, 2009) hasta el de 2020, realizado de manera virtual debido a la pandemia. Sus conferencias siempre contaron con el apoyo de François Pluvinage, como un perfecto traductor francés-español. El 2009 fue, definitivamente, al menos para Trouche, el punto de partida de esta colaboración.

Esta colaboración ha estado marcada, además de las reuniones en eical, por sucesivas estancias científicas cruzadas, tanto en el dme-cinvestav como en el Instituto Francés de la Educación.

Desde 2009, varios estudiantes de doctorado e investigadores mexicanos han estado en el Instituto Francés de la Educación para trabajar en el tema de la tecnología en la educación matemática: Yani Betancourt, Luis Alexander Conde, Armando Cuevas, Verónica Hoyos, José del Carmen Orosco, Rosita Paez, Sandra Evely Parada, Magally Martínez Reyes, Ana Isabel Sacristán, Ulises Salinas-Hernández, Marisol Santacruz y Freddy Villamizar.

Correspondientemente, Luc Trouche fue invitado al DME-CINVESTAV durante dos meses de 2017, para trabajar con estudiantes de doctorado e investigadores y visitar diferentes instituciones interesadas en la educación matemática (CICATA, UACM, UPN, etc.). Otro investigador del Instituto Francés de la Educación, Gilles Aldon, también fue invitado desde 2009, particularmente para participar en EICAL.

Esta colaboración fue muy fructífera durante estos años. Ha marcado varias tesis doctorales (Betancourt, 2014; Salinas-Hernández, 2018; Santacruz, 2019; Orozco-Santiago, 2020), y ha alimentado el desarrollo científico que aquí queremos presentar. Este capítulo podría considerarse como una especie de logro de esta colaboración: Ulises Salinas pasó los dos últimos años (2018-2020) en el Instituto Francés de la Educación y esta larga estancia, interactuando con Trouche, brindó una oportunidad real para profundizar en los temas que se han abordado en el marco de esta colaboración franco-mexicana, abriendo, esperamos, nuevas vías para la cooperación.

Este capítulo consta, además de esta introducción, de seis secciones: la siguiente sección sitúa el surgimiento del enfoque instrumental de la educación matemática; la tercera propone un punto de vista holístico sobre el desarrollo profesional docente, considerándolo como una interacción entre docentes y recursos; la cuarta sección propone un punto de vista analítico, considerando los elementos que constituyen la actividad de los maestros: palabras y gestos; la quinta evidencia el interés de cruzar lenguas y culturas para profundizar en los enfoques sobre el trabajo docente con recursos; finalmente, la sexta sección cuestiona las necesidades de la comunidad de investigación en tiempos de pandemia.

2. Integrando la tecnología en la educación matemática

Después de algunos supuestos ingenuos relacionados con la integración de computadoras y calculadoras en la educación matemática, el final del siglo pasado y el comienzo del actual estuvo marcado por enfoques más cautelosos (Lagrange *et al.* 2003). Comprender la influencia de cada artefacto, como producto de la actividad humana, social y cultural, en la conceptualización, particularmente en la educación matemática, conduce al desarrollo, en Francia, de un nuevo enfoque teórico, denominado *enfoque instrumental de las matemáticas*, interrelacionado con otros marcos que constituyen la didáctica francesa de las matemáticas (Artigue *et al.* 2019). Trouche contribuyó a este desarrollo al estudiar el caso de las calculadoras simbólicas y los sistemas de álgebra computacionales (Guin y Trouche 1999). Este enfoque se basa en dos distinciones fundamentales (Figura 1):

- La primera entre un *artefacto* (lo que se le da o se apropia un estudiante para apoyar su actividad) y un *instrumento*, producido por esta actividad, un instrumento que es una entidad mixta, hecho del artefacto y un esquema que estructura la actividad del estudiante.

- La segunda entre dos procesos: el proceso de *instrumentación*, el artefacto que contribuye a estructurar la actividad del estudiante, y el proceso de *instrumentalización*, el estudiante adaptando, en la medida de lo posible, el artefacto a sus propias necesidades y hábitos.

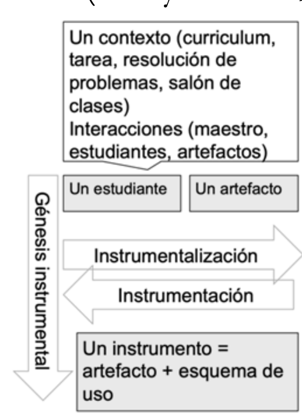


Figura 1. Representación de una génesis instrumental. Elaboración propia.

Finalmente, el aporte de este enfoque al campo de la educación matemática fue evidenciar la profunda interacción entre el proceso de adopción de un artefacto (la dialéctica instrumentación/instrumentalización), y el proceso de conceptualización (la dialéctica artefacto/instrumento, marcada por el desarrollo de esquemas, encapsulando el conocimiento). Esta interacción ocurre durante un proceso llamado *génesis instrumental*.

Este enfoque, centrado en el aprendizaje de los estudiantes, se expandió a los casos de las hojas de cálculo y al *software* de Geometría Dinámica, y a nivel internacional: el libro *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (Guin *et al*., 2005) fue una de las referencias centrales del documento de discusión del 17th Study of the International Commission on Mathematical Instruction: *Technology in Mathematics Education: Rethinking the Terrain* (Hoyles y Lagrange 2010). La conferencia en sí, celebrada en Hanoi en 2006, fue la ocasión de conocer a muchos colegas de México, María Trigueros, Verónica Hoyos, Luis Moreno, Elvira Perrusquia, Teresa Rojano, Ana Isabel Sacristán (miembro del Comité Internacional de Programación) y Manuel Santos-Trigo.

El desarrollo de un enfoque teórico vivo es siempre un proceso de enriquecimiento, ya que al adaptarlo a situaciones reales, hay que tener en cuenta una diversidad de contextos y limitaciones (ver Figura 1): entre otras, el currículo, la naturaleza de la tarea matemática, el aula, un conjunto de artefactos (y no sólo uno) traídos a la actividad por los propios estudiantes –o el maestro.

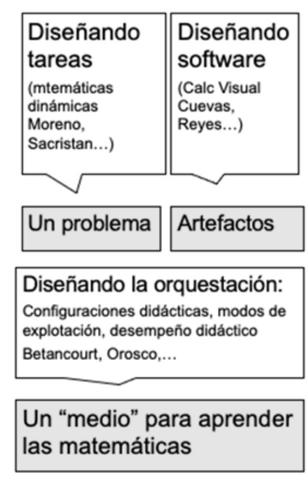


Figura 2. El modelo de orquestación instrumental. Elaboración propia.

Una aportación que cabe destacar consistió en integrar al modelo (Figura 2) el rol del maestro, lo que llevó al concepto de *orquestación instrumental*. Una orquestación instrumental (Trouche, 2004) se define como el seguimiento didáctico, por un maestro, de los estudiantes y los artefactos para lograr una tarea matemática o resolver un problema dado. Su incorporación da como resultado un cambio de paradigma, considerando una nueva dualidad (Figura 2) entre un *problema* y un *artefacto*, o (más a menudo) un conjunto de artefactos. El papel fundamental de un maestro es diseñar una orquestación instrumental para implementar este problema en un entorno tecnológico dado, para constituir un “medio” (Brousseau, 1990) para el aprendizaje de las matemáticas.

Diseñar una orquestación instrumental significa elegir *configuraciones didácticas* (la forma en que los artefactos se distribuyen entre el maestro y los estudiantes) y los *modos de explotación* (las formas en que el maestro y los estudiantes llevan a cabo su actividad con los artefactos). Posteriormente se introdujo un tercer nivel de orquestación (Trouche y Drijvers, 2010), el nivel de desempeño didáctico, el cual implica una adaptación por parte del docente y en ocasiones de los propios estudiantes, de las configuraciones didácticas y modos de explotación ante eventos inesperados (didácticos, matemáticos, así como tecnológicos) durante el curso de la actividad en el aula.

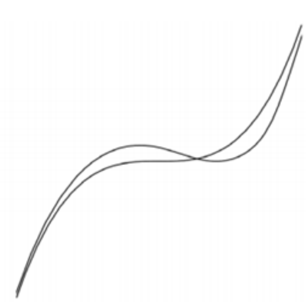
La base de una orquestación está constituida, de hecho, tanto por el problema a resolver como por el entorno tecnológico que sustenta este trabajo matemático. Las interacciones con el DME-CINVESTAV fueron particularmente fructíferas para repensar esta dualidad: por el lado del problema matemático, la reflexión sobre la *matemática dinámica* (Sánchez y Sacristán 2003, Moreno-Armella *et al*., 2008), por el lado tecnológico, la reflexión sobre el *cálculo visual* (Cuevas y Mejía, 2003). Estas interacciones dan como resultado una serie de trabajos que profundizan la noción de orquestación instrumental, particularmente a nivel de educación superior (Cuevas *et al*., 2018; Orozco-Santiago *et al*., 2019; Betancourt, 2014; Orozco-Santiago, 2020).

La actividad matemática desarrollada por los alumnos parece muy sensible a la naturaleza de la tarea matemática, la naturaleza del entorno tecnológico y a la naturaleza de la orquestación. Se da un ejemplo en Trouche (2018), relacionado con un problema de trayectoria (ver Ventana 1). La misma pregunta se propone de varias formas, en diferentes contextos (un seminario en el CINVESTAV México, un seminario en el Instituto Freudenthal en los Países Bajos y una sesión de formación docente en Francia), involucrando diferentes artefactos, con diferentes orquestaciones, dando materia a muy diferentes modos de trabajo y estrategias de resolución.

Ventana 1
Trazos de bicicleta

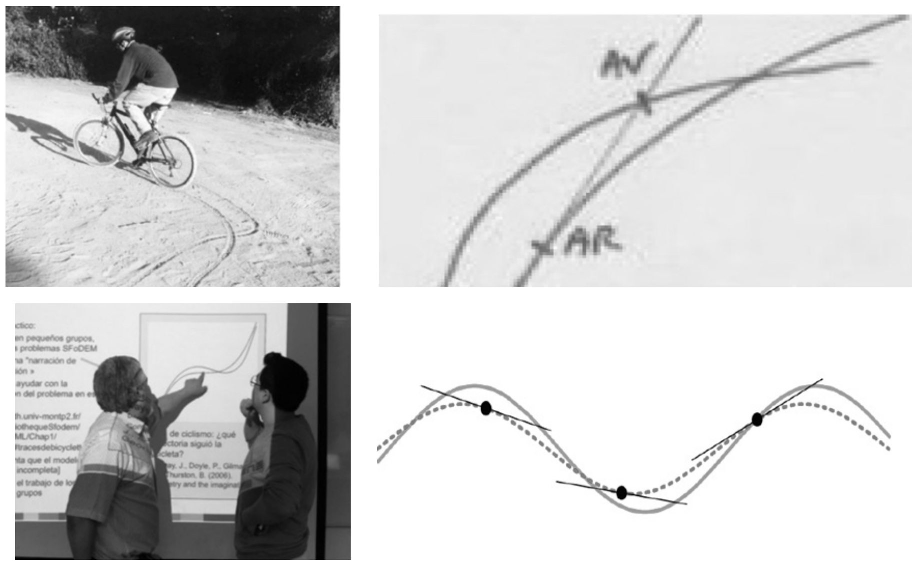
C. Dennis Thron llamó la atención sobre el siguiente pasaje de *The Adventure of the Priory School* (La aventura del Colegio Priory), de Sir Arthur Conan Doyle:
- "Este trazo, como puede usted notar, fue hecho por un ciclista que iba desde la dirección de la escuela".
- ¿O hacia ella?
- No, no, mi querido Watson. La impresión de hundimiento más profunda es, por supuesto, la de la llanta trasera, sobre la cual descansa el peso. Nota usted las diferentes partes por donde la atravesó y borró la marca más superficial de la delantera. Sin duda, se estaba alejando de la escuela".

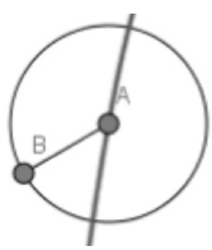
Problemas
1. Comente este pasaje. ¿Sabe Holmes de qué está hablando?
2. Intente determinar la dirección de desplazamiento de los trazos de bicicleta imaginarios en la siguiente figura.



3. Trate de dibujar algunos trazos propios de bicicleta imaginarios. No necesitas una computadora para esto; sólo una idea de cuál es la relación entre el trazo de la llanta delantera y el trazo de la llanta trasera. ¿Qué tan buenos creen que son sus trazos simulados?
4. Salga y observe algunos trazos de bicicleta en la naturaleza. ¿Puede decir en qué dirección iba la bicicleta? No pierda de vista los trazos de la bicicleta y practique hasta que pueda determinar la dirección del desplazamiento de forma rápida y precisa.

La Ventana 2 sólo muestra una variedad de estrategias, dependiendo del contexto de resolución.
Ventana 2 – Seis puntos de vista diferentes sobre las estrategias de resolución, usando artefactos muy diversos...





$$f_x(t) \;=\; r_x(t) + \frac{L}{\sqrt{1 + (r_y'(t)/r_x'(t))^2}}$$

$$f_y(t) \;=\; r_y(t) + \frac{L r_y'(t)/r_x'(t)}{\sqrt{1 + (r_y'(t)/r_x'(t))^2}}.$$

Entre las estrategias para resolver este problema, algunas utilizaron la búsqueda de soluciones en internet (*e.g.*, https://www.thedudeminds.net/?p=5636). La aparición de internet ha dado acceso a una gran variedad de "recursos", que incluyen problemas matemáticos, herramientas digitales y proposiciones de "escenarios de uso" (*i.e.*, posibilidades de orquestaciones) transforma de hecho la forma de pensar tanto de la actividad del maestro como de los estudiantes. Lo cual conduce a nuevos desarrollos teóricos, que es el propósito de la siguiente sección.

3. Alejándonos, hacia una visión holística

La estancia científica de Ana Isabel Sacristán en el Instituto Francés de la Educación brinda la oportunidad de estudiar juntos los desarrollos impulsados por la tecnología y sus implicaciones políticas para la educación matemática. Este estudio evidenció que:

> El advenimiento de la tecnología no solo aumenta la gama de recursos disponibles para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: representa el surgimiento de una nueva cultura –una cultura virtual con nuevos paradigmas– que se diferencia de manera crucial de las formas culturales precedentes (Trouche *et al.*, 2013, p. 753).

Aparecen tres tendencias principales que caracterizan este surgimiento, con respecto al trabajo de los maestros (ver Figura 3):

- Pasar de ofrecer acceso (a la tecnología) a *apoyar a los maestros* para integrar.
- Pasar de la política *de arriba hacia abajo* a la política de *abajo hacia arriba*, aprovechando las propuestas de los propios maestros.
- Y pasar de privilegiar los modos de trabajo *individuales* a considerar los modos de trabajo *colectivos*.

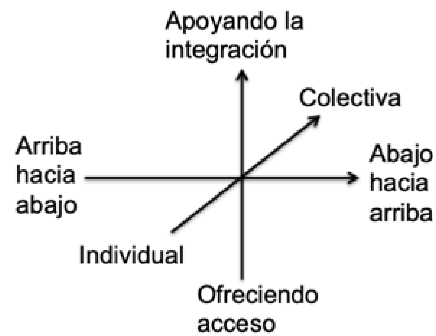


Figura 3. Tendencias de la integración tecnológica. Elaboración propia.

En consecuencia, surge una palabra en los trabajos de investigación: "recursos", en lugar de tecnología.

Estos cambios profundos motivan el desarrollo de un nuevo marco teórico, en el hilo del enfoque instrumental, el enfoque documental de lo didáctico (*Documentation Approach to Didactics*) (DAD, Gueudet y Trouche, 2009).

Este enfoque propone un nuevo modelo (Figura 4), reemplazando la distinción artefacto/instrumento por la distinción recurso/documento. Constituye fundamentalmente un nuevo paradigma, apoyado en una visión holística del trabajo de un docente. Además, no se enfoca en un artefacto dado, para ser integrado en la práctica del maestro, sino que toma en cuenta todos los "recursos" que han contribuido y siguen contribuyendo a constituir el trabajo del maestro.

"Recurso" se entiende aquí en el sentido amplio de las cosas con las que un maestro está interactuando para construir el tema de su enseñanza: libros de texto, recursos recolectados de internet, correos electrónicos de colegas… Trabajar con estos recursos, organizados sobre su actividad en los sistemas de recursos, lleva a cada maestro a desarrollar un documento, compuesto por recursos y esquemas que estructuran sus usos.

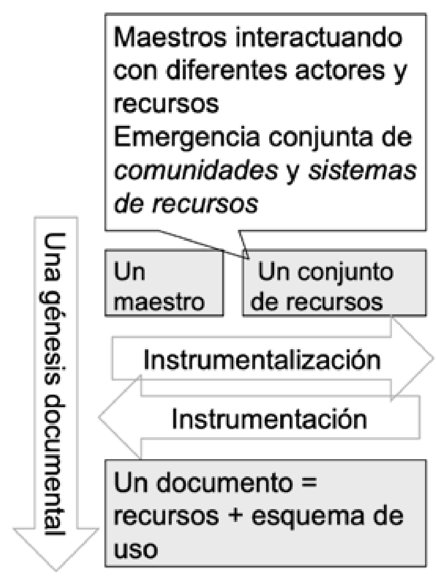


Figura 4. Representación de una génesis documental. Elaboración propia.

El desarrollo profesional del maestro se ve entonces a través de los lentes de sus interacciones con los recursos para/de su enseñanza.

Este enfoque se extendió a nivel internacional (Gueudet *et al.*, 2012) beneficiándose de una rica contribución de México, a partir de la experiencia del proyecto Enciclomedia (Trigueros y Lozano 2012). Este proyecto proporciona a maestros y estudiantes recursos digitales –programas interactivos, animaciones, actividades para *software* de geometría dinámica y hojas de cálculo– vinculados a diferentes partes del currículum y los libros de texto oficiales. A pesar de su potencial para promover aprendizajes significativos, el proyecto evidencia problemas críticos relacionados con la formación docente. DAD aparece de hecho como un marco relevante para analizar las nuevas habilidades necesarias tanto para los maestros como para los formadores de maestros en un momento de transición al entorno digital, como se evidencia en otro artículo franco-mexicano (Gueudet *et al*., 2012).

La dinámica de DAD fue ampliar el alcance del estudio: considerando todo (en la medida de lo posible) el sistema de recursos de los maestros (Pepin *et al*. 2017), tomando en cuenta el trabajo de cada maestro ubicado en contextos colectivos (Gueudet *et al*., 2013), contemplando el trabajo del maestro como insertado en una larga trayectoria documental (Trouche *et al*., 2020).

Diez años después de su introducción, se organizó una conferencia internacional, en 2018, en Lyon, para hacer un balance de las mejoras y debilidades de DAD (Gitirana *et al*., 2018) –ocho investigadores de México asistieron a esta conferencia–. En la edición del libro de este evento, un capítulo (Trouche, 2019) que evidencia algunos recursos faltantes en DAD, propuso 10 programas de investigación/desarrollo para contribuir a abordar estos temas. En este capítulo, nos gustaría centrarnos en tres de ellos:

- El tercer programa de investigación tuvo como objetivo profundizar en la dialéctica de esquemas/situaciones de trabajo documental.
- Los programas primero y décimo fueron de alguna manera complementarios: el primero tiene como objetivo diseñar un glosario "vivo" para DAD en varios idiomas, y el décimo busca contrastar la nominación de los sistemas usados por los maestros para describir sus recursos y su trabajo documental.

4. Acercándonos, hacia una visión analítica

Profundizar en las relaciones entre las situaciones de trabajo de los maestros con los recursos y los esquemas que están desarrollando a lo largo de esta actividad requiere un análisis detallado de la tarea de los maestros: determinar las etapas sucesivas de esta labor, la forma en que ellos justifican su decisión, las palabras que utilizan, sus gestos para buscar, seleccionar, adecuar, integrar e implementar los recursos que necesitan para impartir sus clases.

Por supuesto, se necesitan herramientas teóricas y metodológicas específicas. Por ejemplo, respecto de las herramientas metodológicas, Trouche *et al*. (2020) aprovecharon la situación de dos maestras que preparaban juntas una nueva lección para: 1) Determinar las sucesivas etapas de su trabajo (comenzando por la lectura del currículo, luego visitando recursos compartidos...); 2) Determinar los principales problemas a los que se enfrentan las maestras (usando tal o cual recurso, cuándo y por qué); 3) Inferir de las interacciones de las maestras el conocimiento que presenciaron (relacionado con los vínculos entre algoritmos y matemáticas), constituyendo el componente epistémico de sus esquemas (Figura 5).

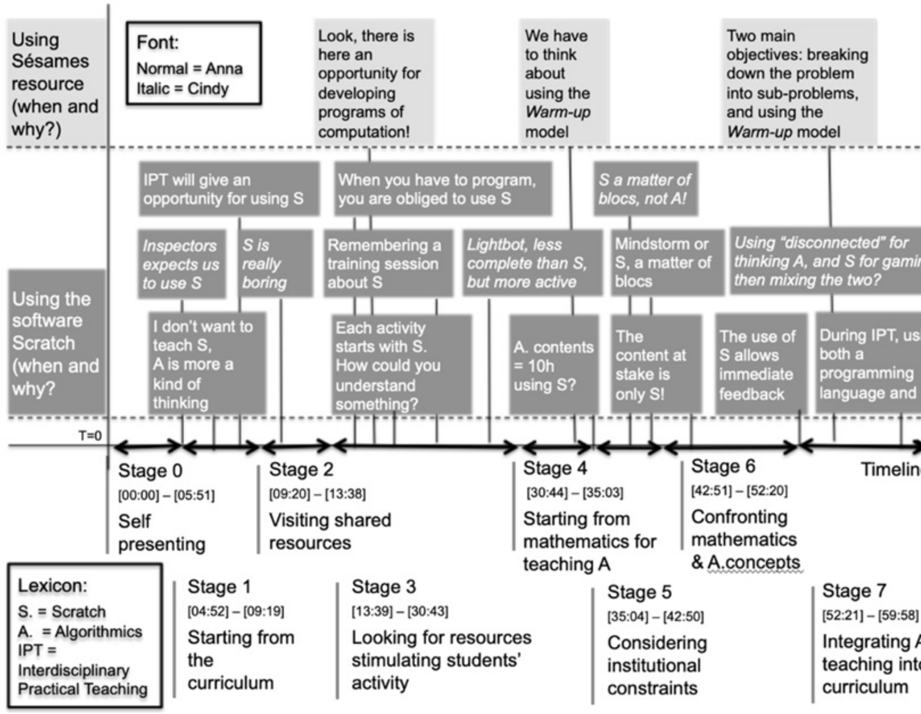


Figura 5. Analizando el trabajo de dos maestras, Anna y Cindy, que preparan juntas una lección, en varias etapas sucesivas (Trouche *et al*., 2020, p. 1254).

Por el lado de las herramientas teóricas, la estancia científica de Ulises Salinas-Hernández en Lyon fue la ocasión para cruzar DAD con un marco conceptual basado en la mediación semiótica (Salinas-Hernández, 2018), que parte del principio de que los seres humanos (maestros y alumnos en el ámbito educativo) realizamos operaciones y llevamos a cabo acciones mediante *signos* y *artefactos* (incluidos gestos) que fundamentan la forma como pensamos y actuamos, resaltando en especial el papel de los gestos como parte de los recursos de los maestros. Así, Salinas-Hernández y Trouche (2018) abordaron la manera en que un maestro de física moviliza diversos gestos con el objetivo de que sus estudiantes den significado a un concepto físico: el sistema de referencia (Figura 6).

Figura 6. Comunicación de significados de conceptos físicos mediante gestos (Salinas-Hernández y Trouche, 2018, p. 19).

En esta investigación quedó de manifiesto que: (1) se cuenta con recursos semióticos como los gestos que son relevantes en el sistema de recursos de los maestros; (2) tomando en cuenta que una sofisticada coordinación semiótica de la voz, el cuerpo, los gestos, los símbolos y las herramientas conforman el pensamiento, entonces los gestos –como portadores de significados– representan, a su vez, una forma de estructura cognitiva para visualizar las acciones del maestro. Con el objetivo de profundizar en el cruce entre DAD y un marco conceptual sociocultural de orientación semiótica, se presentará en el próximo ICME14 un artículo en extenso (Salinas-Hernández *et al.*, 2021) en el grupo de estudio temático 57 (TSG 57): Diversidad de teorías en educación matemática. En este capítulo se presentan afinidades entre tres aproximaciones teóricas para estructurar un constructo teórico-metodológico: el modelo del maestro, conceptualizando la práctica docente como una práctica sistémica social y mediada orientada por objetivos: los objetivos de la actividad.

5. El proyecto DAD-Multilingual, conceptualizando

Los programas de investigación primero y décimo (§ 3) también fueron una forma de profundizar en el análisis de las interacciones de los maestros con los recursos al enfocarse en los aspectos finos de su actividad: las palabras que los maestros –e investigadores– usan en sus prácticas. A partir de una presentación del Enfoque documental en la Enciclopedia de Educación Matemática (Trouche *et al.*, 2020a), el proyecto DAD-Multilingual tiene como objetivo adaptar esta presentación en 13 idiomas diferentes para profundizar en los conceptos en juego.

Este proyecto tiene varios objetivos:

- Poner a disposición de los investigadores una presentación del DAD en varios idiomas.
- Profundizar en los propios conceptos del DAD al pensar sus posibles variaciones en diferentes idiomas y cuestionar el proceso de traducción en sí.
- Más allá del marco del DAD, cuestionar la noción de recurso en sí mismo, recurso para/desde la enseñanza.
- Diseñar (en un paso posterior) un glosario multilingüe del DAD.

La traducción al español se realizó gracias a los investigadores mexicanos involucrados en este proyecto (Trouche *et al.*, 2020b). Esta traducción revela varias cuestiones interesantes:

- Considerar, a la hora de realizar la traducción al español (del inglés), hacer explícita la necesidad de situar un enfoque teórico en el marco cultural en el que surgió, en este caso: la tradición didáctica francesa.
- La necesidad de establecer una acepción más precisa en español de un concepto esencial en DAD: “recurso”. En la versión en inglés existe una relación entre la palabra *resource* y el verbo *re-sourcing*. Lo que permite pensar en un recurso (*resource*) como “alimentándose de la fuente nuevamente o de manera diferente: *re-sourcing*”. Sin embargo, en español no es posible hacer una transición de “recurso” a “re-curso” y posteriormente al verbo “re-cursar”. Debido a que “curso” hace referencia a un movimiento o camino que se sigue, en lugar de una fuente (*source*); y el verbo “re-cursar” denotaría: repetir un momento. Así, con el objetivo de pensar un “recurso” como la acción de re-alimentarse, re-abastecerse, o nutrirse nuevamente, en la traducción al español se señala que un recurso debe pensarse como el verbo “re-currir”: volver al lugar de donde salió (para alimentarse nuevamente).

- Presenta investigaciones latinoamericanas que han utilizado el enfoque documental, ya sea como marco teórico principal, o a través de la coordinación con otras aproximaciones teóricas.
- Respecto a la noción de *resource system* es importante, en español, siempre usar el plural: "sistema de recursos" ya que es una noción que se refiere a un conjunto de recursos.
- Para el caso de la noción *operational invariant*, fue más apropiado usar la versión en francés y su correspondiente término: *invariant opératoire*; traducida al español como "invariante operativa".

Al estar en el marco de procesos de significación (entre diferentes lenguajes), el proyecto puede verse enriquecido al incorporar el enfoque semiótico; por ejemplo, en la perspectiva de concebir los términos en diferentes idiomas, como sistemas colectivos de signos que se ejecutan por el habla de los individuos de diferentes culturas.

Un primer reporte del estado actual de este proyecto (Trouche, 2020) será presentado en la conferencia PME-NA42 en México (https://pmena2020.cinvestav.mx/Program). Este proyecto ofrece muchas perspectivas, entre ellas:

- Usar la diversidad de informes sobre dificultades en la traducción para un enriquecimiento mutuo de cada una de ellas, conduciendo a una versión actualizada de estos informes y de las traducciones;
- Organizar una nueva etapa en las interacciones entre pares de idiomas. Se ha realizado un primer trabajo para confrontar la problemática china y mexicana (Wang *et al*., 2019).
- Proponer un número especial en una revista de educación matemática aprovechando este proyecto, sus resultados, problemas y perspectivas (Trouche *et al*., presentado).
- Organizar grupos de trabajo en torno a conceptos que conduzcan a un glosario común.

6. En tiempos de pandemia, cruzando las fronteras

Un momento relevante ocurrió en el 2020 con la pandemia por COVID-19. En el ámbito de la educación y la investigación en educación matemática, esta crisis mundial ha dejado lecciones en el presente y retos a futuro. Mirando el presente, Bakker y Wagner (2020) resaltan los aspectos sociales relacionados con la educación y el incremento de desigualdades derivadas de la falta de recursos y oportunidades para poder seguir una educación en línea. Durante este tiempo de pandemia –y considerando su relevancia en la trayectoria de cada docente– se continuó con las interacciones franco-mexicanas a través de:

- El EICAL 11, que dio espacio para que sus protagonistas compartieran su mirada en temas de cálculo, ciencia y matemáticas; así como los desafíos con los que se enfrentan: enseñanza en línea, orquestación, recursos didácticos y formación de profesores, entre otros;
- La escritura de un artículo de investigación en el que se considera a la pandemia por COVID-19 en la trayectoria documental de un maestro (Salinas-Hernández *et al*., s/f) y el cual se ubica, a su vez, en el proyecto de establecer vínculos entre teorías.

Este capítulo –el cual incorpora el tiempo de pandemia dentro del análisis realizado– presenta un estudio de caso de un maestro experimentado cuya antigüedad docente (44 años) está cercana a la de la escuela (49 años) en la que ha trabajado desde su incursión laboral. Para abordar el objetivo de este texto, se analizaron las relaciones que existen entre el modelo educativo de una institución y la práctica docente de este profesor de la misma institución, en el contexto de la integración de recursos digitales (incluyendo recursos curriculares digitales) a lo largo del tiempo. Se desarrollaron, por una parte, nuevas nociones teóricas como: *trayectoria curricular*. Las que definimos como el camino (con continuidades y rupturas) que une los sucesivos currículos diseñados por una determinada institución escolar a lo largo del tiempo; y, por otra parte, herramientas metodológicas para confrontar dos trayectorias: curricular (de la institución) y documental (del profesor), así como para combinar su *trayectoria documental* y la *experiencia documental*. Sobre el desarrollo de las herramientas metodológicas, la pandemia representó un desafío en términos de encontrar la mejor manera de capturar lo que estaba sucediendo tanto en la escuela como en la actividad del instructor, durante este tiempo de crisis, para después confrontar ambas trayectorias. De manera particular, el seguimiento de la práctica docente del pedagogo y la interacción con él cambió de la usual observación presencial y las entrevistas directas, a la recopilación de datos e interacción mediante medios digitales de comunicación: entrevistas a distancia, llamadas telefónicas, correos electrónicos y mensajes de texto.

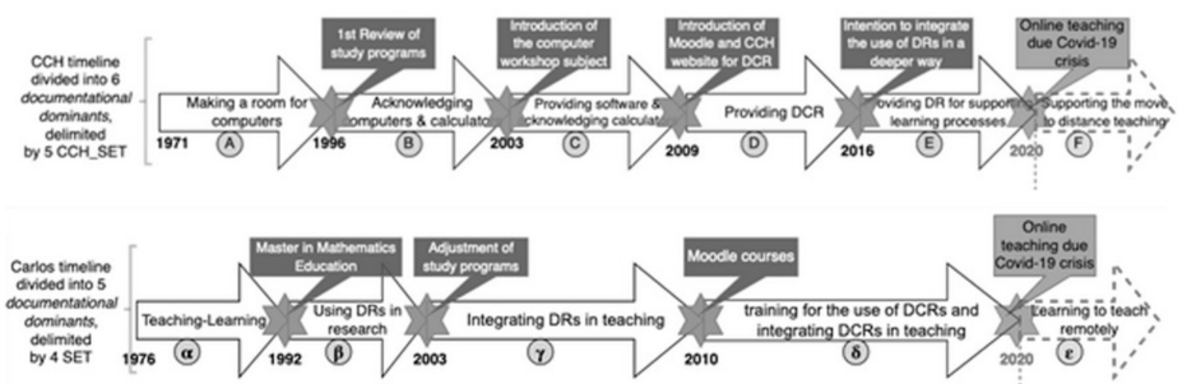


Figura 7. Contrastando la trayectoria curricular de una institución y la trayectoria documental de un maestro en el contexto de la integración de recursos digitales (Salinas-Hernández *et al*., trabajo en progreso).

El estudio muestra: (1) en qué medida la trayectoria curricular influye en la trayectoria documental del maestro, desde el punto de vista de los recursos digitales. Para identificar esta influencia se definieron las nociones de:

- *Sincronía*: se refiere a la coincidencia en el tiempo –en la trayectoria curricular y la trayectoria documental– de uno o varios eventos o periodos asociados con los elementos de análisis (p. ej., integración de recursos digitales).
- *Impulso*: asociado con la idea de "producir movimiento", se refiere a las acciones, eventos o iniciativas particulares de la institución educativa que fomentan (de manera inmediata o poco tiempo después) que la actividad del maestro siga la dirección que la institución pretende p. ej., que los maestros incorporen el uso de recursos digitales en sus clases).

Estas nociones pueden estar asociadas tanto a contenidos curriculares como a recursos digitales (p. ej., *software* de geometría dinámica o uso de plataforma digital para clases en línea). (2) En qué medida la trayectoria documental del maestro es testigo de la evolución en el grado de integración de los recursos digitales; y (3) que la pandemia es un evento que generó, tanto para el maestro como para la institución, un cambio abrupto en el conjunto de actividades desarrolladas hasta antes de la crisis por COVID-19 (Figura 7).

Así, este trabajo, por una parte, aborda la integración de recursos digitales desde distintas perspectivas (trayectorias): institucional y personal. Lo que requiere a su vez, el desarrollo de herramientas tipológicas para establecer relaciones entre las dos trayectorias; considerando los aspectos colectivos, individuales, curriculares y profesionales. Por otro lado, abre el camino para posteriores investigaciones en las que se profundice en las nociones desarrolladas en el artículo y que ayuden en el objetivo del análisis sobre el cruce de trayectorias.

La pandemia también ha dado la oportunidad de que los autores de este capítulo crucen miradas sobre el impacto que este evento ha tenido en el contexto semiótico. Beuchot (2004) señala que los signos "son usados por los que pertenecen a una comunidad semiótica (de hablantes o usuarios de los signos), pues tienen que compartirlos para saber, primero, qué son signos y, después, cuál es su significado" (p. 7). Así, la semiótica contempla dos aspectos básicos: (1) la producción de signos y sus significados, y (2) la manera en que los individuos comparten y dan significado a signos y artefactos, modificando sus comportamientos en el proceso de la interacción con ellos. Entonces, una comunidad semiótica se refiere a un grupo de personas que interactúan entre sí y comparten determinados signos. Como producto de la emergencia sanitaria, nuestros espacios comunes de interacción (p. ej., la ciudad, la escuela y el hogar) se han visto transformados por signos y artefactos –de los cuales hemos tenido que aprender su uso y su significado– con el objetivo de modificar nuestras actividades cotidianas y comportamientos (Figura 8).

Figura 8. Ejemplos de la profusión de signos y artefactos en los espacios sociales y personales: edificios, escuela y hogar. Elaboración propia.

Así, el cruce de miradas contempla, por el lado de los signos: los nuevos signos matemáticos que han aparecido en la ciudad; la interacción y coordinación entre signos; la profusión de palabras matemáticas (p. ej., distancia, crecimiento exponencial, modelo, probabilidad y variabilidad, entre otras); y, por el lado de las interacciones sociales, los nuevos artefactos (p. ej., cubre bocas) y su influencia en la interacción entre personas (en general y en el ámbito educativo); nuevos gestos para el distanciamiento social; nuevas mediaciones para la enseñanza de las matemáticas (en línea, de manera sincrónica o no); cómo los comportamientos se ven modificados en la ciudad y la escuela a partir de los signos compartidos; la evolución de signos y gestos durante la pandemia. Finalmente, resulta de interés particular analizar los nuevos signos y artefactos que se han producido durante este periodo en el ámbito educativo: dentro y fuera del salón de clases y las repercusiones que tienen en la actividad de los maestros y estudiantes.

Centrándonos en las consecuencias de la pandemia para la educación matemática, no se puede soslayar el tema de la tecnología; tanto de manera directa, en los lugares en donde ha sido en la medida de lo posible llevar a cabo una enseñanza-aprendizaje en línea; como de manera indirecta, en donde la falta de recursos ha impedido o retrasado la impartición de clases. Ambas situaciones merecen sus análisis particulares relacionados con sus respectivas condiciones de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, ¿cuál es el impacto a nivel emocional? Tanto en la educación en línea, en donde los espacios de trabajo y personales se han traslapado, como en los contextos en donde ha sido difícil tomar/impartir los cursos, se generan situaciones de ansiedad y estrés. Las nuevas políticas educativas, en caso de presentarse, o nuevos ajustes no deben pasar por alto los estudios que se presenten sobre este evento tan relevante. Es por eso que es importante profundizar en las investigaciones desde diferentes frentes: teórico, didáctico, emotivo, político y social; y de manera interdisciplinar, con el objetivo de abrir nuevas dimensiones para la educación matemática con los aportes de otras tradiciones de pensamiento: física, química, historia, lenguas, filosofía de la ciencia.

Por parte de DAD, este enfoque puede aportar –además de las investigaciones enmarcadas en los diez programas– en investigaciones orientadas en analizar el papel y las actividades del maestro en la educación a distancia, el conocimiento didáctico del maestro en los nuevos contextos, los nuevos programas de formación de profesores. Mirando hacia el futuro, se presentan diversos desafíos para las matemáticas, la educación matemática, los maestros y los investigadores. Dos lecciones importantes que dejó la pandemia fueron, por una parte, la revaloración de la ciencia como acción humana y social; y, por otra parte, el impulso que la colaboración local e internacional genera a la actividad científica. Por lo tanto, es imperativo seguir cultivando los enlaces científicos y culturales que se han creado y construir otros nuevos que doten de herramientas teóricas y metodológicas para afrontar los nuevos contextos en educación e investigación en educación matemática.

Nos gustaría concluir este artículo con la remembranza de que el coronavirus nos hizo perder a François Pluvinage y esta noticia nos llenó de tristeza. Él fue, hasta el último periodo, un apoyo esencial para la colaboración franco-mexicana en el campo de la educación matemática (Paez y Pluvinage, 2019). Al mismo tiempo, su experiencia nos deja conciencia y fuerza. Conciencia sobre la necesidad de establecer enlaces culturales y científicos, y la fuerza e inteligencia para emprender su construcción.

7. Referencias

Artigue, M., Bosch, M., Chaachoua, C., Chellougui, F., Chesnais, C., Durand, V., Knipping, K., Maschietto, M., Romo, A. y Trouche, L. (2019). The French didactics tradition in mathematics. En W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Sträßer y M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.). *European traditions in didactics of mathematics (ICME-13 Monograph)* (pp. 11-55). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05514-1_2.

Bakker, A. y Wagner, D. (2020). Pandemic: lessons for today and tomorrow? *Educational Studies in Mathematics, 104*(1), 1-4. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09946-3

Betancourt, Y. (2014). *Uso de recursos didácticos digitales en un primer curso de álgebra lineal* [Tesis de Doctorado, CINVESTAV].

Beuchot, M. (2004). *La semiótica: teorías del signo y el lenguaje en la historia*. Fondo de Cultura Económica.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 9*(3), 309-336. https://revue-rdm.com/1988/le-contrat-didactique-le-milieu/

Cuevas, C.A., Martínez, M. y Trouche, L. (2018). Considerando la complejidad del aprendizaje y enseñanza del cálculo a partir de un experimento de diseño de *software*. En C. A. Cuevas, M. Martínez, y R. G. Cruz (Eds.). *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes* (pp. 121-142). Pearson.

Cuevas, C.A. y Mejia, H.R. (2003). *Cálculo Visual*. Oxford University Press.

Cuevas, C.A. y Pluvinage F. (2003). *Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques, Annales de didactique et de sciences cognitives*, 273-292. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_08/adsc8-2003_014.pdf.

Gitirana, V., Miyakawa, T., Rafalska, M., Soury-Lavergne, S. y Trouche, L. (Eds.). (2018). *Proceedings of the Re(s)sources 2018 International Conference*. ENS de Lyon. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01764563v3/document

Gueudet, G., Pepin, B. y Trouche, L. (Eds.). (2012). *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*. Springer.

Gueudet, G., Pepin, B. y Trouche, L. (2013). Collective work with resources: an essential dimension for teacher documentation. *ZDM, Mathematics Education, 45*(7), 1003-1016.

Gueudet, G., Sacristan, A.I., Soury-Lavergne, S. y Trouche, L. (2012). Online path in mathematics teacher training: new resources and new skills for teacher educators. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 44*(6), 717-731.

Gueudet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199-218.

Guin, D., Ruthven, K. y Trouche, L. (Eds.) (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. Springer.

Guin, D. y Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*(3), 195-227.

Hoyles, C. y Lagrange, J. B. (2010). *Technology in Mathematics Education: Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. Springer.

Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C. y Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F.K.S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-271). Kluwer Academic Publishers.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S.J. y Kaput, J.J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 68*(2), 99-111. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9116-6.

Orozco-Santiago, J.C. (2020). *Una propuesta de orquestación instrumental para introducir los conceptos de valores y vectores propios en un primer curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería* [Tesis de Doctorado, CINVESTAV].

Orozco-Santiago, J., Cuevas, C.A., Madrid, H. y Trouche, L. (2019). A proposal of instrumental orchestration to introduce eigenvalues and eigenvectors in a first course of linear algebra for engineering students. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 320-323). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Páez, R. y Pluvinage, F. (2019). Estudio de las asíntotas de una función en un ambiente con tecnología dinámica. Recherches en Didactique des Mathématiques, *39*(3), 331-369.

Pepin, B., Xu, B., Trouche, L. y Wang, C. (2017). Developing a deeper understanding of *mathematics teaching expertise*: Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work and expertise. *Educational studies in Mathematics, 94*(3), 257-274. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9727-2.

Salinas-Hernández, U. A. (2018). *Análisis de las características de los modelos de dos profesores – novato y experto– en torno al concepto de sistema de referencia, a través de la red de teorías: un estudio de caso* [Tesis de Doctorado, CINVESTAV].

Salinas-Hernández, U., Moreno-Armella, L. y Miranda, I. (2021, 11 al 18 de julio). *Configuration of the theoretical-methodological construct "the teaching model" by affinity between theories* [Ponencia]. ICME14, Shanghai. China.

Salinas-Hernández, U., Sacristán, A. y Trouche, L. (sf). *Digital resources integration driven by curriculum and teachers' documentational trajectories* [trabajo en proceso].

Salinas-Hernández, U. y Trouche, L. (2018). Uso de gestos –como recurso-mediador– por un profesor de bachillerato para enfrentar un desafío didáctico no previsto por él. *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática, 54*, 6-24.

Sánchez, E. y Sacristán, A.I. (2003). Influential Aspects of Dynamic Geometry Activities in the Construction of Proofs. *International group for the Psychology of Mathematic Education, 4,* 111-118.

Santacruz, M. (2019), *Procesos de selección de recursos digitales en clases de Geometría: Estudios de Caso con Profesores de Primaria* [Tesis de Doctorado, CINVESTAV].

Trigueros, M. y Lozano, M.D. (2012). Teachers Teaching Mathematics with Enciclomedia: A Study of Documentational Genesis. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche, *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 247-263). Springer.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281-307.

Trouche, L. (2009, 12 y 13 de noviembre). *Recursos para procesar, aprender y enseñar el cálculo: nuevos modos de concepción y de difusión* [Ponencia]. Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Saltillo, Coahuila. México.

Trouche, L. (2018). Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza-una historia de trayectorias. *Educación Matemática, 30*(3), 9-40. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol30/3/01_REM_30-3.pdf.

Trouche, L. (2019). Evidencing missing resources of the documentational approach to didactics. Towards ten programs of research / development for enriching this approach. En L. Trouche, G. Gueudet y B. Pepin (Eds.). *The "resource" approach to Mathematics Education. Springer series Advances in Mathematics Education* (pp. 447-489). Springer.

Trouche, L. (2020). Understanding Teachers' Professional Development Through their Interactions with Resources: a Multilingual Project. En A.I. Sacristán, J.C. Cortés y P.M. Ruiz (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 143-154). CINVESTAV /AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020.

Trouche, L., Adler, J., y Remillard, J. (Eds.). (en prensa). Conceptualizing teachers' interactions with resources in crossing languages and cultures, *Special issue of ZDM Mathematics Education*.

Trouche, L. y Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education, flashback to the future. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 42*(7), 667-681.

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G. y Sacristan, A. I. (2013). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F.K.S. Leung (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 753-790). Springer.

Trouche, L., Gueudet, G. y Pepin, B. (2020a). Documentational approach to didactics. En: S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (2a. ed., pp. 307-313). Springer. doi: 10.1007/978-3-319-77487-9_100011-1.

Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B., Salinas-Hernández, U. y Sacristán, A. (2020b). El enfoque documental de lo didáctico. *DAD-Multilingual*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02557744v2/document

Trouche, L., Rocha, K., Gueudet, G. y Pepin, B. (2020). Transition to digital resources as a critical process in teachers' trajectories: the case of Anna's documentation work. *ZDM Mathematics Education, 52*, 1243-1257, https://doi.org/10.1007/s11858-020-01164-8.

Wang, C., Salinas-Hernández, U. y Trouche, L. (2019). From teachers' naming systems of resources to teachers' resource systems: Contrasting a Chinese and a Mexican case. En U. T. Jankvist, M.van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4356-4363). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

CAPÍTULO 17. REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y CIENCIAS EN SECUNDARIA: UNA MIRADA DESDE LA INVESTIGACIÓN

Freddy Yesid Villamizar Araque, freddyvillamizar@unad.edu.co
Universidad Nacional Abierta y a Distancia, Colombia
Alfredo Martínez Uribe, alfymago@hotmail.com
Secretaría de Educación Pública, México
Marisol Santacruz Rodríguez, marisol.santacruz@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle, Colombia
Juan Luis Prieto González, juanl.prietog@gmail.com
Universidad del Zulia, Venezuela
Juan Carlos Benavides Parra, juan.benavides@unad.edu.co
Universidad Nacional Abierta y a Distancia, Colombia

Resumen

Este capítulo sistematiza las discusiones propuestas en el grupo de trabajo sobre Enseñanza de las Matemáticas y Ciencias en secundaria, en el marco del Onceavo Encuentro Internacional Enseñanza del Cálculo, Ciencia y Tecnología (EICAL 11). En este sentido, se parte de considerar los retos que implica la enseñanza de las matemáticas y las ciencias en secundaria, con el objetivo de reflexionar sobre los conocimientos profesionales de los profesores, la implementación didáctica de tecnologías digitales y la educación remota en el contexto de la pandemia por el COVID-19. Mediante un análisis documental se presenta una revisión y síntesis de resultados de investigación que permiten identificar y considerar los modelos de conocimiento especializado del profesor, la orquestación instrumental, las ideas previas, la modelización matemática y el uso de tecnologías digitales, como elementos relevantes para comprender y elaborar propuestas para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias en secundaria.

1. Introducción

En el grupo de trabajo 9, dedicado a discutir la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias en Secundaria, dentro del marco del Onceavo Encuentro Internacional Enseñanza del Cálculo, Ciencia y Tecnología (EICAL 11) realizado en 2020, se decidió centrar la atención en la complejidad del conocimiento profesional de los profesores, su trabajo en tiempos de la contingencia sanitaria actual y el papel de las tecnologías digitales como problemáticas o posibles retos de enseñanza que enfrentan los profesores de secundaria, para luego profundizar en ellas. En este capítulo se presenta una sistematización de dichos aportes, reflexiones y propuestas.

Uno de los elementos que fundamentaron la discusión del grupo de trabajo fue el tener en cuenta que las matemáticas son el lenguaje de las ciencias (Feynman, 2008), sin embargo, el desarrollo de ambas es dependiente e interactivo (Kline, 1981; Gingras, 2001). En el aula de secundaria esta dicotomía se ve reflejada, dándole preferencia al aprendizaje memorístico, tanto de las matemáticas como de las ciencias, trayendo como consecuencia un rezago en la comprensión conceptual (Cuevas y Pluvinage, 2003; Karam, 2015). Al respecto, diversos investigadores han apuntado que a esta problemática se le añade la falta de experimentación y la falta de interés por implementar estrategias didácticas que promuevan un aprendizaje activo, fomentando en los estudiantes de secundaria el desarrollo de habilidades, valores y aptitudes científicas, tales como: curiosidad, creatividad, escepticismo formal y pensamiento lógico (Viennot, 1979; Pozo y Gómez, 1998; Cuevas *et al*. 2017).

Por otra parte, se resalta el hecho de que los profesores se enfrentan constantemente a nuevas problemáticas y retos en su enseñanza, como es el caso del surgimiento de las generaciones de estudiantes denominados por Serres (2014), "Pulgarcitos", por su capacidad de mediar el conocimiento a través de dispositivos móviles digitales. Por otra parte, en el año 2020 la pandemia por el COVID-19 generó en América Latina y el Caribe el cierre de edificios de instituciones educativas, expulsando de las aulas presenciales a 154 millones de niños y niñas aproximadamente, equivalentes a más del 95 por ciento de los matriculados (UNICEF, 2020). Este reto ha llevado a los docentes a preguntarse cómo educar en modalidad remota a estudiantes que han venido desarrollando su proceso de formación de manera presencial, lo que implica modificar la organización y disposición de las clases, así como sus estrategias didácticas, apoyándose en la tecnología digital.

Tomando en cuenta lo anterior, en este capítulo se plantea cómo objetivo conjuntar referentes teóricos, devenidos de la investigación, que permitan reflexionar y proponer alternativas parciales a diferentes problemas y retos relacionados con la enseñanza de las matemáticas y las ciencias en secundaria. De este modo, en el grupo de trabajo 9, se priorizaron las siguientes problemáticas o cuestionamientos para orientar la discusión:

- ¿Qué conocimientos profesionales de los profesores son fundamentales para lograr una integración didáctica y tecnológica en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias en secundaria?
- ¿Qué retos ha impuesto la educación remota o a distancia a los profesores de matemáticas y ciencias para la integración de las tecnologías digitales?
- ¿De qué manera los profesores usan las tecnologías digitales en la configuración de sus ambientes de aprendizaje para sus clases de matemáticas y ciencias?

A continuación presentamos algunos de los antecedentes, de orden teórico, que fundamentan la discusión propuesta en la mesa de trabajo.

2. Antecedentes

Una revisión teórica que permita atender los cuestionamientos anteriormente planteados debe partir de considerar que no existe un enfoque acabado de enseñanza para las matemáticas y ciencias, sin embargo, los resultados de la investigación en Educación Matemática y Educación en Ciencias permiten identificar elementos que pueden ser útiles para entender los retos y problemáticas que enfrentan los profesores de ambas disciplinas. A partir de esta revisión se consideró que los estudios sobre el conocimiento especializado del profesor; el análisis de sus orquestaciones en el aula, el papel de las ideas previas en el aprendizaje, la modelización matemática y el uso de tecnologías digitales, constituyen elementos relevantes para comprender y elaborar propuestas para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias en secundaria.

Se reconoce entonces que el docente de matemáticas y ciencias debe contar con un conocimiento disciplinar amplio, que además debe ser vasto en otros subdominios de conocimiento, relacionados con la didáctica o el estudiante que atiende. Este conocimiento profesional se manifiesta en aspectos, tales como las maneras en que el profesor orienta su clase, el tipo de estrategias didácticas que pone en juego y el uso que hace de las tecnologías digitales. Investigadores como Shulman (1986, 1987), Ball, *et al*. (2008), Thomas y Hong (2013), Rowland (2007), Fennema y Franke (1992) entre otros, se han dedicado a indagar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas principalmente, para tratar de descubrir cómo se va estructurando, desde que comienza su formación profesional hasta el momento en que se vuelve protagonista de una práctica docente exitosa. En el caso del profesor de matemáticas y ciencias se han podido identificar subdominios de conocimientos, habilidades y prácticas diversas, las cuales se presentarán y discutirán más adelante.

Por ideas previas se entienden las interpretaciones de los estudiantes sobre diversos fenómenos, antes de un acercamiento científico, se relacionan con errores conceptuales; sin embargo, no siempre son un conocimiento erróneo, sino incompleto o no compatible con el conocimiento científico. Generalmente estas ideas persisten y son comunes, y deben ser consideradas como punto de partida para el diseño de actividades de enseñanza (Viennot, 1979; Hierrezuelo y Montero, 2006; Cuevas *et al*., 2017).

Por lo que respecta a la modelización matemática, se asume como el proceso de utilizar las matemáticas para entender situaciones que no pertenecen a la matemática misma, situaciones a las que se les suele llamar del mundo real, además de caracterizarse como el paso de un fenómeno del mundo real a un modelo matemático que lo represente (interpretación inductiva). Este modelo tendrá representación aritmética, geométrica o algebraica, o algún otra, y permite interpretar deductivamente el fenómeno (Confrey y Maloney, 2007; Cirillo *et al*., 2016; Cuevas, *et al*., 2017).

Las tecnologías digitales pueden ser consideradas como elementos mediadores que permiten la amplificación y reorganización de las ideas tanto para el estudio de los conceptos matemáticos como para las ciencias, en tanto que posibilitan la simulación y experimentación mediada en actividades didácticas (Moreno, 2014; Cuevas *et al*. 2017; Villamizar *et al*, 2020).

La orquestación instrumental (Trouche, 2004; Drijvers *et al*., 2010) es una metáfora que permite estudiar las maneras en que el profesor actúa, disponiendo intencional y organizadamente de diversos artefactos (incluyendo los digitales) para configurar un ambiente de aprendizaje. Se distinguen tres elementos dentro de la orquestación instrumental: la configuración didáctica (*didactical configuration*), los modos de aprovechamiento (*exploitation modes*) y el rendimiento didáctico (*didactical performance*) (Drijvers *et al*., 2010, p. 215).

Según Drijvers *et al*. (2010, p. 215) la configuración didáctica se entiende como: “una disposición de artefactos en el entorno o una configuración de la enseñanza y de los artefactos que intervienen en ella”; el modo de explotación “corresponde a la forma en que el profesor aprovecha la configuración didáctica en beneficio de sus intenciones”, que a su vez incluye las decisiones para introducir y trabajar una tarea, así como los posibles roles que jugarán los artefactos, tomando en cuenta los esquemas y técnicas que desarrollarán y establecerán los estudiantes. Finalmente, el rendimiento didáctico implica: “las decisiones tomadas mientras se enseña, cómo actuar de acuerdo con la configuración didáctica elegida y el modo de explotación”; es decir, las decisiones conscientes que debe tomar el profesor ante una situación inesperada de la tarea matemática, herramienta tecnológica u otros objetivos emergentes por parte de un estudiante.

3. Método

Para el desarrollo de este capítulo se propuso un análisis teórico y de síntesis, fundamentado en un análisis documental que permitió abordar las preguntas o cuestionamientos planteados anteriormente, a través de una reflexión en torno a diversas teorías y desarrollos de investigación en la enseñanza de las matemáticas y ciencias para secundaria (Peña-Vera y Pirela-Morillo, 2007). A partir de esta revisión teórica, se consideraron relevantes los siguientes temas:

- Lo que deben conocer los profesores que imparten clases de ciencias y matemáticas.
- La orquestación instrumental como una perspectiva teórica que permite entender y buscar alternativas para enfrentar el reto de la educación en matemáticas y ciencias a través de una modalidad remota o a distancia.
- El uso de las tecnologías digitales para la modelización matemática y su mediación en la simulación y experimentación de fenómenos.

A continuación se presenta una síntesis de la revisión teórica a propósito de los temas mencionados, partiendo de consideraciones en torno al conocimiento del profesor, las propuestas para orquestar sus clases de manera remota en tiempos de contingencia sanitaria y la implementación de estrategias didácticas que integran las tecnologías digitales para la enseñanza de la geometría y la física.

4. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas y ciencias

Implica reconocer que el conocimiento del profesor dedicado a la enseñanza de matemáticas y ciencias es diverso y profundo para atender a diferentes situaciones en el aula presencial como virtual, el cual comprende subdominios de conocimiento curriculares, didácticos, disciplinares, tecnológicos, entre otros. Sin embargo, existen diversas teorías que reflexionan sobre cómo se organiza el conocimiento especializado del profesor, aquí se hará mención del modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*MTSK* por sus siglas en inglés), y en el caso de la física, el Conocimiento Especializado del Profesor de Física.

El MTSK propone una estructuración del conocimiento del profesor de matemáticas basada en la noción de especialización, que permite caracterizar conocimientos de distinta naturaleza, considerando el contenido matemático y diferentes subdominios (Flores-Medrano *et al*., 2016). En este modelo se sigue la idea de Shulman (1986), sobre la presencia de dos grandes dominios de conocimiento: el conocimiento de las matemáticas y el conocimiento didáctico del contenido, en el que se incluyen además las creencias. En el esquema de la Figura 1, Flores-Medrano y colaboradores presentan los dominios y subdominios que componen el MTSK.

Según Flores-Medrano *et al*. (2016), el conocimiento del profesor que enseña matemáticas se compone de tres subdominios: el contenido matemático a profundidad (conocimientos disciplinares), la estructura matemática y la práctica matemática.

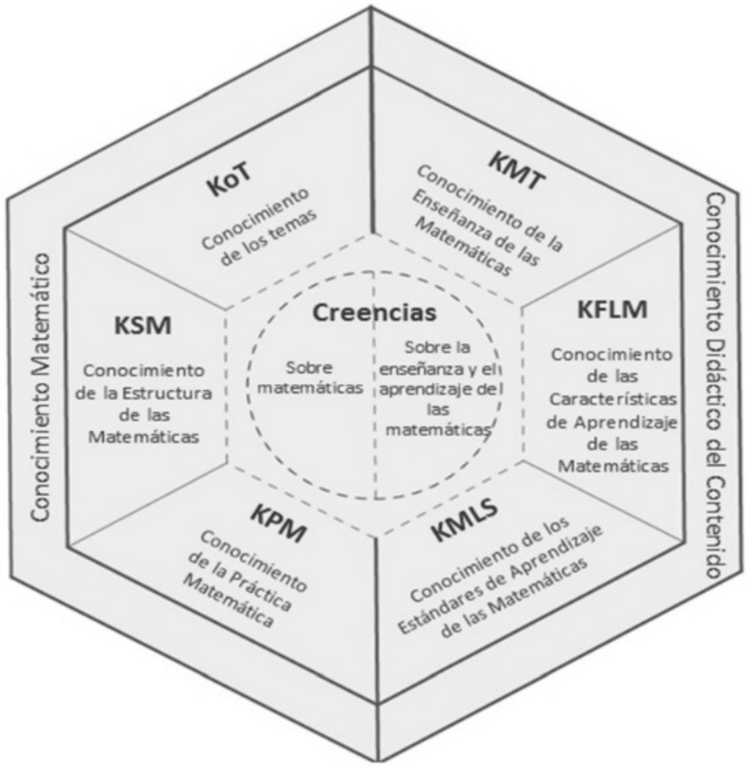


Figura 1. Esquema del MTKS (tomado de Flores-Medrano *et al*., 2016, p. 209).

La Figura 1 ilustra los tipos de conocimiento matemático que debe poseer el profesor de matemáticas, interpretados por Flores-Medrano *et al*. (2016) de la siguiente manera:

El *Knowledge of Topics* (KOT) o conocimiento de los temas, hace referencia al conocimiento disciplinar y matemático escolar. Describiendo cómo conoce el profesor de matemáticas los temas que va a enseñar; además supone conocer los fundamentos teóricos de los tópicos matemáticos, así como sus significados.

El *Knowledge of the Mathematical Structure* (KMS) o conocimiento de la estructura matemática, busca recoger el conocimiento del profesor sobre la forma en cómo se interconectan los diferentes contenidos matemáticos.

Knowledge of Practices in Mathematics (KPM) o conocimiento de la práctica en matemáticas, es aquel que el profesor posee sobre cómo se hacen matemáticas, teniendo en cuenta el uso de las reglas de sintaxis de la disciplina. Este subdominio se puede ejemplificar cuando el profesor establece definiciones y utiliza de forma diferenciada la demostración, la prueba y la conjetura.

Pedagogical Content Knowledge (PCK) o conocimiento pedagógico del contenido, implica para el MTSK tres subdominios que permiten reconocer el conocimiento del profesor acerca del contenido como objeto de aprendizaje, como objeto de enseñanza y como conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM). El conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas se refiere a cómo aprenden los estudiantes los contenidos matemáticos. Conocer cuáles son los modos habituales de razonamiento de los alumnos en determinados contenidos, sus dificultades, aquello que les resulta más comprensible, o aquello que pudiera resultar más interesante. Se refiere a las teorías de aprendizaje que el profesor puede conocer para sustentar su comprensión del aprendizaje de determinados contenidos matemáticos o las propias prácticas personales que, debido a la experiencia, pudieran instituirse en una teoría propia de aprendizaje.

*Knowledge of Mathematics Teachin*g (KMT). El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas es el conocimiento que tiene el profesor sobre los modos de presentar el contenido y su potencial para la enseñanza considerando ejemplos adecuados, intención o contexto. También se refiere al conocimiento de los recursos y materiales didácticos relevantes para llevar a cabo la actividad matemática.

Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS). Conocimiento del profesor sobre lo que está institucionalmente aceptado que aprenda un estudiante, nivel de profundidad y dominio que se espera que éste adquiera en determinado momento escolar. Comprende también el conocimiento de secuenciaciones del contenido y su fundamento. Se trata de un conocimiento que se basa en el currículo, en otros estándares de aprendizaje e investigaciones.

En comparación existe también un conocimiento especializado del profesor de física que puede ser extendido a la enseñanza de las ciencias en general y que también demanda un desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido (Roth, 2007; Seung *et al*., 2012). Asikainen y Hirvonen (2010) se han abocado a indagar sobre los aspectos del conocimiento especializado relacionados con la enseñanza de la física, identificando que la didáctica alemana (*Didactik*) y americana coinciden en cuanto a objetivos de enseñanza, temas y contenidos, formas organizacionales, métodos y procedimientos de enseñanza-aprendizaje, así como en métodos de evaluación y monitoreo de resultados de aprendizaje, categorías de conocimiento específico de enseñanza, que han sido identificadas previamente por Shulman.

La formación de profesores en América Latina es muy distinta en relación con la formación en Europa, sin embargo, se coincide con Asikainen y Hirvonen (2010) en que el principio del objeto de conocimiento de la física puede estar dividido entre la comprensión conceptual, un conocimiento de las estructuras de la física y el conocimiento de la historia y filosofía de la física. De tal modo que, retomando el modelo de Flores-Medrano *et al*. (2016) y las categorías del conocimiento especializado de Asikainen y Hirvonen (2010) se presenta como aporte de discusión y reflexión, el esquema de un modelo análogo al MTSK, el cual puede considerarse como el Conocimiento Especializado del Profesor de Física (CEPF) cuyos subdominios se describen a continuación (Figura 2):

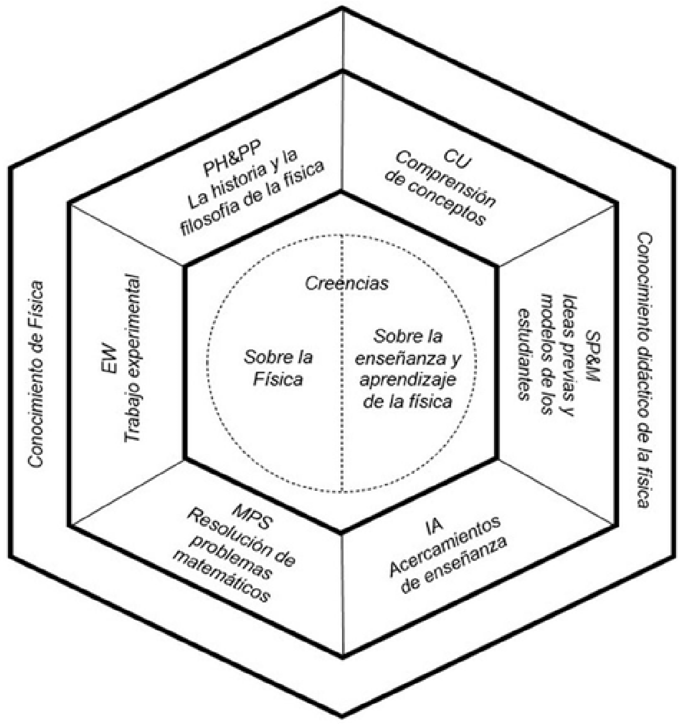


Figura 2. Modelo de Subdominios del conocimiento especializado para la enseñanza de la física CEPF (Adaptado de Flores-Medrano *et al*. (2016) con las aportaciones de Asikainen y Hirvonen 2010).

Comprensión de conceptos (*Conceptual Understanding*, CU). Según Asikainen y Hirvonen (2010), ésta se ha definido la como la habilidad de saber los conceptos y su significado, o en un punto de vista más sofisticado de dicha definición como discernir las estructuras de la física y las formas en las cuales ésta se relacionan con otras.

La historia de la física y de la filosofía de la física (*Physics History and Physics Philosofy*, PM y PP) pueden ser usadas como punto de partida en la enseñanza de la física si el objetivo de la enseñanza es la comprensión de conceptos y los procesos y la naturaleza de la ciencia, además la historia de la ciencia puede ayudar a los estudiantes a abandonar las concepciones históricas irrelevantes (conocimiento anecdótico) y aprender las nuevas.

Acercamientos de enseñanza (*Instructional Approaches*, IA). Son esquemas de acción que guían el proceso de enseñanza. Cuando a cierto acercamiento se le da continuidad en la enseñanza, las estrategias usadas y el contenido elegido, forman un ensamblaje coherente que toma en cuenta diversos factores, como el nivel de comprensión de los estudiantes, objetivos y contenidos de enseñanza. En la didáctica esto puede ser entendido como un proceso de análisis. Las diferentes versiones de modelización son ejemplos de acercamientos instruccionales, representaciones del acercamiento de especialidad final, el cual está fuertemente basado en la tradición didáctica. Dentro de las categorías de Shulman, el conocimiento de acercamientos instruccionales incluye todo el dominio de conocimiento base del profesor.

Trabajo experimental o práctico (*Experimental Work*, EW). Es como normalmente se le conoce y es una parte muy común en la enseñanza de la física. El trabajo práctico juega un papel muy importante en el aprendizaje en el sistema de escuela terminal. En la didáctica alemana, el conocimiento de trabajo experimental es parte de la comprensión profunda de la sustancia, pero también pertenece al conocimiento de los mejores métodos de enseñanza.

Resolución de problemas matemáticos (*Mathematical Problem-Solving*, MPS). Es parte de la enseñanza de la física especialmente en los niveles de la secundaria alta en Finlandia, incluso si el énfasis está puesto en la comprensión de la física, aunque juega un papel menos importante en la secundaria baja, en donde el énfasis de la enseñanza está en la comprensión del fenómeno.

Ideas previas de los estudiantes y modelos (*Students' Preconceptions and Models*, SP y M). Forma parte de la enseñanza actual de la física. Con la finalidad de apoyar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje, un profesor debe tener conocimiento del mismo rango de concepciones comunes y modelos de razonamiento que tiene el estudiante. En Cuevas *et al.* (2017) se describe una idea previa relacionada con el sonido, donde los estudiantes lo interpretan como todo aquello que genera ruido, y no lo comprenden desde sus representaciones periódicas asociadas a la rarefacciones y compresiones de las moléculas de un medio. En la teoría de Shulman, este tema pertenece al dominio de la comprensión del estudiante y en la didáctica alemana es un prerrequisito de la enseñanza (Asikainen y Hirvonen, 2010).

Si bien, lo anterior menciona diversos conocimientos del profesor de matemáticas y ciencias, se debe tomar a consideración el modo en que los profesores deben actuar, desempeñarse y organizar los diversos artefactos ante situaciones específicas ocurridas en el aula, ya sea física o virtual, lo cual se discutirá en la siguiente sección.

5. Orquestaciones extramurales: una manera de entender la enseñanza remota en tiempos de contingencia

Se ha mencionado que el profesor de matemáticas y ciencias desarrolla y pone en juego determinados conocimientos profesionales (disciplinares, curriculares, didácticos y tecnológicos, entre otros), necesarios para orientar su práctica. Uno de los elementos fundamentales de dicha práctica es la capacidad que pueden tener los profesores para diseñar y gestionar ambientes de aprendizaje propicios a las necesidades de sus estudiantes. Al respecto, la investigación se ha enfocado principalmente al estudio de prácticas en entornos presenciales, sin embargo, actualmente existe un mayor interés en profundizar en el estudio del trabajo del profesor en ambientes virtuales o en línea.

A esta situación debe sumarse el impacto fundamental que ha tenido en la sociedad y, en particular, en la educación, la emergencia sanitaria provocada por el COVID-19, la cual ha marcado nuevos caminos para la enseñanza, en los que las tecnologías digitales han jugado un papel trascendental. Así pues, uno de los retos que enfrentan gran parte de los profesores en el mundo está relacionado con la enseñanza en medio de la contingencia sanitaria, que ha provocado que muchas escuelas y profesores asuman la enseñanza remota como una alternativa para darle continuidad a las actividades escolares.

Esta enseñanza remota ha permitido que los profesores propongan nuevas formas de organizar, disponer y llevar a cabo su trabajo a través de un uso cada vez más generalizado de tecnologías digitales. En esta perspectiva, se han desarrollado nuevas maneras de orquestar el aprendizaje de los estudiantes (Drijvers *et al.*, 2010) a través de ambientes híbridos que se mueven entre la presencialidad y la enseñanza en línea.

Al respecto, surgen diversas preguntas, tales como: ¿en qué consiste esta enseñanza remota?, ¿cómo los profesores organizan y disponen un ambiente de aprendizaje remoto para sus estudiantes?, y ¿qué se ha aprendido de toda esta experiencia? Por supuesto, no se trata aquí de responder estas preguntas, sin embargo, se considera que sirven para intentar comprender los nuevos retos y situaciones que enfrentan los profesores. Para ello, se propone la idea de *orquestación extramural* como una manera de entender estas nuevas organizaciones propuestas por los profesores.

Inspirados en las ideas de Trouche (2004) y Drijvers *et al*. (2010) sobre el concepto de orquestación, se intenta describir y caracterizar estas orquestaciones extramurales con las cuales los profesores pretenden orientar la actividad de sus estudiantes. Se considera pertinente ampliar la metáfora de la orquestación instrumental, teniendo en cuenta que la enseñanza remota rebasa los muros del espacio físico escolar tradicional, incluyendo otros participantes que antes tenían un lugar menos visible (*e.g.* los padres de familia), otro tipo de recursos y nuevas maneras de interacción.

La experiencia de los profesores enseñando de manera remota muestra al mundo que, con el uso más generalizado e intensivo de tecnologías digitales, los profesores han ampliado su portafolio de recursos digitales dispuestos para su enseñanza y han redefinido sus configuraciones didácticas. Estas nuevas configuraciones didácticas incluyen canales alternativos de comunicación con sus estudiantes, por ejemplo, a través de redes sociales, correo electrónico o servicios de mensajería instantánea, como WhatsApp, mediante el cual los profesores mantienen contacto con sus estudiantes, comparten recursos y se les atiende de forma remota con llamadas y/o videollamadas. Adicionalmente, algunos profesores comparten grabaciones de sus clases, hojas de trabajo para sus estudiantes, envían y reciben tareas. Algunas de las razones que sustentan el uso masivo de este tipo de aplicaciones de mensajería instantánea es su gratuidad, su versatilidad dada las funcionalidades que ofrece, su popularidad y lo relativamente económica en uso.

Adicionalmente, los profesores han integrado el uso de *blogs* personales o de plataformas de aprendizaje, como Google Classroom, para gestionar los recursos dispuestos para sus estudiantes, el desarrollo de las actividades y la evaluación. Otro aspecto que sobresale es el incremento en el uso de recursos audiovisuales, como los videos de YouTube, y en menor medida el uso de *Open Educational Resources* (Trouche *et al*., 2018), como Khan Academy.

Los modos de explotación en estas orquestaciones extramurales apuntan a la coordinación de los recursos dispuestos a través de videoconferencias o encuentros sincrónicos en plataformas como Google Meet o Zoom, articuladas con materiales u hojas de trabajo compartidas a los estudiantes y muchas veces acompañadas de recursos complementarios como videos para propiciar el trabajo asincrónico de los estudiantes. En los encuentros, a través de videoconferencias, los profesores tienden a replicar prácticas propias de las clases presenciales: toman la lista de asistentes, presentan el tema a enseñar, dan ejemplos y algunos ejercicios, para esto se valen de recursos adicionales como presentaciones de diapositivas o pizarras virtuales. La comunicación suele ser unidireccional, de los profesores a los estudiantes, con algunas excepciones a través del uso del Chat o interacciones a través de preguntas y respuestas.

Por otro lado, un reto fundamental para los profesores en estas orquestaciones extramurales ha sido justamente el diseño de hojas o guías de trabajo, las cuales están dirigidas a un estudiante que las va a desarrollar sin un acompañamiento directo del profesor, como ocurre usualmente en las clases presenciales, y eso genera serias tensiones y dificultades cuando las consignas de las tareas no son claras o las tareas son difíciles para los estudiantes, lo cual genera que otras personas participen en el ambiente de aprendizaje: familiares, amigos y hasta vecinos que buscan apoyar en las tareas escolares.

Este tipo de orquestaciones extramurales conlleva a que el *didactical performance* del profesor no se restrinja al encuentro sincrónico durante las videoconferencias, sino que se extienda en tiempos que incluso pueden ser por fuera del horario escolar. Estas orquestaciones implican un manejo de tiempos mucho más extensos a lo acostumbrado en la presencialidad y le implica a los profesores interactuar con los estudiantes de otras maneras, resolver otro tipo de imprevistos y tomar decisiones *ad hoc* diferentes a lo que se hacía en el aula presencial. Toda esta situación ha llevado a que muchos profesores expresen fatiga ante la necesidad de atender a sus estudiantes a través de medios remotos, en los cuales se prioriza la atención individualizada, en contraste a la atención mucho más colectiva que se suele hacer en las clases presenciales.

En conclusión, estamos ante orquestaciones que trascienden los muros de la escuela, que incorporan o brindan mayor protagonismo a otros actores (como padres de familia), que le otorgan al estudiante mayor autonomía y responsabilidades frente a su proceso de aprendizaje y que integran una variedad de recursos digitales que anteriormente no eran considerados. Así mismo, la configuración didáctica que el profesor generaba ha tenido que modificarse y extenderse, utilizando recursos diversos, en especial los tecnológicos digitales. Aún es muy pronto para estudiar los efectos e impacto de la enseñanza remota en emergencia sanitaria, sin embargo, existe un acuerdo generalizado de que ha sido una oportunidad grandiosa para repensar las prácticas educativas, más allá del trabajo exclusivo al interior del aula física.

6. Configuración didáctica a partir del uso de las tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de geometría y física

Las tecnologías, en particular, las digitales, crecen a pasos agigantados transformando no sólo la sociedad sino la educación, modificando las formas en que el profesor orquesta los procesos y recursos en su enseñanza. Por ello, a continuación se reflexionará sobre el uso de las herramientas tecnológicas digitales apoyadas en investigaciones en la enseñanza de la geometría y la física.

6.1 El uso del GeoGebra para aprender geometría a partir de la elaboración de simuladores

Existen diversas maneras de usar las tecnologías digitales por parte de los profesores de matemáticas y ciencias, entre ellas se considera la creación de comunidades educativas donde se generen retos matemáticos afrontados con un *software* o *app*. Al respecto, para reflexionar sobre el rol y uso de las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria, se cita a modo de ejemplo, Aprender en Red, la cual desarrolló el Proyecto Club GeoGebra (PCG), que fue implementado en algunos establecimientos de educación secundaria pública en Venezuela, desde el 2013 al 2017 (Sánchez *et al.*, 2020). La implementación del PCG consistió en conformar pequeños grupos de estudiantes (llamados clubes GeoGebra), cuyas actividades giraban en torno a la elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG). Al mismo tiempo, el PCG se planteaba hacer de estas actividades verdaderas oportunidades para el aprendizaje de contenidos de geometría en 2D y 3D de manera dinámica. Para ello, fueron proyectadas dos grandes metas de la ESG orientadas a favorecer el aprendizaje:

(I) La producción de dibujos dinámicos que representarán modelos ostensivos de determinados fenómenos de la realidad con el *software*, es decir, dibujos creados con un *software* de geometría dinámica, de manera que: "[...] conserve ciertas propiedades espaciales impuestas cuando se desplace por uno de los puntos básicos del dibujo." (Laborde, 1997, p. 42), y

(II) La comprensión de los procesos de producción de estos dibujos.

Guiados por la comprensión del proceso de producción de un dibujo dinámico era posible que los clubes desplegaran actividades en donde determinados saberes geométricos se movilizaban mediante las acciones y reflexiones de los participantes. Al sumergirse en estas actividades, las acciones y reflexiones de los estudiantes, en conjunto con las del responsable del club (el promotor), se orientaban hacia la producción de significados para aquellos objetos y relaciones geométricas que hacían parte de sus procedimientos de construcción.

Indistintamente de la concepción de significado que se tenga, los estudios realizados en el contexto del PCG (Sánchez y Prieto, 2019; Sánchez *et al*., 2020) dieron cuenta de que los significados de los objetos y relaciones geométricas evocados en las actividades de ESG (como también ocurre en muchas otras actividades humanas) estaban siendo expresados por medio del uso coordinado de signos (p. ej., gestos, enunciados, textos y dibujos) y de artefactos (p. ej., el *software* GeoGebra o un lápiz). En otras palabras, era por medio de signos y artefactos que los participantes del PCG podían comunicar (para los demás y para sí mismos) los significados atribuidos por ellos a las operaciones realizadas con el *software* para crear un dibujo dinámico con el cual modelar cierto fenómeno de la realidad (Figura 3).

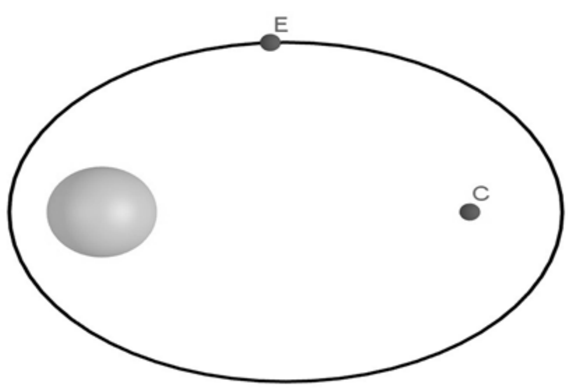


Figura 3. Dibujo dinámico creado para modelar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Tomada de Faria (2016, p. 93).

Durante la implementación del PCG, el *software* GeoGebra fue concebido (en el sentido de Radford, 2014) como un artefacto cultural de naturaleza digital que proporcionaba una serie de contenidos conceptuales (herramientas de construcción y de medida) como un espacio de trabajo conceptual (apariencias Geometría y Gráficos 3D) para que el usuario pudiera experimentar con estos contenidos y produjera formas novedosas de construir y validar los dibujos dinámicos. Por ejemplo, si algún estudiante deseaba construir con GeoGebra una elipse en el plano XY, la herramienta Elipse sugería un procedimiento de construcción guiado por el reconocimiento y/o determinación de sus focos y de un punto sobre la cónica. La conceptualización que transmite esta herramienta es aquel lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante; es decir la definición de elipse (Figura 4).

Figura 4. Conceptualización detrás de la herramienta Elipse. Elaboración propia.

Lo anterior revela que la comprensión del proceso de producción de un dibujo dinámico en el PCG no podía lograrse sólo con la identificación de aquellos signos y artefactos a los que recurren los participantes, para dar significado a las operaciones de construcción, ni con el reconocimiento del uso que hacían de estos recursos semióticos. Además, era importante tomar consciencia de que los estudiantes y el formador producían significados enmarcados en "una superestructura simbólica o visión cosmológica del mundo" (Radford, 2020, p. 34), representada por la variedad de contenidos conceptuales que subyacen en las herramientas de construcción que ofrece el *software* GeoGebra. De hecho, estas herramientas responden a determinados saberes geométricos, los cuales expresan sofisticadas y evolucionadas formas de pensamiento acerca de las construcciones geométricas que han surgido de la actividad humana a lo largo de la historia (Prieto y Arredondo, 2020).

De esta manera, las relaciones entre los procedimientos de construcción de dibujos dinámicos y la conceptualización detrás de las herramientas de GeoGebra que permitían la materialización de la geometría en estos dibujos, comenzó a cobrar importancia en el PCG, sobre todo por las posibilidades que estas relaciones ofrecían para una comprensión más profunda de los significados otorgados a las operaciones de construcción, como también para un acercamiento de los estudiantes a los saberes históricos y culturales de la época correspondiente. Esta perspectiva sobre el rol y uso del GeoGebra en las actividades de ESG entregó a los promotores de los clubes una vía para comprender y promover nexos entre las acciones y operaciones de una construcción particular y el saber detrás de la herramienta empleada para producir el dibujo correspondiente; todo esto por medio de un trabajo colectivo de comunicación de lo realizado por los estudiantes, desde donde lograron emerger los significados.

El ejemplo de la Figura 3 fue tomado del trabajo de ESG realizado por Rosangela, una de las estudiantes participantes del PCG (ver Faria, 2016). En este trabajo, la necesidad de representar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol motivó el empleo de un procedimiento de construcción de la elipse (bajo la apariencia Gráficos 3D), cuyas operaciones se organizaron según la conceptualización de la cónica en el GeoGebra. Antes de iniciar su construcción, la joven consideró: (i) localizar un punto A en el origen del sistema cartesiano que sirviera como foco de la cónica (objeto de partida de la construcción), (ii) asumir al eje Y como eje focal de la elipse, y (iii) definir una escala conveniente para los valores de perihelio (k) y afelio (m). Luego de esto, la estudiante realizó una serie de operaciones con el *software* que, según la herramienta Elipse, se organizaban en las tres grandes acciones descritas en la Tabla 1.

Tabla 1. Acciones y operaciones realizadas para construir con GeoGebra una elipse a partir de uno de sus focos. Fuente: Faria (2016).

Acciones	Operaciones
1. Localizar el segundo foco de la elipse.	1.1. Se dibuja la circunferencia *d* con centro *A* y radio 2**c***a* – *Circunferencia (centro, radio, dirección).* 1.2. Se interseca la circunferencia *d* y el eje *Y*, dando lugar al punto *C* – *Punto.*
Acciones	Operaciones
2. Localizar un punto de la elipse.	2.1. Se dibuja la circunferencia *e* con centro *A* y radio *a* – *Circunferencia (centro, radio, dirección).* 2.2. Se dibuja la circunferencia *f* con centro *C* y radio *a* – *Circunferencia (centro, radio, dirección).* 2.3. Se intersecan las circunferencias *e* y *f*, dando lugar al punto *E* – *Punto.*
3. Dibujar la elipse.	3.1. Se construye la elipse *g* con focos *A* y *C*, y punto *E* – *Elipse.*

Como puede notarse, el procedimiento de construcción de la Tabla 1 fue guiado por la conceptualización de la elipse correspondiente a la herramienta de GeoGebra. De esta manera, las operaciones realizadas por la estudiante fueron relacionadas con acciones de construcción enmarcadas en una forma general de pensar sobre la cónica, que es histórica y cultural. En el transcurso de las actividades del club, la estudiante y su promotor emplearon colectivamente una serie de recursos semióticos que incluían palabras, gestos, dibujos, símbolos, modelos del fenómeno tratado, entre otros, para dotar de significado a las operaciones de la construcción. Por ejemplo, en el caso de las operaciones 1.1 y 1.2, el relato de Faria (2016) revela cómo estos sujetos identificaron relaciones entre las distancias del centro de la elipse a los focos (parámetro *c*) y los vértices (parámetro *a*); las distancias de la Tierra al Sol en los puntos de su órbita más cercano (perihelio, parámetro *k*) y más distante (afelio, parámetro *m*), mediante una variedad de recursos semióticos que les permitieron dotar de sentido a la localización del segundo vértice de la cónica, de una forma en la que no habían pensado antes del PCG.

7. El uso de las tecnologías digitales como mediadores en la experimentación y modelización matemática de fenómenos

Un elemento relevante en la enseñanza de las ciencias es la experimentación (Viennot, 1979, McDermott, 1991), sin embargo, algunos investigadores como Candela *et al*. (2012) argumentan que las prácticas de laboratorio en secundaria son escasas, derivado de la carencia de materiales, mobiliario e instalaciones seguras para una actividad exitosa, por otra parte, Cuevas *et al*. (2017) mencionan que instalar un laboratorio de ciencias es algo costoso, lo que limita programar situaciones didácticas a partir de experimentos.

Al respecto, se han generado diversas propuestas que integran el uso de las tecnologías digitales. En Cuevas *et al*. (2017) se puede profundizar sobre una propuesta para la modelización mediante el modelo Cuvima, donde proponen el uso de teléfonos inteligentes como laboratorios portables, de modo que, a partir de una *app* se pueda mediar la experimentación de un fenómeno y facilitar la modelización, por ejemplo: la Figura 5 muestra la *app* Oscilloscope propuesta por los investigadores para experimentar sonidos que sean captados y representados mediante una señal sinusoidal, y posteriormente, ésta permita el estudio del tono como cualidad del sonido siguiendo una secuencia didáctica. El proceso de llevar el fenómeno a una representación matemática es conocido como modelización matemática, de modo que la representación luego permita interpretar el mundo real, en este sentido, la matemática es significativa dentro de los contextos de la física.

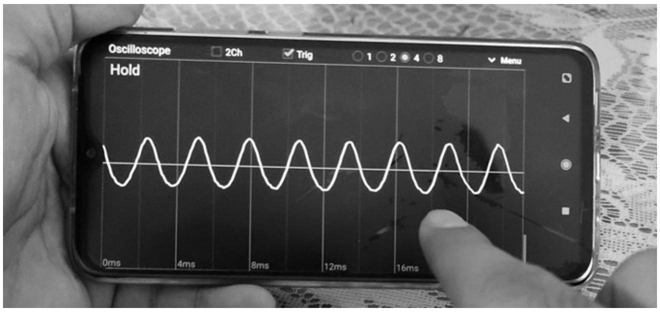


Figura 5. Experimentación con dispositivos móviles para la modelización de un fenómeno físico. Elaboración propia.

La configuración de estos artefactos para la experimentación transforma la enseñanza tradicional en clases donde se promueve el aprendizaje activo y colaborativo debido a que este tipo de experimentos conllevan el trabajo en equipo donde cada integrante debe realizar una función para lograr la obtención de resultados. Por otra parte, las *apps* en dispositivos móviles son una alternativa que permite economizar en la inversión de instrumentos de laboratorio de alto costo como osciloscopios, y son más intuitivos.

8. Resultados y discusión

Con la intención de aproximar una respuesta a los cuestionamientos planteados, sintetizamos los siguientes resultados:

Haciendo énfasis en el conocimiento que tiene el profesor, se analizaron algunos modelos que describen cómo se organizan los subdominios de conocimiento del profesor dedicado a la enseñanza de las matemáticas y ciencias, que son desarrollados a lo largo de su vida profesional. Estos conocimientos comprenden aspectos relacionados con lo didáctico, curricular, tecnológico, filosófico e histórico. Se reconoce que aunque los modelos presentados pueden resultar útiles, no son suficientes para enfrentar los distintos retos que surgen constantemente, y que depende de las aptitudes que toma el profesor para actuar y diseñar planes de procesos de formación que respondan ante situaciones imprevistas, en este sentido la orquestación instrumental es un proceso necesario para generar adaptaciones adecuadas, un ejemplo de ello puede apreciarse en el reto que enfrentan los profesores con la pandemia del COVID-19.

Al respecto se evidencia el surgimiento de nuevas orquestaciones para situaciones de contingencia y enseñanza remota, definida como orquestaciones extramurales, es decir, aquellas que van más allá de las fronteras de las aulas físicas, debido a que surgen aulas virtuales con recursos digitales que han sido integrados de manera emergente por los profesores, para promover el aprendizaje colaborativo, la evaluación, profundización de los temas, experimentación, verificación de ejercicios, entre otros.

Las condiciones de un tiempo de contingencia demandan del profesor el desarrollo y surgimiento de otros subdominios de conocimiento especializado, que le requieren tener la capacidad de adaptarse a artefactos que permitan desempeñarse adecuadamente en un ambiente de educación a distancia o presencial, en donde no sólo deberá enseñar matemáticas o física, sino que además se requiere del planteamiento y desarrollo de proyectos interdisciplinarios donde las ciencias básicas se encuentran sumergidas en un contexto de aplicación práctica como puede ser la educación Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM).

Dado el análisis presentado, se consideran relevantes las ideas previas como punto de partida para la introducción de los temas de estudio relacionados con las ciencias, debido a que el estudiante siempre posee un conocimiento, el cual debe ser tomado en cuenta por el profesor al momento de diseñar sus actividades didácticas. Por otra parte, la modelización matemática juega un papel importante como un proceso que permite dar un significado a los objetos matemáticos, al utilizarlos como herramientas para describir un fenómeno; la modelización no sólo permite integrar las matemáticas con otras áreas del conocimiento científico, sino promover el uso de las tecnologías digitales tanto para la experimentación como la simulación y análisis de los datos obtenidos. Además, se considera importante el conocimiento filosófico e histórico, debido a que el profesor debe ser consciente del análisis epistemológico acerca de cómo surgieron determinados conceptos, lo cual ayuda a un próspero desarrollo o diseño didáctico y curricular.

Por último, se analizó que las tecnologías digitales no sólo permiten la comunicación ante eventos de contingencia, éstas pueden configurarse o adaptarse para generar laboratorios portables, que faciliten la experimentación de fenómenos y su modelización matemática. Además de las simulaciones de situaciones de la vida real que den sentido a los objetos matemáticos. El uso de *software* educativos en la enseñanza de las ciencias y matemáticas promueven la creación de comunidades de aprendizaje donde un profesor tiene un papel de facilitador o guía de los procesos de enseñanza- aprendizaje y no ostenta un conocimiento absoluto, es decir, los estudiantes también son protagonistas de la creación de conocimiento al proponer sus propios proyectos de acción práctica.

9. Conclusiones

No existe una única forma de enfrentar las problemáticas y retos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y ciencias en secundaria , sin embargo, se considera que los profesores dedicados a esta labor deben aspirar a tener un conocimiento profesional amplio en didáctica, filosofía, historia y tecnología para poder proponer ambientes de aprendizaje a distintas situaciones, tanto en la enseñanza presencial como remota, donde las orquestaciones instrumentales pueden ser muy diversas y dependen de los recursos y roles que juegan los participantes en cada caso. Así mismo, es imprescindible seguir profundizando en el papel mediador de las tecnologías digitales.

10. Referencias

Asikainen, M. A. y Hirvonen, P. E. (2010). Finnish cooperating physics teachers' conceptions of physics teachers' teacher knowledge. *Journal of Science Teacher Education, 21*(4), 431-450. https://doi.org/10.1007/s10972-010-9187-y

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Candela, A., Gamboa, F., Rojano, T., Sánchez, A., Carvajal, E. y Alvarado, C. (2012). Recursos y apoyos didácticos. En F. Flores-Camacho, (Ed.). *La enseñanza de la ciencia en la educación básica en México* (pp. 57-76). INEE. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1C227.pdf

Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M. y Rubel, L. (2016). Perspectives on Modeling in School Mathematics. En C. Hirsch y A. McDuffie (Eds.). *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pp. 3-16). National Council of Teachers of Mathematics.

Confrey, J. y Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. En W. Blum, P. Galbraith, H. Wolfgang y M. Niss (Eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 57-68). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Cuevas, C.A. y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, éléments d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 8*, 273-292.

Cuevas C.A., Villamizar, F.Y. y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(3), 129-150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2091

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. *et al* (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 213-234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Faria, R. (2016). Movimiento planetario en el sistema solar desde una perspectiva tridimensional. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Eds.). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 85-98). Aprender en Red.

Fennema, E. y Franke, L. M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). Macmillan.

Feynman, R. (2008). *La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol* (2ª. ed.). Ensayo Científico (Original publicado en 1964).

Flores-Medrano, E., Carrillo, J., Liñán, M., Montes, M. Á., Contreras, L. C. y Muñoz Catalán, M. C. (2016). El papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 204-221. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Gingras, Y. (2001). What did mathematics do to physics? *History of Science, 39*, 383-416.

Hierrezuelo, J. y Montero, A. (2006). *La ciencia de los alumnos. Su utilización en la didáctica de la física y la química*. Fontamara.

Karam, R. (2015). Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics. *Science y Education, 24*(5), 487-494. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9763-9

Kline, M. (1981). *Mathematics and the physical world*. Dover.

Laborde, C. (1997). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.). *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (p. 33-48). Una Empresa Docente.

McDermott, L.C. (1991). What we teach and what is learned. *American Journal of Physics, 59* (4), 301-315. https://doi.org/10.1119/1.16539

Moreno, L. (2014). *Educación matemática: del signo al pixel*. Universidad Industrial de Santander.

Peña-Vera, T. y Pirela-Morillo, J. (2007). La complejidad del análisis documental. Información, cultura y sociedad. *Revista del Instituto de Investigación Bibliotecológicas, 16*, 55-81. http://www.redalyc.org/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=263019682004

Prieto, J. L. y Arredondo, E. H. (2020). Aprendizaje de las construcciones euclidianas con GeoGebra: elementos de una actividad formativa para futuros profesores de matemáticas. *Paradigma, 41*(2), 356-380.

Pozo, J.I. y Gómez, M.A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia*. Morata.

Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 405-422.

Radford, L. (2020). El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, *15*(36), 27-42.

Roth, W. M. (2007). *Doing Teacher-Research: A Handbook for Perplexed Practitioners*. Brill Sense.

Rowland, T. (2007). Developing knowledge for teaching: A theoretical loop. En S. Close, D. Corcoran y T. Dooley (Eds.). *Proceedings of the 2nd national conference on research in mathematics education* (pp. 14-27). St Patrick's College.

Sánchez, I. C. y Prieto, J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 14*(1), 55-83.

Sánchez, I. V., Prieto, J. L., Gutiérrez, R. E. y Diaz-Urdaneta, S. (2020). Sobre os processos de objetivação de saberes geométricos. Análise de uma experiência de elaboração de simuladores com o GeoGebra. *Educación Matemática, 32*(1), 99-131. https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.8657

Sánchez, I. V., Sánchez, I. C., Gutiérrez, R. E., Diaz-Urdaneta, S., Prieto, J. L. y Castillo, L.A. (2020). Proyecto club GeoGebra una respuesta a la necesidad de constitución como actores de la educación matemática. *Pesquisas e Práticas Educativas*, 1, 1-23. https://doi.org/10.47321/PePE.2675-5149.2020.1.e202019

Serres, M. (2014). *Pulgarcita*. Fondo de Cultura Económica.

Seung, E., Bryan, L. A. y Haugan, M. P. (2012). Examining physics graduate teaching assistants' pedagogical content knowledge for teaching a new physics curriculum. *Journal of Science Teacher Education, 23*(5), 451-479. https://doi.org/10.1007/s10972-012-9279-y

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(1), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Thomas, M. y Hong, Y. (2013). Teacher Integration of Technology into Mathematics Learning. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 20*(2), 69-84.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281–307. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Trouche, L., Gueudet, G. y Pepin, B. (2018). Open Educational Resources: A Chance for Opening Mathematics Teachers' Resource Systems? En Fan L., Trouche L., Qi C., Rezat S. y Visnovska J. (Eds) *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_1

UNICEF (2020, 23 de marzo). COVID-19*: Más del 95 por ciento de niños y niñas está fuera de las escuelas de América Latina y el Caribe* [Comunicado de Prensa]. https://www.unicef.org/es/comunicados-prensa/COVID-19-mas-del-95-por-ciento-ninos-fuera-de-escuelas-America-Latina

Viennot, L. (1979). *Le raisonnement spontané en dynamique élemetaire*. Hermann.

Villamizar, F., Y., Martínez, A., Cuevas, C. y Espinosa-Castro, J. (2020). Mathematical modeling with digital technological tools for interpretation of contextual situations. *Journal of Physics: Conference Series, 1415*, 1-6. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1514/1/012003

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y MODELACIÓN.
NIVEL BÁSICO, MEDIO SUPERIOR Y SUPERIOR

CAPÍTULO 18. MODELACIÓN DE LA FUNCIÓN DE AMORTIGUACIÓN, RELACIÓN CON EL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN Y CIRCUITO ELÉCTRICO RL, PARA ESCUELAS DE INGENIERÍA

Ernesto Arturo Bosquez, ernestok1@hotmail.com
Javier Lezama Andalón, jlezamaIPN@gmail.com
Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este artículo se discute la importancia de la modelación, en particular para la deducción de la función de amortiguación en un circuito eléctrico Resistencia-Inductancia RL. Mediante una secuencia didáctica que vincula el teorema de convolución en el contexto de la ingeniería. El primer acercamiento empírico utiliza conocimientos de las disciplinas intermediarias como: la teoría de control y la teoría de circuitos eléctricos para acercarse a las ecuaciones diferenciales con la transformada de Laplace, modelación, simulación, diagramas de bloques, y programas como OrCAD, Matlab y Graph, para obtener la función de amortiguación.[1]

1. Introducción

En Bosquez y Lezama (2020) detallamos el diseño de una propuesta didáctica de enseñanza del teorema de convolución para escuelas de ingeniería, en particular para electrónica; en este contexto observamos y mostramos la dificultad que presentaron los estudiantes al conocimiento de la *función de amortiguación*, y por no ser el objetivo principal del trabajo mencionado, la dimos por un hecho conocido. En el presente trabajo abordamos este problema y el objetivo principal es construir la *función de amortiguación* a partir de hechos empíricos con el uso de la modelación tanto de expresiones matemáticas, diagramas de bloque y uso de la simulación. Partiendo del contexto descrito se tiene que en un circuito resistencia-inductancia (R-L) hay dos hechos relevantes; uno antes de iniciar la corriente y otro después de iniciar la corriente eléctrica en el mismo. Para poder plantear el problema de este trabajo es necesario situarnos en R-L antes de iniciar la corriente. Algunas consideraciones teóricas relevantes son: al circuito R-L se le conoce como un sistema lineal, ya que si se aplica una suma de señales de entrada se obtiene una suma de respuestas de señales de salida y si se multiplica una señal de entrada por una constante c distinta de cero positiva entonces se obtiene una respuesta de la multiplicación de esta constante por la señal de salida del sistema. En forma general y en el contexto de la ingeniería electrónica la respuesta a un impulso dado en un sistema lineal (por ejemplo, el circuito

1. El presente capítulo contiene información del trabajo *Diseño de una secuencia didáctica en el Teorema de Convolución para escuelas de ingenierías* publicado en 2017, cuyos autores son Ernesto Arturo Bosquez, Javier Lezama y Avenilde Romo, los primeros dos autores también cumplen la misma función en este texto. El trabajo se encuentra disponible en el *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 301-312, disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/12152/1/Arturo2017Disen%CC%83o.pdf.

R-L) se obtiene la respuesta de salida "y" mediante la siguiente expresión (1), es decir,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t,\tau)d\tau \tag{1}$$

Donde u es una suma de impulsos, h es la respuesta al impulso aplicado u, y "y" la respuesta de salida del sistema, así existen dos maneras de interpretar esta expresión (1), es decir,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2}$$

La manera de justificar la expresión (2) es por la conmutatividad de la operación convolución, es decir, $u*h=h*u$. A las expresiones indicadas en (2) se les conoce como integrales de convolución. En nuestro caso particular la expresión (2) ya aplicada a un circuito eléctrico R-L, donde la condición inicial de la corriente en cero es cero, quedaría como se indica en (3), es decir,

$$y(t)=\int_{0}^{t} h(t-\tau)E(\tau)\,d\tau \tag{3}$$

En donde se entiende que al aplicar una señal de entrada "E", el circuito eléctrico R-L se obtiene una respuesta de salida "y" en este caso la corriente eléctrica del circuito mencionado, en esta expresión (3) a la función *h* se le denomina la *función de amortiguación*. De aquí surgen los cuestionamientos siguientes. En la expresión (1) ¿puede relacionarse la función h y E de tal manera que podamos interpretar a la integral de esta expresión como una convolución?, ¿específicamente en la expresión (3) cuál es esta función de amortiguación *h*/?, ¿qué relación hay entre la expresión (3) y el teorema de convolución? En este trabajo nos proponemos construir en un primer momento de manera empírica a la función "h", para esto usaremos los modelos de expresiones matemáticas obtenidos en el proceso de las tareas propuestas a los estudiantes y con éstos relacionarlos con los modelos de los diagramas de bloques obtenidos para que de esta manera se pueda, en un primer momento, obtener la condición inicial de h y de aquí resolver la ecuación diferencial que involucra esta función h para llegar algorítmicamente a su especificación.

2. Fundamentos teóricos

2.1 Primer componente

El diseño de la situación didáctica del teorema de convolución para escuelas de ingeniería se detalla en Bosquez y Lezama (2020). Constituye una secuencia de actividades didácticas que plantea un problema real que se aborda mediante conocimientos previos. Esto permite generar hipótesis y conjeturas en el sentido de Brousseau (1986). El medio didáctico está constituido por situaciones a-didácticas que en conjunto conformarán la situación didáctica que proponemos.

En un primer momento presentamos la situación escolar donde se imparte ingeniería, se aborda el teorema de convolución que aparece en el discurso escolar cuando se estudian las ecuaciones diferenciales y se usa en la transformada de Laplace, como una forma de resolver ecuaciones diferenciales lineales. En los libros de texto utilizados por profesores y alumnos de estos cursos el teorema de convolución es:

Teorema de Convolución: Sean las funciones f(x) y g(x) continuas por tramos en el Intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}[f*g]=F(s)\cdot G(s)$$

Dónde $f*g$ es la convolución de f con g y se define como,

$$f*g=\int_0^t f(\alpha)g(\alpha-t)\,d\alpha$$

Siempre que esta última integral exista.

Una consecuencia de este Discurso Escolar tradicional es que deja en el estudiante únicamente una práctica operatoria para resolver ecuaciones diferenciales. Es decir, él tiene la idea de que con una serie de pasos operatorios resolverá la ecuación diferencial que se le proponga, desarrollando dicho proceso. Podrá decidir cuándo utilizar o no este teorema, pero fundamentalmente su actuar puede esquematizarse como se describe en la Figura 1. Otro aspecto del discurso mencionado es que dicho procedimiento carece de una apropiada vinculación con la ingeniería que se estudia, Bosquez *et al*. (2010).

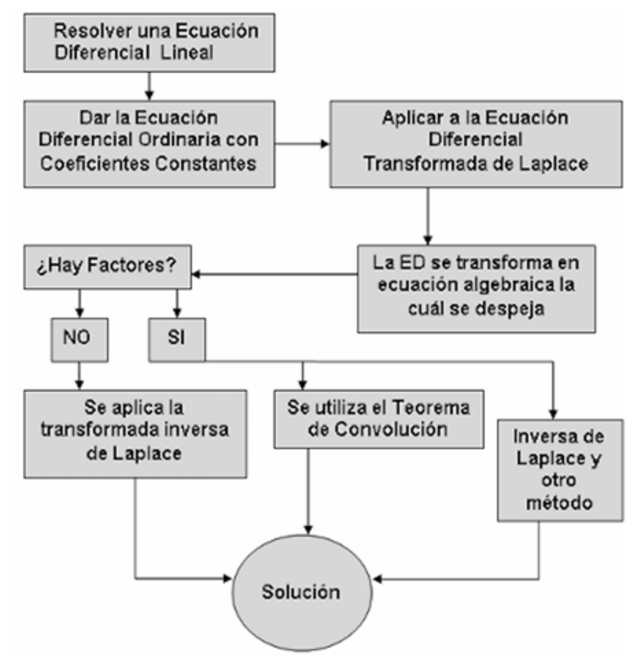


Figura 1. Procedimiento típico para resolver una ED usando el Teorema de Convolución. Elaboración propia.

Finalmente, en este Discurso Matemático Escolar podemos observar que el actor principal durante su ejecución es el docente, y sólo hay un espacio mínimo para la participación del estudiante. Desde esta perspectiva nos proponemos romper con este paradigma, al tratar de diseñar una secuencia de actividades dirigidas a los estudiantes donde ellos puedan interactuar con el objeto de estudio buscando con ello que vinculen el contenido conceptual del teorema de convolución con un más amplio espectro de actividad matemática como puede ser la modelación matemática, la modelación física, la técnica de la transformada de Laplace, la simulación con modelos de bloques y *software*. Nuestro diseño considera los siguientes aspectos.

- Reconocemos la génesis del teorema de convolución como un saber sabio, esto se confirma al analizar el trabajo de Mellin (1896) y cuya transposición didáctica a un saber enseñado, en los textos típicos (Zill *et al*., 2008), es aún complicado para la enseñanza de este conocimiento en escuelas de ingeniería. Nuestro trabajo aquí fue dotarlo de significados en el contexto de la ingeniería electrónica.

- El discurso matemático escolar típico del teorema de convolución usado por los estudiantes centra el significado en lo operatorio, con un pobre significado en la ingeniería que estudian.
- La epistemología que fundamenta la construcción de este conocimiento en el ámbito escolar típico se ve empobrecida por prácticas de aulas descontextualizadas e incapaces de proveer la construcción de significados que permitan usar dicho conocimiento más allá de actividades resolutivas de E.D.

2.2 Segundo componente

El estudio ICMI 3 "Mathematics as a service subset" (1987), afirma en su introducción:

> The teaching of mathematics to students of other disciplines must now be accepted as a fact, a social need and, also, a relatively new problematic issue (Howson y Kahane, 1988, p. 1).[2]

Este estudio nos permite ver la disciplina matemática como una disciplina de servicio. En este mismo estudio, Pollak *et al.* (1988, p. 31) evidencia dos tipos de necesidades matemáticas en la práctica de los ingenieros:

> Elementary needs: "the ability to set up the right problem, to have a good idea how big the answer should be, and to get the right answer by any available means whatsoever-mentally, calculator, paper-and-pencil, computer whatever".
>
> Advances needs: "we need employees who know that there is a large variety of forms of mathematical thinking, and what these various forms can do".[3]

De ello se deriva la interrogante de ¿cómo lograr considerar esta necesidad desde la enseñanza de las matemáticas? Integrando estos dos componentes teóricos en el diseño de la secuencia didáctica que presentamos en este artículo, nos debe permitir articular elementos de la matemática con partes de la disciplina intermediaria, así como componentes de la práctica misma, en donde el actor principal sea ahora el estudiante, rompiendo con el paradigma convencional del discurso escolar de este conocimiento matemático.

Como disciplina intermediaria tenemos la teoría de control y la teoría de circuitos eléctricos, que nos permiten vincular modelos matemáticos, modelos físicos y modelos de ingeniería. Así, consideramos el uso del teorema de convolución a través de disciplinas intermediarias en donde vincu-

2. "La enseñanza de las matemáticas a estudiantes de otras disciplinas debe ser ahora aceptada como un hecho, una necesidad social y, también, una problemática relativamente nueva" [traducción propia].

3. "Necesidades elementales: 'la capacidad de plantear el problema correcto, tener una buena idea de qué tan grande debe ser la respuesta y obtener la respuesta correcta por cualquier medio disponible: la mente, una calculadora, papel y lápiz, computadora, lo que sea'.

Necesidades avanzadas: 'necesitamos empleados que sepan que existe una gran variedad de formas de pensamiento matemático y lo que estas diversas formas pueden lograr'" [traducción propia].

lamos a los circuitos eléctricos con las ecuaciones diferenciales, la técnica de la transformada de Laplace, la función de transferencias, ambiente electrónico, así como diagramas de bloque y el teorema de convolución. Nuestro trabajo no está interesado en demostrar matemáticamente este teorema ni en dar únicamente algoritmos sino involucrar al estudiante a que interactúe en el medio didáctico a través de secuencias de enseñanza, previamente diseñadas, con el objetivo de que integre y vincule todos los elementos mencionados usando una dinámica individual y de grupo.

2.3 Tercer componente

La modelación matemática es una actividad humana que ha tomado relevancia en los últimos años en todas las áreas de conocimientos, en particular en educación, debido a la relación de las matemáticas con otras disciplinas científicas. A continuación, planteamos lo que entenderemos por modelación en el contexto de la Ingeniería. Para esto, presentamos algunas concepciones de la modelación matemática, según algunos investigadores. Para Haberman (1977), la modelación matemática corresponde al campo de la matemática aplicada, lo resume en tres pasos: 1) Formulación del Problema (Fenómeno); 2) Solución del Problema; 3) La interpretación de los resultados matemáticos en relación al problema inicial. Este principio se aplica a los tópicos de Vibraciones Mecánicas, Dinámica de Poblaciones y Flujo de tráficos. Arrieta (2015, p. 19), nos dice: “El modelo es una práctica que articula entidades, para continuar otras nuevas”.

Para Cordero (2004, p. 2) “[...] una acepción de modelación [...] en enseñanza de las matemáticas, es aquella que propicia acciones que determinan que *cierta cosa* debe ser imitada. En este sentido la modelación es una *representación* y en consecuencia la modelación se convierte en *una aplicación de la matemática*”. Para Camarena (2015, p. 16-17) “un modelo matemático es aquella relación matemática que describe objetos o problemas de la ingeniería”, éstos se clasifican según su contexto en ingeniería. Ver Figura 2.

<table>
<tr><th colspan="3">CARACTERIZACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Modelaje de objetos de la ingeniería</td><td>Modelaje de problemas de la ingeniería</td></tr>
<tr><td colspan="2">La clasificación está en función del uso que le de la ingeniería</td><td>La clasificación está en función de las áreas cognitivas de la ingeniería</td></tr>
<tr><td>Modelos estáticos</td><td>Modelos dinámicos</td><td>Modelos de 1ª, 2ª, 3ª y 4ª generación</td></tr>
</table>

Figura 2. Tipos de modelos en ingeniería. Fuente: Camarena (2015, p.117).

Con base al análisis de problemas, la investigadora construye la definición de modelación matemática como sigue: “la modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto” (Camarena, 2015, p. 117).

Hestenes (2010) considera que la matemática abstracta ha sido descrita como la ciencia de los patrones y algunas otras ciencias pueden caracterizarse como la investigación de patrones en la naturaleza, pero para ambos dominios es fundamental la noción de modelo como una unidad de conocimiento coherentemente estructurado. Así, para este autor:

> [...] el modelo es una representación de la estructura en un sistema dado, y un sistema es un conjunto de objetos relacionados, que pueden ser reales o imaginarios, físicos o mentales, simples o compuestos. La estructura de un sistema es un conjunto de relaciones entre sus objetos. El sistema mismo se llama o denomina el referente del modelo (Hestenes, 2010, p. 13).

En nuestro trabajo consideraremos el modelo y sistema en este último sentido y de esto proponemos el diagrama siguiente como el proceso de un modelo o modelos para describir un sistema.

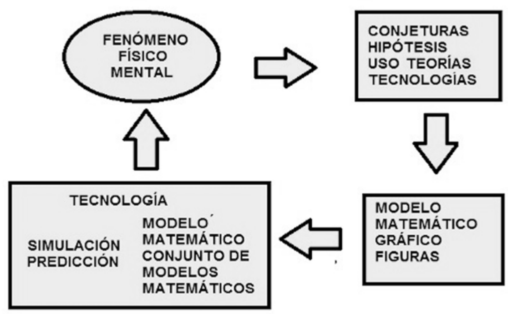


Figura 3. Representación gráfica del proceso de un modelo o sistema y consecuencia. Elaboración propia.

Consideramos la simulación como las interacciones de modelos matemáticos, físicos, de ingeniería que, a través de un manejo de variables, pueden predecir y permiten conjeturar, realizar hipótesis para la construcción de conocimientos o bien, para dar significado a los mismos.

2.4 Cuarto Componente Teórico

Nuestra metodología de investigación se basa en la Ingeniería Didáctica.

> Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y por tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios posibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (Artigue, 1995, p. 34).

Esta visión se percibe como el medio de abordar dos cuestiones cruciales (Artigue, 1995, p. 34).

- Por un lado, desprenderse de relaciones entre investigación y acción. Para afirmar la posibilidad de una acción racional sobre el sistema, con base en los conocimientos didácticos preestablecidos.
- Resaltar la importancia de la "realización didáctica" en clase como práctica investigativa, tanto por razones vinculadas al contexto de juventud de la investigación didáctica, como para responder a necesidades permanentes de poner en práctica las construcciones teóricas elaboradas.

De modo que este paradigma científico tiene una doble función: como metodología de investigación y como productora de situaciones didácticas. Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase. En este rubro de descripción de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, está integrada por cuatro fases en su proceso (Artigue, 1995, p. 35): la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis *a posteriori* y evaluación. En este artículo estamos interesados sólo en el diseño de la propuesta didáctica que se propondrá al estudiante, por esta razón usaremos sólo las dos primeras fases de esta metodología científica.

3. Hacia la obtención de la función de Amortiguación

Para lograr esto necesitamos plantear un diseño de cinco actividades compuestas de diversas tareas que constituyen nuestra propuesta didáctica para dotar de significado al teorema de convolución. Es decir, la función de amortiguación que surge en la naturaleza de un circuito eléctrico RL que implica tener que experimentar cada actividad hasta llegar a la actividad cuatro, en la que esperamos se haya construido la función de amortiguación.

En la propuesta didáctica se provee de actividades con sus tareas respectivas de manera que el estudiante de ingeniería aborde, a través de sus conocimientos previos, elementos teóricos de la especialidad, de matemáticas y tecnológicos, mediante el *software* OrCAD y así hacer conjeturas que verifique a través del escenario didáctico que lo vincule a los modelos matemático y físicos.

Los conocimientos de ingeniería que se exploran son la teoría de control y la teoría de circuitos eléctricos, fundamento para dotar de sentido al teorema de convolución. La secuencia didáctica cuenta con los siguientes elementos: un circuito eléctrico resistencia-inductancia (RL), el ambiente electrónico OrCAD (Spice) y el *software* Matlab 7 y Simulink. Esta secuencia didáctica está compuesta por cinco actividades que cuentan con descripción del objetivo particular y de la actividad que se propone para los estudiantes.

3.1 Actividad 1

El objetivo de esta actividad es obtener empíricamente el modelo matemático de la corriente eléctrica que circula en un circuito RL. Las tres tareas específicas para desarrollar usan OrCAD en versión de PC.
Tarea 1.1. Construir virtualmente un circuito RL usando el programa OrCAD para obtener un diagrama, Figura 4.

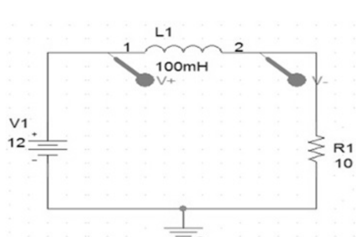


Figura 4. Imagen de OrCAD.

R	L	E
1	1	12
2	3	12
3	5	12

Figura 5. Valores de R, L, y E. Elaboración propia.

Tarea 1.2. Obtener gráficamente las caídas de voltaje de R y L a partir de los valores indicados en la figura 5 para cada V_R, V_L, y en una tercera ventana para $V_R + V_L$, Figura 6.

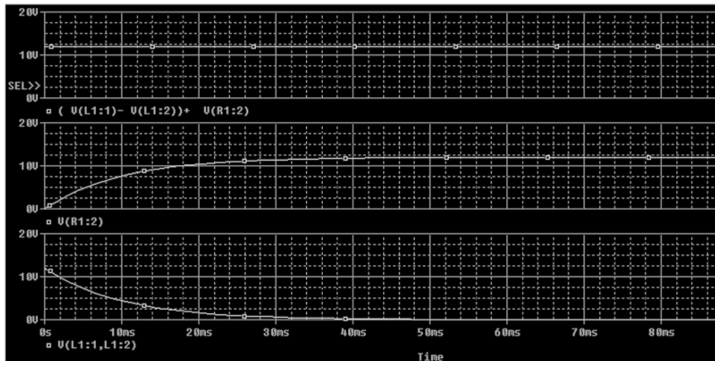


Figura 6. En la parte inferior se observa a V_R , en medio a V_L y en la parte superior la suma de ambas, algo similar deberá ocurrir en los demás casos. Elaboración propia.

A partir de los resultados de las gráficas empíricamente se infiere una de las leyes de Kirchhoff, “la suma de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico es cero”:

$$V_R + V_L = E \tag{4}$$

Tarea 1.3. Expresar matemáticamente a (4) en términos de la corriente eléctrica $i(t)$.
Se espera que mediante conocimientos previos de los circuitos eléctricos se llegue a:

Antecedentes	Modelo Matemático
$\left.\begin{array}{l} V_L = L\dfrac{d\,i}{dt} \\ V_R = R\,i \end{array}\right\}$	Sustituyendo en (1) $\rightarrow$ $L\dfrac{d\,i}{dt} + R\,i = E$

Se infiere, empíricamente usando OrCAD, que todo circuito *RL* propuesto es modelado por una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, dónde $i(0)=0$.

$$V_L + V_R = E \quad \rightarrow \quad L\frac{d\,i(t)}{dt} + R\,i = E(t) \tag{5}$$

3.2 Actividad 2

El objetivo es contrastar la similitud de la gráfica solución de la ecuación diferencial (5) con la gráfica del circuito eléctrico R (a partir de OrCAD). Para lograr esto se proponen tres tareas.
Tarea 2.1. Resolver la ecuación diferencial (5) usando la técnica de la transformada de Laplace.

$$L\frac{d\,i(t)}{dt} + R\,i = E \tag{5}$$

Se obtiene:

$$L\frac{d\,i(t)}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}\rightarrow \mathcal{L}\left[L\frac{d\,i(t)}{dt}+\frac{R}{L}i\right]=\frac{E}{L}\mathcal{L}\left[1\right] \tag{6}$$

Aplicando las propiedades y simplificando se tiene que:

$$\mathcal{L}\left[\,i(t)\right]=\frac{E}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{s+\frac{R}{L}t} \tag{7}$$

Y por tanto;

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{8}$$

Tarea 2.2. Usando *software* matemático como Graph o GeoGebra obtenga la gráfica de la solución de la primera tarea. Ver Figura 7.

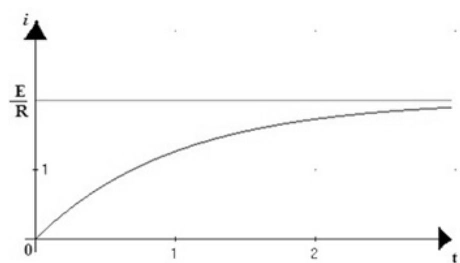


Figura 7. Representación gráfica de la corriente $i(t)$ del circuito RL. Elaboración propia.

Tarea 3.1. Contrastar la gráfica de la Figura 7 con la gráfica que obtuvo en OrCAD.

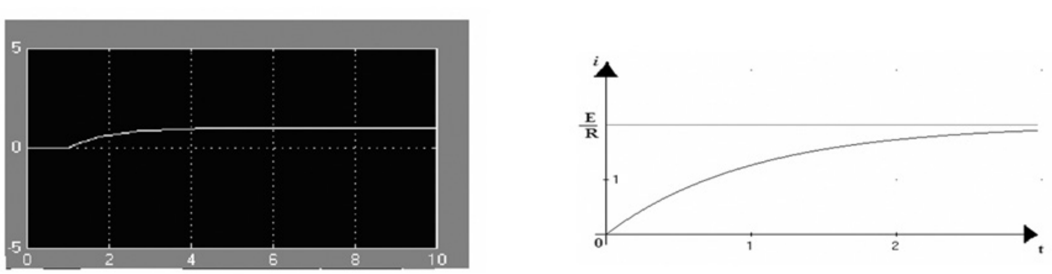


Figura 8. Representaciones gráficas en OrCAD y en *software* matemático Graph de la corriente *i*(*t*). Elaboración propia.

Se espera que en esta segunda actividad el estudiante identifique que las gráficas en ambos casos son similares.

3.3 Actividad 3

El objetivo es construir un diagrama de bloques propuestos por el profesor para que el estudiante pueda contrastarlo con el circuito construido en OrCAD; se espera que deduzca que ambos modelos son el mismo. Para lograrlo la actividad se compone de tres tareas.

Tarea 3.1. Construir el diagrama de bloques (Figura 9) para verificar si es correcta su construcción.

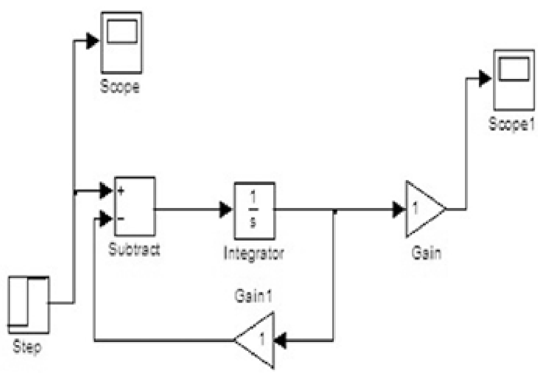


Figura 9. Representación del diagrama de bloques.

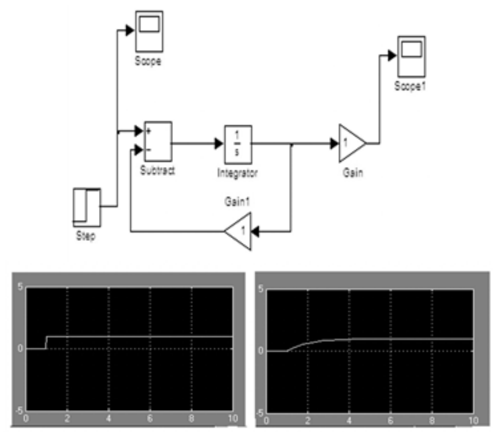


Figura 10. Diagrama de bloques propuestos por el docente. Elaboración propia.

Tarea 3.2. Explorar el diagrama de bloques, dando diferentes valores de entrada y observar los valores de salida, para constatar la similitud. Figura 10.

Tarea 3.3. El estudiante responderá los siguientes cuestionamientos e inferirá que el diagrama de bloques es similar al circuito *RL*.

I) Considere la gráfica de la expresión (7), con los valores $E=3, R=1 \;\; y \;\; L=1$. Contraste ésta con la gráfica anterior, ¿qué observa?

II) Ahora dé usted valores constantes arbitrarios a E, R y L y estos mismos valores compárelos con el diagrama de bloques dado, ¿qué observa?

III) ¿Puede usted dar una inferencia a partir de I) y II)?

3.4 Actividad 4

Usando el diagrama de bloques de la figura 10 y sus conocimientos previos, experimentar la función impulso unitario, bajo las condiciones que se especifican en la teoría de control, $h(t)=e^{-kt}$ con k>0. La manera que propondremos al estudiante para que aborde este problema es la siguiente: deberá, inicialmente, experimentar con una función impulso y, a partir de esto, debe explorar de manera experimental para que al aproximarse al tiempo cero por la derecha observe que esta función impulso puede considerarse como la función delta de Dirac. El diagrama siguiente muestra este hecho de manera experimental.

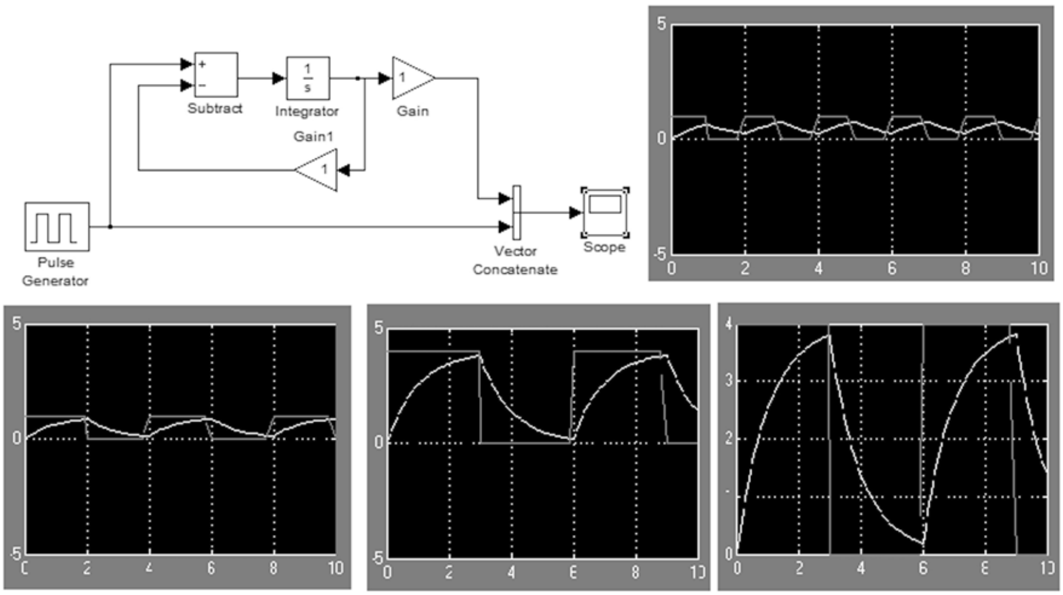


Figura 11. Forma experimental para que la función impulso se considere como la función delta de Dirac. Elaboración propia.

La primera tarea consiste en tomar como señal de entrada una aproximación a la función delta de Dirac, la segunda tarea explora la relación entre la función de entrada y la función de salida, finalmente en la tercera tarea, el estudiante deberá plantear la ecuación diferencial correspondiente a la tarea dos y deberá resolverla para la obtención de la función de amortiguación. Se espera que observe que la función impulso unitario del sistema es precisamente la exponencial, consecuentemente deberá plantear la ecuación diferencial correspondiente a su diagrama de bloques y de ahí hacer análisis para que de manera algorítmica pueda deducir la función de amortiguación. Inicialmente argumentará mediante la disciplina intermediaria representada por la teoría del control. Las consideraciones teóricas son las siguientes.

A) Al circuito eléctrico se le considera como un sistema lineal constante, donde la señal de entrada es el voltaje, o la señal del impulso unitario, según sea el caso. La respuesta al sistema es la corriente eléctrica, o bien, la respuesta del sistema al impulso unitario. Esto puede ser representado por el diagrama de la Figura 12.

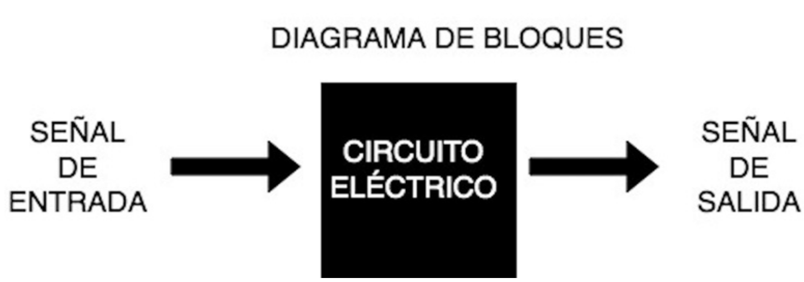


Figura 12. Diagrama de bloques del circuito. Elaboración propia.

¿Qué contiene este diagrama de bloques? Tendrá la característica de proponer diferentes voltajes de entrada y obtener inmediatamente la respuesta, la corriente eléctrica. El contenido del diagrama y su análisis se describe gráficamente en la Figura 13.

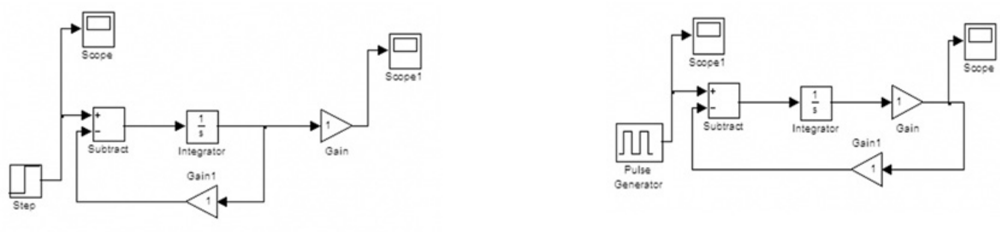


Figura 13. Señales de Entrada y Salida. Elaboración propia.

El análisis se fundamenta en la función de transferencia, según la *teoría de control*, es decir, a partir de la ecuación diferencial que modela el circuito, se le aplica la transformada de Laplace, y de ahí se considera al cociente de la función de salida entre la función de entrada:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E\Rightarrow\frac{\mathcal{L}\left[i(t)\right]}{\mathcal{L}\left[E\right]}=\frac{\frac{1}{L}}{s+\frac{R}{L}} \tag{9}$$

Y a partir de (9) se diseñan los bloques, resultando los diagramas de la Figura 13, usando Matlab.

B) La respuesta de un sistema lineal constante, cumple con las dos condiciones siguientes.

I) Principio de superposición, es decir dadas las señales de entradas del sistema considerado $E_1\ y\ E_2$, con sus respectivas respuestas de salida $i_1(t)\ y\ i_2(t)$, entonces, se tiene que,

$$E_1+E_2\rightarrow i_1+i_2 \tag{10}$$

II) La respuesta de salida de un sistema lineal siempre puede expresarse cómo:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)E(\tau)d\tau \tag{11}$$

Dónde $h(t,\tau)$ es la respuesta del impulso unitario del sistema cuando éste está en reposo. Usando el principio de superposición y un conjunto de señales elementales, se obtiene la respuesta general del sistema. Y de la misma manera podemos obtener la respuesta de una señal simple descomponiendo la señal dada en una suma de componentes elementales. Así, el candidato común, como señal elemental, usado en sistemas lineales son los impulsos. Para un sistema lineal en general, se representa la respuesta al impulso unitario por $h(t,\tau)$, la respuesta en t a un impulso aplicado en τ, entonces la respuesta total del sistema está dada por la expresión (11).

Tarea 4.1. Proponer un tipo de circuito eléctrico dónde la señal de entrada sea una aproximación a la delta de Dirac, y esbozar un diagrama de bloque a partir de Matlab 7. Considerando que la salida será $h(t)$ para lo cual deberá usar como herramienta el diagrama de bloques usado en la actividad anterior. Se espera como resultado algo parecido al diagrama de bloque mostrado en la Figura 14.

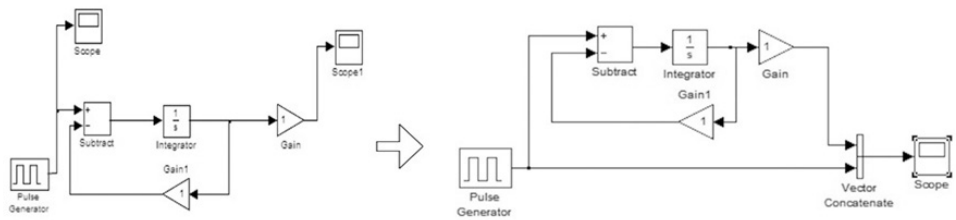


Figura 14. Diagrama de bloque construido con Matlab 7, que representa a un circuito eléctrico cuya señal de entrada es aproximada a la delta de Dirac. Elaboración propia.

Tarea 4.2. Explorar dando valores a la aproximación delta de Dirac usando Matlab 7, e interpretar las gráficas en la salida del sistema, Figura 15.

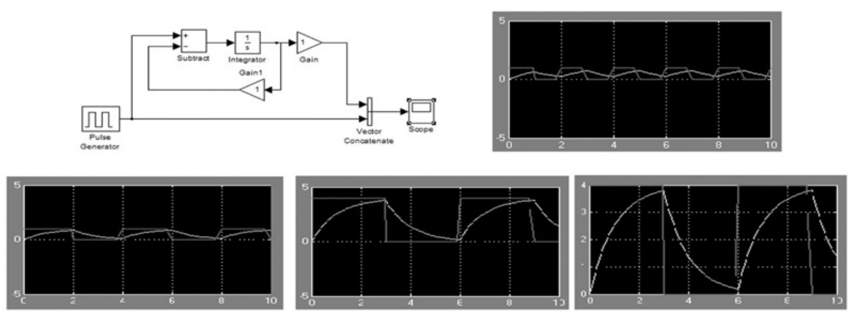
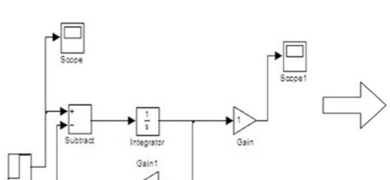


Figura 15. Gráficas correspondientes a la señal de entrada y salida del diagrama de bloques de la Figura 10. Los valores considerados son: Amplitud 1, 4 Porcentaje (50%) de períodos 2,4 y 6. Elaboración propia.

Algunos cuestionamientos hacia el estudiante son: a partir de las gráficas, ¿qué observa si el periodo crece?, ¿a qué función se aproxima la respuesta de este sistema?
Tarea 4.3. El estudiante debe escribir la ecuación diferencial que corresponde al diagrama de bloques dado en la primera tarea, usando como asociación, la ecuación diferencial asociada al diagrama de bloques que se obtuvo en la actividad tres. Así el estudiante debe realizar lo siguiente.

1. Escribe la ecuación diferencial asociada a este diagrama de bloques.
2. Resolver para la condición inicial de *h*, ¿qué debe considerar en esta ecuación diferencial?
3. Resolver la ED con la condición inicial obtenida en 2.

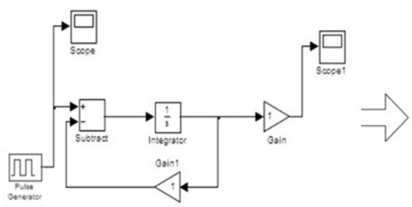
Aquí describiremos lo que debe hacer el estudiante en la tercera tarea, ya que es la parte relevante para la obtención de la función de amortiguación. Entonces partimos del punto uno a realizar, es decir,



$$L\frac{d\,i(t)}{dt} + R\,i(t) = E$$

Figura 16. Relación de modelos; diagrama de bloques con expresión matemática cuando hay corriente eléctrica $i(t)$. Elaboración propia.

Entonces la ecuación diferencial que corresponde al diagrama de bloques en la primera tarea de esta cuarta actividad es,



$$L\frac{d\,h(t)}{dt} + R\,h(t) = \delta(t)$$

Figura 17. Relación de modelos; diagrama de bloques con expresión matemática antes de que exista corriente eléctrica. Elaboración propia.

Paso 2. Para resolver la última ED debemos considerar lo siguiente, cálculo de la condición inicial de la función "h" en el tiempo cero, para esto debemos integrar la ED propuesta de -0 a $+0$, es decir,

$$\begin{aligned} &\int_{-0}^{+0}\frac{dh(t)}{dt}+\frac{R}{L}\int_{-0}^{+0}h(t)=\frac{1}{L}\int_{-0}^{0}\delta(t)dt \\ &h(0)+0=\frac{1}{L}\Rightarrow h(0)=\frac{1}{L} \end{aligned} \tag{12}$$

Paso 3. Por tanto, resolviendo la ED cuando el circuito eléctrico está en reposo, considerando la condición inicial obtenida, es decir, $h(0) = 1/L$, se tiene,

$$\begin{aligned} &h'+\frac{R}{L}h=0 \\ &\frac{h'}{h}=-\frac{R}{L}dt \\ &ln(h)=\left(-\frac{R}{L}\right)t+N_0 \\ &h(t)=N_0e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned} \tag{13}$$

Usando la condición inicial obtenida, tenemos finalmente que la función de amortiguación corresponde a,

$$h(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{14}$$

3.5 Actividad 5

Estimar el cálculo de la función de salida $i(t)$, con la condición inicial $i(t)=0$, cuando se da una señal de entrada $E(t)$, que corresponde a la solución obtenida en 3, y deduzca la solución $i(t)$ en un circuito *RL* que corresponde de manera empírica a una convolución integral. Así, el estudiante le dará un sentido al *teorema de convolución*. Para lograr esto se proponen dos tareas.

Tarea 5.1. Calcular $y(t)$, usando la segunda propiedad de los sistemas lineales constantes (integral (5)).

Aquí, esperamos que el estudiante considere la expresión (11):

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau$$

Y sustituya a $h(t)$ para $t \geq 0$, entonces obtiene que,

$$y(t)=\int_{0}^{t} h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau=\frac{1}{L}\int_{o}^{t} e^{-\frac{R}{L}t}E(t-\tau)\,dt \tag{15}$$

Aquí el estudiante debe considerar la propiedad conmutativa de la convolución, de aquí se tiene que,

$$i(t)=\frac{E}{L}\int_{o}^{t} e^{-\frac{R}{L}t}\,dt=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{16}$$

Tarea 5.2. Contrastará el resultado anterior con el resultado de la solución de la ecuación diferencial (3).

Esperamos que el estudiante responda que encuentra un contraste:

$$i(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} * E(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{17}$$

4. Conclusiones

En este artículo se presentó una propuesta didáctica para determinar a través de la modelación la función de amortiguación. Con este trabajo damos continuidad al artículo Bosquez *et al.* (2010), en donde comentamos al principio la dificultad que tuvieron los estudiantes en aquel entonces para entender por qué la función de amortiguación era de tipo exponencial con exponente negativo.

De ahí decidimos abordar ese problema con el presente trabajo, donde presentamos la importancia de la modelación tanto gráfica como matemáticamente. En este trabajo, en un primer momento, es necesario que el estudiante comprenda que a partir de la modelación puede hacer conjeturas que le servirán, según las expectativas de esta propuesta, para entender la complejidad matemática de corte algorítmico. Otra ventaja que proponemos en este trabajo es que mediante el uso de la modelación motivamos a los estudiantes a que den un sentido práctico a la función delta de Dirac, para esto les proponemos que aborden el circuito R-L con corriente y su correspondiente modelo matemático. De aquí, lo conducimos a cuestionarse ¿qué pasa cuando no hay corriente en el circuito R-L? De esta manera los inducimos a que experimenten usando modelación de diagramas de bloques con las conjeturas correspondientes para plantearse el sentido práctico del concepto de impulso eléctrico, que lo llevará justamente a la función delta de Dirac. Así el estudiante podrá hacer hipótesis del circuito en valores muy pequeños de tiempo y podrá plantear la ecuación diferencial que lo conducirá a la función de amortiguación. Finalmente, al descubrir con fundamento experimental y luego algorítmico esta función de amortiguación con su condición inicial él podrá usar la expresión,

$$y(t)=\int_0^t h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau$$

Y así podrá compararla con el resultado del teorema de convolución y esperamos que también concluya que son lo mismo.

5. Referencias

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *RELIME 18*(1), 19-48.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-60). Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Bosquez, E. y Lezama, J. (2020, 22 al 26 de septiembre). Modelación de la función de amortiguación y relación con el teorema de convolución y circuito eléctrico RL., para escuelas de ingeniería [Ponencia]. XI EICAL. https://www.youtube.com/watch?v=GsYaqx2fmQY.

Bosquez, E., Lezama, J. y Mora, C. (2010). Algunas reflexiones de contraste del formalismo con la algoritmia de la enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería. En Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 361-368). CLAME.

Brousseau, G. (1986). Fondements et mèthodes de la didactiques des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Camarena, P. (2015). Teoría de las ciencias en contexto y su relación con las competencias. *Ingenium, 16* (31), 108-127.

Cordero, F., (2004). La Modelación y la Enseñanza de las Matemáticas [Ponencia]. *Ciclo 16 Seminario SRM*. https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/otros-ciclos/1ciclo/sesion-s01/

Haberman, R. (1977). *Mathematical Models, Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. Prentice-Hall.

Hestenes, D. (2010) *Modeling Theory for Math and Science Education*. En Lesh, R., Galbraith, P., aines, C., Hurford, A. ICTMA 13 pp. 13-42. Springer.

Howson, A. G. y Kahane, J-P. (1988). Foreword. En A. G. Howson, J-P. Kahane, P. Lauginie y E. Turckheim. (Eds.). *Mathematics as a Service Subject*. Cambridge University Press.

Mellin H. (1896). Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationale Coefficienten. *Acta Soc. Sci. Fenn., 21*(196), 6-57.

Pollak, H. (1988). Mathematics as a service subject-Why? En A. Howson, J. Kahane, P. Lauginie y E. Turckheim (Eds.). *Mathematics as a Service Subject. ICMI Studies* (pp. 28-34). Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139013505.004

Zill, D., Wrihgt, W. y Cullen, M. (2008). *Matemáticas Avanzadas para Ingenierías*. McGraw-Hill.

CAPÍTULO 19. MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA INTEGRACIÓN STEM EN RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Fernando Hitt, hitt.fernando@uqam.ca
Université du Québec à Montréal
José Luis Lupiañez, lupi@ugr.es
Isidoro Segovia, isegovia@ugr.es
Universidad de Granada

Resumen

En el presente siglo, la modelación matemática es vista como el núcleo para la enseñanza de las ciencias. La enseñanza de las matemáticas ha sufrido un cambio fundamental y cada vez es más usual promover la formación de conceptos matemáticos a través de procesos de modelación matemática en contextos reales. Así, por ejemplo, en los libros de texto de cálculo, la velocidad llega a ser un concepto paradigmático en la enseñanza de la derivada. Los didactas de la enseñanza de la física ponen en relieve los problemas cognitivos de los alumnos en el aprendizaje, y a su vez, los didactas de las matemáticas señalan los problemas cognitivos de los alumnos en los procesos de modelación en contextos físicos. Así, la corriente llamada integración STEM es mucho más compleja de lo que los investigadores se habían imaginado. Ello ha dado lugar al diseño cuidadoso de situaciones semiabiertas en un contexto real, que implique al profesor como guía y cuyo contenido promueva una reflexión sobre los problemas de la humanidad.

1. Introducción

La importancia de fomentar una cultura científica en los ciudadanos constituye un aporte al avance social y económico de un país, esta tendencia la evidenció Estados Unidos a partir de la carrera espacial contra la Unión Soviética, desde 1957. Así, en la década de los setenta, varias asociaciones educativas, incluyendo el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), destacaron el valor de la formación científica en los jóvenes (ver Berube, 2014). De hecho, en los años noventa, desde la National Science Foundation se llegó a acuñar un acrónimo que relacionaba las Ciencias, las Matemáticas la Ingeniería y la Tecnología (SMET, por sus siglas en inglés) para destacar una formación integral conformada. Ya en el siglo XXI, Estados Unidos reformuló el término como se maneja hoy en día (STEM). Su amplia diseminación llevó años después al Washington STEM Study Group (2011) a definir la alfabetización STEM como la capacidad de identificar y aplicar conocimiento de esas cuatro disciplinas para comprender y resolver situaciones problemáticas que no pueden abordarse desde una perspectiva mono-disciplinar.

En Estados Unidos en 2012 se constituye la STEM Education Coalition, y en Europa en 2015, la EU STEM Coalition que apoya iniciativas particulares en muchos países europeos, atestiguando el interés internacional de este enfoque curricular.

Así, en la actualidad, son frecuentes las propuestas de intervención centradas en actividades del docente o en tareas que promueven el desarrollo de la competencia STEM, documentadas en publicaciones internacionales (Isabelle y Zinn, 2017; Rompella, 2015; Sahin, 2015) como en páginas y repositorios de internet: *InGenious* (constituida en el 2014) o *Scientix* (fundada por Horizon en el 2020), entre otros. También son numerosos los análisis y planteamientos curriculares que enfatizan el impacto social de la Educación STEM (Johnson *et al*., 2015; Felder y Brent, 2016), o cómo puede minimizar brechas sociales (Babaci-Wilhite, 2016; Berube, 2014). Aunado a ello, la investigación reciente analiza los beneficios en términos de la formación escolar (Toma y Greca, 2018; Han *et al*., 2016; Taub *et al*., 2017). Finalmente, es reseñable la creación de publicaciones de investigación específicas para recoger indagaciones, avances y propuestas en este campo: *Internacional Journal of STEM Education* (inicia sus publicaciones en el 2014), *Journal for STEM Education Research* (con su primera publicación en el 2018) o *Journal of STEM Education: Innovation and Research* (a partir del 2000 inician sus publicaciones), entre otras.

Más allá del panorama educativo y de investigación, también la sociedad ha hecho eco de esta corriente. English (2015) destaca la preocupación generalizada de muchos gobiernos y empleadores por la falta de empleados capacitados en esas cuatro disciplinas a pesar del importante papel que deben desarrollar en los próximos años: "Esta afirmación de una crisis de alfabetización está respaldada por grupos de la industria y otras organizaciones que enfatizan el papel fundamental de la educación STEM en la reforma de la economía y el impulso de la innovación" (p. 4).

> La conjunción de las materias a las que se refiere la educación STEM no es arbitraria. Las ciencias suministran un contexto de reflexión, organización y actuación. Proponen problemas, cuestiones y contrastes que invitan a la exploración y al descubrimiento y brindan criterios para clasificar y organizar el medio natural, y así profundizar en su riqueza y complejidad. La tecnología ofrece herramientas y técnicas y, junto a la ingeniería, permiten afrontar la construcción de modelos y artefactos que resuelven conflictos y minimizan su impacto. El diseño en la actualidad emplea esos dos referentes de manera conjunta: se diseña lo que puede resolver un determinado fenómeno y se afronta su elaboración para después validar su eficacia y eficiencia y para estudiar sus limitaciones. Las matemáticas, finalmente, aportan un modo de expresión y representación, un conjunto de nociones y destrezas que permiten interpretar el entorno, suministran estrategias para inventar y resolver problemas y promueven el pensamiento lógico y crítico (Lupiáñez y Ruiz-Hidalgo, 2016, p. 4).
>
> La Educación STEM permite a los estudiantes comprender el mundo e interactuar con él de manera crítica, constructiva y eficiente. Puede considerarse como una oportunidad de introducir el mundo real en la escuela y conectar los conocimientos impartidos con el contexto social y científico actual. Una práctica educativa coherente con este enfoque exige un protagonismo expreso de los escolares: fomentar en ellos la inventiva, la iniciativa y el interés científico y tecnológico, les brinda una mayor autonomía. Además, la curiosidad y el pensamiento crítico son actitudes que ocupan un lugar preponderante y que sólo se desarrollan en un contexto práctico y participativo (Lupiáñez y Ruiz-Hidalgo, 2016, p. 4).

En este contexto, se han desarrollado modelos didácticos enmarcados en la Educación STEM que ponen de manifiesto la importancia de clarificar conceptualmente este enfoque curricular, y en el caso de las matemáticas, también es objeto de estudio el papel de esta disciplina en ese enfoque. No obstante, aún se persigue concretar un modelo integrador de enseñanza y aprendizaje y definir aspectos metodológicos acordes con ese planteamiento.

2. Problemas de integración en la educación stem

Desde que en los últimos años ha proliferado la difusión de este enfoque curricular en investigaciones, repositorios de tareas, proyectos de innovación y en propuestas curriculares, también se ha constatado la necesidad de clarificar su significado, naturaleza, necesidades e implicaciones. Así, durante los últimos años, han sido numerosas las propuestas de ampliación de las materias involucradas, dando lugar a una gran variedad de acrónimos. Quizás STEAM, enfoque en el que se considera el valor añadido de las artes y las humanidades en la formación de ciudadanos (Quigley y Herro, 2016), es la que más presencia ha acumulado en el panorama educativo. De hecho, ha llegado a establecerse con carácter práctico; por ejemplo, en el programa curricular base de Korea desde 2015 (Hong, 2017). Otros acercamientos redundan en una amalgama de nociones que difícilmente pueden llegar a explicarse o justificarse con coherencia. Algunos ejemplos son STREAM, donde a STEAM se añade una "R" por "Reading and Writing" (Awe Learning, 2020) o bien por "Religión" (SJBosco, 2020), o STREAMS, donde la "R" representa "Curriculum Integration" y la "S" final "Sustainability Education" (Krug y Shaw, 2016).

En el caso de la Educación STEM, también existen dudas sobre su concreción curricular ya que la Ingeniería no es una materia escolar y la Tecnología no tiene la presencia ni la definición de las Ciencias o las Matemáticas en programas educativos. Incluso en el caso de las Matemáticas, existen autores que limitan su presencia en el acrónimo a la realización de cálculos y a la recogida de datos. Como señala Martinovic (2019): "las matemáticas pueden percibirse como una herramienta para la ciencia, la ingeniería y la tecnología, como una disciplina de servicio" (p. 311). Destacando su potencial formativo e interdisciplinar, Maass *et al*. (2019) y English (2016) destacan el papel de la modelación matemática como una actividad que promueve la interdisciplinariedad en la Educación STEM. Aunque trataremos la modelación matemática más adelante en este capítulo, estos autores señalan que su relevancia para este enfoque reside, por una parte, en que los estudiantes en ese tipo de actividades suelen enfrentarse a resolver problemas, aplicar un pensamiento crítico y creativo, trabajar en equipo, alcanzar acuerdos y desarrollar estrategias de alto nivel. Además, tiene un notable impacto en el desarrollo de la competencia matemática de los escolares y, además, en muchas ocasiones éstos deben usar críticamente dispositivos tecnológicos. El punto de partida de la modelización matemática es una situación problemática con un fuerte vínculo en la vida real, lo cual enfatiza la relación con las ciencias e incluso la ingeniería. En esta línea Maass *et al*. (2019) opinan que:

> Por su propia naturaleza, estos problemas son a menudo interdisciplinares y, por lo tanto, apoyan el avance de la educación matemática dentro del campo STEM. Los problemas del mundo real a menudo también incluyen cuestiones y decisiones que tienen dimensiones éticas, morales, sociales o culturales y, por lo tanto, son vehículos adecuados para promover el tipo de discusión que es central para el desarrollo de una ciudadanía responsable (p. 875).

Pero a pesar de todos estos avances, Martín-Páez *et al*. (2019) han constatado una arbitraria variedad de acercamientos conceptuales y prácticos en investigaciones que aseguraban responder a o situarse en ese paradigma. Concretamente, y tras analizar más de 300 artículos indexados en bases de datos de reconocido prestigio, estos autores encontraron varios resultados relevantes entre los que destacamos tres. En primer lugar, existe una notable inconsistencia en la definición de Educación STEM, pues en gran parte de los trabajos analizados no se asume una postura definida y coherente y, por ejemplo, se usa ese acrónimo para referir una finalidad curricular, un modelo de enseñanza, un modelo de aprendizaje o un tipo determinado de tareas, entre otros. En segundo lugar, a menudo se habla de Educación STEM a pesar de referir de manera explícita sólo algunas materias: "normalmente se destaca el papel de la ingeniería, mientras que la forma de integrarlas habitualmente hace uso de contextos reales y los propios de la tecnología (contextos virtuales)" (p. 17). Finalmente, en relación con la integración de las cuatro disciplinas, estos autores destacan que es habitual que "no exista una conexión explícita entre los diferentes contenidos y las disciplinas STEM en las descripciones de las intervenciones educativas, de tal manera que entender cómo se integran puede resultar difícil e, incluso, imposible" (p. 17).

Ese problema de integración es relevante en este trabajo. Sanders (2009) describe la educación STEM integrada como un enfoque que promueve la enseñanza y el aprendizaje de dos o más materias de STEM, o bien entre una materia STEM y una o más materias escolares. Desde nuestra perspectiva, consideramos el marco de Educación STEM integrado propuesto por Kelley y Knowles (2016), quienes articulan una relación dinámica mediante un sistema de poleas entre diferentes dimensiones: Comunidad de práctica, Diseño de ingeniería, Investigación científica, Alfabetización tecnológica y Pensamiento matemático (Figura 1).

Todo el sistema se sostiene en la cognición situada, en virtud de la cual la comprensión del proceso de aprendizaje es tan relevante como el aprendizaje en sí. En este paradigma, la situación en la cual se produce el aprendizaje condiciona y determina lo que se aprende (Putnam y Borko, 2000). La metáfora de la cuerda que asegura la integridad del sistema se corresponde con la Comunidad de práctica, una noción central en la perspectiva social del aprendizaje de Wenger (1998), quien postula que es a partir de la negociación de significados como los sujetos desarrollan su aprendizaje.

Desarrollaremos esta dimensión en el siguiente apartado. La primera polea se corresponde con el Diseño de ingeniería, que según los autores constituye el punto de inicio ideal en el enfoque STEM, pues promueve el uso de las otras tres disciplinas para dar respuesta a una necesidad real. La segunda polea representa la Investigación científica, que enfatiza que los estudiantes planteen interrogantes, formulen conjeturas y apliquen el método científico en toda su extensión. La tercera polea se corresponde con la Alfabetización tecnológica, que a su vez se enmarca entre la visión instrumental mediante la que esta disciplina lleva a la construcción de artefactos y una visión más amplia que tiene que ver con el uso de la tecnología para afrontar retos en diferentes contextos.

Finalmente, el Pensamiento matemático se representa con la cuarta polea, y con él los autores destacan que una perspectiva integrada de la Educación STEM promueve un aprendizaje contextualizado de las matemáticas y, además, según Burghardt y Hacker (2004) afirman que:

> La incorporación de prácticas STEM que incluyen el análisis matemático necesario para evaluar las soluciones de diseño proporciona la racionalidad necesaria para que los estudiantes aprendan matemáticas y vean las conexiones entre lo que se aprende en la escuela y lo que se requiere en las habilidades profesionales de STEM (p. 7).

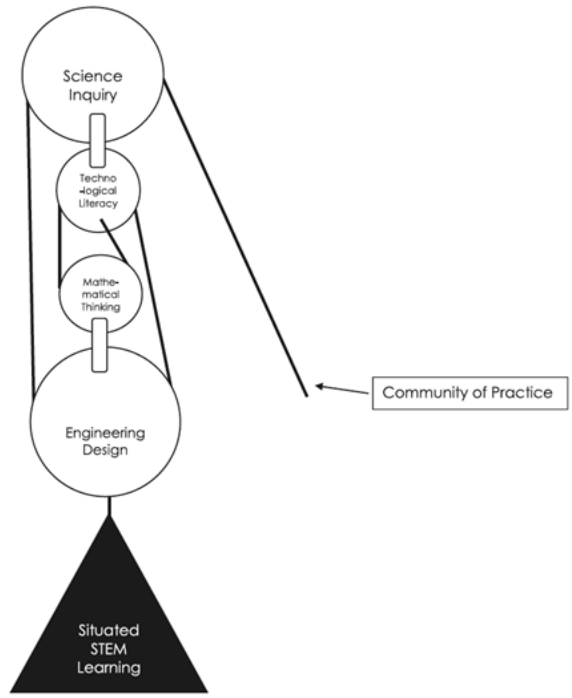


Figura 1. El marco del enfoque STEM integrado de Kelley y Knowles (2016, p. 4).

Una vez que hemos realizado una introducción a la problemática STEM y mostrado la complejidad de integración de las diferentes ramas científicas, se muestra imprescindible el uso de un método de enseñanza para ser utilizado en el aula de matemáticas que permita la comunicación de ideas complejas entre los estudiantes y que permita la evolución de ideas, hacia conceptos científicos. A continuación, realizamos una discusión al respecto.

3. Comunidad de práctica en el aula de matemáticas

De acuerdo con Kanes y Lerman (2008), la noción de comunidad de práctica, que más se apega al aprendizaje de las matemáticas en el aula, es la proporcionada por Leave y Wenger (1991). En su acercamiento, la contradicción en la comunicación de ideas en un trabajo en colaboración y el sobrepasar, juegan un papel importante en los procesos de comunicación entre los alumnos (Kanes y Lerman, 2008, p. 307). Engeström y Cole (1997) ampliaron estas ideas de comunidad de práctica, realizando una integración de las ideas de Vigotsky, Luria y Leontev en una noción llamada CHAT (Cultural Historical Activity Theory), la cual quedó representada por una ampliación del triángulo de Leontev, sobre los aspectos: Sujeto, Objeto y artefacto mediador (tecnología) y que finalmente Engeström y Cole (1997) la representaron por lo mostrado en la Figura 2 (izquierda).

Nosotros, al estar interesados en el aula de matemáticas realizamos una interpretación de la proposición de Engeström y Cole (1997), explicitando las variables en juego en los procesos de coconstrucción (trabajo en colaboración) de conceptos matemáticos (Figura 2, centro). Esta interpretación en el contexto del aula de matemáticas se concreta siguiendo varias etapas (Figura 2, derecha). Al proceso de enseñanza, dividido en 5 etapas, la hemos bautizado como ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate, autorreflexión, Hitt, 2007).

Figura 2. Engeström y Cole (1997) y su interpretación con ACODESA.

De acuerdo con la descripción proporcionada por Hitt (2007), Hitt y Quiroz (2019), las diferentes etapas de ACODESA en la resolución de situaciones complejas son:

> **Etapa de trabajo individual**. Apropiación del problema y producción de representaciones espontáneas personales no necesariamente institucionales.
> **Etapa de trabajo en equipo**. La comunicación entre los miembros de un equipo implica la negociación de significados y de sobrepasar las contradicciones que emerjan en el proceso de comunicación (Leave y Wenger, 1991). Una evolución de las representaciones internas y externas se produce en el equipo. Dos o tres personas por equipo es aconsejable (Prusak *et al*., 2013). Las actividades de modelación matemática permiten el trabajo en grupos pequeños, los cuales actúan como una comunidad de práctica local para resolver una situación compleja (Lesh y Zawojewski, 2007).
> **Debate en gran grupo**. Las diferentes producciones de cada equipo y la asimilación de las ideas de otros será un avance en el conocimiento de los alumnos (Legrand, 2001). Nuevamente si hay contradicciones, los alumnos al resolverlas progresan en sus representaciones tanto internas como externas.
> **Autorreflexión**. El consenso es efímero (Thompson, 2002), y la reconstrucción de lo realizado en clase es primordial para la consolidación del conocimiento.
> **Institucionalización del conocimiento**. Las representaciones producidas por los alumnos (en un proceso de creatividad) y su evolución (trabajo en colaboración), posiblemente no corresponden a las representaciones institucionales. El profesor, discutiendo lo producido por los alumnos, presenta una solución de la situación, utilizando las representaciones oficiales.

La evolución del conocimiento en el trabajo en colaboración, siguiendo las 5 etapas de ACODESA se puede representar bajo un diagrama (Figura 3). En el diagrama queda especificado cómo las representaciones ligadas a la idea preliminar sufren un cambio en los procesos de comunicación, resolución de contradicciones y comprensión de las ideas de otros (negociación de significados). Consideramos que la 2ª, 3ª y 4ª etapas son de primordial importancia en la construcción de conceptos, antes del proceso de institucionalización.

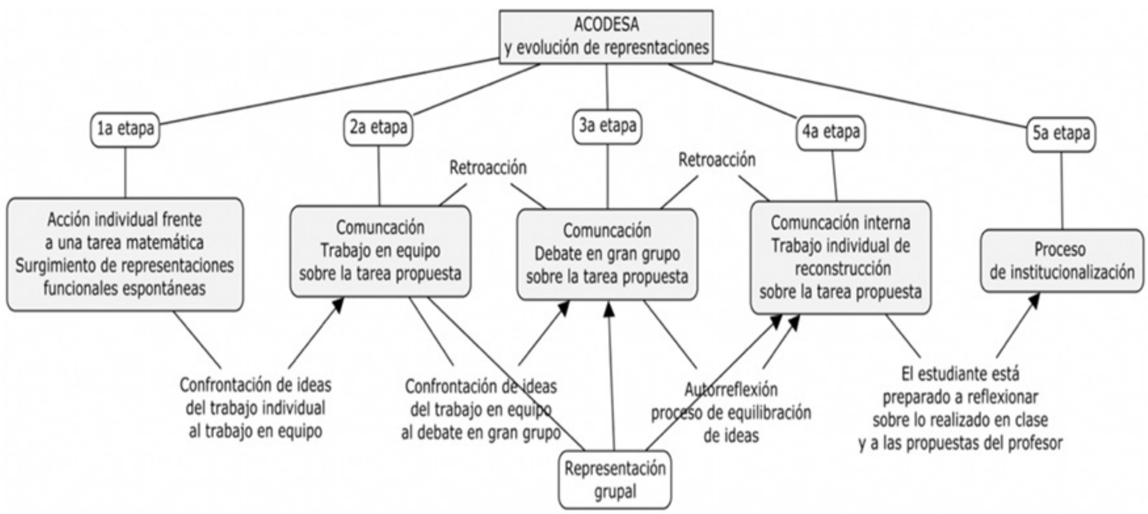


Figura 3. Evolución de representaciones bajo un proceso de enseñanza ACODESA. Elaboración propia.

En esta sección, hemos mencionado la importancia de utilizar ACODESA en la resolución de situaciones complejas ligadas a la modelación matemática. Blum *et al*. (2007), Blum y Niss (1991), English (2015, 2016) argumentan que la modelación matemática ofrece un vehículo para que los maestros involucren a sus estudiantes en la exploración de problemas auténticos que comprenden sistemas complejos dentro de un contexto interdisciplinario.

Cahyadi y Butler (2004), Funner y Kumar (2007) así como Widjaja *et al*. (2019) afirman que la falta de recursos de instrucción, materiales de apoyo y orientación pedagógica para la indagación, obstaculiza a los docentes para vincular e integrar las ciencias y las matemáticas en el aula. También Handhika *et al*. (2019) y Jones (2017), señalan las dificultades en la articulación de conceptos de diferentes ramas científicas (matemáticas, física, química, biología). Uno de esos ejemplos es el concepto de velocidad en física y conceptos matemáticos como límite y derivada. A continuación, discutimos más en detalle sobre la importancia de eslabonar tareas para la construcción de una situación compleja.

4. Modelación en la educación STEM: Ejemplo de situación problemática

La elaboración de actividades es una tarea compleja bajo la óptica de la integración STEM, como hemos visto. Una situación podría iniciar con una pregunta así: ¿cómo funciona un GPS? Pero una vez que el trabajo individual se ponga en marcha, debería de haber otras preguntas que orienten la discusión al pasar al trabajo en equipo. Es así, que poco a poco, se puede construir una situación compleja, con una serie de tareas secuenciadas. El rol del profesor es de guía en las primeras etapas, como lo sugiere el diagrama de la Figura 2 (derecha). En la sección siguiente proponemos una situación compleja, bajo la óptica de la integración STEM en la cual las tareas se eslabonan para la creación de la situación global. El contexto de la situación es el de parques eólicos.

Figura 4. Parques eólicos. Fuente: Schmidt, 2019, p. 1.

El entorno en que nos movemos nos obliga a plantearnos preguntas relacionadas con ámbitos científicos en los que se produce una integración STEM y que perfectamente pueden ser trasladadas a los alumnos de una clase para su resolución siguiendo un proceso de enseñanza como el ACODESA. Es cierto que no es fácil diseñar tareas para niveles de primaria o secundaria que integren todas las componentes de STEM, especialmente por la ingeniería (E), de alguna manera desconocida en los niveles de enseñanza básica, pero también es cierto que los avances rápidos de la tecnología permiten contar con aplicaciones industriales que en efecto incluyen todas las componentes STEM en mayor o menor medida.

En el marco de una investigación de la Universidad de Granada en la que participan profesores de matemáticas y ciencias, uno de sus objetivos es el diseño de este tipo de tareas que permitan al profesorado en formación analizar su viabilidad y puesta en práctica en los niveles de educación primaria y secundaria.

Una de las tareas que se ha diseñado está referida al desarrollo de energías alternativas que eviten la emisión de CO_2 a la atmósfera como es el caso de la energía solar o la eólica; en el caso de los parques eólicos que tanto proliferan en el entorno próximo de la ciudad de Granada, también en el resto de España, no es difícil que los alumnos, cuando viajan, se hayan planteado una cuestión como la siguiente: ¿qué es un parque eólico?

Responder a esta pregunta siguiendo el proceso de enseñanza ACODESA, necesariamente va a generar otras muchas preguntas encadenadas como ¿qué es un molino de viento? y ¿cómo funciona?

Veamos cómo responder a éstas y otras cuestiones requieren de la integración de conocimientos de Ciencias (**S**), Tecnología (**T**), Ingeniería (**E**), y/o Matemáticas (**M**), que pueden seguir este proceso de modelación y que requieren amplias y variadas sesiones de trabajo. Destacamos las iniciales para destacar el tipo de conceptos que implican las respuestas.

4.1. ¿Qué es un parque eólico? **STE**

Un parque eólico es un conjunto de aerogeneradores que transforman la energía mecánica del viento en energía eléctrica. Los alumnos pueden localizar información en internet (SGKPlanet, 2020), después de haber sugerido de manera individual ideas acerca de una definición apropiada a sus observaciones. También pueden debatir acerca de qué tipo de conocimientos científicos están asociados a las respuestas.

4.2. ¿Cómo de grande es un aerogenerador? TEM

Por supuesto, los alumnos pueden localizar datos en internet (Textos científicos, 2020), pero también se les puede retar a que estimen la altura a través de una foto que ellos mismos pueden haber hecho, en comparación proporcional con un árbol cercano cuya altura también puede ser estimada (ver imagen lateral). La confrontación de su estimación con la medida real forma parte necesaria del aprendizaje de la medición y de la medida indirecta.

4.3. ¿Cuáles son las partes de un aerogenerador y que función tienen? STEM

En esta tarea los alumnos pueden consultar muchos sitios web de empresas fabricantes de aerogeneradores que explican con detalle los elementos constitutivos de los mismos (Enel, 2020). Después pueden debatir acerca de qué descripciones son más apropiadas a sus conocimientos y qué elementos de las descripciones desconocen y cómo recabar la información necesaria.

4.4. ¿Cómo funciona un aerogenerador? STE

Después de las hipótesis individuales, o en grupo, que puedan formular los alumnos, pueden localizar en los sitios web de fabricantes (Acciona, 2020) que un aerogenerador transforma la energía cinética del viento que hace girar las aspas del molino en energía eléctrica a través de un alternador. Pero, para poder utilizar la energía del viento, es necesario que éste alcance una velocidad mínima de 3 m/s y máxima de 25 m/s. Para evitar daños, los aerogeneradores se desconectan cuando el viento supera los 25 m/s. También los alumnos pueden hacer hipótesis sobre el mecanismo que permite que un aerogenerador deje de girar cuando se supera esa velocidad o cómo determinar la velocidad de las aspas impulsadas por el viento.

4.5. Y ¿de qué depende la energía que produce un aerogenerador? STEM

En este caso, los alumnos también pueden elaborar hipótesis basadas en sus conocimientos para luego contrastarlas con la información que pueden recabar en diferentes sitios web, Wikipedia incluida (2022).

La potencia eléctrica medida en vatios obtenida por un aerogenerador es:
$P = \frac{1}{2} Adv^3$ donde **A** es el área barrida por el rotor, **d** la densidad del aire y **v** la velocidad del aire. Por supuesto, de esta cuestión surgen otras como, ¿de qué depende **A** y cómo se determina?, ¿la densidad del aire **d**, es un valor constante o de qué depende?

*4.6. ¿Qué diferencia hay entre las variables **A** y **v** con relación a la producción de energía eléctrica? **M***

El papel de estas dos variables recogidas en la fórmula permite una indagación y discusión interesante sobre la diferencia entre una función lineal y una función cúbica. Los alumnos pueden usar un *software* como GeoGebra para representar la variabilidad de **P** cuando varía **A** y/o cuando varía **v**.

4.7. ¿Cómo transformar un alternador de energía cinética en energía eléctrica? **SE**

Los conceptos implicados en la respuesta que los alumnos podrán localizar en sus textos de estudio son: energía cinética, energía mecánica, energía eléctrica, campo magnético, inducción, revoluciones, corriente alterna, corriente continua, unidades de corriente, alternador.

4.8. ¿Cómo se diseña un parque eólico? **SM**

A través de internet (Ealde, 2020) los alumnos pueden localizar las siguientes consideraciones: los aerogeneradores están organizados en hileras verticales a la dirección predominante del viento; para evitar interferencias de unos con otros y por razones medioambientales, la separación mínima entre hileras es de 5 diámetros de rotor (diámetro del círculo que generan las palas o aspas al rotar); entre dos aerogeneradores de una misma línea debe haber una distancia mínima de dos diámetros de rotor. Y por qué no, relacionado con la cuestión anterior, diseñar un parque eólico, usando la mínima superficie de terreno para un parque eólico de 20 aerogeneradores de palas de 40 m y determinar la potencia de este parque eólico para una v = 15 m/s, considerando que la densidad del aire 1,2 kg/m3. Hay muchos proyectos de parques eólicos elaborados por ingenieros en la red (Ingemecanica, 2020) que permitirán a los alumnos tener una idea clara de los elementos más relevantes.

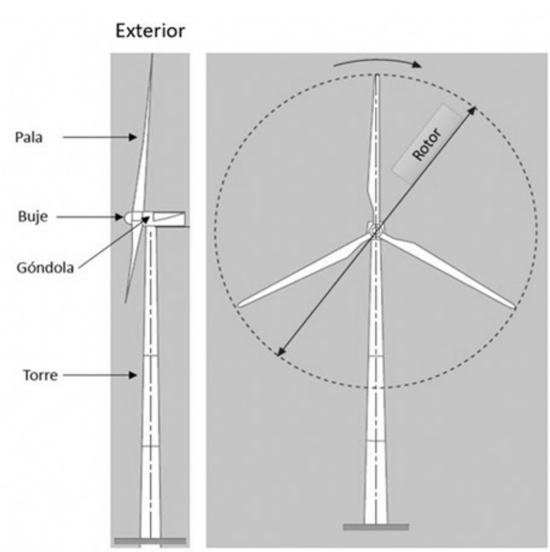


Figura 5. Componentes de un aerógrafo. Fuente: Adaptado de (Pontones, 2004).

4.9. ¿Por qué las palas giran siempre en sentido horario? **STE**

Un análisis de los molinillos de viento que usan los niños para jugar permite responder a esta cuestión. Diseñar una pala de madera y analizar cómo la fuerza del viento hace girar el molino en el sentido horario puede ser una actividad asociada a esta cuestión.

Construir, por último, un molino de 2 m de altura que se mueva como un aerogenerador, y por qué no, que genere corriente eléctrica, puede ser muy ilustrativo y motivador para los alumnos. También hay muchos sitios webs que lo explican (Ecoinventos, 2020).

4.10. Más cuestiones asociadas a esta tarea (SM)

Por último, un par ejemplos de problemas que pueden ser planteados a los alumnos:

a) Determinar la diferencia de potencia de un aerogenerador cuando la velocidad del viento es de entre 5 y 10 m/s. Elabore una gráfica que represente el incremento de la potencia generada. Considera que la densidad del aire es de 1,2 kg/m3.
b) Determinar la diferencia de potencia de un aerogenerador de 40 m de pala y otro de 60 m con la misma velocidad de viento. Considera que la densidad del viento es de 1,2 kg/m3. Estudie si conviene más una medida que otra para la construcción del parque.

5. Conclusiones

La complejidad de integrar las disciplinas involucradas en la Educación STEM lo hemos puesto de manifiesto en las primeras secciones de este capítulo. Hemos añadido al problema de integración la importancia de enfatizar la sensibilización de los estudiantes a los problemas de la humanidad; por ejemplo, con el medio ambiente. Así, desde nuestro punto de vista, la búsqueda de actividades que promuevan un aprendizaje significativo y promuevan una sensibilidad a los problemas de la humanidad es una tarea prioritaria en el enfoque curricular.

Como lo ha señalado English (2015) y enfatizado Martinovic (2019), todo parece indicar que las matemáticas no tienen un lugar privilegiado en el proyecto de integración STEM. Entonces, es esencial la creación de actividades complejas como la presentada aquí, que les proporcionen a las matemáticas un rol más equilibrado que el que se está proporcionando en estos momentos a la matemática.

Considerando la complejidad cognitiva de resolución de una situación compleja por un solo individuo bajo el enfoque STEM, nuestra propuesta se inscribe en una construcción social del conocimiento promoviendo el aprendizaje en colaboración (ACODESA). Siguiendo este método de enseñanza, es necesario que la situación compleja sea concebida bajo tareas eslabonadas que permitan al profesor ser un guía hasta llegar al proceso de institucionalización del conocimiento.

Si consideramos las diferentes formas de integración del proyecto STEM señaladas por Vasquez *et al*. (2013), nuestra propuesta está enmarcada en una perspectiva de integración transdisciplinaria, en donde los conceptos y habilidades se aprenden en dos o más disciplinas a través de proyectos complejos como la de los parques eólicos; es decir, que los estudiantes aprenden conceptos y habilidades de diferentes ramas científicas que están vinculados a proyectos del mundo real, e incluso ligados a problemas de la humanidad, para un aprendizaje significativo. La actividad propuesta responde a esa necesidad y le otorga un papel relevante a la matemática.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el seno del proyecto PGC2018-095765-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidad de España.

6. Referencias

Acciona. (2020). *Autogeneradores*. https://www.acciona.com/es/energias-renovables/energia-eolica/aerogeneradores/

Awe Learning. (2020). *STREAM Learning*. https://awelearning.com/stream-learning/

Babaci-Wilhite, Z. (Ed.). (2016). *Human rights in language and STEM education: science, technology, engineering and mathematics*. Sense Publishers.

Berube, C.T. (2014). *STEM and the city: a report on STEM education in the great American urban public school system*. Information Age Publishing.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. Springer.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Burghardt, M. D., y Hacker, M. (2004). Informed design: a contemporary approach to design pedagogy as the core process in technology. *The Technology Teacher, 64*, 6-8.

Cahyadi, V. y Butler, Ph. (2004). Undergraduate student's understanding of falling bodies in idealized and real-world situations. *Journal of Research in Science Teaching, 41*(6), 569-593.

EcoInventos. (2020). Fábrica aerogeneradores caseros paso a paso. https://ecoinventos.com/fabrica-aerogenerador-casero-paso-a-paso/

Ealde. (2020). *Diseño de un proyecto de parque eólico*. https://www.ealde.es/proyecto-parque-eolico/

Enel. (2020). *Autogeneradores*. https://www.enelgreenpower.com/es/learning-hub/energias-renovables/energia-eolica/aerogenerador

Engeström, Y. y Cole, M. (1997). Situated cognition in search of an agenda. En J.A. Whitson and D. Kirshner (Eds.). *Situated Cognition: Social, Semiotic, and Psychological Perspectives* (pp. 301-309). Lawrence Erlbaum Associates.

English, L.D. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.). *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-18). PME.

English, L.D. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education, 3*(3), 1-8. doi: 10.1186/s40594-016-0036-1.

EU STEM Coalition. (2015). *EU STEM Coalition*. http://www.stemcoalition.eu

Felder, R.M. y Brent, R. (2016). *Teaching and Learning STEM: a Practical Guide*. John Wiley & Sons.

Funner, J. M. y Kumar, D.D. (2007). The mathematics and science integration argument: A strand for teacher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 3*(3), 185-189.

Han, S., Capraro, R.M. y Capraro, M.M. (2016). How science, technology, engineering, and mathematics project-based learning affects high-need students in the U.S. *Learning and Individual Differences, 51*, 157-166.

Handhika, J., Istiantara, D.T. y Astuti, S.W. (2019). Using graphical presentation to reveals the student's conception of kinematics. *Journal of Physics: Conference Series, 1321*, 032064. doi:10.1088/1742-6596/1321/3/03206

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.). *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Hermès.

Hitt, F. y Quiroz, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives, 24*, 75-106.

Hong, O. (2017). STEAM education in Korea: Current policies and future directions. *Science and Technology Trends Policy Trajectories and Initiatives in STEM Education, 8*(29), 92-102.

Ingemecanica. (2020). *Diseño de un Proyecto de parque eólico*. https://ingemecanica.com/tutorialsemanal/tutorialn88.html

InGenious (2014). *InGenious. Shaping the future of maths and science education*. http://www.ingenious-science.eu

Internacional Journal of STEM Education (2014). *Internacional Journal of STEM Education*. https://stemeducationjournal.springeropen.com

Isabelle, A.D. y Zinn, G.A. (2017). Step to STEM. *A Science Curriculum Supplement for Upper Elementary and Middle School Grades-Teacher's Edition*. Sense Publishers.

Johnson, C.C., Peters-Burton, E.E. y Moore, T.J. (2015). STEM *Road Map: A framework for integrated STEM Education*. Routledge.

Jones, S. (2017). An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. *Journal of Mathematical Behavior, 45*, 95-110.

Journal for STEM Education Research (2018). *Journal for STEM Education Research*. https://www.springer.com/journal/41979

Journal of STEM Education: Innovation and Research (2000). *Journal of STEM Education: Innovation and Research*. https://www.jstem.org/jstem/index.php/JSTEM

Kanes, C. y Lerman, S. (2008) Analysing Concepts of Community of Practice. En A. Watson y P. Winbourne (Eds.). *New Directions for Situated Cognition in Mathematics Education* (pp. 303-328). Springer.

Kelley, T.D. y Knowles, J.G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education, 3*(11), 1-11.

Krug, D. y Shaw, A. (2016). Reconceptualizing ST(R)E(A)M(S) Education for Teacher Education. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*, 183-200. doi: 10.1080/14926156.2016.1166295.

Leave, J, y Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge University Press.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. En D. Holton (Ed.). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 127-135). Kluwer Academic Publishers.

Lesh, R. y Zawojewski, J.S. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-802). Information Age Publishing.

Lupiáñez, J.L. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2016). *Diseño de tareas para el desarrollo de la competencia STEM: los problemas de modelización matemática*. http://www.educacontic.es/en/blog/diseno-de-tareas-para-el-desarrollo-de-la-competencia-stem-los-problemas-de-modelizacion.

Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales-Palacios, F.J. y Vílchez-González, J.M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, 2019, 1-24. doi: 10.1002/sce.21522.

Martinovic, D. (2019). "A Mathematician, a Physicist and an Engineer": The Meaning of "M" in STEM. En M. Danesi (Ed.), *Interdisciplinary Perspectives on Math Cognition* (pp. 303-314). Springer.

Maass, K., Geiger, V., Romero, M. y Goos, M. (2019). The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM, 51*, 869-884.

Pontones, J. (2004). Aerogenerador [Fotografía]. Flickr. https://flic.kr/p/Py5oZp

Prusak, N., Hershkowits, R. y Schwarz, B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 266-285.

Putnam, R. y Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher, 29*(1), 4-15.

Quigley, C. y Herro, D. (2016). Finding the joy in the unknown: Implementation of STEAM teaching practices in middle school science and math classrooms. *Journal of Science Education and Technology, 25*(3), 410-426.

Rompella, N. (2015) (Comp.). *STEM*. Greensboro, Carson-Dellosa Publishing Group.

Sahin, A. (Ed.) (2015). *A practice-based model of STEM teaching: STEM students on the Stage (SOS)*. Sense Publishers.

Sanders, M. (2009). STEM, STEM education, STEMmania. *The Technology Teacher, 68*(4), 20-26.

Schmidt, F. (2019). Parque eólico [Fotografía]. Flickr. https://flic.kr/p/dcD49T

Scientix (2020). *The community for sciencie education in Europe*. http://www.scientix.eu

SGKPlanet. (2020). *¿Qué es un parque eoólico?* https://www.sgkplanet.com/que-es-un-parque-eolico/

SJBosco. (2020). *STREAM*. https://sjbosco.org/stream

STEM Education Coalition (2012). *STEM Education Coalition*. http://www.stemedcoalition.org

Taub, D., McCord, J. y Ryndak, D. (2017). Opportunities to learn for students with extensive support needs: a context of research-supported practices for all in general education classes. *The Journal of Special Education, 51*(3), 127-137.

Textos científicos. (2020). *Turbinas eolícas*. https://www.textoscientificos.com/energia/turbinas.

Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. En F. Hitt (Ed.). *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and CINVESTAV-IPN.

Toma, R.B. y Greca, I.M. (2018). The Effect of Integrative STEM Instruction on Elementary Students' Attitudes toward Science. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1383-1395. doi: 10.29333/ejmste/83676.

Vasquez, J., Sneider, C. y Comer, M. (2013). *STEM lesson essentials, grades 3-8: integrating science, technology, engineering, and mathematics*. Heinemann.

Washington STEM Study Group (2011). *What is STEM literacy?* http://www.k12.wa.us/STEM/default.aspx#2

Wenger, E. (1998). *Communities of practices. Learning, meaning, and identity*. Cambridge University.

Widjaja, W., Hubber, P. y Aranda, G. (2019). Potential and challenges in integrating science and mathematics in the classroom through real-world problems: a case of implementing and interdisciplinary approach to STEM. En Y.S., Hsu y Y.F., Yeh (Eds.). *Asia-Pacific STEM Teaching Practices* (pp. 157-171). Springer.

Wikipedia (2022). *Aerogenerador*. https://es.wikipedia.org/wiki/Aerogenerador

CAPÍTULO 20. LA INTRODUCCIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CIRCULARES: ¿POR QUÉ ELEGIR UN ACERCAMIENTO POR LOS ÁNGULOS?

Ratha Loeng, loengratha@hotmail.com
Institut de pédagogie de Battambang, Cambodge
Claudia Gabriela Reyes Avendaño, clau25@ciencias.unam.mx
LDAR y Universidad Nacional Autónoma de México
Laurent Vivier, laurent.vivier@u-paris.fr
LDAR, Université de Paris, France, Universités d'Artois, CY Cergy Paris, Paris Est Creteil, Rouen

Resumen

En la enseñanza secundaria de muchos países, las funciones seno y coseno de una variable real se introducen, principalmente, con la geometría. Es decir, generalmente, se comienza por extender el seno y el coseno de los ángulos geométricos en un triángulo rectángulo a los ángulos en el círculo trigonométrico (medidos en grados). Después, el cambio al radián y a la longitud medida en el círculo unitario permite establecer el vínculo con los números reales. Este camino es largo y usualmente complicado pues, generalmente, se consideran varias magnitudes incluyendo, a veces explícitamente, la noción difícil de ángulo orientado. Hemos notado que abordar las funciones seno y coseno de una variable real de esta forma genera profundas dificultades en los estudiantes al final de la enseñanza secundaria. Por ejemplo, hay confusiones entre el seno y el coseno de un ángulo y las funciones seno y coseno de una variable real. En este capítulo, interpretamos esto como un obstáculo didáctico que proviene de una visión tradicional de la enseñanza de este tema. Por este motivo, pensamos que elegir otras formas, analíticas o cinemáticas, de introducir las funciones seno y coseno pueden conducir a un mejor entendimiento. Exponemos las potencialidades, ventajas y desventajas de estas formas alternativas de introducir las funciones seno y coseno.

1. Introducción

Unas de las primeras funciones trascendentales que se enseñan en muchos países, aparte de la exponencial y la logarítmica, son las funciones seno y coseno. Esto se debe a la importancia que tienen dentro de las matemáticas (como funciones asociadas no inversas, series de Fourier) y de las ciencias (electricidad, ondas, sonido, oscilador armónico, difusión del calor…). La enseñanza de estas funciones en la secundaria puede variar dependiendo del país o la institución educativa, sin embargo, frecuentemente (¿siempre?) son enseñadas apoyándose en la enseñanza de la trigonometría. Así mismo, dentro del estudio de estas funciones, aunque es menester distinguir la diferencia del seno y del coseno de un ángulo con el seno y el coseno de número real ($sen(30°) \neq sen(30)$ y ¿cómo interpretar sen $\left(\frac{\pi}{6}\right)$?), no siempre se logra en los estudiantes. Pensamos que esto puede deberse, en parte, a la forma en que surgieron estas nociones. Sabemos que, el seno y el coseno son conocidos desde la antigüedad en trigonometría, pero la noción de funciones seno y coseno es más reciente. Es, probablemente, Euler el primero en introducir estas funciones en su obra: *Introducción al análisis infinitesimal*, capítulo VIII, "De las cantidades trascendentales que nacen del círculo" (Anexo 1). Euler escribe sin($A.z$) donde z es un arco de un círculo de radio 1, sin saber precisamente si es una longitud o un ángulo. Escribe también sin(A. $\left(\frac{m}{n}\right)$ 90°) y, un momento después (parágrafo 136), sin(30°) y sin(30+z). Euler no habla de radian, pero sí del arco π relativo a un ángulo 180°. Sin embargo, para las descomposiciones en series que aparecen después, es necesario considerar un número real (para las potencias) –así lo hizo Euler (1796).

Con respecto a las investigaciones en didáctica de las matemáticas en torno a este tema, por un lado, una mayoría se enfocan en la noción de ángulo y/o la del círculo de radio 1, ya que son típicas de la enseñanza de estas funciones, y perciben usualmente al radian, que debería ser una noción inevitable, como un nudo de la enseñanza de las funciones trigonométricas. Por otro lado, las investigaciones que se alejan de la enseñanza habitual están, por ejemplo, Moore (2013) quien trabaja con un círculo de radio R para definir el radian a partir de otra unidad de medida de los ángulos (el 'quip'); Tanguay (2010) quien explícitamente pone de relieve que $sin_{\text{deg}}(t)$ y $sin_{\text{rad}}(t)$ no son las mismas funciones (t es una medida de un ángulo); y Demir y Heck (2013) quienes consideran longitudes con n-polígonos regulares (en vez de un círculo) que dan una familia de funciones periódicas las cuales convergen en el seno y el coseno. Otras investigaciones utilizan los vínculos con la física como los movimientos circulares uniformes o los osciladores armónicos (Nguyen Thi, 2013; Khalloufi-Mouha, 2009; Martínez y Mejía, 2018; Reyes, 2020).

El objetivo de este capítulo es presentar las ventajas y los inconvenientes, las potencialidades y los obstáculos, de distintos acercamientos, sin pretender ser exhaustivo, a las funciones seno y coseno en la enseñanza secundaria. Para este fin, en la sección 2, presentamos los principales resultados del doctorado de Loeng (2017, 2019) donde muestra los obstáculos que provienen de la introducción a las funciones seno y coseno a través de los ángulos (en Francia) y que conducen a profundas dificultades para los estudiantes de secundaria. Después, presentamos tres tipos de introducción, alternativos, a este tema: la primera (Loeng, 2019) se basa en los planes de estudio franceses, pero sin utilizar la noción de ángulo; la segunda (Reyes, 2020) propone modelar movimientos cinemáticos reales con una secuencia ambiciosa y larga utilizando vídeos y dos *software* (Tracker y GeoGebra); y la tercera, más exploratoria, aprovechamos la oportunidad de los planes de estudio franceses de bachillerato que introducen la función exponencial a través de ecuaciones diferenciales y el método de Euler para hacer lo mismo con las funciones seno y coseno.

La mayor parte de este capítulo se basa en los doctorados de Loeng (2019), quien utiliza la TAD (Chevallard, 1999) y herramientas de análisis de tareas de la TA (Robert, 1998; Robert y Rogalski, 2002), y de Reyes (2019, 2020), quien utiliza principalmente la teoría de los ETM (Kuzniak *et al.*, 2016). Sin embargo, aunque hemos mencionado diferentes teorías, en este artículo no nos centramos en la utilización de los marcos teóricos o metodologías propias de estas dos tesis doctorales –que son objeto de otras publicaciones– para centrarnos en los resultados relativos a nuestro objetivo.

2. El coseno y seno en Francia

Para mostrar la forma en que se abordan el coseno y el seno, y las dificultades que emergen de la enseñanza tradicional de estas funciones en Francia,[1] exponemos parte del trabajo doctoral de Loeng. En primer lugar, mostramos la forma en que Loeng interpretó, utilizando la TAD (Chevallard, 1999), la enseñanza de las funciones seno y coseno a través de tres Organizaciones Praxeologías Locales[2] (ver también Winsløw, 2016) y la investigación que realizó acerca de las conexiones y desconexiones entre estas Praxeologías. En segundo lugar, presentamos los resultados de un cuestionario, realizado por la misma autora, en el último año de bachillerato en Francia, donde los alumnos presentan fuertes dificultades en tareas con seno y coseno. Por último, examinamos los cambios recientes en los planes de estudio relacionados con las funciones trigonométricas.

2.1 Las tres OPL a enseñar

Basándose en los planes de estudio franceses del inicio de los años 2010,[3] y en los libros de texto de la educación secundaria y media superior, Loeng (2019) identifica, cronológicamente, tres contextos para la enseñanza del seno y del coseno: seno y coseno de los ángulos en un triángulo; seno y coseno en un círculo trigonométrico; funciones seno y coseno de una variable real.

El primer contexto se refiere al coseno (abordado en el grado escolar 8) y al seno (grado 9) en un triángulo rectángulo (seno y coseno de ángulos geométricos de medidas en (0°,90°)), con las relaciones de longitudes. Este tema se retoma brevemente y sin mucho detalle en el grado 11 con la extensión a cualquier triángulo (seno y coseno de ángulos geométricos de medidas en (0°,180°)) y la fórmula de Al-Kashi.

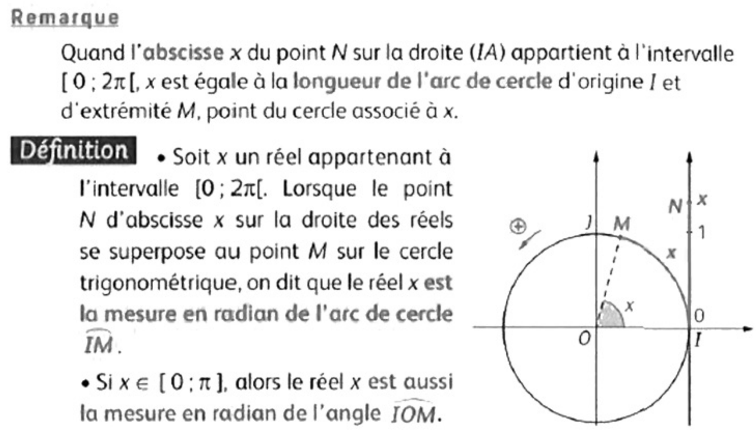
En el primer año del liceo (grado 10), aparecen el coseno y el seno en el círculo trigonométrico con la longitud de arco de un círculo (proporcionalidad entre la longitud de arco de un círculo y la medida del ángulo en el centro interceptado por este arco de círculo), el enrollamiento de la recta real en el círculo trigonométrico, y las definiciones del coseno y del seno de un número real.

En la Figura 1, podemos observar que, con el enrollamiento de la recta real sobre el círculo trigonométrico, el círculo es, implícitamente, visto como una curva parametrizada. Nótese que la noción matemática subyacente es nada menos que el morfismo continuo y sobreyectivo $x \to exp(ix)$. Ya hay cierta confusión en este libro de texto: ¿qué es x?, ¿un ángulo (sombreado)?, ¿una longitud de arco IM en la circunferencia?, ¿una longitud de segmento IN en la recta?, ¿una medida (de ángulo o longitud) o un real como se indica en el texto? o ¿todo lo anterior a la vez?

1. Aunque el estudio se centra en un país, Francia, creemos que este ejemplo es representativo de muchos países, aunque, por supuesto, quedan estudios por hacer.

2. No especificamos en este capítulo los elementos praxeológicos; véase (Loeng, 2019) para más detalles.

3. Programa para el Colegio en 2008 (https://cache.media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf), el grado 10 en 2009 (https://cache.media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf), el grado 11 en 2010 (https://cache.media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf) y el grado 12 en 2011 (https://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf).



Remarque

Quand l'**abscisse** x du point N sur la droite (IA) appartient à l'intervalle $[0\,;2\pi[$, x **est égale à la longueur de l'arc de cercle** d'origine I et d'extrémité M, point du cercle associé à x.

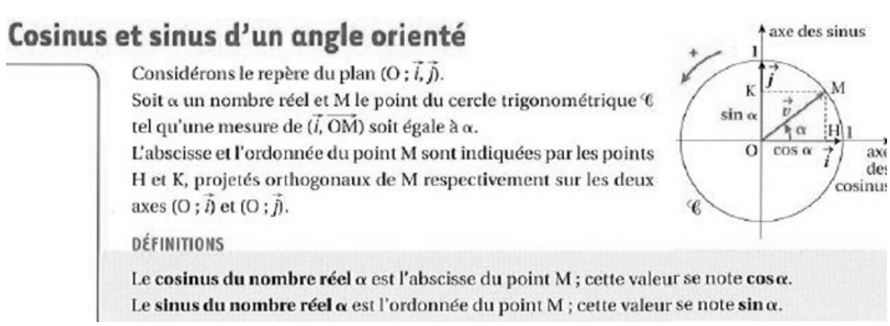
Définition • Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi[$. Lorsque le point N d'abscisse x sur la droite des réels se superpose au point M sur le cercle trigonométrique, on dit que le réel x **est la mesure en radian de l'arc de cercle** $\widehat{IM}$.

• Si $x \in [0\,;\pi]$, alors le réel x est aussi la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.

Figura 1. El "enrollamiento" en grado 10. Fuente: Beltramone *et al.* (2010, p. 140).

En grado 11, siempre haciendo uso de un círculo trigonométrico, se introducen las medidas en radianes de un ángulo orientado, se trabaja las conversiones entre grados y radianes, y se especifican las definiciones del coseno y del seno de un ángulo orientado (con ayuda del coseno y del seno de un número real abordado en el grado 10).

En la Figura 2 podemos ver la parte del curso de dos libros de texto de grado 11. Ambos libros de texto definen el coseno y el seno de un ángulo orientado a partir del seno y el coseno de un número real, como se pide en el currículo. Cabe preguntarse por el interés de introducir esta nueva noción para los ángulos orientados que, en nuestra opinión, sólo refuerza las confusiones.[4] En el libro de texto de Matemáticas *Math'x* (Figura 2), vemos una introducción que proviene directamente del enrollamiento visto en el grado 10 y la posible confusión de los objetos alrededor de *t*, entre ángulo y número real (ver las dos representaciones de *t*). En el libro de texto Odyssée, vemos más claramente la ambigüedad de las matemáticas expuestas con la posible confusión de los objetos alrededor de *α*, entre ángulo, medida del ángulo y número real.



Cosinus et sinus d'un angle orienté

Considérons le repère du plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Soit α un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tel qu'une mesure de $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ soit égale à α.
L'abscisse et l'ordonnée du point M sont indiquées par les points H et K, projetés orthogonaux de M respectivement sur les deux axes $(O\,;\vec{i})$ et $(O\,;\vec{j})$.

DÉFINITIONS

Le **cosinus du nombre réel** α est l'abscisse du point M ; cette valeur se note **cos** α.
Le **sinus du nombre réel** α est l'ordonnée du point M ; cette valeur se note **sin** α.

Figura 2. Grado 11, extracto de dos libros de textos. Fuentes: Alvez *et al.* (2011, p. 292); Brisoux *et al.* (2011, p. 205).

Al final del último año de liceo (grado 12) se enseñan las funciones coseno y seno de una variable real, cuya noción se introduce utilizando el coseno y el seno de un número real en el círculo trigo-

4. Esta noción de ángulo orientado ha desaparecido de los nuevos planes de estudios de secundaria, véase el apartado 2.3.

nométrico. En el extracto de la Figura 3, se observa la complejidad de la articulación entre los dos cuadros donde intervienen el seno y el coseno: el círculo trigonométrico a la izquierda y las funciones a la derecha, en particular la notación x, que adquiere significados diferentes.

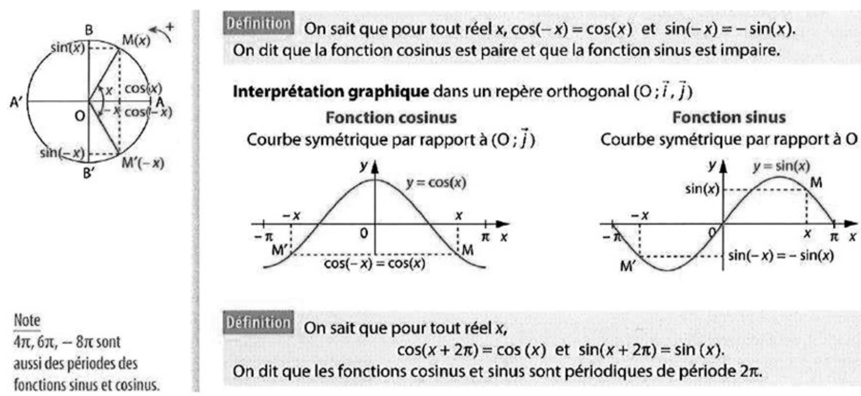


Figura 3. Grado 12, una articulación compleja. Fuente: Abihssira-Lavandier *et al*. (2012, p. 140).

Así, en la enseñanza, encontramos un zigzag entre las nociones, con ángulos geométricos, agudos, luego obtusos, ángulos orientados, medidas de estos tipos de ángulos, en grados y en radianes, longitudes, sobre un círculo y relaciones en un triángulo, números reales.

Por supuesto, los planes de estudio son coherentes desde el punto de vista matemático y se puede pensar que 5 años son suficientes para que los alumnos aprendan todos estos conceptos y sus relaciones. Sin embargo, también se puede cuestionar la pertinencia didáctica de esta enseñanza y, en particular, de los ángulos, que, cabe recordar, son de gran complejidad matemática. ¿No se corre el riesgo de crear confusión con todas estas nociones, que a veces se identifican implícitamente? Nosotros pensamos que esto es lo que sugieren los análisis de los libros de texto.

2.2. Las dificultades de los estudiantes

Con el fin de identificar las posibles dificultades de los estudiantes en este largo y complejo tema, y con base en los análisis institucionales, se elaboró un cuestionario con 5 preguntas, desde el triángulo rectángulo hasta la derivación. Este cuestionario fue aplicado a 40 alumnos de dos clases de opción científica (último año de nivel medio superior, área científica), en París y en Raincy, Francia. Los alumnos de la clase de París tienen un nivel medio, mientras que los de la clase de Raincy tienen un buen nivel –escuela privada femenina. Ambas clases trabajaron en el capítulo de las funciones trigonométricas en el momento del cuestionario. Nos centramos aquí en las confusiones entre los distintos objetos en los tres contextos diferentes en los que aparecen el seno y el coseno.

La primera confusión pertenece a la geometría. Se trata de la confusión entre los valores del coseno y el seno de un ángulo y el valor del ángulo (Figura 4). Al final de la secundaria, aunque 37 alumnos recuerden las fórmulas del triángulo rectángulo, varios dan valores de coseno y seno muy fuera del intervalo [−1,1]. No hay retroacción con las funciones seno y coseno, especialmente con las curvas, quizás porque no hay relación entre los dos contextos.

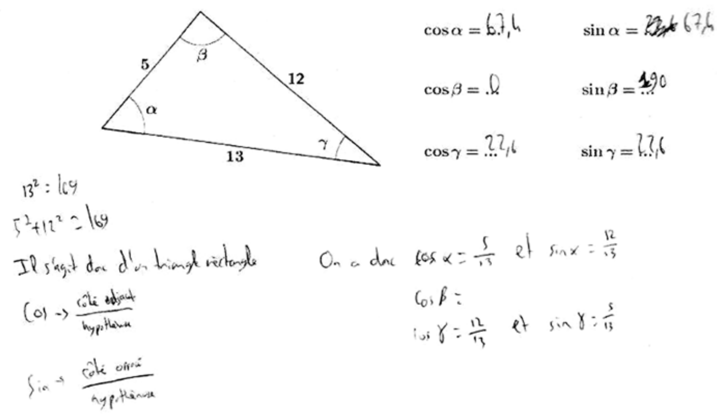


Figura 4: Confusión entre los valores del coseno y del seno de un ángulo y el valor del ángulo, aquí en grados. Fuente: Loeng (2019, p. 237).

Se observa que aproximadamente una cuarta parte de los alumnos calcula correctamente las razones de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo, pero luego calculan el seno y el coseno de estos valores (Figura 5). ¿Esta confusión proviene de la enseñanza de las funciones trigonométricas? Efectivamente, al tener un número real (como $\frac{5}{13}$), podemos (¿deberíamos?) aplicar la función seno o coseno.

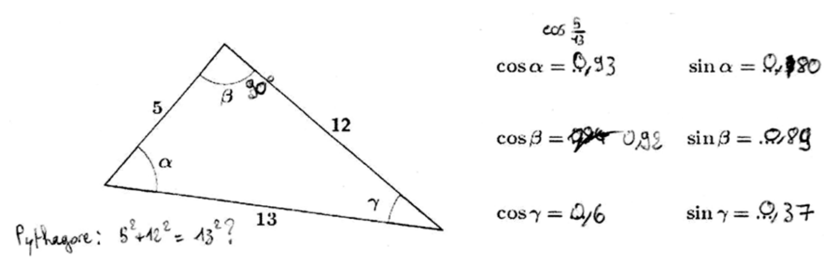


Figura 5: Confusión entre los valores de los cosenos y senos de un ángulo y los de los cosenos y senos de un número real, aquí en radián (Loeng, 2019, p. 241).

Aproximadamente la mitad de los alumnos tienen dificultades para calcular el seno y el coseno del ángulo recto. La mayoría trata de escribir una proporción con dos de las longitudes en los tres lados, a veces con un valor mayor que 1 (Figura 6).

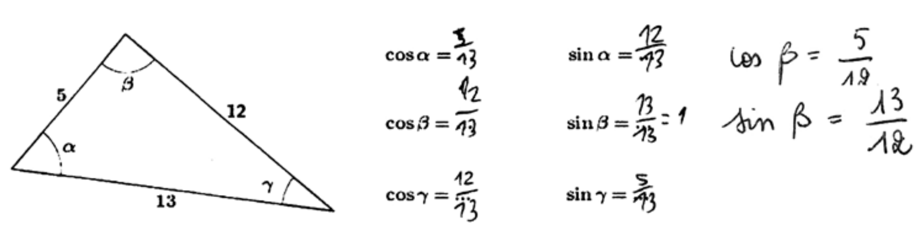
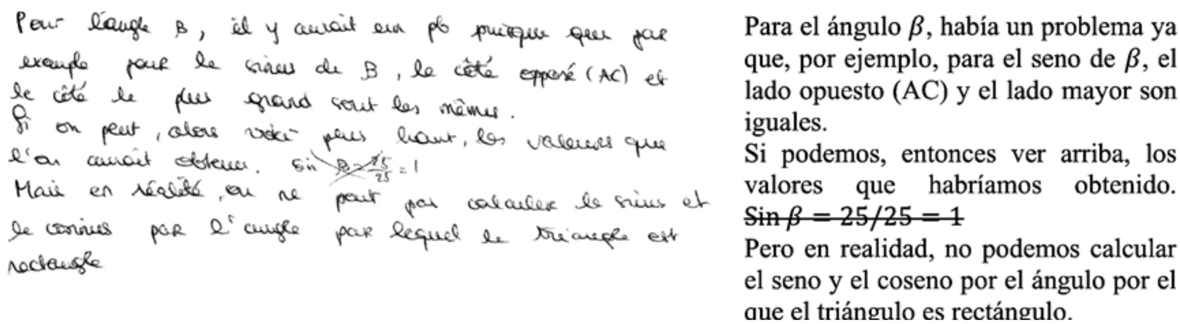


Figura 6: Ejemplos para calcular los valores del ángulo recto (Loeng, 2019, p. 239 y 241).

Esto se debe probablemente a un confinamiento en el marco geométrico del triángulo rectángulo, ya que normalmente se conocen los valores del seno y del coseno para 90° o $\frac{\pi}{2}$. Pero la desconexión de los contextos parece importante porque el cálculo de un buen valor (a menudo para el seno con "lado opuesto"/"hipotenusa" que da el resultado correcto 1) no permite convocar el conocimiento fuera del contexto del triángulo rectángulo. Este es también el caso de este alumno (Figura 7) que tacha el valor 1 del seno.


Pour l'angle β, il y aurait eu pb puisque que par exemple pour le sinus de B, le côté opposé (AC) et le côté le plus grand sont les mêmes.
Si on peut, alors voir plus haut, les valeurs que l'on aurait obtenu. ~~Sin B = 25/25 = 1~~
Mais en réalité, on ne peut pas calculer le sinus et le cosinus par l'angle par lequel le triangle est rectangle

Para el ángulo β, había un problema ya que, por ejemplo, para el seno de β, el lado opuesto (AC) y el lado mayor son iguales.
Si podemos, entonces ver arriba, los valores que habríamos obtenido. ~~$\sin \beta = 25/25 = 1$~~
Pero en realidad, no podemos calcular el seno y el coseno por el ángulo por el que el triángulo es rectángulo.

Figura 7: Explicación de un alumno (Loeng, 2019, p. 238).

Sin embargo, la mayor confusión aparece, para un tercio de los alumnos, en la pregunta sobre las curvas de las funciones seno y coseno, precisamente entre ángulos (o puntos del círculo trigonométrico) y números reales de diferencia múltiplo de 2π. Se trataba, entre otras cosas, de situar, si era posible, en la gráfica de la curva representativa de la función coseno en $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ tres puntos A, C y D de la respectiva curva de abscisas $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{11 + 6 \times 2016}{6}\pi$ y $\frac{-589\pi}{6}$. También se pidió comparar las ordenadas de estos tres puntos, que son iguales ya que las abscisas difieren en un múltiplo de 2π.

Muchos alumnos colocan los puntos en el mismo lugar (Figura 8, izquierda), algunos incluso cambian la abscisa de A (Figura 8, derecha).

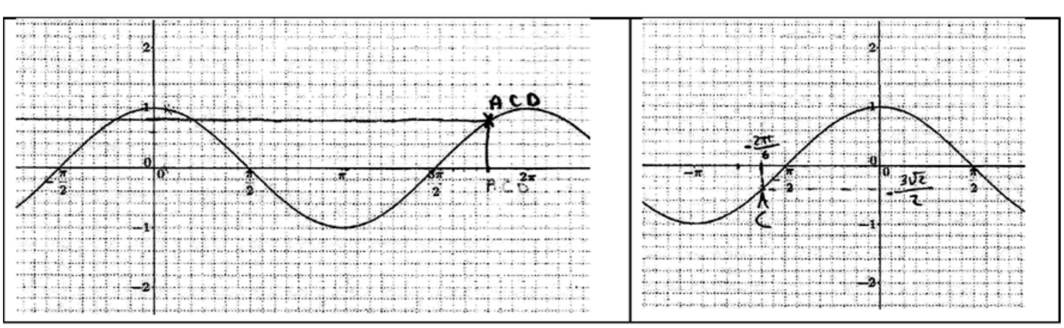


Figura 8: Dos extractos de las respuestas de los estudiantes (Loeng, 2019, p. 252).

2.3 Conclusión

Podemos observar que hay una mala articulación entre los diferentes contextos y dominios matemáticos, también hay muchas confusiones y los objetos no parecen bien identificados, ni en los libros de textos, ni por los estudiantes (¿y por los docentes?). Principalmente, se identifica las confusiones siguientes:

- Entre ángulos (orientados y/o no orientados) y sus medidas (grados y radianes) y los números reales.
- Entre seno y coseno de un ángulo y seno y coseno de un número real.

Por un lado, observamos un obstáculo epistemológico (relativo al radian, el morfismo de R sobre el círculo unitario y el cociente por su núcleo) y, por otro lado, un obstáculo didáctico con la elección, de la institución de enseñanza, de los ángulos para introducir las funciones seno y coseno, sin distinguir los objetos.

En el nudo del problema, con el radián, aparece el cociente $R/2\pi Z$, como conjunto de las medidas de los ángulos: el enrollamiento de la recta numérica R sobre el círculo de radio 1 es el morfismo continuo sobreyectivo de R en el círculo ($x \to exp\ (ix)$).

El cociente por su núcleo $R/2\pi Z$ se representa geométricamente con el círculo de radio 1: ¿Por qué no introducir la notación $cos(M)$ y $sen(M)$? Eso permitiría distinguir R del cociente $R/2\pi Z$ en la introducción de las funciones seno y coseno. Es bastante natural para los estudiantes: un estudiante dijo "seno del punto M", rechazado por la docente, y otro también escribió $cos^2(M)+sen^2(M) = 1$.

Todo lo que acabamos de mencionar muestra que el tema matemático es complejo y pensamos que para muchos docentes puede ser complicado enseñarlo a sus alumnos. Con los nuevos programas de estudios (desde 2019), las funciones trigonométricas se introducen en grado 11, sin los ángulos orientados, pero con el radian. Parece que hay menos confusiones en los libros de textos entre los diferentes objetos. ¿Es una (primera) reducción del obstáculo didáctico?, ¿es necesario enseñar el radian?, ¿hay menos dificultades para los estudiantes? Esto aún se tiene que investigar para entender los cambios, en Francia y en otros países (Ratha Loeng investigó también en Camboya).

3. Formas alternativas de introducir el tema

3.1 Una situación didáctica en un círculo

Loeng (2018, 2019), propuso una introducción de las funciones circulares sin ángulos para focalizarse sobre las longitudes y la noción de periodicidad. Para distinguir las longitudes sobre la circunferencia y los números reales, ella consideró como variable didáctica el radio del círculo (es importante recalcar que, a lo largo de la historia, se consideraron círculos de radio diferente a 1). La situación fue diseñada en dos partes, papel y lápiz, y después con GeoGebra (implementada en Francia, grado 12, antes de la enseñanza de las funciones trigonométricas).

En la parte A (Figura 9, izquierda), con lápiz y papel, M es la imagen de un número real t sobre el círculo de radio R, (a,b) son las coordenadas de M. Se pide la longitud del círculo ($2\pi R$) y estudiar los primeros giros con: los valores de t según el número de giros y los cuatro puntos especiales, las variaciones de a y b con respecto a t, los signos de a y b con respecto a t y, por fin, las expresiones algebraicas de a y b.

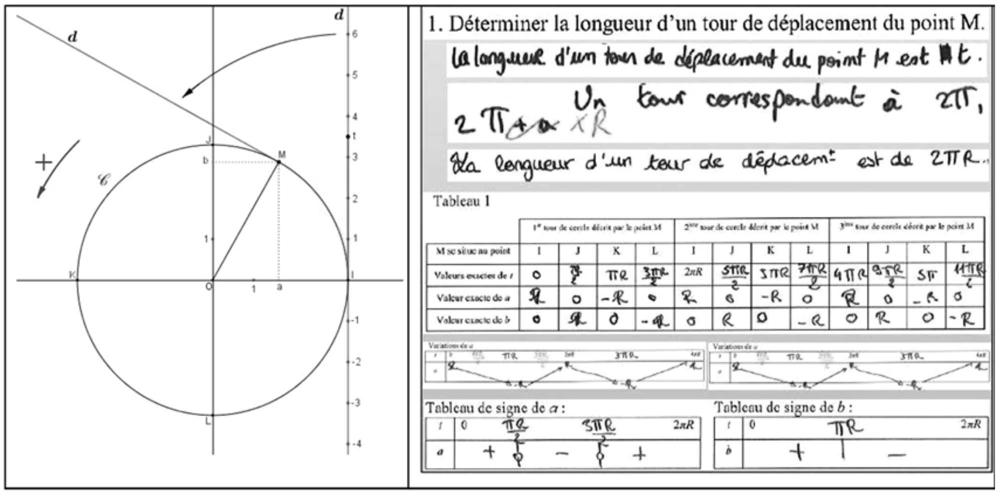


Figura 9. Figura dada a los estudiantes y respuestas. Elaboración propia.

En la Figura 9, a la derecha, se ve la respuesta de un estudiante a la parte A. Como este estudiante, varios alumnos pusieron 1,0, −1,0... en la tabla 1, pero la longitud $2\pi R$ permitió una retroacción (en Figura 9 se ve los cambios de los estudiantes).

Con estas preguntas, y como se muestra en la Figura 9, los alumnos fueron capaces de trabajar con a y b como funciones. Esto les permite introducir las funciones trigonométricas periódicas, sin ángulos, sólo con el enrollamiento de la recta real sobre el círculo, distinguiendo al mismo tiempo número real, t, y longitud sobre el círculo, t/R.

Sin embargo, escribir las expresiones algebraicas $a = R.\ sen(t/R)$ y $b = R.\ cos(t/R)$ es difícil con las definiciones de seno y coseno de grado 11, en trigonometría.

La segunda parte, con GeoGebra, estuvo enfocada en la variación de las curvas de las funciones a y b con respecto a R (un cursor), para destacar las características comunes de las familias de funciones generadas. Después, se realizó un estudio más específico de las funciones seno y coseno, $R = 1$, ya que estas funciones permitirían generar ambas familias de funciones.

3.2 Una introducción en cinemática

Se han realizado varias investigaciones sobre los movimientos circulares. Presentamos aquí el punto de vista de Reyes (2020) que desarrolló una secuencia didáctica de tres meses en México sobre la modelización de movimientos reales, utilizando dos *software*: Tracker y GeoGebra. En concreto, el objetivo era la modelización de movimiento para conceptualizar la noción de función: Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU), Movimiento Circular Uniforme (MCU) y su composición (MRU+MCU) que permite generar cicloides. Los estudiantes, de la UNAM (preuniversitaria), tienen un buen nivel en matemáticas y conocen las funciones seno y coseno. Sin embargo, un estudio anterior (Reyes, 2019) mostró que este conocimiento no estaba ampliamente disponible.

El trabajo de los estudiantes, en grupos de 4, se implementa para cada movimiento, en tres momentos que marcan tres etapas importantes de la modelización:

- Realización de los movimientos reales y videograbación.

- Utilización del *software* Tracker para tener datos a partir del video del movimiento: medidas de variables físicas, curvas (Figura 10).
- Integración en GeoGebra de los datos (tablas de valores) para ajustar las curvas, si existe una función matemática de referencia que se ajusta bien (Figura 11).

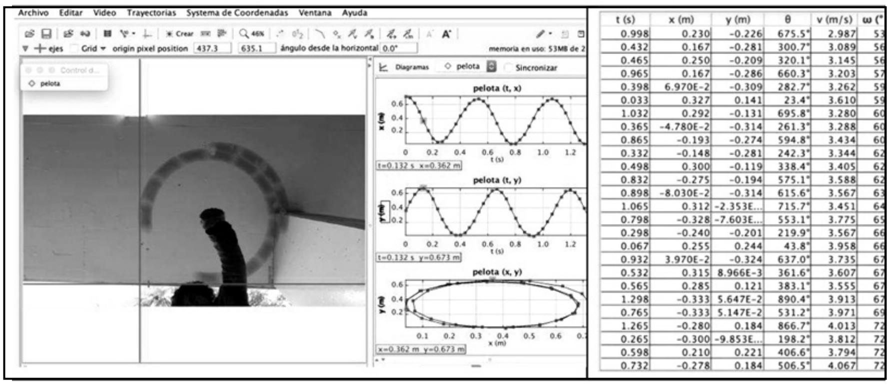


Figura 10. Utilización de Tracker: vídeo, variables físicas, curvas y tablas de valores (Reyes, 2020, p. 290)

La realización de los movimientos permite anclar las nociones, tanto físicas como matemáticas, en el mundo real, dando así representaciones tangibles a partir de un trabajo que puede calificarse como en activo (en la elección de la Figura 10, el alumno debe mantener un ritmo regular moviendo su mano lo menos posible para obtener un MCU). El uso de Tracker permite destacar varias variables y funciones con la noción de covariación. Las funciones se representan mediante curvas y tablas de valores. Pero si podemos identificar ciertas características, como la periodicidad que podemos validar con referencia al movimiento real, es igual de importante en matemáticas identificar estas funciones algebraicamente. Así, la utilización de GeoGebra permite pasar completamente a las matemáticas, ya que, en el caso presente, en el que el movimiento está suficientemente bien realizado, GeoGebra es capaz de proponer un ajuste con la función seno (Figura 11) –no entramos en el detalle del tratamiento estadístico del ajuste. Después, los alumnos realizan un trabajo de identificación de las variables y parámetros de la función propuesta por GeoGebra (visualizada en la pantalla). Una última etapa del trabajo permitió generalizar la expresión de los movimientos mediante la generalización de los parámetros (en particular la amplitud y la frecuencia).

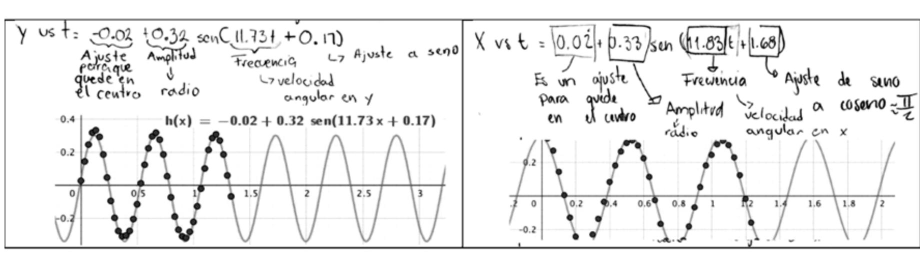


Figura 11: Un ajuste con GeoGebra, tomado del trabajo de un grupo de trabajo (Reyes, 2020, p. 182).

El interés es que la variable central es el tiempo, que está más cerca de los números reales que las medidas de los ángulos y de las longitudes sobre el círculo (no necesita un enrollamiento). También, se ve un trabajo flexible en las variables: ¿qué pasa si se trabaja con el tiempo?, ¿con el ángulo? Las funciones (del tiempo) emergen naturalmente con Tracker, pero necesita una descontextualización para tener los números reales. GeoGebra puede ayudar, pero ¿los signos "*sen*" y "*cos*" tienen algún sentido para los estudiantes?, ¿cuáles son los conocimientos previos que se necesitan? A lo largo del análisis de los datos, en el trabajo doctoral de Reyes (2020) se nota que algunos alumnos pensaban que el seno y el coseno sólo era para trabajar con triángulos y calcular ángulos.

Las preguntas que planteamos surgen en los alumnos que se acercan a la dependencia de las variables desde un fenómeno que es tangible. No parten desde lo abstracto de las definiciones tradicionales, sino más bien ellos van construyendo y dando significado a las funciones y sus variables.

3.3 Ecuaciones diferenciales

En Francia, en grado 11, opción científica, se introduce la exponencial con la ecuación diferencial $y' = y$ con $y(0) = 1$ con una presentación gráfica obtenida con el método de Euler. Entonces, ¿por qué no introducir los seno y coseno con $y'' + y = 0$? Como se trata de una ecuación de orden 2, hay que elegir entre las condiciones de borde, $y(0) = y(1) = 0$ o $y'(0) = y'(1) = 0$, o bien las condiciones de Cauchy: $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$ o $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

El gran interés es que las funciones seno y coseno son definidas de manera descontextualizada, en análisis, sin referencia a otro dominio de las matemáticas. Además, la ecuación diferencial tiene un rol importante en las ciencias.

Se aplica el método de Euler a la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, con las condiciones de Cauchy: $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Así, en una hoja de cálculo, se introduce:

Tabla 1. Implementación en una hoja de cálculo del método de Euler de orden 1, el paso *h* está en la celda H2 y las fórmulas se copian hacia abajo. Elaboración propia.

	A	B	C	D
1	x	cos x	cos' x	cos'' = − cos
2	0	1	0	−1
3	= A2+H$2	= B2+H$2*C2	= C2+H$2*D2	= −B3

Las curvas obtenidas para pasos *h* suficientemente pequeños se muestran en la Figura 12 (las precisiones son mucho mejores con un método de Euler de segundo orden)[5]: se puede pensar que hay soluciones, que estas soluciones parecen periódicas, acotadas entre −1 y 1, etc.

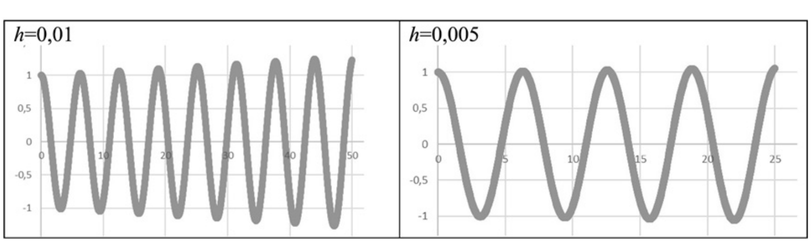


Figura 12: Curvas obtenidas con una hoja de cálculo para dos pasos y 5000 datos. Elaboración propia.

5. Se ingresa en la celda B3 : « = B2+H$2*C2+0,5*D2*H$2*H$2 »

También podemos prever un trabajo algebraico, similar al propuesto en Francia, en grado 11, sobre la exponencial. Desde $y'' + y = 0$ se obtiene la integral primera:[6] $y'^2 + y^2 = c$, donde $c \geq 0$ es constante. Rápidamente salen a la luz dos resultados:

- De la equivalencia $c = 0 y'(0) = y(0) = 0$, y por tanto existe la función nula, deducimos la unicidad al problema de Cauchy.
- Las soluciones, si existen, están acotadas.

Asumiendo la existencia al problema de Cauchy, se puede estudiar el caso de seno ($y(0) = 0$ *y* $y'(0) = 1$) y coseno ($y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$). Y se llega a que la derivada de seno es coseno y la derivada de coseno y seno; seno es impar y coseno es par; seno y coseno están acotadas entre −1 y 1.

Más en el análisis: siempre y cuando $cos(t)>0$, cos' es decreciente, pues es negativo, y *cos* es decreciente y cóncava. Entonces, cos corta el eje de las abscisas en $k>0$ (primer cero de *cos*), donde $cos(k) = 0$ y $cos'(k) = -1$ (con la primera integral). Pues, $S(x) = cos(k\text{-}x)$ es solución de $y'' + y = 0$ en $[0,k]$, por unicidad es *sen* en $[0,k]$; $G(x) = cos(x)$ en $[0,k]$ y $-S(x\text{-}k)$ en $[k,2k]$ es solución, pues es cos en $[0,2k]$; $H(x) = G(x)$ en $[0,2k]$ y $-G(x\text{-}2k)$ en $[2k,4k]$ (o, con la paridad, en $[-2k,2k]$) es solución, es cos en $[0,4k]$. Por fin, extendiendo por periodicidad, se tiene una solución en R que es *cos* por unicidad —se obtiene seno ya que *sen = cos'*.

Se obtienen todas las fórmulas con seno y coseno y, también, se puede buscar una aproximación de la constante k (por ejemplo, con el método de Euler) —el valor exacto es $\pi/2$.

No hay círculo, tampoco ángulos, en la ecuación diferencial. Pero una articulación es posible ya que para todo t en R : $cos^2(t) + sen^2(t) = 1$. Entonces el punto $M(t)$ de coordenada $(cos(t)$, $sen(t)$ pertenece al círculo de radio 1.

4. Conclusiones

Por supuesto, los tres contextos destacados por Loeng (2019) han de conectarse y articularse para la enseñanza del seno y el coseno. Pero esto no es tan sencillo, como ha demostrado Loeng (2019), especialmente el pasaje entre ángulos y longitud en el círculo que necesita el radián (no es tan natural medir una magnitud por otra). Además, por los números reales (y funciones), hay que elegir entre una descontextualización (ángulos y/o longitudes en geometría, tiempo en cinemática u otros acercamientos con fenómenos periódicos) y una introducción por sí misma (como la ecuación diferencial).

A la luz de los resultados de Loeng (2019), parece necesario tomar una distancia con la enseñanza tradicional de los ángulos y repensar el currículo para la enseñanza de las funciones circulares. No se necesitan los ángulos, el radián, ni tampoco el círculo, es una situación mucho más abierta de lo que podemos pensar. Diferentes caminos son posibles y tenemos que investigar las potencialidades de otros tipos de introducción, dentro de las matemáticas y para las otras ciencias.

6. En física, preferimos mantener los coeficientes ½ porque la primera integral representa la conservación de la energía.

5. Referencias

Abihssira-Lavandier, A., Alvez, Y., Beauvoit, E, Guillemet, D., Royer, F., & Tadeusz, L. (2012). *Mathématiques Terminale S, Programme 2011*. Collection Math'x, Didier 2012.

Alvez, Y., Beauvoit, E., Guillemet, D., Lavigne, D., Roxval, E., Saliba, G., & Tadeusz, L. (2011). *Mathématiques 1re S, Programme 2010*. Collection Math'x, Didier 2011.

Beltramone, J-P., Giton, F., Labrosse, J., Merdy, C., Silhol, J., & Truchan, A. (2010). Mathématiques 2de, Programme 2009. Collection Déclic, Hachette 2014. https://www.enseignants.hachette-education.com/livres/mathematiques-declic-2de-compact-edition-2014-9782011355928

Brisoux, F., Brucker, C., Sanchez, I. y Schwartz, P. (2011). *Mathématiques 1re S, Programme 2010*. Collection Odyssée, Hatier 2011.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Demir, Ö y Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. En E. Faggiano y A. Montone (Eds.) *Proceedings of the 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 119-124). Italy.

Euler, L. (1796). *Introduction à l'analyse infinitésimale* (Tome 1). https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3884z/f3.image.texteImage

Khalloufi-Mouha, F. (2009). *Etude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2ème année section scientifique*. [tesis de doctorado, Université de Tunis].

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Loeng, R. (2017). Learning sine and cosine in French secondary schools. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 637-644). DCU Institute of Education y ERME.

Loeng, R. (2018). Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge, *Actes du séminaire de didactique des mathématiques*, IREM de Paris, 287-288.

Loeng, R. (2019). *Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge* [tesis de doctorado, Université de Paris].

Martínez, M. y Mejía, H. R. (2018). Study two modelling tasks using a motion sensor to introduce sinus function. *MENON Journal Of Educational Research*, (4), 110-128.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 225-245.

Nguyen-Thi, N. (2013). *La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Vietnam: une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation* [tesis de doctorado, Université de Grenoble y Université de Pédagogie de Ho Chi Minh Ville].

Reyes, C. G. (2019). Paradigmas del espacio de trabajo matemático en cinemática: Análisis de una actividad de modelización. En L. Vivier, E. Montoya-Delgadillo, P. R. Richard, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto y D. Tanguay (Eds). *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (pp. 63-72). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Reyes, C. G. (2020). *Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique* [tesis de doctorado, Université de Paris].

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Robert, A., y Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x, 60*, 6-25.

Tanguay, D. (2010). Degrés, radians, arcs et sinusoïdes. *Petit x, 82*, 59-71.

Winsløw, C. (2016). Angles, trigonometric functions, and university level Analysis. En E. Nardi, C. Winsløw y T. Hausberger (Eds), *Proceedings of the First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 163-172). INDRUM.

Anexo 1

Extracto del libro de Euler (1976), *Introducción al análisis infinitesimal*, capítulo VIII, "De las cantidades trascendentales que nacen del círculo".

98 DES QUANTITÉS TRANSCENDANTES

$$\text{fin. } v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{\&c.}$$

Ainſi l'arc v étant donné, on pourra, à l'aide de ces ſéries, trouver ſon ſinus & ſon coſinus. Pour rendre l'uſage de ces formules plus général, ſuppoſons que l'arc v ſoit au quart de la circonférence ou a 90°, comme m eſt à n, ou que $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$; comme la valeur de π eſt connue, en la ſubſtituant dans tous les termes, on trouvera

$$\text{fin. A } \frac{m}{n}\, 90^\circ =$$

$$+ \frac{m}{n} \cdot 1{,}5707963267948966192313216916$$
$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}6459640975062462536557565636$$
$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}0796926262461670451205055488$$

CAPÍTULO 21. DESCRIPCIÓN GRÁFICA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN CIENCIAS. APLICACIONES DE LOS MAPAS HÍBRIDOS

Nehemías Moreno Martínez, nehemias.moreno@uaslp.mx
Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México
Esmeralda Jasso Vázquez, esmeraldajassov@gmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Resumen

En este capítulo se presentan los avances de una línea de investigación relacionada con el empleo de la técnica del Mapa Híbrido y sus interpretaciones teóricas para llevar a cabo la descripción y el análisis de la construcción de conocimiento en el contexto de la matemática, la física y la química escolar. Las interpretaciones teóricas se realizan, para la matemática escolar, desde el Enfoque Ontosemiótico y, para la física y la química escolar, desde adaptaciones del enfoque apoyadas en la noción de objeto del Interaccionismo Simbólico y la función semiótica de Hjelmslev. Mediante la metodología cualitativa empleada en dichos estudios fue posible describir los objetos que intervienen en la resolución de problemas que implican la actividad matemática, sus conexiones y algunos procesos cognitivos necesarios para la construcción de conocimiento.

1.Introducción

La resolución de problemas en la matemática escolar es una actividad de gran importancia implicada en la construcción de conocimiento de los alumnos; sin embargo, ésta puede ser empleada en el aula con otros fines; por ejemplo, para motivar la introducción de los conceptos, donde se busca identificar la actividad matemática con la exploración cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución de un problema abierto cuyo enunciado no sugiere el procedimiento de resolución; también puede ser empleada como estrategia didáctica con la intención de que el alumno domine determinados métodos de solución, lo cual considera como secundario la resolución de problemas dentro del proceso didáctico global. Las distintas funciones de la resolución de problemas, según Gascón (1994) tienen que ver con el "modelo epistemológico implícito que sostiene la noción de *problema de matemáticas* y, por otra, de lo que en cada caso se crea que significa *enseñar y aprender matemáticas*" (p. 38).

Al respecto, en el campo de la Matemática Educativa, los enfoques teóricos que se han propuesto para analizar los fenómenos educativos que ocurren en la matemática escolar han realizado señalamientos epistemológicos y ontológicos sobre los objetos y significados que se ponen en juego en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, la teoría de registros semióticos (Duval, 1995), desde una perspectiva cognitiva ha señalado que, dado que los objetos matemáticos son entidades abstractas, la única manera de acceder a ellos es a través del uso del signo (trazos, símbolos, iconos, entre otros) los cuales se encuentran asociados de manera interna y externa. En este sentido, el pensamiento (interno) no es puramente conceptual, sino que también es semiótico (externo), de manera que para la comprensión de la noción matemática más compleja lo que se requiere es la realización de tratamiento (cálculos aritméticos, operaciones algebraicas) en distintos registros de representación y la articulación entre éstos, por lo que hay que explorar problemas trasladados entre distintas representaciones semióticas (Guzmán, 1998).

Otra teoría de la Matemática Educativa, el Enfoque Ontosemiótico, EOS (Godino *et al*., 2007), señala que un objeto matemático es todo aquello a lo que se puede hacer referencia cuando se resuelve un problema matemático. Los objetos, relacionados y organizados por el sujeto al resolver el problema matemático, pueden ser ubicados en alguna de las siguientes seis categorías: situación-problema, lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. El significado de un objeto matemático es entendido como el sistema de prácticas donde dicho objeto es relevante. En este caso, la práctica es interpretada como "la acción orientada a fin de resolver un problema o realizar una tarea y que conlleva una competencia por parte del sujeto que la realiza" (Godino *et al*., 2017, p. 95).

Por otro lado, tal y como ocurre en la matemática escolar, en las clases de ciencias experimentales se concibe la resolución de problemas de distintas maneras y es empleada con distintas finalidades. Un aspecto relevante de la resolución de problemas en la física o la química escolar tiene que ver con la participación de objetos con una ontología y epistemología distinta a la de los objetos matemáticos. La única manera de acceder a los objetos matemáticos es a través del uso del signo, no así para los objetos de estas ciencias donde la actividad experimental sobre objetos de naturaleza concreta o material es de gran importancia para la validación del conocimiento. Sin embargo, el componente matemático que aparece en estas ciencias es relevante, ya que, contrario a los señalamientos que se pudieran hacer de que la matemática es un mero lenguaje de la física o la química, más bien en la física y la química escolar lo que se presentan son relaciones de significación entre los objetos matemáticos y objetos físicos o químicos, según sea el caso.

Cabe señalar que, al igual que en la matemática escolar, en la física y la química escolar se presentan dificultades en el aprendizaje mediante la resolución de problemas que tienen que ver con una enseñanza que motiva mecanismos de repetición y una escasa o nula significación. En el caso de la química, Del Valle y Curotto (2008) han reportado que el alumno busca la regla, la fórmula o la ecuación para encontrar la solución, sin relacionar las cuestiones conceptuales o sin mirar desde los modelos químicos que explican las reacciones que se producen, llevándose a cabo una repetición de pasos que impide la verdadera comprensión de los fenómenos químicos. Otra problemática en la química escolar, que va muy de la mano con la situación anterior, tiene que ver con que "los estudiantes frecuentemente carecen de capacidad para distinguir entre la información que es esencial para resolver un problema y la que es irrelevante para ello" (Kempa, 1986, p. 109). En el caso de la física escolar, se ha señalado que los alumnos repiten soluciones que sus profesores conocen perfectamente y que cualquier ligero cambio al resolver situaciones problemáticas similares les plantea serias dificultades (Gil *et al*., 1999).

En relación con los señalamientos anteriores, sobre la resolución de problemas en la enseñanza de las ciencias, las concepciones y funciones de la resolución de problemas para los profesores, plantemos que es de gran importancia para el docente contar con una herramienta que permita analizar la actividad matemática implicada en la resolución de problemas con la finalidad de ayudar a los estudiantes a superar los obstáculos a los que se enfrentan en la construcción de conocimiento. En este trabajo nos planteamos el objetivo de presentar los avances de una línea de investigación relacionada con el empleo del Mapa Híbrido para describir y analizar de forma gráfica la resolución de problemas en los contextos de la matemática, la física y la química escolar. Partiendo de la idea de distinguir entre técnica y teoría, se considera entonces a la técnica del Mapa Híbrido como objeto de estudio, interpretable desde cualquier teoría de la Matemática Educativa, en nuestro caso, desde el EOS.

2. Antecedentes

En el análisis de la resolución de problemas en ciencias se ha empleado la técnica de representación de la V de Gowin, Figura 1, la cual muestra mediante un esquema en forma de V a los objetos que intervienen en la resolución de un problema, ya sea de las matemáticas o de las ciencias experimentales. La técnica tiene sustento en la Teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1976), la cual señala que “las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario sino sustancial con lo que el alumno ya sabe” (Escudero, 1995, p. 96). El lado izquierdo de la V presenta el dominio conceptual (teorías, principios y conceptos), el derecho los elementos procedimentales (afirmaciones, transformaciones y registros) y el vértice los acontecimientos (situaciones, contextos físicos o fenómenos de interés) que permiten formular las preguntas clave (Escudero y Moreira, 1999).

Figura 1a. “El aprendizaje significativo mediante la V se logra al hacer explícita la relación entre el conocimiento del alumno, elementos conceptuales, y lo que podrá realizar al resolver problemas, elementos metodológicos” (Gil *et al*., 2013, p. 317).

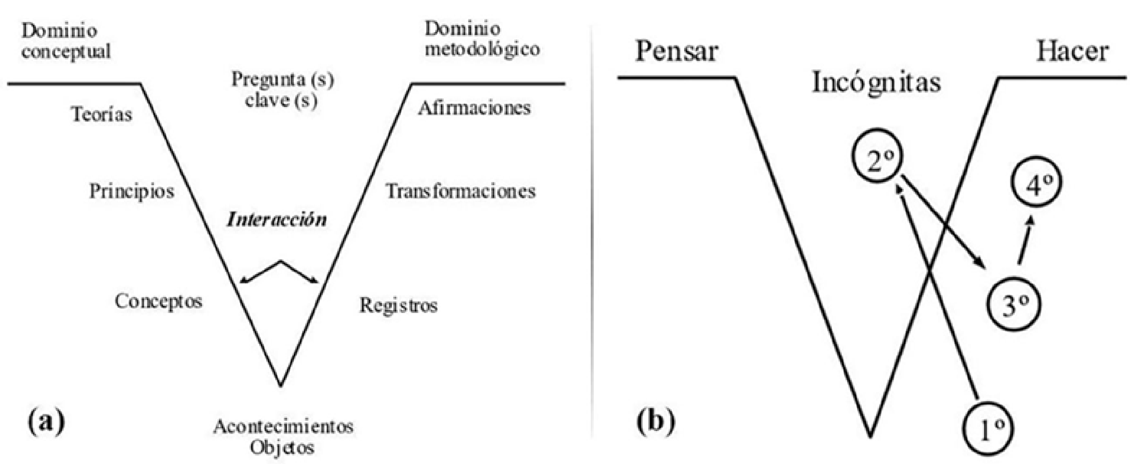


Figura 1. (a) La V de Gowin y sus elementos, (b) trayectoria de operativismo ciego (Escudero y Moreira, 1999, p. 62).

Mediante la V de Gowin, Escudero y Moreira (1999) describieron el operativismo ciego de un estudiante que muestra una deficiente significación física: Figura 1b. El sujeto parte de los registros o fórmulas en “1°”, se plantea la pregunta clave “2°” con el objetivo de determinar el valor de cierta incógnita mediante la sustitución de los datos del problema en las fórmulas, posteriormente en “3°” lleva a cabo las operaciones o transformaciones que le llevan a resolver el problema en “4°”. Se trata entonces de una práctica procedimental, comentada en la sección previa, donde se memoriza y archiva fórmulas prescindiendo de la interacción con el dominio conceptual.

Cabe señalar que la V se apoya en la noción de representación interna y externa de la Teoría del Aprendizaje Significativo. La representación interna (mental) es utilizada para “explicar los procesos de razonamiento y modelos mentales que al explicitar utilizando distintos sistemas representacionales dan lugar a la representación externa" (Aguilar, 2004, p. 32). Para que las representaciones externas sean reproducibles o inteligibles públicamente, tienen que ser representadas mentalmente por el individuo. En este sentido, la V podría ser interpretada como un sistema de representación externo de los elementos conceptuales y procedimentales que el individuo, internamente, considera durante la resolución de un problema de la física escolar.

Desde el campo de la Matemática Educativa, algunos investigadores apoyados en el EOS han señalado que las nociones de representación interna y externa (de los objetos que participan en la resolución de problemas) son ambiguas para la descripción de la actividad matemática y en su lugar han propuesto entender la noción de representación en términos de dos facetas o perspectivas duales, a saber, ostensivo/no ostensivo y personal/institucional (Font *et al.*, 2007). En este trabajo, se considera la noción de representación del EOS a través de la interpretación de la técnica del Mapa Híbrido. En este sentido, la perspectiva ontosemiótica permite interpretar el Mapa Híbrido como una representación ostensiva de objetos intervinientes y del sistema de prácticas epistémico o cognitivo, implicado en la resolución de problemas ya sea de la matemática, la física o la química escolar. El Mapa Conceptual Híbrido, o simplemente Mapa Híbrido, es una combinación del Mapa Conceptual con la técnica del Diagrama de Flujo.

En las siguientes secciones se describe una revisión de los avances realizados en la línea de investigación que tiene como objetivo describir de manera gráfica la resolución de problemas en ciencias a partir de la interpretación del Mapa Híbrido desde el EOS y desde adaptaciones de éste al contexto de las ciencias.

3. Método

Se propone un estudio cualitativo, de caso, donde se examinan los distintos aspectos relacionados con el objeto de estudio, en lo que respecta a este trabajo, el objeto de estudio se refiere al Mapa Híbrido y a sus interpretaciones teóricas. En la investigación cualitativa, la "naturaleza del caso puede ser muy heterogénea (sujeto, grupo, institución, programa, etc.) y en parte condiciona el nivel descriptivo (tipo crónica, listado de rasgos, evaluación, intentos de contrastación, etc.)" (Anguera, 1986, p. 38), en este sentido, nos enfocamos únicamente en datos documentales referentes a su interpretación teórica desde el EOS y desde adaptaciones de éste al contexto de la física y la química escolar.

En relación con el uso del Mapa Híbrido para analizar la resolución de problemas en el contexto matemático, a partir de Moreno (2017) y Moreno, Angulo y Reducindo (2018) se revisaron algunos elementos teóricos del EOS (práctica, objetos matemáticos, procesos y perspectivas de los objetos y la función semiótica) y la interpretación del Mapa Híbrido desde dichos constructos. Respecto a la interpretación del Mapa Híbrido desde la adaptación del EOS a la física escolar, se analizó la tipología de objetos físicos, objetos físico-matemáticos, las prácticas y procesos implicados en la resolución de problemas físicos (Moreno, Reducindo *et al.*, 2018; Moreno, Font y Angulo, 2018; Moreno, Zúñiga y Tovar, 2018; Moreno *et al.*, 2019; Moreno *et al.*, 2021). De igual manera, respecto a la interpretación del Mapa Híbrido desde la adaptación del EOS a la química escolar se analizó la tipología de objetos químicos, los objetos químico-matemáticos, las prácticas y procesos que participan en la resolución de problemas químicos (Moreno y Hernández, 2020).

4. El Enfoque Ontosemiótico y su adaptación a la física y la química escolar

El EOS (Godino *et al.*, 2007, p. 129) señala que en la resolución de un problema se "realiza un sistema de prácticas donde participa un conjunto de objetos matemáticos primarios: lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos. El constructo de objeto matemático del EOS se apoya en la noción de objeto del Interaccionismo Simbólico (Blumer, 1969), entendido a todo aquello que puede ser indicado o señalado", y en la noción de función de signo de Hjelmslev que se refiere a relación entre elementos lingüísticos. Partiendo de la idea de que en la matemática escolar no sólo se hace referencia a objetos lingüísticos, sino que también se señala a otros objetos matemáticos, el EOS desarrolló el constructo objeto matemático primario al extender la función de signo (nombrándola función semiótica) al establecer la relación entre los objetos lingüísticos y los objetos matemáticos (conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos).

El EOS señala también que en la resolución de un problema matemático se llevan a cabo procesos cognitivos, los cuales actúan sobre los objetos matemáticos llevándolos de una faceta a otra; por ejemplo, los procesos de idealización y materialización relacionan las facetas ostensivo/no-ostensivo, los procesos de personalización e institucionalización conectan las facetas cognitivo/epistémico, los procesos de generalización y particularización tienen que ver con los procesos de extensivo/intensivo, entre otros pares de procesos y facetas. En el EOS, la noción de función semiótica relaciona cualquier par de objetos matemáticos en el que uno de ellos toma el rol de significante y el otro objeto de significado.

Por otra parte, de acuerdo con la literatura revisada, en la adaptación del EOS a la física y a la química escolar retoma las nociones de objeto del Interaccionismo Simbólico y de Función de Signo de Hjelmslev. Para realizar la adaptación se considera primeramente un pluralismo ontológico; es decir, ningún cuerpo de conocimiento escolar es reductible a otro; por ejemplo, la física escolar no es una aplicación de la matemática escolar, ni la química es reductible a la física.

En la adaptación del EOS al contexto, ya sea de la física o de la química escolar, se identifica una tipología de objetos específicos del contexto, objetos físicos u objetos químicos. Los objetos, con ontología de tipo material, son idealizados por el sujeto que resuelve el problema. Algunos de estos objetos pueden ser matematizados; es decir, pueden relacionarse o vincularse con los objetos matemáticos mediante funciones semióticas, dando lugar a los objetos físico-matemáticos o químico-matemáticos. En la resolución del problema físico o químico, el sujeto lleva a cabo algunos procesos indicados por el EOS, llevando a los objetos de una faceta a otra. Cabe señalar que en la literatura revisada también se consideran otros procesos tales como el de comprensión lectora y visualización.

En las siguientes secciones se describen los resultados y la discusión acerca de las aplicaciones del Mapa Híbrido al contexto de la matemática, la física y la química escolar.

5. Interpretación del Mapa Híbrido en la matemática escolar

En esta aplicación se interpreta al Mapa Híbrido desde el EOS, como ejemplo, considérese la resolución del problema 7 que presentan Llopis *et al.* (2010): "Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?", ver el Apéndice 1a. Para realizar el análisis de la resolución del problema es necesario elaborar el Mapa Híbrido a partir de la producción del sujeto que resuelve el problema, ver la Figura 5b del Apéndice 1.

El Mapa Híbrido presenta de manera esquemática, en el plano, todos los objetos matemáticos y no matemáticos que se encuentran en la producción. Por ejemplo, en la primera parte de la resolución del problema (ver recuadro segmentado en el Apéndice 1) se señalan los argumentos **Imaginamos** un **triángulo rectángulo**, de modo que su **base b** es la **sombra** del **árbol**, Su **altura** a es la **altura** del **árbol** y Su **hipotenusa h** es la **distancia** desde el **árbol** al **extremo** de la sombra, en los cuales es posible advertir conceptos matemáticos y no matemáticos (palabras en negrita) conectados mediante palabras o frases de enlace. Así mismo, el lenguaje es lo que puede observar cualquier persona en la producción y que es llevada íntegramente al Mapa Híbrido; por ejemplo, la resolución del problema se apoya en la representación pictórica del árbol y la sombra que éste proyecta, a partir de la cual se construye un triángulo rectángulo. El proceso descrito en las líneas anteriores, para pasar de la producción al Mapa Híbrido, se realiza de igual modo para el resto de la producción. De esta manera, también es posible observar el empleo de propiedades tales como el teorema de Pitágoras y propiedades de exponentes.

El Mapa Híbrido correspondiente a la producción de Llopis *et al*. (2010) se presenta en la Figura 2. El mapa se ha numerado a propósito de su lectura. Mediante P se presenta el problema, I y II se refieren a las prácticas y la numeración del 1 al 32 indica los conceptos empleados. Desde la perspectiva del EOS, el Mapa Híbrido permite advertir que la resolución implica la realización de dos prácticas, indicadas por I y II en la Figura 2. En la primera práctica se lleva a cabo la lectura e interpretación del problema y mediante la segunda se realiza el cálculo de la altura del árbol.

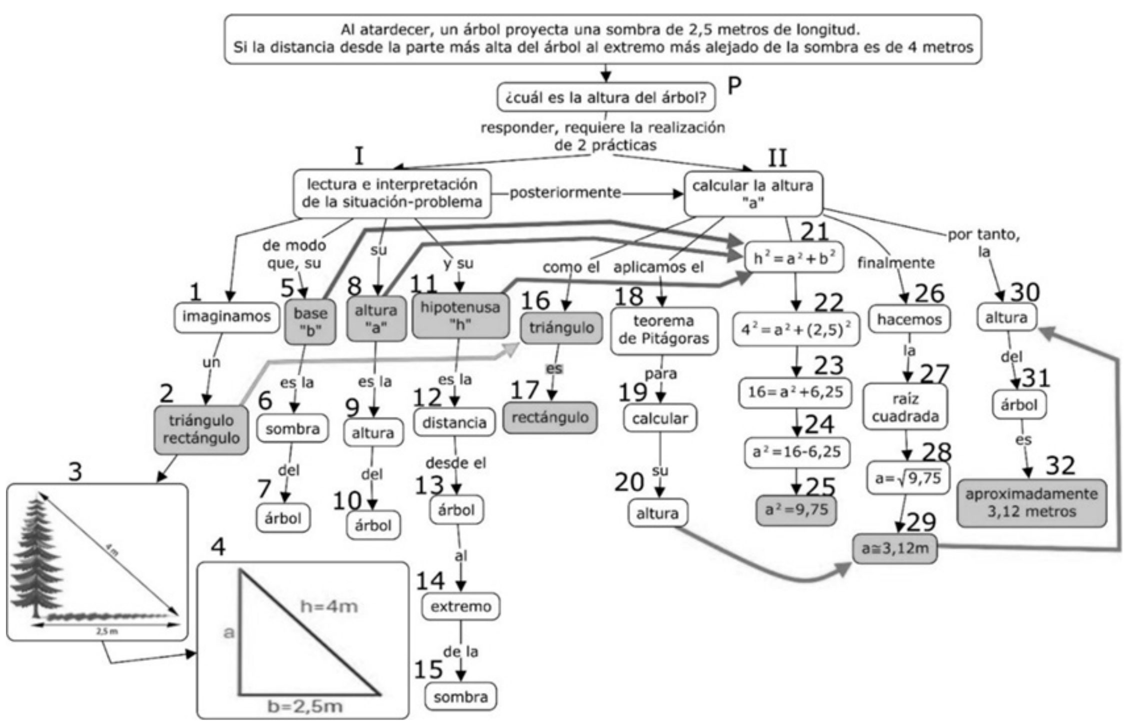


Figura 2. Mapa Híbrido que presenta la resolución del problema de calcular la altura del árbol. Elaboración propia mediante CmapTools.

La primera práctica es el resultado del proceso de lectura del texto que describe el problema. A partir del texto se lleva a cabo un proceso de idealización y visualización que se ve reflejado mediante la ruta de lectura I-1-2-3, los cuales permiten materializar el triángulo rectángulo 4. El objeto 4 muestra la interacción entre el conocimiento nuevo que aporta el texto que describe el problema y el conocimiento previo del sujeto que resolvió el problema, de esta manera fue posible relacionar la base del triángulo con la longitud de la sombra, ruta 5-6-7, el símbolo "a" con la altura del árbol, 8-9-10, y el símbolo "h" con la distancia entre la punta del árbol y la punta de la sombra, 11-12-13-15-15.

La práctica II, se apoya en la práctica I, y considera la propiedad del teorema de Pitágoras, ruta 18-19-20, asociada al concepto de triángulo rectángulo, 16-17. El uso de esa propiedad conduce a la realización de un proceso de algoritmización mediante la ruta 21-22-23-24-25. Es importante destacar que la realización exitosa de dicho procedimiento hace uso de otra propiedad, la propiedad de los exponentes expresada en la ruta 26-27-28-29. Finalmente, se establece la tesis 30-31-32 que permite resolver el problema.

Es importante destacar que el Mapa Híbrido permite advertir conexiones entre los objetos; por ejemplo, el proceso de particularización permite conectar los conceptos base, altura e hipotenusa con la propiedad del teorema de Pitágoras, rutas 5-21, 8-21 y 11-21 respectivamente. De igual manera, se observa la conexión 29-30, entre el objeto que emerge de la algoritmización, 29, y el argumento 30-31-32.

6. El Mapa Híbrido en el contexto de la física escolar

En el contexto de la física escolar se identifica un conjunto de objetos físicos, algunos de los cuales pueden relacionarse con los objetos matemáticos. En Moreno *et al*. (2021) se presenta el análisis gráfico de la resolución de un problema de cinemática por parte de una docente y dos de sus estudiantes. Se trata del siguiente problema de movimiento parabólico:

> Se lanza una pelota desde la ventana del piso más alto de un edificio. Se da a la pelota una velocidad inicial de 8.00 m/s a un ángulo de 20.0º sobre la horizontal. La pelota golpea el suelo 3.00 s después. Determine (a) ¿A qué distancia horizontal, a partir de la base del edificio, la pelota golpea el suelo?, y (b) Encuentre la altura desde la cual se lanzó la pelota (Moreno *et al*., 2021, p. 162).

En esta investigación se solicitó a los sujetos investigados resolver el problema explicando al mismo tiempo en voz alta sus argumentos, ideas, concepciones y pasos empleados en la resolución. Dicha producción fue grabada en audio y escritura para su posterior transcripción, con la finalidad de construir el Mapa Híbrido correspondiente. En la figura 3 se presenta únicamente el Mapa Híbrido correspondiente a la producción de la docente, mapa epistémico. Las etiquetas del Mapa Híbrido de la figura 3 son del tipo (8; 01:22) donde el primer número indica el número de objeto en alguna de las prácticas y el segundo indica el tiempo en minutos y segundos en que el sujeto que resuelve el problema se apoya en dicho objeto.

En el análisis del Mapa Híbrido, mediante la adaptación del EOS a la física escolar, se encontró que la docente realizó un sistema de tres prácticas, la práctica A de interpretación del problema Sp, la práctica B para calcular la distancia horizontal y la práctica C para determinar la altura de lanzamiento, Figura 3. De acuerdo con el mapa, la docente considera tanto objetos físicos no matematizables, tales como B2-B3-B4-B5-B6 y C1-C2, como objetos físico-matemáticos A1, A3, A7, B8, C17, entre otros.

Moreno *et al*. (2021) señalan que la docente experta realiza un conjunto de procesos cognitivos en cada una de las prácticas: comprensión, visualización, idealización, particularización, argumentación, significación y materialización. Se trata de procesos necesarios para la construcción de conocimiento físico. Mediante el proceso de idealización y comprensión lectora, la docente relaciona la información que describe el texto del problema con su conocimiento previo, de este modo establece relaciones de significación entre los datos que aporta el problema y los símbolos que usualmente emplea para denotar dichas magnitudes físicas, los cuales materializa mediante 2, 4 y 8 de la práctica A.

En la práctica B, nuevamente el proceso de comprensión lectora le permite a la docente argumentar 1-2-3-4-5-6, así como también particularizar y significar la expresión de la componente horizontal del desplazamiento, objeto 7, considerando los datos de la práctica A, y así poder materializar un proceso de algoritmización para llegar a la solución de inciso (a) en 14. La docente realiza el mismo conjunto de procesos en la práctica C; es decir, la comprensión lectora le permite idealizar y argumentar 1-2-3-... -7, posteriormente significar y particularizar 22 para posteriormente materializar la algoritmización 23-24-25 que le conduce al resultado del inciso (b) en 30. Otros argumentos en los que se apoya la práctica aparecen en 18-19-20-21 y 11-12-13-... -17.

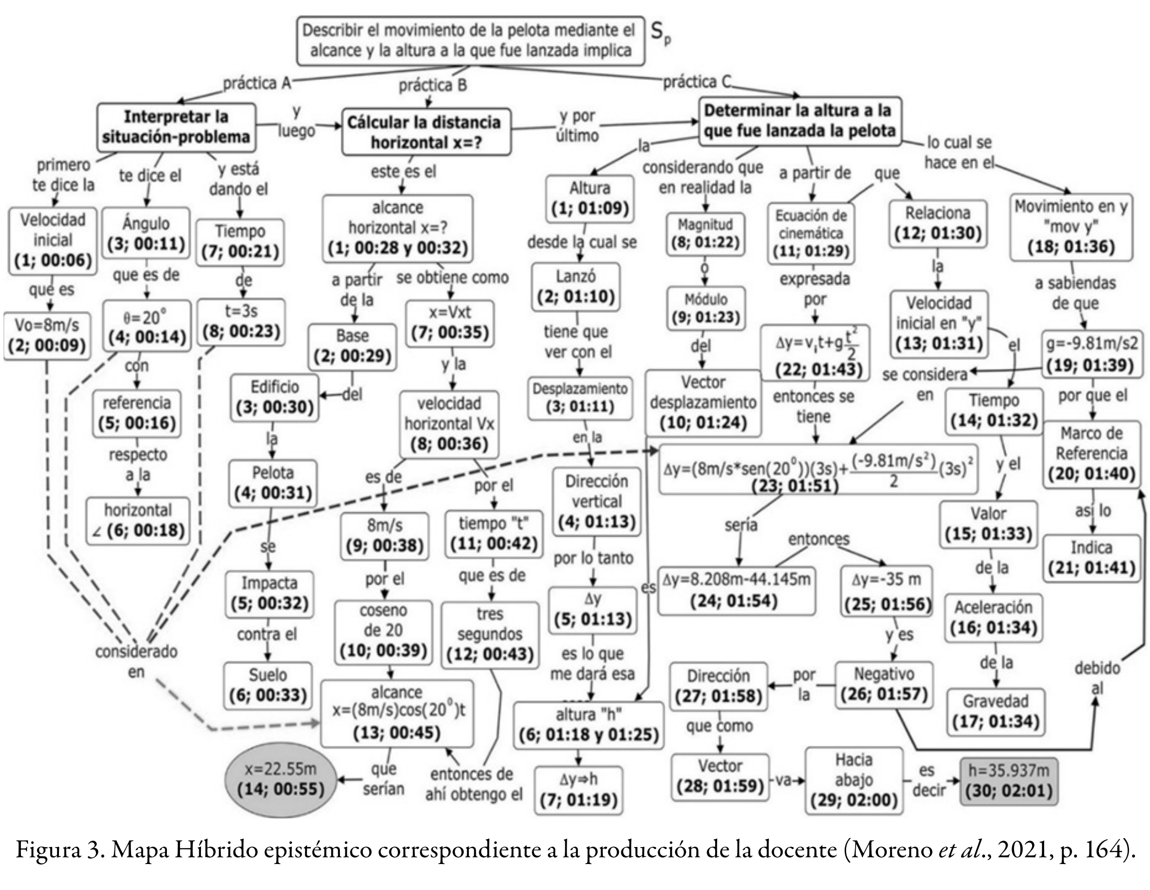


Figura 3. Mapa Híbrido epistémico correspondiente a la producción de la docente (Moreno *et al*., 2021, p. 164).

Es importante también destacar las conexiones entre los objetos de las prácticas; por ejemplo, las conexiones de A2, A4 y A8 con C23, lo cual hace posible la particularización y la significación de B13 y C22. La comparación del Mapa Híbrido epistémico con los Mapas Híbridos cognitivos de los estudiantes, permiten dar una idea de las dificultades, significados y las concepciones erróneas que presentan los alumnos. Así se tiene que uno de los alumnos indagados no procede del mismo modo que la docente, ya que, en lugar de realizar el proceso de comprensión lectora y significación de manera adecuada, consideró más relevante usar las distintas ecuaciones de cinemática, buscando cuál de ellas podía resolver de una manera más fácil a partir de los datos proporcionados en el problema.

Este alumno resolvió correctamente ambos incisos; sin embargo, mostró una escasa o nula significación física tal y como lo han reportado (Kempa, 1986 y Gil *et al*., 1999). La segunda estudiante en cambio resolvió correctamente sólo uno de los incisos, llevó a cabo el mismo conjunto de procesos cognitivos que ejecutó la docente, sin embargo, el desconocimiento de una propiedad física le llevó a un mal resultado.

7. El Mapa Híbrido en el contexto de la química escolar

En la resolución de un problema de química escolar participan objetos químicos, algunos de los cuales se relacionan con objetos matemáticos. En Moreno y Hernández (2020) se presenta el análisis gráfico de la resolución de un problema de química por parte de un docente y uno de sus estudiantes. Se trata del problema de reactivo limitante: "El óxido nítrico (NO) reacciona inmediatamente con el oxígeno gaseoso para formar dióxido de nitrógeno (NO2), un gas café oscuro: 2NO(g)+O2(g)→2NO2(g). En un experimento se mezclaron 0.886 moles de NO con 0.503 moles de O2. Calcule cuál de los dos reactivos es el limitante. Calcule también el número de moles de NO2 producido" (Chang, 2010, p. 114).

Al igual que en la investigación descrita en la sección previa, en el trabajo de Moreno y Hernández (2020), el docente indagado resolvió el problema de reactivo limitante al mismo tiempo que explicaba en voz alta los pasos, sus argumentos y sus concepciones. La producción del docente fue grabada en audio y escritura y posteriormente transcrita con la finalidad de construir el Mapa Híbrido. El Mapa Híbrido epistémico correspondiente a la producción del docente se muestra en la figura 4 y fue analizado con base en la adaptación del EOS al contexto de la química escolar presentada por Moreno y Hernández (2020).

Según el análisis, el docente resolvió el problema mediante un sistema de tres prácticas. En la primera, práctica A, el docente interpretó el problema, en la práctica B determinó el reactivo limitante y en la práctica C determinó el número de moles de NO2 producido, así mismo, en las prácticas empleó tanto objetos químicos tales como A1, A2, B5, entre otros, así como también objetos químico-matemáticos como A3, A7 o B1-B2, B27, entre otros, los cuales están relacionados con objetos matemáticos.

Mediante la primera práctica, el docente llevó a cabo el proceso de comprensión lectora, el cual le permitió identificar las sustancias reaccionantes y el producto, ruta A1-A2-... -A7, así como también acceder a su memoria para materializar, por un lado, el argumento (A8-A9-... -A14) de que la ecuación de la reacción tiene que estar balanceada y, por otro lado, la propiedad (A17-A18-A19-A20) asociada al concepto de reactivo limitante, A19. Posteriormente, en la segunda práctica se balancea la ecuación, B1-B2, y permite al docente argumentar B3-B4-B5-B6. El balanceo de la ecuación es de gran importancia para el docente, pues le permite particularizar la propiedad asociada al concepto de reactivo limitante a través de los procesos de algoritmización B7-B8-... -B12 para el NO y B16-B17-... -B22 para el O2. Los resultados de ambos procesos de algoritmización B10 y B21 le permiten identificar que el NO es el reactivo limitante, pues es la sustancia que le permite obtener menor cantidad de producto, de esta manera, el docente materializa el argumento B23-B24-... -B33. Por último, realiza un proceso metacognitivo y materializa el argumento B34-B35-... -B40, lo que permite advertir una reflexión por parte del docente sobre lo que ha obtenido hasta ese momento del proceso de resolución del problema.

Finalmente, en la tercera práctica se determina el número de moles de NO2 producido, para esto, se apoya en las prácticas anteriores. De la práctica A recupera la propiedad general del reactivo limitante A15-A16-... -A20 y de la segunda práctica los resultados de los dos procesos de algoritmización, lo cual le lleva a materializar el argumento C1-C2-... -C7.

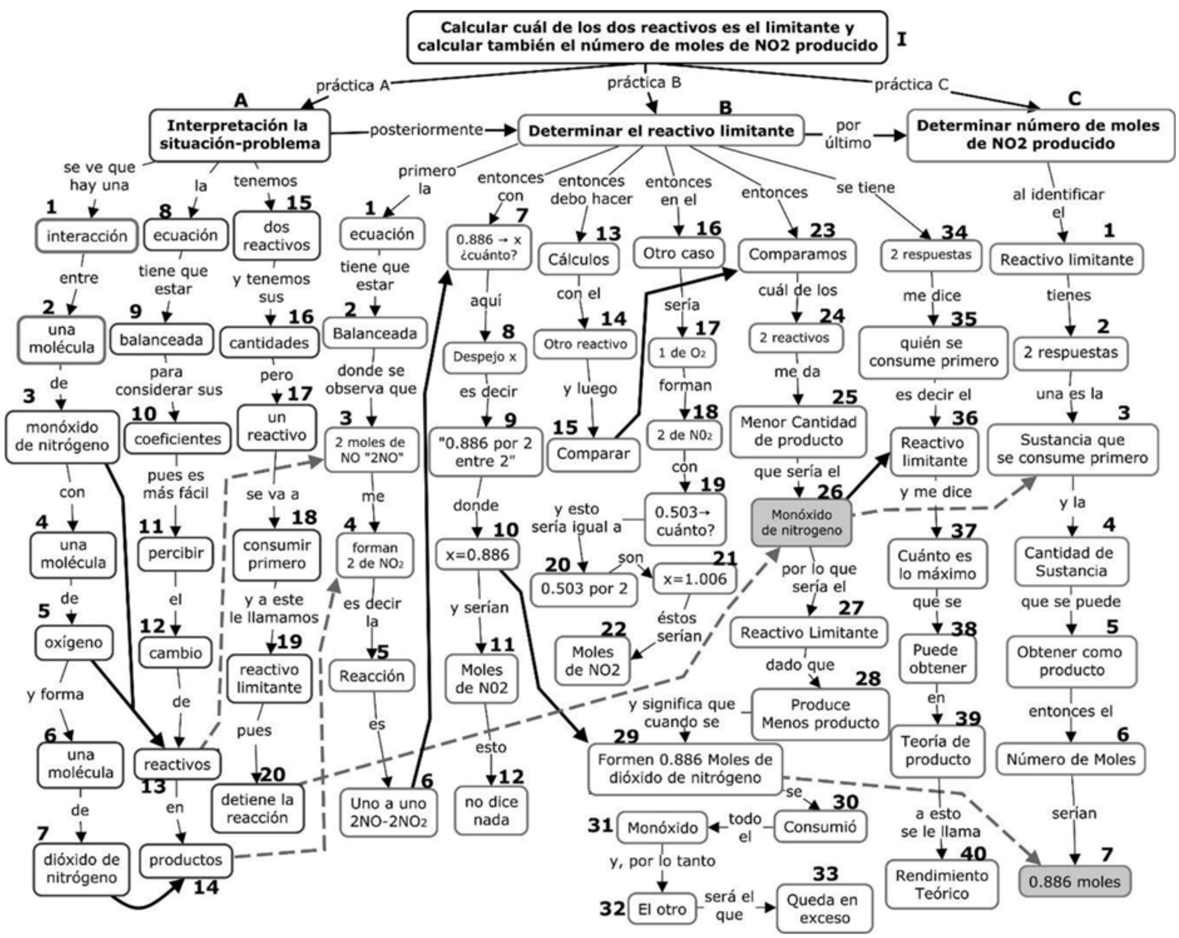


Figura 4. Mapa Híbrido epistémico correspondiente a la producción del docente (Moreno y Hernández, 2020, p. 127).

Al igual que en los Mapas Híbridos epistémicos en el contexto matemático y físico, las conexiones entre las prácticas ilustradas en el Mapa Híbrido químico también son muy relevantes, pues dan cuenta del significado que atribuye el sujeto, el docente experto, al concepto de reactivo limitante. En otras palabras, se trata del significado del concepto de reactivo limitante en términos del sistema de prácticas o de las acciones que realiza el sujeto para resolver el problema.

En las aplicaciones descritas anteriormente se mostraron Mapas Híbridos de tipo epistémico, y una característica común que se puede observar es la importancia del proceso de comprensión lectora e idealización en la primera práctica, este proceso lleva a la significación de los objetos (matemáticos, físicos, químicos) que presenta el problema planteado en términos del conocimiento previo del sujeto y a planificar las siguientes acciones. Las prácticas que le siguen al primer ejercicio son en mayor medida de tipo operativas; es decir, presentan la particularización de alguna propiedad la cual, mediante los procesos de significación, algoritmización y argumentación, conducen a la materialización de la solución buscada. Otro aspecto que se puede observar de las aplicaciones anteriores son las conexiones que se establecen entre las prácticas, las cuales permiten la significación del objeto matemático que es relevante para la resolución del problema, en las aplicaciones revisadas, la propiedad del teorema de Pitágoras, el concepto de movimiento parabólico y el de reactivo limitante.

8. Conclusiones

En las secciones anteriores se presentó la revisión de tres aplicaciones del Mapa Híbrido, la primera, interpretada desde el EOS y, las dos últimas, desde adaptaciones de este enfoque al contexto de la física y la química escolar. Se trata de los avances de una línea de investigación que muestran que sí es posible describir de manera gráfica la resolución de problemas en ciencias mediante el Mapa Híbrido. El Mapa Híbrido describe la resolución de problemas como un sistema de prácticas donde intervienen, según el contexto, objetos que se organizan y se conectan en el sistema de prácticas y que permiten conocer el significado del concepto que es crucial o relevante para la resolución del problema. Se trata pues de la expresión del significado del concepto relevante en términos de su uso en el sistema de prácticas y no en términos de su definición.

En la resolución del problema, también se llevan a cabo ciertos procesos cognitivos, los cuales actúan sobre los objetos llevándolos de una faceta a otra. La revisión permitió advertir también que los procesos cognitivos señalados por Moreno *et al*. (2021) no sólo toman lugar en el contexto de la resolución de un problema de física escolar, sino que también ocurren en la resolución de problemas matemáticos y químicos. Se trata entonces de procesos cognitivos necesarios para la producción de conocimiento, los cuales toman lugar independientemente de la ontología y epistemología de los objetos involucrados en el proceso de resolución.

Para construir un Mapa Híbrido se requiere contar con toda la producción (oral y escrita) del sujeto (experto o novato) que resuelve el problema; por ejemplo, en las revisiones, se encontró que el mapa se elaboró a partir de la producción que se presenta en una página de internet, como el caso del problema del teorema de Pitágoras, o bien a partir de una entrevista, como el caso de los problemas de movimiento parabólico y de reactivo limitante. Así mismo, la comparación entre el Mapa Híbrido epistémico, correspondiente al docente y el mapa cognitivo, correspondiente al estudiante, permite lograr un acercamiento al conocimiento que ha construido el sujeto inexperto.

Se ha presentado el Mapa Híbrido como objeto de estudio, interpretable desde cualquier teoría, en nuestro caso, desde el Enfoque Ontosemiótico de la Matemática Educativa; sin embargo, queda abierta la investigación de cómo esta técnica podría ser interpretada desde otras teorías de matemática educativa como la Socioepistemología, la Teoría Antropológica, por mencionar algunas. De hecho, actualmente, en la línea de investigación se está desarrollando una adaptación del EOS a la biología escolar. Se trata pues de describir la resolución de problemas que implican el uso de objetos biológicos y biológico-matemáticos, por ejemplo, problemas de crecimiento poblacional, crecimiento bacteriano, transmisión de la propagación de un vector infeccioso, por mencionar algunos.

9. Referencias

Aguilar, T.M.F. (2004). El Mapa Conceptual: Un texto a interpretar. En A. J. Cañas, J.D. Novak y F.M. Gonzáles (Eds.). *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology* (pp. 31-38). Dirección de Publicaciones de la Universidad Pública de Navarra.

Anguera, A.M.T. (1986). La investigación cualitativa. *Revista Educar, 10*, 23-50. https://ddd.uab.cat/record/35740

Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa*. Editorial Trillas.

Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism, perspective and method*. Prentice Hall, Inc.

Chang, R. (2010). *Química*. McGraw-Hill/Interamericana Editores.

Del Valle, C.M. y Curotto, M.M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 7*(2), 463-479.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Escudero, C. (1995). Resolución de problemas en física: herramienta para reorganizar significados. *Caderno Catarinense de Ensino de Física, 12*(2), 95-106.

Escudero, C. y Moreira, M.A. (1999). La v epistemológica aplicada a algunos enfoques en resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(1), 61-68.

Font, M.V., Godino, D.J. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of mathematics, 27*(2), 2-7.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación matemática, 6*(3), 37-51.

Gil, P.D., Furió, M.C., Valdés, P., Salinas, J., Martínez-Torregrosa, J., Guisasola, J., González, E., Dumas-Carré, A., Goffard, M. y Pessoa, D.C.A.M. (1999). ¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio? *Enseñanza de las Ciencias, 17*(2), 311-320.

Gil, J., Solano, F., Tobaja, L.M. y Monfort, P. (2013). Propuesta de una herramienta didáctica basada en la V de Gowin para la resolución de problemas de física. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 35*(2), 1-12.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V.M. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. http://dx.doi.org/ 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J.D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Guzmán, R.I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 5-21.

Kempa, R.F. (1986). Resolución de problemas de química y estructura cognoscitiva. *Enseñanza de las ciencias, 4*(2), 99-110.

Llopis, F.J.L., Costa, V., Gómez, P. y Calvo, P. (2010). *Teorema de Pitagoras*. Matesfacil, ejercicios resueltos de matemáticas. https://www.matesfacil.com/pitagoras/problemas-resueltos-pitagoras.html

Moreno, M.N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en Cálculo Diferencial. Investigación en la Escuela. *Revista Internacional de investigación e innovación escolar, 92*, 60-75.

Moreno, M.N., Aguilar, T.M.F., Angulo, V.R.G. y Ramírez, M.J.C. (2019). Análisis de la resolución de problemas de hidrostática en el bachillerato. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 18(*1), 274-223.

Moreno, M.N., Angulo, V.R.G y Reducindo, R.I. (2018). Mapas Conceptuales Híbridos para la enseñanza de la física y la matemática en el aula. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 3*(1), 113-130. https://goo.gl/27TSmk

Moreno, M.N., Font, M.V. y Angulo, V.R.G. (2018). Un estudio sobre la comprensión de las nociones físicas de la mecánica newtoniana: el caso del centro de masa. *Revista de Enseñanza de la Física, 30*(2), 7-22.

Moreno, M.N. y Hernández, Z.L.E. (2020). Análisis gráfico de la resolución de un problema de reactivo limitante. *Revista Paradigma, 49*(2), 112-138.

Moreno, M.N., Hernández, Z.L.E. y Briceño, S. E. C. (2021). Análisis de la resolución de un problema de cinemática mediante el Mapa Conceptual Híbrido. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(3), 157-176. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3106.

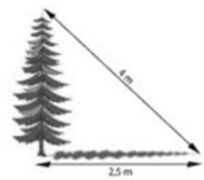
Moreno, M.N., Reducindo, R.I., Angulo, V.R.G. y Aguilar, P.R. (2018). Enseñanza de la física mediante fislets que incorporan Mapas Conceptuales Híbridos. *Apertura: Revista de Innovación Educativa, 10*(2), 20-35. http://dx.doi.org/10.18381/Ap.v10n2.1335

Moreno, M.N., Zúñiga, M.S.C. y Tovar, R. D. A. (2018). Una herramienta gráfica para la resolución de problemas de cinemática. *Latin American Journal of Physics Education, 12*(4), 4307(1-12).

Apéndice 1

El problema de la sombra de un árbol que involucra el Teorema de Pitágoras.

Problema 7



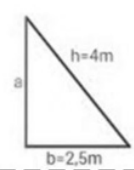
(a)

Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

Ver solución

Imaginamos un triángulo rectángulo de modo que

- su base, b, es la sombra del árbol,
- su altura, a, es la altura del árbol y
- su hipotenusa, h, es la distancia desde el árbol al extremo de la sombra.



(b)

Como el triángulo es rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular su altura, a:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h^2} &= \boldsymbol{a^2 + b^2} \rightarrow \\ \boldsymbol{4^2} &= \boldsymbol{a^2 + (2,5)^2} \rightarrow \\ \boldsymbol{16} &= \boldsymbol{a^2 + 6,25} \rightarrow \\ \boldsymbol{a^2} &= \boldsymbol{16 - 6,25} = \\ &= \boldsymbol{9,75} \end{aligned}$$

Finalmente, hacemos la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \sqrt{\boldsymbol{9,75}} \cong \\ &\cong \boldsymbol{3,12\ m} \end{aligned}$$

Por tanto, la altura del árbol es, aproximadamente, 3,12 metros.

Figura 5. Resolución del problema de la sombra de un árbol (Llopis *et al*., 2010).

CAPÍTULO 22. FRANÇOIS PLUVINAGE Y EL INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. MEMORIAS DE UNA ESTUDIANTE DE DOCTORADO DE LOS AÑOS OCHENTA

Ana Lobo de Mesquita, lobomesquita2021@gmail.com
IREM DE PARIS, FRANCIA
Camille Noûs, camille.nous@cogitamus.fr
LABORATOIRE COGITAMUS

RESUMEN

Este capítulo es un homenaje a François Pluvinage a nombre de uno de sus primeros estudiantes de doctorado, en el IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques / Instituto de Investigación en Educación Matemática) de Estrasburgo, y en el que se presentan algunas características de su perfil, además de rasgos de su personalidad como investigador. Se muestran dos ejemplos de la primera tesis que él dirigió. El primero corresponde a una tarea algorítmica, y el segundo a un ejercicio de comparación de áreas inspirado en el Primer Libro de Euclides —una simplificación de la Proposición 43. Finalmente, se presenta la continuación del camino de investigación iniciado con la tesis desarrollada.

1. INTRODUCCIÓN

En primer lugar, hay que dar cuenta de la personalidad de François, como persona, investigador experimentado, visionario y director de investigación, en el marco del IREM, el cual tuvo un gran desarrollo bajo su dirección.

Posteriormente, este capítulo se enfocará en el desarrollo de mi proyecto de tesis, bajo la supervisión del Doctor François. Tomando dos ejemplos: el de una tarea algorítmica, así como un ejercicio de comparación de áreas inspirado del “Primer Libro de Euclides” —una simplificación de la Proposición 43.

A continuación, informaré sobre la continuación de mi trabajo de investigación. Me centraré sucesivamente en la importancia de dar prioridad al espacio tridimensional, el aprendizaje de la geometría en la escuela primaria, y también en la formación de los maestros: en el papel de la manipulación, la construcción tridimensional, la transición del espacio tridimensional al espacio bidimensional (3D a 2D), cambios en los puntos de vista. Tanto para los niños como para los maestros, la manipulación de herramientas tecnológicas aparece como un paso fundamental en la conceptualización.

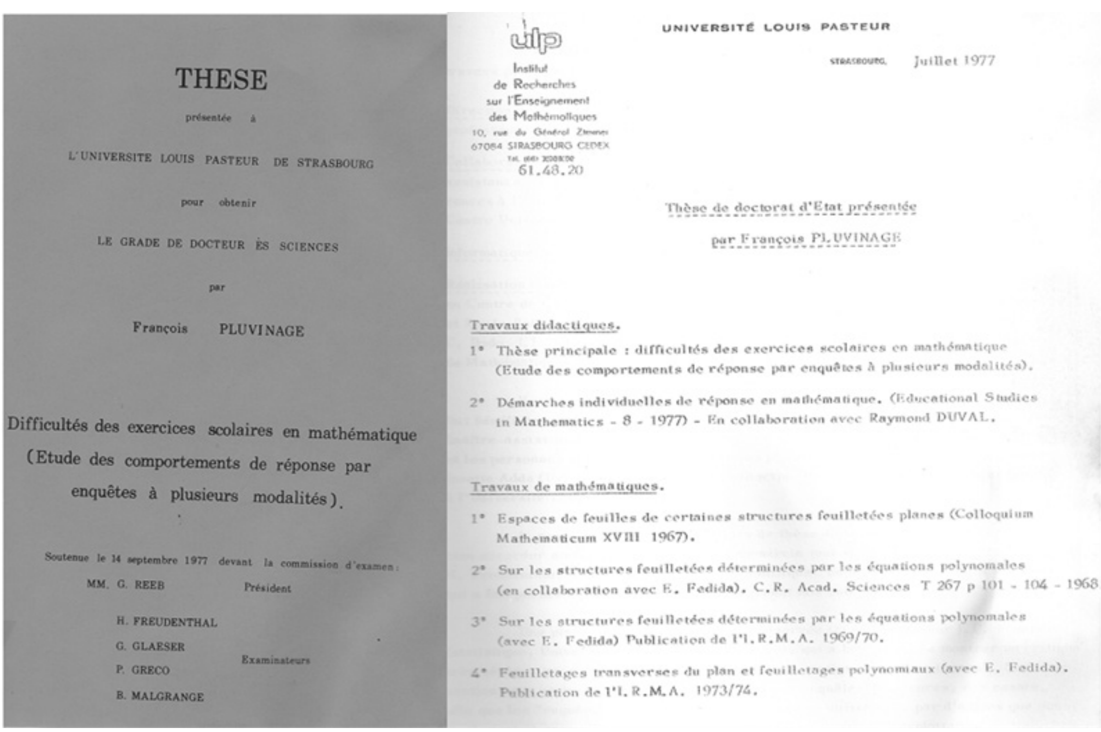
Finalmente, me enfocaré en cuestiones del lenguaje, su terminología y sus relaciones con la conceptualización.

1.1 François Pluvinage, director de Investigación, Director del irem de Estrasburgo

François Pluvinage: algunas fechas importantes

En 1962, François hizo su "Agrégation" –concurso importante y prestigioso que tiene como objetivo reclutar profesores para enseñar en la educación secundaria y universitaria: François era el "agrégé" más joven (tenía 22 años). En 1968 hizo su servicio militar en Bretaña, Francia.

Fue en 1977 que defendió su Tesis de Estado en la Universidad Louis Pasteur (ULP): *Dificultades de los ejercicios escolares en matemáticas. Estudio de los comportamientos de respuesta mediante encuestas multimodales* (tesis principal de la parte didáctica), y *Espacios de hojas de algunas estructuras de hojas planas y otros trabajos sobre estas estructuras* (trabajo de matemáticas). En la Figura 1, se muestra la portada y página de inicio de la tesis, Figura 1. Su tesis fue considerada de calidad "excepcional", según el informe de la defensa.



THESE

présentée à

L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR DE STRASBOURG

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

François PLUVINAGE

Difficultés des exercices scolaires en mathématique
(Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités).

Soutenue le 14 septembre 1977 devant la commission d'examen :

MM. G. REEB Président

H. FREUDENTHAL
G. GLAESER
P. GRECO
B. MALGRANGE
Examinateurs

ulp
Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
61.48.20

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR

STRASBOURG, Juillet 1977

Thèse de doctorat d'Etat présentée

par François PLUVINAGE

Travaux didactiques.

1° Thèse principale : difficultés des exercices scolaires en mathématique (Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités).

2° Démarches individuelles de réponse en mathématique. (Educational Studies in Mathematics - 8 - 1977) - En collaboration avec Raymond DUVAL.

Travaux de mathématiques.

1° Espaces de feuilles de certaines structures feuilletées planes (Colloquium Mathematicum XVIII 1967).

2° Sur les structures feuilletées déterminées par les équations polynomales (en collaboration avec E. Fedida). C.R. Acad. Sciences T 267 p 101 - 104 - 1968

3° Sur les structures feuilletées déterminées par les équations polynomales (avec E. Fedida) Publication de l'I.R.M.A. 1969/70.

4° Feuilletages transverses du plan et feuilletages polynomiaux (avec E. Fedida). Publication de l'I.R.M.A. 1973/74.

Figura 1. Tesis de François Pluvinage (1977): Portada y página de inicio, con lista de artículos presentados.

1.2 Algunos rasgos de personalidad del Doctor François

Su gran cultura matemática, su sentido del humor, su disponibilidad constante con los compañeros, profesores, facilitadores del IREM y estudiantes de doctorado (o *thésards*, en el idioma de los años ochenta y noventa, o estudiantes de doctorado, en el lenguaje actual...). También podemos notar su espíritu penetrante y su sensibilidad para destacar los temas del futuro didáctico, es decir, los aspectos en los que acabó centrándose la didáctica, a veces mucho más tarde.

Uno de sus temas "con futuro" fue la noción elemental de *algoritmo*, un tema muy trabajado en Estrasburgo, en las décadas de 1980 y 1990, desarrollado ya sea desde un punto de vista algebraico, o desde un punto de vista geométrico. En mi trabajo de tesis, me inspiré en este ejemplo, como se muestra a continuación:

> Un ejemplo simple: Hablamos de un algoritmo, por lo tanto es posible dar instrucciones precisas; por ejemplo, a través de una computadora, que puede realizar la tarea sin intervención externa.
>
> Un ejemplo clásico, dado por François en Estrasburgo: Queremos doblar una hoja en 4 partes o en 3 partes, usando gestos. ¿Tenemos algoritmos, en los dos casos?
>
> En el caso de un cuarto (plegar la hoja en 4 partes): "Doblar en dos, después de nuevo en dos". Es posible hacer este doblez a través de un algoritmo: basta superponer dos pares de vértices consecutivos y doblar la hoja manteniendo la superposición: acabamos de dividir la hoja inicial en dos partes; iniciar la operación para las medias hojas obtenidas: tenemos el cuarto –los cuatro cuartos– de la hoja.
>
> En el caso de doblar la hoja en 3 partes –un tercio de la hoja, la prueba y el error (o ajuste) puede ser esencial: este doblado no es algorítmico.
>
> Los ajustes pueden ser necesarios: estimamos un "candidato" en 1/3 de la longitud, duplicamos esa longitud y verificamos si ese candidato en 1/3 lo es, o si necesitamos hacer un ajuste, y comenzamos de nuevo.
>
> La intervención humana es necesaria, en el caso de la división en 3.
>
> Recuerdo que François dijo: "cualquier niño puede entender qué es un algoritmo".

1.3 François: director de investigación

A lo largo de su carrera, François dirigió numerosas tesis doctorales y DEA (Diplôme d'Études Approfondies), en el marco del extraordinario equipo del IREM en Estrasburgo (véase Glaeser, 1984). Ya sea en cosupervisión con Georges Glaeser —uno de los primeros pioneros de la didáctica en Estrasburgo, también director del IREM— o como director de investigación. Estos trabajos se realizaron en varias áreas: funciones, álgebra, geometría, operaciones, fracciones, evaluación, didáctica de la estadística (se han utilizado muchas veces métodos estadísticos innovadores). Además, tras su colaboración con Raymond Duval, la teoría de los registros semióticos (Duval, 1995) ha tenido un papel muy importante en los marcos teóricos utilizados en las tesis de Estrasburgo.

1.4 François y los IREM

Los IREM son estructuras regionales creadas a partir de 1968; la sede de Estrasburgo fue una de las primeras. Estas instituciones han tenido y siguen teniendo una importancia decisiva para la investigación en didáctica, la docencia y la formación continua. Dos razones estaban en la base de esta importancia: la diversidad de los animadores del IREM (profesores de todos los niveles de educación, investigadores o académicos, matemáticos o didácticos), por un lado, y la importancia que se da a los vínculos entre la docencia y la investigación, por otro lado.

Entre 1980 y 1984 formó parte del IREM de Estrasburgo y en 1991 se convirtió en su director. Bajo su liderazgo crearon numerosos grupos de trabajo (ver la siguiente imagen).

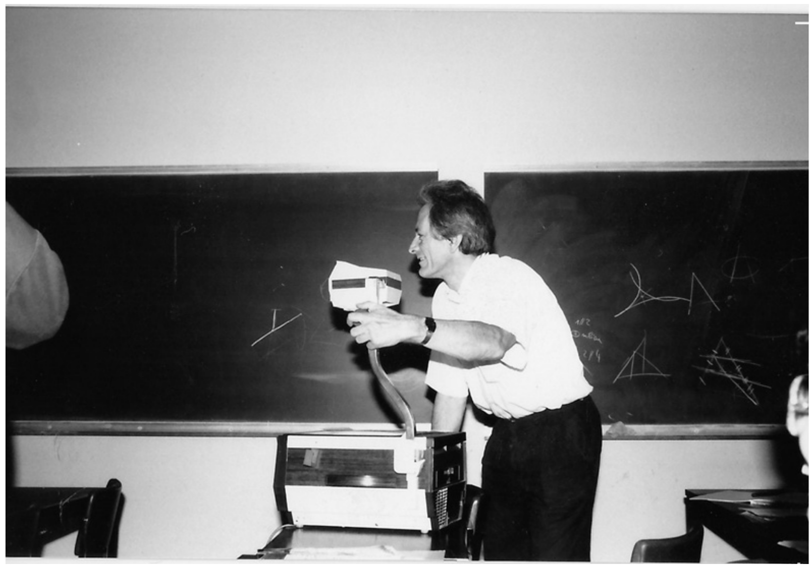


Figura 2. François Pluvinage durante un seminario en IREM de Estrasburgo, años ochenta.

Durante 32 años dirigió la revista que creó con Raymond Duval en Estrasburgo, en 1988, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*: ¡32 años de compromiso en esta importante área!

En dos ocasiones le fueron encomendadas misiones del Rectorado de Estrasburgo: la primera sobre evaluación de programas en los Juegos Olímpicos de Matemáticas, y la segunda, en 1991, en el Servicio Académico de Formación de Personal l. Más tarde, en 2002, dividió su tiempo entre México y Estrasburgo, a través de una serie de estancia en México y todavía formando parte de IREM.

1.5 Grupos de trabajo en IREM de Estrasburgo

A lo largo del tiempo, desde 1968 —fecha de su fundación— ha habido muchos grupos de trabajo en el IREM, desarrollados por facilitadores de educación secundaria o universitaria. Bajo el liderazgo de sus directores se han creado numerosos grupos de trabajo.

- Sobre el razonamiento (desde 1972).
- Papel del lenguaje en el aprendizaje de la geometría en 4º curso (1972).
- Rally Matemático de Alsacia (1973).
- Matemáticas y tecno (1974).
- Club de Matemáticas (1988), ahora llamado Círculo de Matemáticas (2010).
- Sobre el lenguaje (matemáticas, francés).

El artículo “Matemáticas y competencias lingüísticas” / “Mathématiques et maîtrise de la langue”, de François Pluvinage, 2000, informa sobre el trabajo de este grupo.

- Algorítmica (2009).
- Aprendizaje algebraico en el principio de la escuela secundaria (alumnos 11-15 años).

Este grupo se formó a raíz del trabajo que dio lugar a la publicación del artículo de Raymond Duval y François Pluvinage, en 2016, con el objetivo de crear actividades relacionadas con la temática del texto.

- Aprendizaje algebraico en la universidad (2016).

2. El desarrollo de mi proyecto de investigación bajo la supervisión del Doctor François

Empezaré con un ejercicio vinculado a la noción de algoritmo, tan cara a François, como se mencionó anteriormente. Este ejercicio se ha convertido en un clásico en el IREM de Estrasburgo; lo utilicé en mi tesis (Mesquita, 1989 b).

2.1. Un primer ejemplo: Tarea algorítmica en geometría

Cuadrado inscrito en un triángulo: En este ejercicio, se pidió a los estudiantes incluir un cuadrado en triángulos (propuestos a los estudiantes), para describir un procedimiento que debería poder usarse con cualquier triángulo —por lo tanto, un procedimiento algorítmico.
Construcción de un cuadrado inscrito en un triángulo: La película de construcción siguiente se entregó a 123 alumnos de 12 a 13 años.

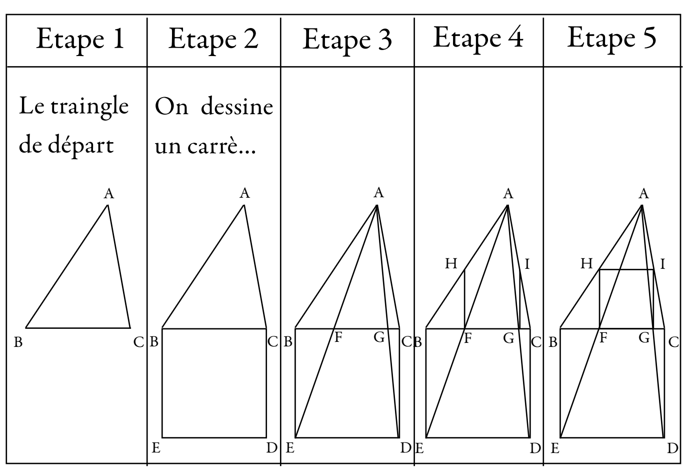


Figura 3. La película de construcción de la tarea algorítmica. Elaboración propia.

2.1.1 Las tareas

En este ejercicio se pidió a los estudiantes inscribir un cuadrado en un triángulo dado, usando este procedimiento y describirlo. Por supuesto, se vuelve más complicado si el triángulo en cuestión tiene un ángulo obtuso o recto.

También preguntamos si este procedimiento se puede utilizar con cualquier triángulo, dicho de otro modo, queríamos saber si el estudiante trataba la película dada como un procedimiento algorítmico.

2.1.2 Análisis de la tarea

Matemáticamente, ésta es una aplicación del concepto de homotecia. Buscamos un cuadrado homotético a un cuadrado dado, que tenga sus cuatro vértices en el triángulo. Al menos dos procedimientos de construcción pueden inspirarse en la homotecia:

- 1er caso: de un lado común al triángulo y a un cuadrado auxiliar.
- 2do caso: de un cuadrado que tiene 3 de sus vértices en el cuadrado.

Notemos que, en nuestro trabajo de tesis, retenemos el primer caso.

2.1.3 Algunos resultados

Analizando las respuestas de los estudiantes hemos identificado diferentes tipos de descripciones, asociadas con diversos tipos de aprehensión del algoritmo.

Hemos identificado en este estudio, para el cual también utilizamos un análisis factorial de correspondencias múltiples, tres grupos de estudiantes bien definidos, según su forma de comprensión del algoritmo.

Un primer grupo, con el 32% de los estudiantes, tiene una aprehensión que hemos llamado *figurativa* de la construcción propuesta, que puede reproducir la construcción sólo a partir de una configuración perceptiva.

TABLEAU SYNOPTIQUE DES TYPES D'APPREHENSION

Appréhension	Caractéristiques	Performances	Désignation Emplacement
figurale (agrégat 1) dessin	◊ contraintes figurales perçues ◊ espace physique (matériel, fixe)	◊ reproduction (même configuration perceptive)	◊ géographique ◊ absolu
fonctionnelle (agrégat 3) schéma	◊ contraintes figurales et algorithmiques perçues, confusions possibles ◊ espace (feuille de dessin) (matériel, mobile)	◊ certaines adaptations (configurations perceptives semblables) ◊ invariance par rapport à la rotation	◊ fonctionnelle ◊ relatif
structurale (agrégat 2) algorithme	◊ contraintes figurales et algorithmiques bien demarquées ◊ espace mathématique (immatériel, mobile)	◊ adaptation (toutes configurations)	◊ relationnelle ◊ relatif

Figura 4. Cuadro sinóptico de tipos de aprehensión. Elaboración propia.

Un segundo grupo, con el 45% de los estudiantes, tuvo una llamada *aprehensión estructural*, percibiendo el carácter algorítmico del procedimiento de construcción; la distinción entre restricciones ligadas a la figura o al procedimiento de construcción general es bien percibida por este grupo, que logró las tareas de adaptación a diferentes configuraciones perceptivas.

Un tercer grupo (23% de los estudiantes) utilizó diferentes procedimientos, que no llevaron a la meta deseada. Se han observado confusiones entre las restricciones relacionadas con la figura o con el procedimiento general.

2.2 Un segundo ejemplo: comparación de áreas de rectángulos (inspirada en Euclides)

Mencionamos ahora un segundo ejercicio, utilizado en un artículo (Mesquita, 1989 a) y en mi tesis (Mesquita, 1989 b). Se trata de una versión simplificada del caso del rectángulo, de la proposición 43 del "Primer Libro de Euclides" (Heath, 1956).

Comparación de áreas de rectángulos
En este rectángulo hemos dibujado una diagonal y desde un punto de la diagonal hemos dibujado rectángulos rayados. ¿Cuál de los dos rectángulos tiene el área más grande: el largo y delgado o el ancho y corto?

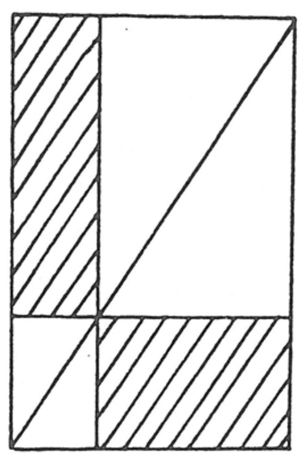


Figura 5. E_1. Elaboración propia.

En un rectángulo de dimensiones desconocidas hemos dibujado rectángulos rayados, como en la figura E_1. ¿Qué podemos decir sobre las áreas de los rectángulos rayados?

Lo presentamos en dos etapas a once parejas de estudiantes, de 10 a 11 y de 12 a 13 años (seis y cinco parejas, respectivamente), usando entrevistas clínicas. Se buscó analizar los argumentos desarrollados por los estudiantes durante la investigación y validación de una posible conjetura.

2.2.1 Construcción de la figura

Dibujamos un rectángulo, dibujamos una de sus diagonales. Desde un punto en la diagonal, dibujamos líneas paralelas. Obtenemos nuevos rectángulos (rayados en la figura).
Objetivo: comparar las áreas de los rectángulos rayados (rectángulos 2 y 5 figura).

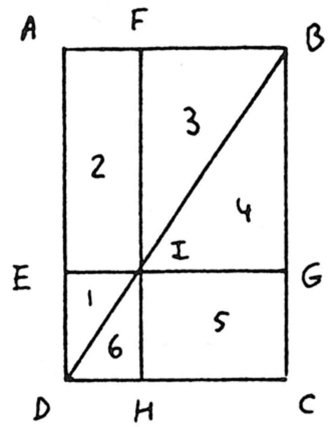


Figura 6. E_2. Elaboración propia.

En lo que sigue usamos la codificación de las sub-figuras mencionadas en la figura E_2. Además, **R** designa el rectángulo inicial, **RH** los rectángulos rayados.

2.2.2 Análisis de la tarea

Un enfoque que da y justifica la solución, se basa en resaltar la siguiente operación: los rectángulos rayados **2** y **5** resultan de la resta de los triángulos **1** y **3** del triángulo **123** y los triángulos **6** y **4** del triángulo **654**, respectivamente. En esta perspectiva, la pregunta que se plantea es, sencillamente, una tarea de conservación: eliminar cantidades iguales de cantidades iguales (Figura E_3).

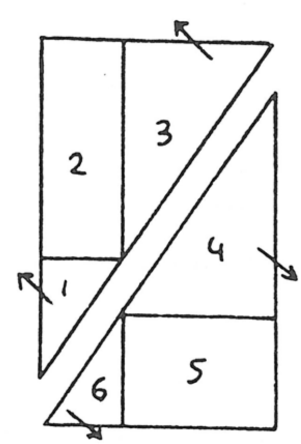


Figura 7. E_3. Elaboración propia.

En otras palabras: ciertas resoluciones de este ejercicio pueden considerarse como una clara ilustración de la noción de aprehensión operativa, introducida por Raymond Duval, en 1988 (Duval, 1988) y está determinada por el enfoque en posibles modificaciones de la figura, y sobre las reorganizaciones perceptivas que resultan de ella… De ahí la significativa expresión "navaja suiza" del Doctor François: "cortamos" la figura o una de sus partes en un lado y agregamos o posiblemente movemos en otro lugar.

La búsqueda de esta conjetura, sobre la posibilidad de igualdad de áreas, no es necesariamente parte de una tarea de conservación, por supuesto. Son posibles al menos dos tipos de enfoques: enfoques **geométricos**, basados en la percepción de la figura y sus propiedades, y enfoques **computacionales**, centrados en el cálculo y la medición.

2.2.3 Resultados

Una primera observación: se tienen **dos puntos de anclaje** en la figura. Algunos estudiantes usaron procedimientos que tomaron en cuenta todos los elementos de la figura, mientras que otros estudiantes se enfocaron principalmente en los rectángulos rayados, a veces teniendo dificultades para ver la figura como un todo.

Nuestro estudio sugiere además que las resoluciones de los estudiantes a veces requieren una reorganización de la aprehensión de figuras. No observamos dificultades específicas en el razonamiento, sino sólo dificultades en la comprensión de las operaciones que posibilitan la organización de la figura.

Por ejemplo, en el caso de un binomio, de 12-13 años, que parte de la isometría de los triángulos 123 y 654, y de la resta sucesiva de pares de triángulos 3 y 4 y rectángulos rayados 2 y 5, y por un razonamiento indirecto —por condición necesaria— concluye la igualdad de los rectángulos en cuestión:

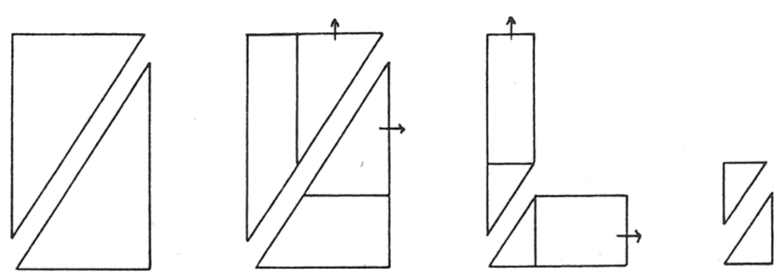


Figura 8. E_4. Elaboración propia.

“Y como estos dos [1 y 6] tienen la misma área, significa que se ha eliminado lo mismo” (p. 68).

3. La continuación de mi camino de investigación

Después de terminar mi tesis en 1989, bajo la supervisión del Doctor François, continué mi actividad en Lisboa (Universidade Clássica de Lisboa), en Montreal en la UQAM (Université de Québec à Montréal), en Lille (IUFM, Institut Universitaire de Formation des Maîtres / Université de Lille III, Université d’Artois) y desde 2003 en IREM de París y en el LRAR (Laboratoire de Recherche André Revuz / Laboratorio de Investigación André Revuz).

Desde el punto de vista de la investigación, trabajé principalmente en Didáctica de las Matemáticas, más particularmente en Didáctica de la Geometría, con alumnos de primaria y secundaria (de 11 a 15 años) y con estudiantes que se preparan para convertirse en futuros profesores de primaria; la idea es la de dar mayor importancia al espacio tridimensional como entrada privilegiada a la geometría. Hemos visto la importancia de tener en cuenta el papel fundamental de la manipulación de objetos y de la construcción de objetos tridimensionales. La transición del espacio tridimensional al espacio bidimensional, muy importante, se ve facilitada en gran medida por la utilización de los modelos, y por el trabajo sobre cambios en puntos de vista.

En resumen, pudimos ver que la manipulación es un paso esencial en la conceptualización en geometría, tanto para los niños (Mesquita *et al.*, 2001) como para los futuros profesores de primaria (Mesquita, 2001).

Actualmente, estoy en grupos de trabajo del IREM en París, y también en una nueva Comisión Inter-IREM Internacional, creada en 2019. El lenguaje y, en particular, la terminología y su vínculo con la conceptualización son de especial interés para mí.

3.1 Terminología, conceptualización, lenguajes

Mi entrada en esta asignatura se debe no sólo a motivaciones didácticas, por un lado, y también a una observación: algunos idiomas no se expanden, no introducen nuevas designaciones científicas para nuevos conceptos, se limitan a utilizar términos de los idiomas de origen o de divulgación. Esto puede ser un obstáculo para la conceptualización. También puede tener importantes inconvenientes en el aprendizaje, como sugieren estudios sobre plurilingüismo (Millon-Faure y Mendonça-Dias,2018).

4. A manera de conclusión

Me gustaría agradecer a François por todo lo que pude aprender con él, por su gran cultura matemática, su humor característico, su humanidad en todo momento, su disponibilidad permanente. También por el rigor intelectual que puso en cualquier enfoque de investigación, en la elección de marcos teóricos, en las sugerencias de lecturas matemáticas o didácticas, siempre relevantes y precisas, o en los métodos de investigación y procesamiento de datos.

Además, me gustaría llamar la atención sobre la importancia de un buen clima laboral en el extraordinario equipo IREM Estrasburgo durante este período. Su biblioteca, ciertamente, contribuyó con todos los libros esenciales y muy bien administrada por sus bibliotecarios, quienes se sentían satisfechos con su apasionante trabajo.

Cabe destacar también el importante papel de la reunión para el café en el primer piso, sede del IREM en un edificio del Departamento de Matemáticas, lugar de todas las discusiones entre matemáticos, didácticos, profesores de todos los niveles de educación, estudiantes de doctorado. En el IREM de Estrasburgo se dijo que estábamos trabajando "también para la exportación", ya que estudiantes de doctorado de muchas nacionalidades se reunieron allí para sus estudios.

Mientras escribía este texto, me di cuenta de que algunos de mis intereses actuales en terminología y conceptualización están relacionados de alguna manera con los estudios pioneros de francés y matemáticas realizados por François Pluvinage y Raymond Duval, y otros colegas de Estrasburgo. Al mismo tiempo, me doy cuenta de que estoy hablando de todo lo que hizo que la estancia de mi tesis fuera un momento tan importante para mi formación como profesora de matemáticas, y simplemente como persona.

¡Gracias, François!
¡Merci, François!

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a la Comisión EICAL 11 por invitarme a esta celebración en línea. A la Comisión y a la Doctora Rosita Paez —con quien pude trabajar en tan buena sintonía. Y pude contar también con su enorme ayuda para el homenaje de EICAL 11.

Además, debo agradecer a todas las personas que facilitaron los documentos que hicieron posible este texto, incluida Geneviève Pluvinage, ¡siempre!

5. Referencias

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 57-74.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

Duval, R. y Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. Première partie. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 21*, 117-152.

Glaeser, G. (1984). Rapport sur l'activité scientifique de François Pluvinage en didactique expérimentale des mathématiques, de 1977 à 1984.

Heath, T.L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. I). Doner.

Mesquita, A.L. (1989a). Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie, *Educational Studies in Mathematics, 20* (1), 55-77.

Mesquita, A.L. (1989b). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie* [Tesis de Doctorado, Université Louis Pasteur].

Mesquita, A. L. (2001). The construction of objects as a crucial phase for the articulation of registers in tridimensional situations. *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 342.

Mesquita, A.L., Régnier, A., Rossini, S. y Vandenbossche, J. (2001). *L'espace et la géométrie à l'école: Essai d'etude longitudinale*, Rapport du projet de recherche R/RIU/98/079, IUFM Nord – Pas-de-Calais, Lille.

Millon-Faure, K. y Mendonça-Dias, C. (2018, octubre). *Etude de l'impact des difficultés langagières des élèves allophones sur leur activité mathématique* [Ponencia]. Espace Mathématique Francophone (EMF), Paris, France, hal-02428843.

Pluvinage, F. (1977). *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques. Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités* [Tesis de Doctorado, torat d'Etat en Didactique des mathématiques, IREM de Strasbourg].

Pluvinage, F. (2000). Mathématiques et maîtrise de la langue. *Repères - IREM, 39*, 115-126.

Apéndice 1

Camille Noûs y el Laboratorio Cogitamus

Sólo unas palabras sobre el Laboratorio Cogitamus y su primer miembro: Camille Noûs, nuestro coautor. Más bien, soy su coautora. Camille Noûs ("noûs", el espíritu, otro legado que lleva el griego…). Me parece que a François le habría gustado este intento de rendir homenaje a este ensayo que puede ser tan fructífero para desarrollar una investigación universal y honesta.

> El laboratorio Cogitamus es una institución deslocalizada, que reúne a científicos de cualquier horizonte disciplinario y de cualquier nacionalidad en torno a valores comunes: el de la investigación íntegra y desinteresada, aspirando a crear, perpetuar, revisar y transmitir el conocimiento. Después de su primer miembro Camille Noûs, Cogitamus propone acoger a aquellos que, compartiendo esta visión, desean comprometerse y trabajar en esta investigación ideal.

http://www.cogitamus.fr/
https://www.cogitamus.fr/indexes.html
Contacto: camille.nous@cogitamus.fr

Apéndice 2

Selección subjetiva de trabajos colectivos o individuales (François Pluvinage y colegas)

• Páez, Rosa y Pluvinage, François, 2019. Estudio de las asíntotas de una función en un entorno de *software* dinámico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 39/3, 331-369. https://revue-rdm.com/2019/estudio-de-las-asintotas-de-una-funcion-en-un-entorno-de-*software*-dinamico/

• Duval, Raymond y Pluvinage, François, 2016. Apprentissages algébriques. Première partie. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 21, 117-152. IREM de Strasbourg, Strasbourg. http://numerisation.univ-IREM.fr/ST/IST16005/IST16005.pdf. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_21/adsc21-2016_004.pdf

• Del Rocio Juarez, Maria; Arredondo, Adelina y Pluvinage, François, 2014. Etude comparée de la formation initiale de professeurs de mathématiques en France et au Mexique, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19, 251-283. IREM de Strasbourg, Strasbourg. http://numerisation.univ-IREM.fr/ST/IST14013/IST14013.pdf

• Adjiage, Robert y Pluvinage, François, 2012. Strates de compétence en mathématiques, Repères - IREM, 88, 43-72. http://numerisation.univ-IREM.fr/WR/IWR12009/IWR12009

• Pluvinage, François y Rigo Lemini, Mirela, 2008. Mais non, Marina !, Annales de didactique et de sciences cognitives, 13, 41-61. IREM de Strasbourg, Strasbourg. http://numerisation.univ-IREM.fr/ST/IST08010/IST08010.pdf

• Kuzniak Alain, Parzysz Bernard, Vivier Laurent, Bulf Caroline, Chambris Christine, Colomb Jacques, Denys Bernadette, Houdement Catherine, Mesquita Ana, Ouvrier-Buffet Cécile, Perrin-Glorian Marie-Jeanne, Pluvinage François, Pressiat André & Romo-Vazquez Avenilde, 2008. Du monde réel au monde mathématique –un parcours bibliographique et didactique, Cahier de Didirem, 58. IREM de Paris, Paris. http://numerisation.univ-IREM.fr/PS/IPS08002/IPS08002.pdf

• Pluvinage, François, 2000. Mathématiques et maîtrise de la langue, Repères-IREM, 39, 115-126. http://www.univ-IREM.fr/exemple/reperes/articles/39_article_282.pdf

• Barbançon Gérard, Duval Raymond, Dupuis Claire, Pluvinage François, 1988. Mathématiques A Venir: Opération 50 lycées; Les maths et vous, IREM de Strasbourg, Strasbourg.

• Pluvinage François & Rauscher Jean-Claude, 1986, La géométrie construite mise à l'essai, Petit x, 11, 5-36. https://publimath.IREM.univ-mrs.fr/biblio/IGR86022.htm (fiche)

• Pluvinage F., Rauscher J. C. & Soumoy C., 1986. Rapport sur l'expérimentation Pédagogie différenciée conduite en mathématiques au Collège d'Ostwald en 1984-1985, IREM de Strasbourg, Strasbourg.

• Dupuis Claire, Raymond Duval & Pluvinage François, 1978. Sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième, Brochure APMEP, 22, 65-100. http://numerisation.univ-IREM.fr/AAP/AAP78012/AAP78012.pdf

• Pluvinage François, 1977. Difficultés des exercices scolaires en mathématiques. Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités. Thèse de doctorat d'Etat en Didactique des mathématiques, IREM de Strasbourg, Strasbourg. https://mathinfo.unistra.fr/IREM/publications/brochures/i104-1979-a-i099-1973/#c32616

Tesis dirigidas por François Pluvinage

Robert Adjiage, 1999, L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial.

Marie-Paule Rommevaux, 1997, Le discernement des plans: Un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle.

Kaliopi Pavlopoulou, 1994, Propédeutique de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation sémiotique.

Jean-Claude Rauscher, 1993, Hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes: le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.

Sabrina Padilla Sanchez, 1992, L'Influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques.

Regina Flemming Damm, 1992, Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte.

E. Charalambos Lemonidis, 1990, Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie.

Ismenia del Carmen Guzman Retamal, 1990, Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction.

Moncef Zaki, 1990, Traitements de problèmes de probabilités en situation de simulation.

Ana Maria Jorge Lobo Mesquita, 1989, L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie.

Compromiso de François Pluvinage en dos revistas científicas

• Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg, Strasbourg. https://mathinfo.unistra.fr/IREM/publications/adsc/

• El cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las ciencias y la matemática. Departamento de Matemática Educativa (DME) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). https://mattec.matedu.CINVESTAV.mx/el_calculo/index.php

EPÍLOGO

Carlos Armando Cuevas-Vallejo

Mi relación con el Profesor François Pluvinage data del año 2003, cuando envié a Estrasburgo Francia, un artículo de investigación en un congreso organizado en el IREM de Estrasburgo, precisamente en honor al Doctor Pluvinage, en el cual proponía un programa didáctico que bien puede considerarse una ingeniería didáctica, aplicada a la enseñanza de la matemática en los niveles medio superior y superior, producto de mi reflexión y estudio al crear sistemas tutoriales inteligentes. El profesor Pluvinage lo leyó con atención, y tuvo a bien hacerme recomendaciones importantes, debido a ello le propuse añadir más elementos y publicar juntos una propuesta didáctica para la enseñanza de la matemática.

Si bien en aquellos años ya existían algunas propuestas, la mayoría consideraba la didáctica en términos generales y no distinguía entre matemáticas y literatura, por ejemplo. Y, además, la inmensa mayoría se referenciaba a la educación escolar temprana o para infantes. Surge así nuestra primera contribución científica: *La Didáctica* de Cuevas y Pluvinage. Desde entonces la producción conjunta fue fructífera, publicamos artículos, libros, capítulos de libros y elaboramos conjuntamente *software* educativo. Había nacido una gran amistad que nos llevó a crear la revista *El Cálculo y su Enseñanza* y crear además los Encuentros Internacionales sobre la Enseñanza del Cálculo. Su generosidad no tenía límites y lo mismo trabajaba con profesores de diversas universidades del país, con estudiantes y colegas.

Por esta razón, estamos inmensamente agradecidos. Fue un profundo conocedor de nuestras culturas precolombinas y el *gourmet* que disfrutaba de la cocina mexicana. Viajó incansablemente por el país siempre en compañía de su inseparable esposa Genieveve, y tuve la fortuna de acompañarle familiarmente algunas veces. La implacable pandemia acabó con su carrera, pero queda el legado de su testimonio de trabajo y el don de su amistad.

Como lo habrá advertido el lector, cada una de las secciones de este libro contiene tanto detección de problemáticas en la enseñanza de las matemáticas en diversos niveles educativos, como aportaciones originales de diferentes países del orbe. Por ejemplo, en el primer grupo, Educación matemática y cálculo diferencial e integral, el profesor Kuzniak trata sobre la Teoría de los Espacios de Trabajo, que es una propuesta que se desarrolló en Francia con la colaboración de Pluvinage y muchos más colegas de Francia, Canada, España y México, al menos. En dicho artículo se expone una breve descripción de la misma y su aplicación para analizar la transición del cálculo de la preparatoria a la universidad. Además, encontramos las reflexiones de colegas mexicanos sobre la pandemia que aportan elementos matemáticos para su análisis y analizan su repercusión en los docentes. Así mismo, en el segundo grupo: Educación matemática y álgebra lineal y sus aplicaciones, la profesora Trigueros, de México, nos muestra la aplicación de la teoría cognitiva APOE, desarrollada en Estados Unidos por el Profesor Dubinsky, aplicada a la elaboración de tareas para proponer alternativas de enseñanza a conceptos matemáticos complejos, como independencia y dependencia lineal de vectores mediante tareas; propuesta que se ejemplifica con dos contribuciones a la enseñanza del álgebra lineal de investigadores mexicanos. En el siguiente grupo: Educación matemática y aplicación de las tecnologías digitales, colegas de España, Colombia y México nos muestran diversas aplicaciones de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y la ciencia. Hoy más que nunca se ha demostrado la necesidad del uso de las tecnologías digitales en educación, la pandemia tomó por sorpresa al medio educativo y académico en general; de ahí la aportación de los reconocidos investigadores Michele Artigue y Luc Trouche, ambos de Francia, que nos estregan capítulos donde establecen una visión histórica de la experimentación y la investigación tecnológica; para pasar al estado actual de pandemia, en donde advierten lo que todos hemos notado: la agravada problemática en la enseñanza de las matemáticas. Además, se incluyen propuestas diferenciadas por nivel con el uso de GeoGebra. Finalmente, en el siguiente grupo: Educación matemática y modelación. Nivel básico, medio superior y superior, se expone cómo la modelación se ha convertido en una tendencia para abordar cualquier acercamiento al uso de las matemáticas en problemas reales. Encontramos la propuesta de los profesores Hitt, Lupiañez y Segovia en una colaboración de Canadá y España, sobre cómo en la enseñanza de las matemáticas se requiere cada vez más situaciones reales en las que los conceptos matemáticos jueguen un papel relevante, y en donde el profesor deberá ser una especie de guía que ayude a los estudiantes a una verdadera reflexión sobre los problemas de la humanidad. En el mismo sentido, la colaboración de Francia y Chile, a través del trabajo de Laurent Vivier y la reflexión de Ana Lobo de Mesquita, colaboradores cercanos de François Pluvinage, muestran la importancia del trabajo colaborativo.

Así, hemos mostrado en este breve epílogo sólo una pequeña muestra de los interesantes capítulos aportados por investigadores connotados de diversas latitudes de nuestro planeta, con los cuales profesores, investigadores y estudiantes podrán realizar estudios y análisis que promuevan nuevas aportaciones en este inacabable problema que representa la enseñanza de la matemática y la ciencia en el mundo. Espero lo encuentren, como un servidor, un material interesante de estudio y reflexión.

Esta primera edición de *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática*, coordinado por Carlos Armando Cuevas-Vallejo, Magally Martínez Reyes y Judith Alejandra Hernández-Sánchez, se terminó de imprimir el 03 de marzo de 2023. Este libro es una coedición entre Aldus y la Universidad Autónoma del Estado de México, a través de la Dirección de Difusión y Promoción de la Investigación y los Estudios Avanzados, adscrita a la Secretaría de Investigación y Estudios Avanzados. La coordinación editorial universitaria estuvo a cargo de Patricia Vega Villavicencio, el Análisis e interpretación del sistema antiplagio de Lourdes Gómez Zamora y la revisión ortotipográfica al cuidado de Gudalupe del Socorro Álvarez Martínez. Por disposición del Reglamento de Acceso Abierto de la Universidad Autónoma del Estado de México se publica la versión PDF de este libro en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma del Estado de México.

Este libro recoge trabajos de investigación en la enseñanza de la matemática y ciencias naturales en todos los niveles escolares; las investigaciones comprenden intervenciones didácticas en el aula con y sin tecnología, propuestas de corte cognitivo, propuestas metodológicas, teorías de conocimiento, propuestas didácticas y uso de tecnología digital. Estas reflexiones son producción académica internacional y nacional de profesores investigadores y estudiantes en matemáticas, ciencias y en matemática educativa.