



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS PERTURBATIVO DE SOLITONES
OSCUROS DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE
SCHRÖDINGER GENERALIZADA

TESIS

que para obtener el título de:

Físico

PRESENTA:

José María Mondragón Álvarez

Asesores:

Dr. Omar Pavón Torres

Dr. Máximo Augusto Agüero Granados

Toluca, Estado de México

Mayo, 2024

Índice general

Introducción	1
Ecuación cúbica y cúbica-quinta no lineal de Schrödinger	6
1.1. Ecuación no lineal de Schrödinger	6
1.2. Ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger	10
1.3. Soluciones de cuasi-solitones brillantes para la cq-NLSE	16
1.4. Soluciones de cuasi-soliton grises y oscuros para la cq-NLSE.	19
Análisis perturbativo para solitones oscuros	24
2.1. Aproximación adiabática	24
2.2. Aproximación directa a la perturbación de solitones oscuros	26
2.2.1. Corrección de primer orden	28
2.2.2. La capa límite	30
2.2.3. Leyes de conservación perturbadas	33
2.2.4. El solitón negro	34
2.2.5. El solitón gris	36
2.2.6. Leyes de conservación para solitones grises	39
2.2.7. t_{0Z} y términos de orden superior	44

2.2.8. Amortiguamiento lineal	49
Ecuación no lineal de Schrödinger generalizada	51
3.1. Dinámica de solitones en la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada	51
3.2. Ecuación no lineal de Schrödinger perturbada	57
3.3. Ecuación de Schrödinger con no linealidades cúbico-quíntico y séptico	60
Conclusiones	63
4.1. Conclusiones	63
4.2. Análisis prospectivo	64
Anexo	65
5.1. Congresos y participaciones	65

Introducción

El solitón es una onda no lineal solitaria cuyas propiedades son similares a las de una partícula elemental. El término solitón fue acuñado en 1965 por Zabusky y Kruskal para caracterizar ondas solitarias sin dispersión que durante una interacción mutua preservan su forma durante la propagación [1]. Estos solitones surgen en cualquier sistema físico que posea tanto no linealidad como dispersión; tal es el caso de los solitones ópticos. Originalmente propuestos por Akira Hasegawa y Fred Tappert para mejorar el rendimiento de las transmisiones en las redes ópticas de telecomunicaciones [2]. Si bien, inicialmente el estudio de los solitones fue restringido a la óptica hoy en día resultan fundamentales en la formulación de las más recientes teorías. Como consecuencia de lo anterior sería imposible entender el panorama de la ciencia y tecnología en la actualidad sin el concepto de solitón. Ejemplos de lo anterior son los solitones gravitacionales hiper-rápidos presentes en la teoría de plasmas de Einstein-Maxwell dentro de la Relatividad General, los cuales satisfacen las condiciones de energía débil cuando viajan a velocidades superlumínicas [3]; los dropletos cuánticos ultradiluidos o gotas cuánticas, los cuales son estados auto-atrapados robustos en condensados de Bose-Einstein que se estabilizan mediante una repulsión efectiva inducida por fluctuaciones cuánticas alrededor del campo medio [4, 5]; los solitones rotantes, los cuales ocurren en sistemas microscópicos, estos vórtices rotantes de helio superfluido son haces portadores de momento angular y son objetos topológicos presentes en varias ramas

de la física [6, 7]. El estudio de los solitones se ha ampliado en las últimas décadas y han tomado un papel protagonista en la cosmología [8] y en la comprensión de la materia oscura [9].

En las descripciones antes mencionadas la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada es de vital importancia ya que adquiere un papel fundamental en la comprensión de estos fenómenos. Dicha ecuación tiene la siguiente forma:

$$i\frac{\partial q}{\partial t} \pm \frac{1}{2}\nabla^2 q + f(|q|^2) = 0, \quad (1.1)$$

cuando $f(q) = |q|^2 q$ en la ecuación (1.1) se obtiene la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger (c-NLSE, por sus siglas en inglés) o simplemente ecuación no lineal de Schrödinger. Dicha ecuación es uno de los modelos más importantes y universales en la ciencia ya que tiene aplicación en muchas ramas de la física como es el caso de la óptica no lineal, electrónica cuántica, materia condensada, física de plasmas, teoría de campos cuánticos no lineales, y en matemáticas aplicadas, donde se investigan sus simetrías [10]. Las soluciones de esta ecuación han sido estudiadas de manera exhaustiva, entre las cuales se encuentran: solitones brillantes, solitones oscuros y grises, kink, solitones de Peregrine, rogue waves, entre otras [11–14].

La ecuación no lineal de Schrödinger en el estudio de plasmas, superfluidos, dinámica de biomoléculas, propagación de haces de luz monocromáticos, así como para estudiar la formación de los dropletos cuánticos y la dinámica de los pulsos ultra-cortos, en hidrodinámica nuclear, en la dinámica no lineal de ADN interactuando con una proteína [15], también aparece cuando se estudian películas delgadas orgánicas y en guías de ondas poliméricas para encontrar cuasi-solitones topológicos [12] entre otros [15–17]. La ecuación de Schrödinger con no linealidades de orden superior aparece en diversos fenómenos

físicos, como un ejemplo particular podemos mencionar a la ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger, la cual admite varios tipos de soluciones en forma de funciones trigonométricas, hiperbólicas, exponenciales y racionales [18, 19] y en el contexto de la óptica se encuentran soluciones tipo solitón brillante y oscuro [12–14, 19]. Debido a su importancia, se han realizado diferentes esfuerzos para encontrar nuevas soluciones exactas que emplean diferentes herramientas matemáticas, como soluciones en términos de funciones elípticas de Jacobi [20–22]. A primera aproximación dichas ecuaciones proveen una descripción adecuada de los problemas anteriormente mencionados, ésta sigue siendo una simplificación del problema general. Si se desea estudiar el caso más general se deben tomar en cuenta términos perturbativos. Los cuales se incorporan a la ecuación diferencial no lineal original. Una vez que se toman en cuenta estos términos se obtiene una forma más general de la ecuación (1.1), que en su forma normalizada es:

$$i\frac{\partial q}{\partial t} \pm \frac{1}{2}\nabla^2 q + f(|q|^2) = i\gamma R(q). \quad (1.2)$$

En la ecuación (1.2) aparece un término adicional del lado derecho, en donde γ es un parámetro muy pequeño, que toma valores de $0 < \gamma \ll 1$. Si γ es cero, obtenemos la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger sin perturbar.

La acción de los términos perturbativos transforma la onda solitaria de tal manera que pueda adaptarse continuamente a los cambios de un medio, estos términos perturbativos pueden describir efectos de disipación de energía, de interacción con otras ondas no lineales y de la acción de potenciales externos. Para estudiar la estabilidad de solitón y para lidiar con este problema se implementaron varios métodos de perturbación.

Entre ellos se encuentran el método dispersión inversa perturbado (MDIP) [23] en el que se determinan las ecuaciones para datos dispersados bajo la influencia de perturbaciones, el

concepto básico de este método es simple y también se pueden aplicar para problemas de varios solitones. El formalismo matemático llamado aproximación adiabática para solitones fue desarrollada inicialmente en los años 1970 en trabajos por Karpman y Maslov [24, 25]. Karpman y Maslov [24] se basaron directamente en el método de transformación inversa con un parámetro espectral variable. Karpman, Maslov y Soloviev [24–26] desarrollaron un método que aborda la perturbación de los datos de dispersión en el problema de la transformación de dispersión inversa, IST, para el modelo de la Ecuación No Lineal de Schrödinger debido a la dependencia temporal del parámetro espectral, los parámetros principales del solitón como la profundidad del solitón, la altura de fondo, el cambio de posición y el cambio de fase se vuelven variables en el tiempo o varían a lo largo de la propagación del solitón [27, 28].

Otro tipo de método de perturbación es el que está basado en el formalismo Lagrangiano de ecuaciones diferenciales no lineales [23], ejemplo de este es en la ecuación no lineal de Schrödinger, en particular este método puede ser aplicado a un sistema el cual puede ser no integrable, pero admite una solución bien definida como una onda solitaria; también se realiza análisis de la inestabilidad modulacional de las soluciones para el caso especial de la ecuación no lineal, no autónoma de Schrödinger, así como la modelación matemática de pulsos no lineales. La Inestabilidad Modulacional, IM, se presenta cuando perturbaciones oscilatorias son introducidas a estados estacionarios de tipo de tren de onda, las cuales generan un crecimiento exponencial en la amplitud de la onda, conforme transcurre el tiempo, lo que a su vez genere un rompimiento en la envolvente [29].

Por otro lado existen métodos directos los cuales no tienen como base el método de dispersión inversa y se usa para encontrar las soluciones de ecuaciones perturbadas. Como

ejemplo, el método que se basa en la construcción y demostración del conjunto completo de soluciones de Jost al cuadrado el cual proporciona un procedimiento general para resolver la solución adiabática de la ecuación no lineal de Schrödinger perturbada [30].

A esta categoría pertenecen el método de multi-escalas de tiempo usualmente llamado método quasi-estacionario propuesto por Y. Kodama y M. J. Ablowitz. En esta aproximación, las ecuaciones no lineales perturbadas son linealizadas expandiendo sus soluciones alrededor de las soluciones originales no perturbadas lo cual conlleva a encontrar las eigenfunciones del operador linealizado asociado a la ecuación linealizada, para más detalle, se puede consultar [31–33].

En el presente trabajo se estudia la evolución de solitones oscuros en la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada. Con tal fin la presente tesis se dividirá en las siguientes secciones. En primera sección se expondrá el problema espectral del cual surge la ecuación no lineal de Schrödinger, posteriormente se presentarán las soluciones de la ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger. En la segunda sección se estudiará un análisis perturbativo de solitones oscuros de la ecuación no lineal de Schrödinger. En la tercera sección se realizará un análisis perturbativo de solitones oscuros en la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada, en particular se considerará a la ecuación de Schrödinger con no linealidades cúbico-quíntico y séptico. Finalmente, se presentarán conclusiones de este trabajo y análisis prospectivo.

Ecuación cúbica y cúbica-quinta no lineal de Schrödinger

1.1. Ecuación no lineal de Schrödinger

La deducción de la ecuación no lineal de Schrödinger puede ser realizada por el método de Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS), en honor a sus autores [27, 28], la c-NLSE también se puede obtener mediante el formalismo de Lax y admite varios tipos de soluciones, entre ellas, las soluciones que consta de solitones correspondientes a valores discretos, es decir, solución de N-solitones [23].

Comencemos por el siguiente problema, donde tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de evolución temporal acopladas.

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + i\xi V_1 = q(x, t)V_2, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} - i\xi V_2 = r(x, t)V_1, \quad (1.4)$$

donde $q(x, t)$ y $r(x, t)$ son los potenciales en los cuales se realiza la dispersión, eligiendo la independencia del tiempo de los eigenfunciones V_1 y V_2

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = A(x, t, \xi)V_1 + B(x, t, \xi)V_2, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = C(x, t, \xi)V_1 - A(x, t, \xi)V_2. \quad (1.6)$$

Si derivamos la ecuación (1.4) respecto a t , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial r}{\partial t} V_1 + r \frac{\partial V_1}{\partial t} + i\xi \frac{\partial V_2}{\partial t}, \quad (1.7)$$

A su vez derivamos la ecuación (1.6) respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} \right) = V_1 \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial V_1}{\partial x} - V_2 \frac{\partial A}{\partial x} - A \frac{\partial V_2}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Si las derivadas parciales mixtas de segundo orden son continuas en un punto, entonces V es una función C^2 en ese punto, por tanto se cumple:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}.$$

De esta manera se igualan las ecuaciones (1.7) y (1.8), es decir,

$$\frac{\partial r}{\partial t} V_1 + r \frac{\partial V_1}{\partial t} + i\xi \frac{\partial V_2}{\partial t} = V_1 \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial V_1}{\partial x} - V_2 \frac{\partial A}{\partial x} - A \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad (1.9)$$

utilizando las ecuaciones (1.3-1.6) para simplificar, se tiene

$$\frac{\partial r}{\partial t} V_1 + r(AV_1 + BV_2) + i\xi(CV_1 - AV_2) = V_1 \frac{\partial C}{\partial x} + C(qV_2 - i\xi V_1) - V_2 \frac{\partial A}{\partial x} - A(rV_1 + i\xi v_2), \quad (1.10)$$

separando los términos comunes de V_1 y V_2 se tiene

$$\frac{\partial A}{\partial x} = qC - rB, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} - 2i\xi C = \frac{\partial r}{\partial t} + 2rA. \quad (1.12)$$

Asimismo se obtienen las derivadas de la ecuación (1.3) con respecto a t y la ecuación (1.5) respecto a x y se igualan dando como resultado

$$\frac{\partial q}{\partial t} - 2Aq = 2i\xi B + \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = qC - rB. \quad (1.14)$$

Por tanto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x} &= qC - rB, \\ \frac{\partial B}{\partial x} + 2i\xi B &= \frac{\partial q}{\partial t} - 2Aq, \\ \frac{\partial C}{\partial x} - 2i\xi C &= \frac{\partial r}{\partial t} + 2rA.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Realizamos expansiones finitas de A , B y C en términos del parámetro $2i\xi$ para determinar que tipo de ecuaciones se pueden resolver por el Método de Dispersión Inversa (Inverse Scattering Method, ISM)

$$\begin{aligned}A &= A_0 + A_1(2i\xi) + A_2(2i\xi)^2 + \dots \\ B &= B_0 + B_1(2i\xi) + B_2(2i\xi)^2 + \dots \\ C &= C_0 + C_1(2i\xi) + C_2(2i\xi)^2 + \dots\end{aligned}\tag{1.16}$$

Sustituimos las expansiones (1.16) en las ecuaciones (1.15) igualando los coeficientes de los mismos exponentes de $2i\xi$, con lo cual se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_2}{\partial x} &= 0, & B_2 &= 0, & C_2 &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial x} &= qC_1 - rB_1, & \frac{\partial B_2}{\partial x} + B_1 &= -2qA_2, & \frac{\partial C_2}{\partial x} - C_1 &= 2rA_2, \\ \frac{\partial A_0}{\partial x} &= qC_0 - rB_0, & \frac{\partial B_1}{\partial x} + B_0 &= -2qA_1, & \frac{\partial C_1}{\partial x} - C_0 &= 2rA_1,\end{aligned}\tag{1.17}$$

y las ecuaciones para los potenciales $q(x, t)$ y $r(x, t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial B_0}{\partial x} + 2qA_0, \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= \frac{\partial C_0}{\partial x} - 2rA_0,\end{aligned}\tag{1.18}$$

resolviendo el sistemas de ecuaciones (1.17), se obtiene:

$$\begin{aligned}A_0 &= -2a_2qr, & B_0 &= 2a_2\frac{\partial q}{\partial x} - 2qa_1, & C_0 &= -2a_2\frac{\partial r}{\partial x} - 2ra_1, \\ A_1 &= a_1, & B_1 &= -2qa_2, & C_1 &= -2ra_2, \\ A_2 &= a_2, & B_2 &= 0, & C_2 &= 0,\end{aligned}\tag{1.19}$$

donde a_1 y a_2 son unas constantes.

Al aplicar la jerarquía aceptada en el método AKNS, donde $r = -q^*$ se puede reducir la NLSE

$$i \frac{\partial q}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q = 0, \quad (1.20)$$

donde el signo (\pm) corresponde a dos tipos de la velocidad de grupo de dispersión: negativo $\beta < 0$ (en la ecuación en signo +), o positivo $\beta > 0$ (en la ecuación el signo -); además a_1 y a_2 son constantes puramente imaginarios, para lo cual se tomo en particular que $a_1 = 0$ y $a_2 = -i$. La forma de la ecuación (1.20) aparece en la descripción de diversos fenómenos físicos, por ejemplo en los estudios de ondas de gravedad con pequeña amplitud en la superficie de aguas profundas no viscosas [34], en la propagacion de haces de onda difractadas en un plano en las regiones de enfoque de la ionosfera [35], entre otros [36].

Como se mencionó antes, las soluciones de la ecuación (1.20) están expresadas en términos de solitones brillantes, grises, solitones de Peregrine, rogue wave, solitones oscuros, etc; particularmente se ha mostrado interés en los solitones oscuros, el cual se han realizado diversas técnicas para generarlos tal es el caso de la modulación eléctrica en un brazo de interferómetro de Mach-Zehnder [37], una técnica de conversión no lineal de una señal de ritmo de alta frecuencia en una fibra de dispersión decreciente [38] y muy recientemente en la primera demostración experimental de solitones oscuros el cual se generan mediante el autobloqueo por medio de la explotación de la absorción inversa del estado excitado saturable de una fibra de ganancia, lo que logra un umbral de daño más alto [39], etc [40, 41].

1.2. Ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger

Otra forma ampliamente conocida y estudiada de la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada es la ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger, la cual surge inicialmente en el contexto de la óptica no lineal. Dicha ecuación aparece en el estudio del primer efecto electroóptico, descubierto por el físico escocés John Kerr (1821-1907) en 1875. Él encontró que una sustancia transparente isótropa se vuelve birrefringente al colocarse en un campo eléctrico \vec{E} . El medio adquiere las características de un cristal uniáxico cuyo eje óptico corresponde a la dirección del campo aplicado. Los dos índices, n_{\parallel} y n_{\perp} , están asociados con las dos orientaciones del plano de vibración de la onda, esto es, paralela y perpendicular al campo eléctrico aplicado, respectivamente. Su diferencia, Δn , constituye la birrefringencia que equivale a:

$$\Delta n = \lambda_0 k E^2, \quad (1.21)$$

donde k es la constante de Kerr. Se sabe que los solitones ópticos temporales en picosegundos en fibras con no linealidad de Kerr se rigen por la ecuación no lineal de Schrödinger integrable, que normalmente incluye la no linealidad $\chi^{(3)}$ que corresponde al cambio de índice de refracción dependiente de la intensidad. Aunque la no linealidad de la fibra es pequeña, los efectos no lineales se acumulan a lo largo de largas distancias debido a la alta intensidad de la onda de la luz sobre una pequeña sección transversal de la fibra, y los efectos de autoacción generan solitones ópticos temporales.

Como se mencionó anteriormente, el estudio de los solitones fue restringido a la óptica, los primeros solitones ópticos espaciales gobernados por la no linealidad de la ley no Kerr han sido estudiados a detalles por G. Stegeman y co-autores [42–45]. Los términos no linea-

les de enfoque(cúbica) y desenfoco(quíntica) es la característica clave del modelo NLSE cúbico-quíntico y hace posible generar una estructura del solitón espacial estable, que es inestable en el marco de enfoque ordinario del modelo de NLSE cúbica. Es bien sabido que los solitones espaciales brillantes solo pueden existir para enfocar la no linealidad. En los medios masivos de Kerr, su existencia requiere además un efecto de saturación para detener el autoenfoco catastrófico. El desenfoco de la no linealidad conduce generalmente a una ampliación mejorada del haz y no admite ninguna estructura localizada que no sea vórtice y solitones oscuros, que requiere un haz de fondo.

Durante los últimos años se ha incrementado el número de artículos dedicados a construir soluciones analíticas exactas para la cq-NLSE; Jun-Rong, Lin y Hua-Mei usaron una transformación tipo lente, donde obtienen soluciones de solitones brillantes y oscuras auto-similares espaciales de la ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger con coeficientes distribuidos y un potencial externo [46]; se utilizaron métodos analíticos y numéricos para probar la existencia, las interacciones y la estabilidad de los vórtices solitarios en la ecuación cq-NLSE bidimensional [47]; en [48] se informaron soluciones analíticas de ondas solitarias suponiendo una solución ansatz bajo ciertas condiciones paramétricas. Diferentes aplicaciones de las soluciones de solitón para la cq-NLSE se encuentran en [49]- [73].

Usemos un ansatz para encontrar soluciones de la ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger en su forma:

$$i\psi_t = -\psi_{ss} + \frac{\mu + \lambda}{2}(1 - |\psi|^2)(1 - |\psi|^2)\psi - A(1 - |\psi|^2)\psi, \quad (1.22)$$

para ello se propone la siguiente transformación

$$\psi(s, t) = e^{i(ks - wt)}\phi(\zeta), \quad \zeta = ks - wt. \quad (1.23)$$

Con esta transformación podemos dividir la ecuación compleja en dos ecuaciones diferenciales reales

$$w\phi = k^2\phi - k^2\phi_{\zeta\zeta} + \frac{\mu + \lambda}{2}(1 - \phi^2)(1 - \phi^2)\phi - A(1 - \phi^2)\phi, \quad (1.24a)$$

$$(2k^2 - w)\phi_{\zeta} = 0. \quad (1.24b)$$

Notemos que de la ecuación (1.24b) si ϕ_{ζ} es igual a cero entonces la solución de la ecuación (1.22) es una onda plana, si por el contrario $(2k^2 - w)$ es igual a cero entonces la ecuación (1.24a) adquiere la siguiente forma

$$k^2\phi_{\zeta\zeta} = -k^2\phi\frac{m}{2}(1 - \phi^2)(1 - \phi^2)\phi - A(1 - \phi^2)\phi, \quad (1.25)$$

con $m = \mu + \lambda$. Después de una integración de la ecuación (1.25) obtenemos

$$(\phi)^2 = c + \alpha\phi^2 + \beta\phi^4 + \gamma\phi^6, \quad (1.26)$$

con

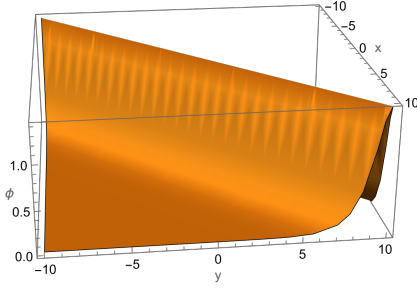
$$\alpha = \frac{m}{2k^2} - \frac{A}{k^2} - 1, \quad \beta = \frac{m}{2k^2} + \frac{A}{2k^2}, \quad \gamma = \frac{m}{6k^2}. \quad (1.27)$$

Bajo ciertas condiciones restrictivas aplicadas a la ecuación (1.26) se obtienen diversas soluciones, entre ellas estan las de burbuja, de campana, soluciones triangulares periódicas, etc. Haciendo $x = ks$, $y = -2k^2t$ para graficar las soluciones y tomando en cuenta el trabajo de [74] se tienen los siguientes resultados:

1. Supongamos que $c = 0$, $m < 0$ y $3A^2 > m^2 - (14A + k^2)m$ entonces

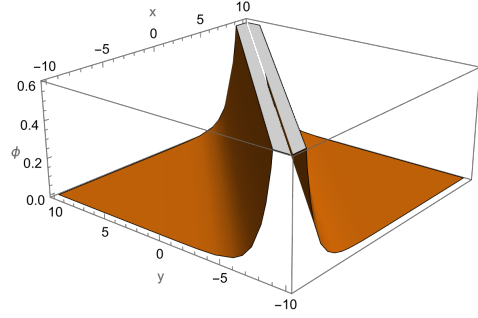
(a) Cuando $m - 2A > 2k^2$ y $m + A < 0$ de la ecuación (1.26) se obtiene la solución de solitón de campana para la ecuación (1.22)

$$\psi(\zeta) = \left[\frac{2\alpha \operatorname{sech}^2[\sqrt{\alpha}(\zeta + \zeta_0)]}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} - (\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} + \beta)\operatorname{sech}^2[\sqrt{\alpha}(\zeta + \zeta_0)]} \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)},$$



(a) Solución tipo solitón de campana

cuando $\alpha = 1$ y $M = 1$.



(b) Solución singular con los mismos va-

lores de los parámetros α y M .

Figura 1.1: Soluciones para el caso **1(a)**.

tomando $\alpha = 1$ y $M = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = 1$, vemos la figura (1.1a).

Además, es posible tener la solución singular, es decir, la solución con valores infinitos en cierta región de la variable independiente ζ que se representa en la figura (1.1b).

$$\psi(\zeta) = \left[\frac{2\alpha \operatorname{csch}^2 \left[\pm \sqrt{\alpha}(\zeta + \zeta_0) \right]}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} + (\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} + \beta) \operatorname{csch}^2 \left[\pm \sqrt{\alpha}(\zeta + \zeta_0) \right]} \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)},$$

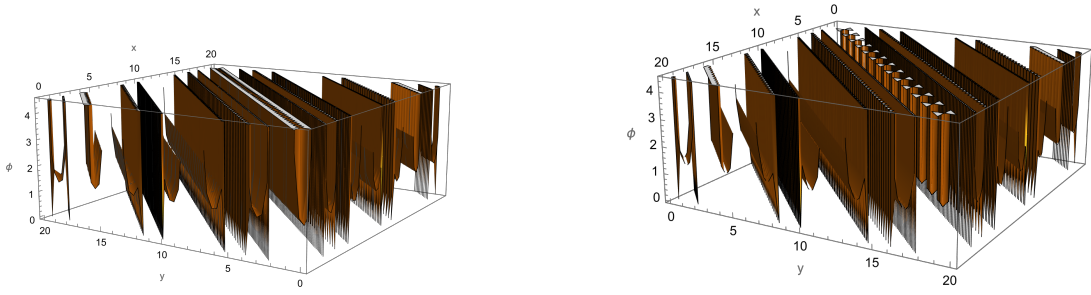
(b) para $m - 2A < 2k^2$ y $m + A > 0$ la ecuación (1.22) admite la llamada solución periódica triangular

$$\psi(\zeta) = \left[\frac{-2\alpha \sec^2 \left[\sqrt{-\alpha}(\zeta + \zeta_0) \right]}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} - (\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} + \beta) \sec^2 \left[\sqrt{-\alpha}(\zeta + \zeta_0) \right]} \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)},$$

y la solución periódica triangular singular tiene la forma

$$\psi(\zeta) = \left[\frac{2\alpha \csc^2 \left[\pm \sqrt{-\alpha}(\zeta + \zeta_0) \right]}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} - (\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} + \beta) \csc^2 \left[\pm \sqrt{-\alpha}(\zeta + \zeta_0) \right]} \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)}.$$

Tomando $\alpha = -1, \beta > 0$ y la raíz cuadrada $M = 1$ vemos la solución regular para la ecuación (1.26) representada en la figura (1.2a) y un bosquejo de su contraparte singular presentada en la figura (1.2b).



(a) Solución regular periódica triangular. El valor de los parámetros usados es $\alpha = -1$ y $\beta > 0$.

(b) Solución singular periódica triangular. Se han utilizado los mismos valores de los parámetros α y β .

Figura 1.2: Soluciones para el caso **1(b)**.

2. Supongamos que los parámetros satisfacen las siguientes relaciones

$$c = \frac{8}{27} \left[\frac{m(m - 4A) + 4A^2 + 4k^2}{2k^2(m + A)} - \frac{4A - 2m}{m + A} \right],$$

y

$$A_{1,2} = \frac{-11m \pm \sqrt{m[133m - 96k^2]}}{6},$$

luego, se obtienen los siguientes casos

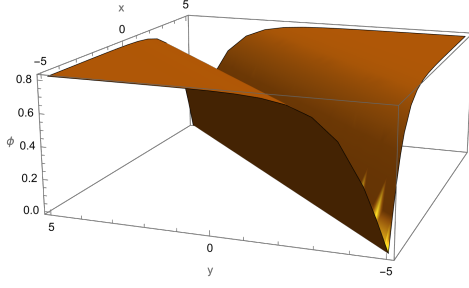
(a) Cuando $m - 2A < 2k^2$ y $m + A > 0$, la ecuación (1.26) admite una solución tipo burbuja y posteriormente la solución de la ecuación (1.22) es

$$\psi(\zeta) = \left[-\frac{8\alpha \tanh^2[\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}(\zeta + \zeta_0)]}{3\beta(3 + \tanh^2[\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}(\zeta + \zeta_0)])} \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)}.$$

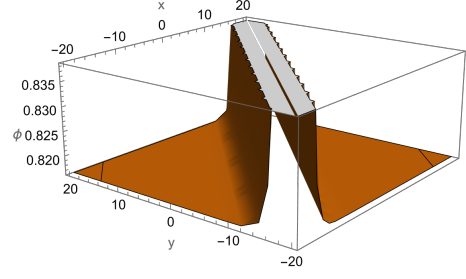
Así para su contraparte singular se tiene

$$\psi(\zeta) = \left[-\frac{8\alpha \coth^2[\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}(\zeta + \zeta_0)]}{3\beta(3 + \coth^2[\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}(\zeta + \zeta_0)])} \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)},$$

eligiendo $\alpha = -1$ y $\beta = 1$ vemos el solitón burbuja presentado en la figura (1.3a) y el esquema de la solución singular en la figura (1.3b).



(a) Perfil de solitón burbuja con $\alpha = -1$ y $\beta = 0$.



(b) Solución singular con los mismo valores de los parámetros.

Figura 1.3: Soluciones para el caso **2(a)**.

(b) Cuando $m - 2A > 2k^2$ y $m + A < 0$ usando la ecuación (1.22) se obtiene de nuevo la solución periódica triangular que da como solución de la ecuación (1.22)

$$\psi(\zeta) = \left[\frac{8\alpha \tan^2[\pm\sqrt{\frac{\alpha}{3}}(\zeta + \zeta_0)]}{3\beta(3 - \tan^2[\pm\sqrt{\frac{\alpha}{3}}(\zeta + \zeta_0)])} \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)},$$

y para su contraparte singular obtenemos

$$\psi(\zeta) = \left[\frac{8\alpha \cot^2[\pm\sqrt{\frac{\alpha}{3}}(\zeta + \zeta_0)]}{3\beta(3 - \cot^2[\pm\sqrt{\frac{\alpha}{3}}(\zeta + \zeta_0)])} \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)}.$$

Las gráficas que representan estas soluciones son muy similares a las obtenidas para el caso 1(b) y representadas en las figuras (1.2a) y (1.2b).

3. Supongamos que $c = 0$ y

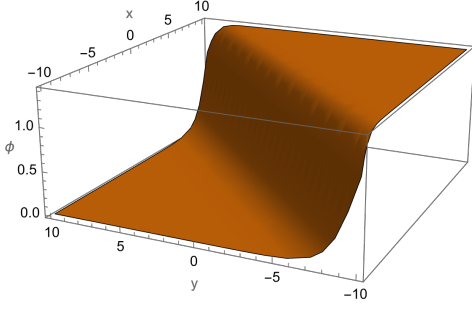
$$A_{1,2} = \frac{-11m \pm \sqrt{m[133(\lambda + \mu) - 96k^2]}}{6},$$

cuando $m - 2A > 2k^2$ y $m + A < 0$, la solución de la ecuación (1.22) toma la forma

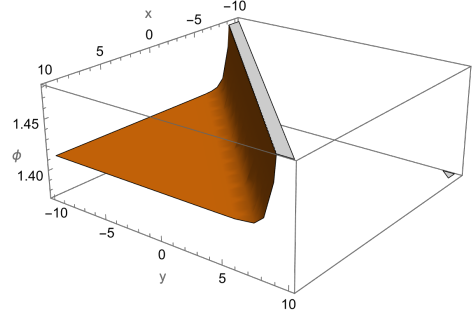
$$\psi(\zeta) = \left[-\frac{\alpha}{\beta}(1 + \tanh[\pm\sqrt{\alpha}(\zeta + \zeta_0)]) \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)}, \quad (1.28)$$

y análogamente para la solución singular se obtiene

$$\psi(\zeta) = \left[-\frac{\alpha}{\beta}(1 + \coth[\sqrt{\alpha}(\zeta + \zeta_0)]) \right]^{1/2} e^{i(\zeta + \zeta_0)}. \quad (1.29)$$



(a) Solución de solitón Kink con el valor de los parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = -1$.



(b) Solución singular para la contraparte de solitón Kink.

Figura 1.4: Soluciones para el caso **3**.

Eligiendo el valor de las parámetros como $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, observamos el perfil de una solución de solitón kink representada en la figura (1.4a) y el perfil de su contraparte singular en la figura (1.4b).

1.3. Soluciones de cuasi-solitones brillantes para la cq-NLSE

Adicionalmente, podemos obtener diferentes soluciones de la ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger por el método regular [14] para obtener diferentes soluciones para el modelo de la ecuación no lineal de Schrödinger con no linealidades φ^3 - φ^5

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} \pm \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + |\varphi|^2\varphi - \alpha|\varphi|^4\varphi = 0, \quad (1.30)$$

la ecuación (1.30) está escrito en unidades de solitón estándar.

Para encontrar la solución estacionaria se introduce el siguiente ansatz para la función de onda

$$\varphi(x) = q^{1/2}(x, t)e^{i\sigma(x, t)}, \quad (1.31)$$

con $q(x, t)$ y $\sigma(x, t)$ funciones reales. Se usa las siguientes condiciones de frontera

- $q = |\varphi|^2 = q_s; \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{q=q_0} = 0$, es decir, q_s es un extremo de $|\varphi|^2$.
- $q = |\varphi|^2 = q_0$ a $x = \pm\infty$, $\left(\frac{\partial^n q}{\partial x^n} \right)_{q=q_0} = 0$, $n = 1, 2, \dots$ es decir q_0 es el valor asintótico de $|\varphi|^2$.
- $q_0 = 0$ para soluciones brillantes, $q_0 \neq 0$ para soluciones grises y oscuros.

Obtenemos las derivadas de la ecuación (1.31)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}q^{-1/2} \frac{\partial q}{\partial t} e^{i\sigma} + iq^{1/2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{i\sigma}, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}q^{-1/2} q_{xx} e^{i\sigma} - \frac{1}{4}q^{-3/2} q_x^2 e^{i\sigma} + iq^{-1/2} q_x \sigma_x e^{i\sigma} + iq^{1/2} \sigma_{xx} e^{i\sigma} - q^{1/2} \sigma_x^2 e^{i\sigma}, \quad (1.33)$$

sustituyendo estas derivadas en la ecuación (1.30) se obtiene

$$\frac{iq_t}{2q^{1/2}} - \sigma_t q^{1/2} \pm \frac{i\sigma_x q_x}{2q^{1/2}} \mp \frac{\sigma_x^2 q^{1/2}}{2} \pm \frac{q_{xx}}{4q^{1/2}} \mp \frac{q_x^2}{8q^{3/2}} \pm i\sigma_{xx} q^{1/2} + |\varphi|^2 q^{1/2} - \alpha |\varphi|^4 q^{1/2} = 0, \quad (1.34)$$

utilizando la condición de frontera $|\varphi|^2 = q_s = q$ y a la vez multiplicando por $q^{1/2}$ en ambos lados de la igualdad

$$\frac{iq_t}{2} - \sigma_t q \pm \frac{i\sigma_x q_x}{2} \mp \frac{q\sigma_x^2}{2} \pm \frac{q_{xx}}{4} \mp \frac{q_x^2}{8q} \pm \frac{i\sigma_{xx} q}{2} + q^2 - \alpha q^3 = 0. \quad (1.35)$$

Separando en parte real e imaginaria

$$\frac{\partial q}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \quad (1.36)$$

y

$$-\sigma_t q \mp \frac{q\sigma_x^2}{2} \pm \frac{q_{xx}}{4} \mp \frac{q_x^2}{8q} + q^2 - \alpha q^3 = 0,$$

$$\pm \frac{1}{4q} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) \mp \frac{1}{8q^2} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + q - \alpha q^2 = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2,$$

$$\Rightarrow \pm \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{q} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \pm 4q^2 \mp \frac{8}{3} \alpha q^3 \right] = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2. \quad (1.37)$$

Considerando las soluciones estacionarias $\partial q/\partial t = 0$. Haciendo la integración necesaria se obtiene la expresión para la fase

$$\sigma(x, t) = \int \frac{C_1}{q(x, t)} dx + \Omega t, \quad (1.38)$$

y la ecuación diferencial ordinaria para la amplitud $q(x)$ es

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = \pm \frac{8}{3} \alpha q^4 \mp 4q^3 \pm 8\Omega q^2 \pm C_2 q - 4C_1^2, \quad (1.39)$$

donde Ω, C_1, C_2 son constantes de integración.

Las soluciones estacionarias localizadas para solitones brillantes se siguen directamente de la ecuación (1.39) y se asume que $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. De acuerdo con las condiciones de frontera, la solución exacta para el solitón brillante es dada por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 &= \pm \frac{8}{3} \alpha q^4 \mp 4q^3 \pm 8\Omega q^2, \\ \frac{dq}{dx} &= \sqrt{4q^2 \left(\frac{2}{3} \alpha q^2 - q + 2\Omega\right)}, \\ \Rightarrow \int dx &= \int \frac{dq}{2q \sqrt{\frac{2}{3} \alpha q^2 - q + 2\Omega}}, \end{aligned}$$

después de integrar las ecuaciones anteriores se obtiene

$$q(x) = \frac{4\Omega}{1 + \sqrt{1 - \frac{16}{3} \alpha \Omega} \operatorname{csch}(2x\sqrt{2\Omega})}, \quad (1.40)$$

donde

$$\Omega > 0 \quad \text{y} \quad \alpha \Omega < \frac{3}{16}$$

y $2\Omega = \tilde{q}_s$ es un extremo de la solución de solitón para la NLSE cúbica.

Finalmente, para la función de onda $\varphi(x, t)$ se tiene

$$\varphi(x) = q^{1/2}(x, t) e^{i\sigma(x, t)},$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi(x, t) &= \frac{\sqrt{4\Omega}e^{i\Omega t}}{\left[\sqrt{1 - \frac{16}{3}\alpha\Omega\text{csch}(2x\sqrt{2\Omega})} + 1\right]^{1/2}} \\ \Rightarrow \varphi(x, t) &= \frac{\sqrt{2\tilde{q}_s}e^{i\tilde{q}_s t/2}}{\left[1 + \sqrt{1 - \frac{8}{3}\alpha\tilde{q}_s\text{csch}(2x\sqrt{\tilde{q}_s})}\right]^{1/2}}\end{aligned}\quad (1.41)$$

1.4. Soluciones de cuasi-solitón grises y oscuros para la cq-NLSE.

Consideremos la solución localizada estacionaria para la ecuación (1.30) de la siguiente forma

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = (q_0 - q)^2(q - q_s)\left(-\frac{8}{3}\alpha q + B\right), \quad (1.42)$$

teniendo en cuenta las condiciones de frontera para solitones grises y oscuros. Asumiendo ahora que $q_s \neq 0$, $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$ e igualando la ecuación (1.39) con la ecuación (1.42) se tiene

$$-\frac{8}{3}\alpha q^4 + 4q^3 - 8\Omega q^2 - C_2 q - 4C_1^2 = \left(q_0^2 - 2q_0 q + q^2\right)\left(qB - \frac{8}{3}\alpha q^2 - q_s B + \frac{8}{3}\alpha q q_s\right), \quad (1.43)$$

separando los términos comunes de q^3, q^2, q, q^0 se obtiene

$$B = 4\left(1 - \frac{2}{3}\alpha q_s - \frac{4}{3}\alpha q_0\right), \quad (1.44)$$

$$\Omega = q_0 + \frac{q_s}{2} - \alpha\left(q_0^2 + \frac{2}{3}q_0 q_s + \frac{1}{3}q_s^2\right), \quad (1.45)$$

$$C_1 = q_0\sqrt{q_s\left(1 - \frac{2}{3}\alpha q_s - \frac{4}{3}\alpha q_0\right)}. \quad (1.46)$$

Se resolverá la ecuación (1.42), considerando el cambio de variable de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\eta = q_0 - q; & \quad \Rightarrow q - q_s = q_0 - q_s - \eta \quad \text{sí} \quad R = q_0 - q_s \\ \frac{d\eta}{dx} = -\frac{dq}{dx}; & \quad \Rightarrow q - q_s = R - \eta\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = \eta^2(R - \eta)\left(B - \frac{8}{3}\alpha(q_0 - \eta)\right), \quad (1.47)$$

tomando la definición de B se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 &= \eta^2(R - \eta) \left(-\frac{8}{3}\alpha q_0 + \frac{8}{3}\alpha\eta + 4 - \frac{8}{3}\alpha q_s - \frac{16}{3}\alpha q_0\right), \\
\rightarrow \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 &= 4\eta^2 \left[R - \eta + \frac{2}{3}\alpha\eta(R - \eta) - \frac{2}{3}\alpha q_s(R - \eta) - 2\alpha q_0(R - \eta)\right], \\
\rightarrow \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 &= 4\eta^2 \left[-\frac{2}{3}\alpha\eta^2 + \eta\left(\frac{8}{3}\alpha q_0 - 1\right) - 2\alpha q_0 R - \frac{2}{3}\alpha q_s R + R\right], \\
\therefore dx &= \frac{d\eta}{2\eta\sqrt{-\frac{2}{3}\alpha\eta^2 - \left(1 - \frac{8}{3}\alpha q_0\right)\eta + R(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s)}},
\end{aligned}$$

después de integrar se obtiene

$$2x = \frac{1}{\sqrt{R - 2\alpha q_0 R - \frac{2}{3}\alpha q_s R}} \operatorname{arccosh} \left[\frac{2R(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s) + \eta(\frac{8}{3}\alpha q_0 - 1)}{\eta\sqrt{(\frac{8}{3}\alpha q_0 - 1)^2 - 4\left[R(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s)\right](-\frac{2}{3}\alpha)}} \right],$$

$$\cosh\left(2x\sqrt{R - 2\alpha q_0 R - \frac{2}{3}\alpha q_s R}\right) = \frac{2R(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s) + \eta(\frac{8}{3}\alpha q_0 - 1)}{\eta\left(1 - \frac{4}{3}\alpha q_0 - \frac{4}{3}\alpha q_s\right)},$$

$$\therefore \eta = \frac{2R(1 - 2q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s)}{\left(1 - \frac{4}{3}\alpha(q_0 + q_s)\right) \cosh(2x\sqrt{R - 2\alpha q_0 R - \frac{2}{3}\alpha q_s R}) - (\frac{8}{3}\alpha q_0 - 1)},$$

si volvemos a las variables originales y se considera $\zeta = 1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s$ y $\Omega^2 = R\zeta$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow q(x) &= q_0 - \frac{2\Omega^2}{\left(1 - \frac{4}{3}\alpha(q_0 + q_s)\right) \cosh(2\Omega x) - (\frac{8}{3}\alpha q_0 - 1)}, \\
q(x) &= \frac{q_0 \left[\left(1 - \frac{4}{3}\alpha(q_0 + q_s)\right) \cosh(2\Omega x) + 1 - \frac{8}{3}\alpha q_0 \right] - 2\Omega^2}{1 - \frac{8}{3}\alpha q_0 + \left(1 - \frac{4}{3}\alpha(q_0 + q_s)\right) \cosh(2\Omega x)},
\end{aligned}$$

usando propiedades trigonométricas hiperbólicas, se obtiene

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{q_0 \left[2 \cosh^2(\Omega x) - \frac{8}{3} \alpha (q_0 + q_s) \cosh^2(\Omega x) - \frac{4}{3} \alpha R \right] - 2\Omega^2}{2 \cosh^2(\Omega x) - \frac{8}{3} \alpha (q_0 + q_s) \cosh^2(\Omega x) - \frac{4}{3} \alpha R}, \\
q(x) &= \frac{q_0 \left(\left(\zeta + \frac{2}{3} \alpha R \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha R \right) - \Omega^2}{\left(\zeta + \frac{2}{3} \alpha R \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha R \zeta}, \\
q(x) &= \frac{q_0 \left(\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) - R \zeta^2}{\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha \Omega^2}, \\
q(x) &= \frac{q_0 \left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha \Omega^2 \right) \sinh^2(\Omega x) + q_0 \zeta^2 - R \zeta^2}{\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha \Omega^2},
\end{aligned} \tag{1.48}$$

por lo tanto se obtiene

$$q(x) = \frac{q_0 \left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha \Omega^2 \right) \sinh^2(\Omega x) + q_s \zeta^2}{\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha \Omega^2 \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha \Omega^2}. \tag{1.49}$$

Para obtener la expresión para la fase de solitón gris, se sustituye la ecuación (1.48)

en la ecuación (1.38), esto es

$$\begin{aligned}
\sigma(x, t) &= \int \frac{C_1}{\frac{q_0 \left(\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) - R \zeta^2}{\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha \Omega^2}} dx + \Omega t, \\
\sigma(x, t) &= C_1 \int \frac{\left[\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha \Omega^2 \right] + R \zeta^2 - R \zeta^2}{q_0 \left(\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) - R \zeta^2} dx + \Omega t, \\
\sigma(x, t) &= \int \sqrt{q_s \left(1 - \frac{4}{3} \alpha q_0 - \frac{2}{3} \alpha q_s \right)} dx \\
&\quad + C_1 \int \frac{R \zeta^2}{q_0 \left(\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3} \alpha R \zeta \right) - R \zeta^2} + \Omega t,
\end{aligned}$$

después de integrar se obtiene

$$\sigma(x, t) = x\sqrt{q_s(\zeta + \frac{2}{3}\alpha q_0) + \Omega t + \frac{C_1 R \zeta^2}{\Omega}} \dots$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(q_0 \zeta^2 - R \zeta^2)(q_0(\zeta^2 + \frac{2}{3}\alpha \Omega^2)) - q_0 \zeta^2 - R \zeta^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{q_0(\zeta^2 + \frac{2}{3}\alpha \Omega)}{q_0 \zeta^2 - R \zeta^2} - 1} \tanh(\Omega x) \right) \right],$$

$$\sigma(x, t) = x\sqrt{q_s(\zeta + \frac{2}{3}\alpha q_0) + \Omega t + \frac{C_1 R \zeta^2}{\Omega}}$$

$$+ \frac{C_1 R \zeta^2}{\Omega} \left[\frac{1}{\sqrt{q_s \zeta^2 (\frac{2}{3}\alpha \Omega^2 q_0 - R \zeta^2)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{R(\zeta + \frac{2}{3}\alpha q_0)}{q_s \zeta}} \tanh(\Omega x) \right) \right],$$

por lo tanto

$$\sigma(x, t) = x\sqrt{q_s(\zeta + \frac{2}{3}\alpha q_0) + \arctan \left(\sqrt{\frac{R(\zeta + \frac{2}{3}\alpha q_0)}{q_s \zeta}} \tanh(\Omega x) \right) + \quad (1.50)$$

$$+ \left[q_0 + \frac{q_s}{2} - \alpha(q_0^2 + \frac{2}{3}q_0 q_s + \frac{q_s^2}{3}) \right] t.$$

Se puede observar que la fase del solitón gris es dependiente del tiempo y de la coordenada, es decir, los solitones grises son topológicos.

Consideremos ahora el caso de la solución de solitones oscuros cuando $q_s = 0$ y por tanto $C_1 \neq 0$. De la ecuación (1.49) vemos que

$$q(x) = \frac{q_0 \left[(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s)^2 + \frac{2}{3}\alpha(q_0 - q_s)(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s) \right] \sinh^2(\Omega x)}{\left[(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s)^2 + \frac{2}{3}\alpha(q_0 - q_s)(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s) \right] \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3}\alpha(q_0 - q_s)(1 - 2\alpha q_0 - \frac{2}{3}\alpha q_s)},$$

$$q(x) = \frac{q_0 \left[(1 - 2\alpha q_0)(1 - \frac{4}{3}\alpha q_0) \sinh^2(\Omega x) \right]}{\left[(1 - 2\alpha q_0)(1 - \frac{4}{3}\alpha q_0) \cosh^2(\Omega x) \right] - \frac{2}{3}\alpha q_0(1 - 2\alpha q_0)},$$

por lo tanto una solución estacionaria localizada que corresponde a un solitón oscuro es de la siguiente forma

$$q(x) = \frac{q_0(1 - \frac{4}{3}\alpha q_0) \sinh^2(\Omega x)}{(1 - \frac{4}{3}\alpha q_0) \cosh^2(\Omega x) - \frac{2}{3}\alpha q_0}. \quad (1.51)$$

y de la ecuación (1.50) se puede ver facilmente que la expresión para la fase es de la siguiente forma

$$\sigma(x, t) = (q_0 - \alpha q_0^2)t. \quad (1.52)$$

La solución más general para solitones grises y oscuros es usando la transformación de Galileo y utilizando una nueva variable $\xi = x - vt$

$$q(\xi) = \frac{q_0 \left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha \Omega^2 \right) \sinh^2(\xi \Omega) + q_s \zeta^2}{\left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha \Omega^2 \right) \cosh^2(\xi \Omega) - \frac{2}{3} \alpha \Omega^2}, \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = & \left[v + \sqrt{q_s \left(\zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha q_0 \right)} \right] x - \frac{v^2 t}{2} + \left[q_0 + \frac{q_s}{2} - \alpha \left(q_0^2 + \frac{2 q_s q_0}{3} + \frac{q_s^2}{3} \right) \right] t \\ & + \arctan \left[\sqrt{\frac{R \left(\zeta + \frac{2}{3} \alpha q_0 \right)}{q_s \zeta}} \tanh(\Omega \xi) \right]. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Estas son las soluciones de cuasi-solitones grises y oscuros para la cq-NLSE mediante un anzats de tranformación; no es posible obtener estas soluciones en la teoría de perturbación ya que los cuasi-solitones inducidos son efectos combinados de la distribución de dispersión de la velocidad de grupo(GVD)y la distribución de la no linealidad de orden superior.

Análisis perturbativo para solitones oscuros

2.1. Aproximación adiabática

La aproximación adiabática fue desarrollada inicialmente en los años setenta en trabajos de Karpman y Maslov [24,25] en donde presentaron uno de los enfoques más universales para hallar soluciones tipo solitones para sistemas no lineales perturbados. La idea original era considerar interacciones entre solitones como una deformación lenta de los parámetros del solitón, se basaron en la teoría de dispersión inversa en donde encontraron la dependencia temporal de los parámetros de la ecuación

$$u(x, t) = \eta(t) \operatorname{sech}(\eta(t)[x - q(t)]) \exp[i\varphi(t) - i\delta(t)x], \quad (2.1)$$

que es solución de la ecuación no lineal de Schrödinger perturbada. De la teoría de dispersión inversa se toma

$$\hat{L} = iP \frac{\partial}{\partial x} + Q(x), \quad hg\hat{A} = M\hat{D} + \hat{C}(u), \quad (2.2)$$

donde $\hat{L}(u)$ y $\hat{A}(u)$ son operadores lineales que dependen de $u(x, t)$ y actúan en el espacio funcional ψ , ahora sustituimos la ecuación (2.2) en el problema de valores propios del operador \hat{L} , que es la ecuación:

$$\hat{L}\psi(x, t) = \lambda(t)\psi(x, t), \quad (2.3)$$

se encuentra las funciones y los coeficientes de Jost:

$$f(x, \lambda) = \frac{\exp(i\lambda z/2\nu + i\lambda t)}{\lambda - u + i\nu} \begin{pmatrix} \nu \operatorname{sech}(z) \exp[-iuz/\nu - i\delta] \\ \lambda - u + i\nu \tanh(z) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$g(x, \lambda) = a(\lambda) \bar{f}(x, \lambda), \quad a(\lambda) = (\lambda - u - i\nu)/(\lambda - u + i\nu), \quad b(\lambda) = 0. \quad (2.5)$$

El espectro discreto consiste en un único valor propio:

$$\lambda = \xi \equiv u + i\nu, \quad (2.6)$$

se puede verificar que las funciones $f(x, \lambda)$ y $g(x, \lambda)$ para $\lambda = \zeta$ son proporcionales entre

$$\text{sí: } g(x, \zeta) = \rho f(x, \zeta),$$

$$\rho = i \exp(i\delta - 2i\zeta\xi),$$

considerando $z = \eta(t)[x - q(t)]$ se obtiene

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\eta} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) u^*(z) dz, \quad (2.7)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{1}{\eta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) \tanh(z) u^*(z) dz, \quad (2.8)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\delta + \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) z u^*(z) dz, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) [1 - z \tanh(z)] u^*(z) dz + \frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2) + q \frac{d\delta}{dt}, \quad (2.10)$$

las ecuaciones (2.7) a (2.10) nos dice que, dependiendo de la forma funcional de las perturbaciones, las características de las coordenadas colectivas del perfil del solitón no per-

turbado Ec. (2.1) se pueden perder, como por ejemplo la invariancia del corrimiento de frecuencias δ , de la amplitud η y del ancho.

Si bien, la aproximación adiabática ha sentado las bases de diferentes métodos perturbativos, incluidos los mencionados anteriormente. Esta aproximación no resulta adecuada cuando se estudia la evolución de solitones oscuros cuando se encuentran presentes términos perturbativos. Lo anterior debido a que ningún método basado en las ideas de Karpman y Maslow puede determinar de manera exacta la evolución de todos los parámetros básicos que caracterizan al solitón simultáneamente (anchura, velocidad, fase) y sus cantidades conservadas. Sin embargo para lidiar con el problema anterior, Ablowitz et al. propusieron un análisis directo para estudiar la evolución de estas estructuras [75].

2.2. Aproximación directa a la perturbación de solitones oscuros

Para analizar la evolución de solitones oscuros consideraremos el método directo propuesto por Ablowitz et al. mencionado con anterioridad [75].

Consideremos la ecuación NLS adimensional con dispersión normal

$$iU_z - \frac{1}{2}U_{tt} + |U|^2U = \epsilon F[U], \quad (2.11)$$

donde $\epsilon \ll 1$. Además, supondremos un valor límite que no se desvanece en el infinito, es decir, $|U| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. El efecto que tiene la perturbación sobre el comportamiento de la solución en el infinito es independiente de cualquier fenómeno local, como pulsos que no decaen en el infinito, es decir, los solitones oscuros.

Estos solitones oscuros son ondas que se propagan constantemente a lo largo de un fondo de onda continua que soporta la intensidad de la luz constante y los solitones oscuros

reducen la intensidad de la luz durante la transmisión; el caso más extremo en la familia de solitones oscuros en el llamado solitón negro, este, en la intensidad de la luz cae a cero y la onda se localiza espacialmente con velocidad cero.

Veamos como evoluciona un solitón oscuro bajo perturbación, para ello y simplificar cálculos, sacamos la evolución rápida de la fase de fondo $U = ue^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]}$, entonces

$$\begin{aligned} U_z &= u_z e^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]} + iuu_\infty^2 e^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]}, \\ U_{tt} &= u_{tt} e^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]}, \\ |U|^2 U &= |u|^2 u e^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]}, \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación (2.11), se tiene

$$iu_z e^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]} - uu_\infty^2 e^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]} - \frac{1}{2}u_{tt} e^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]} + |u|^2 u e^{i[\int_0^z u_\infty(s)^2 ds]} = \epsilon F[u],$$

por lo tanto la ecuación (2.11) se convierte en

$$iu_z - \frac{1}{2}u_{tt} + (|u|^2 - u_\infty^2)u = \epsilon F[u], \quad (2.12)$$

la solución de solitón oscuro para la ecuación no perturbada es dada por

$$u_s(t, z) = \left(A + iB \tanh[B(t - Az - t_0)] \right) e^{i\sigma_0}, \quad (2.13)$$

donde los parámetros centrales del solitón A, B, t_0, σ_0 son todos reales, la magnitud del fondo $(A^2 + B^2)^{1/2} = u_\infty$ y la diferencia de fase a través del solitón es $2 \tan^{-1}(B/A)$, $A \neq 0$.

Cuando $A = 0$, la ecuación (2.13) describe un solitón negro, el cual tiene una diferencia de fase de π .

2.2.1. Corrección de primer orden

Se escribe la solución en términos de la amplitud y la fase $u = qe^{i\phi}$, donde q y ϕ son ambas funciones reales de z y t , al derivar se obtiene

$$\begin{aligned} u_z &= e^{i\phi}(q_z + iq\phi_z) \\ u_{tt} &= e^{i\phi}(q_{tt} + 2iq_t\phi_t + iq\phi_{tt} - q\phi_t^2) \\ u|u|^2 &= e^{i\phi}q|q|^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

asi la ecuación (2.12) se convierte

$$iq_z - \phi_z q - \frac{1}{2}\left(q_{tt} + 2i\phi_t q_t + q\{i\phi_{tt} - \phi_t^2\}\right) + \left(|q|^2 - u_\infty^2\right)q = \epsilon F[u]. \tag{2.15}$$

Se emplea el método de multi-escalas introduciendo una variable de escala lenta $Z = \epsilon z$ con los parámetros A , B , t_0 , σ_0 siendo funciones de Z y expandir a q y ϕ como series en ϵ : $q(Z, z, t) = q_0 + \epsilon q_1 + O(\epsilon^2)$ y $\phi(Z, z, t) = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + O(\epsilon^2)$, se tiene en $O(1)$

$$iq_{0z} - \phi_{0z}q_0 - \frac{1}{2}\left(q_{0tt} + 2i\phi_{0t}q_{0t} + q_0\{i\phi_{0tt} - \phi_{0t}^2\}\right) + \left(|q_0|^2 - u_\infty^2\right)q_0 = 0,$$

separando en parte real e imaginaria se obtiene

$$q_{0z} = \frac{1}{2}\left(2\phi_{0t}q_{0t} + q_0\phi_{0tt}\right), \tag{2.16a}$$

$$\phi_{0z}q_0 = -\frac{1}{2}\left(q_{0tt} - \phi_{0t}^2q_0\right) + \left(|q_0|^2 - u_\infty^2\right)q_0, \tag{2.16b}$$

con la solución general de solitón oscuro

$$q_0 = \left(A(Z)^2 + B(Z)^2 \tanh^2(x)\right)^{1/2}, \tag{2.17a}$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}\left[\frac{B(Z)}{A(Z)} \tanh(x)\right] + \sigma_0(Z), \tag{2.17b}$$

donde $x = B \left(t - \int_0^z A(\epsilon s) ds - t_0(Z) \right)$. Para un solitón negro, la forma de solución (2.17) se toma como

$$q_0(Z, z, t) = u_\infty \tanh \left[u_\infty (t - t_0(Z)) \right] \quad (2.18a)$$

$$\phi_0(Z, z, t) = \sigma_0(Z), \quad (2.18b)$$

donde notamos que esta representación se permite que q_0 sea negativo. Para $O(\epsilon)$, se tiene que de la ecuación (2.15)

$$i q_{0z} + i q_{1z} - \phi_{0z} q_0 - \phi_{0z} q_1 - \phi_{1t} q_0 + 3 q_0^2 q_1 - \frac{1}{2} \left(q_{1tt} + 2i \phi_{0t} q_{1t} + 2i \phi_{1t} q_{0t} + i q_0 \phi_{1tt} + i q_1 \phi_{0tt} - q_0 \phi_{0t}^2 - q_1 \phi_{0t}^2 - q_0 \phi_{1t} \right) - u_\infty^2 q_1 = \epsilon F[u],$$

separando en parte real e imaginaria se obtiene

$$q_{1z} = \frac{1}{2} \left[2(\phi_{0t} q_{1t} + q_{0t} \phi_{1t}) + q_0 \phi_{1tt} + q_1 \phi_{0tt} \right] + \text{Im}[F] - q_{0z} \quad (2.19a)$$

$$\phi_{1z} q_0 = -q_1 \phi_{0z} + \frac{1}{2} \left[q_{1tt} - (2\phi_{0t} \phi_{1t}) q_0 - \phi_{0t}^2 q_1 \right] + 3 q_0^2 q_1 - u_\infty^2 q_1 + \text{Re}[F] - \phi_{0z} q_0. \quad (2.19b)$$

Considere la perturbación el cual corresponde a un filtro disipativo lineal, es decir, aquel filtro que se aplica a un operador lineal a una señal variable con el tiempo y que se usan para el procesamiento de señales.

$$F[u] = i\gamma u_{tt}, \quad \gamma > 0, \quad (2.20)$$

y para ser concretos en el orden de avance, se asume un pulso negro, es decir, $u_\infty(Z) = cte$.

Esto deja en términos de evolución lenta

$$q_{0z} = -t_{0z} q_{0t} \quad \phi_{0z} = \sigma_{0z}. \quad (2.21)$$

Si se busca una solución estacionaria, $q_{1z} = \phi_{1z} = 0$, y observar que $\phi_{0t} = \phi_{0tt} = 0$,

entonces las ecuaciones (2.19) se reduce a

$$0 = \frac{1}{2} \left[2(q_{0t}\phi_{1t} + q_0\phi_{1tt}) \right] + Im[F] + t_{0z}q_{0t} \quad (2.22a)$$

$$0 = -\frac{1}{2}q_{1tt} + 3q_0^2q_1 - u_\infty^2q_1 + Re[F] - \sigma_{0z}q_0, \quad (2.22b)$$

donde $Im[F] = \gamma q_{0tt}$ y $Re[F] = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones se desacoplan en 2 ecuaciones diferenciales lineales de 2^{do} orden y se encuentran las soluciones exactas

$$q_1 = \frac{\sigma_{0z}}{4u_\infty} \left[\sinh(2u_\infty\{t - t_0\}) + 2u_\infty(t - t_0) \right] \text{sech}^2\left(u_\infty(t - t_0)\right) \quad (2.23a)$$

$$\phi_1 = \frac{4}{3}\gamma \ln \left[\cosh(u_\infty(t - t_0)) \right] - t_{0z}(t - t_0), \quad (2.23b)$$

donde se han elegido los parámetros libres para eliminar el crecimiento exponencial y mantener la propiedad antisimétrica de q y ϕ , respectivamente. Observando el comportamiento asintótico cuando $t \rightarrow \pm\infty$, se tiene que

$$\phi_{1t}^\pm = \pm \frac{4}{3}\gamma u_\infty - t_{0z} \quad \text{y} \quad q_1^\pm = \pm \frac{\sigma_{0z}}{2u_\infty}, \quad (2.24)$$

donde el superíndice \pm , indica el valor de la función $t \rightarrow \pm\infty$

2.2.2. La capa límite

Observemos que $q_1 \rightarrow 0$ y $\phi_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Como un resultado, la solución de orden $\epsilon u \approx (q_0 + \epsilon q_1)e^{i(\phi_0 + \epsilon \phi_1)}$ no coincide con las condiciones de contorno en el infinito. Por tanto, el problema ahora se divide en dos regiones: la región que coincide con el comportamiento de la condición de contorno que no decae impuesta en el infinito que no se ve afectada por el solitón y la región en la cual los términos de corrección $O(\epsilon)$ son válidos y la solución es quasi-estacionaria. Se introduce una capa límite en la que hay una transición del valor distinto de cero en el término de perturbación a las condiciones de contorno en el

infinito. Tener en cuenta que en esta sección se considera el caso más general cuando u_∞ es una función de $Z = \epsilon z$. Se encuentra que el comportamiento de esta capa límite, donde se emparejan las regiones. Para esto, volvemos a la ecuación (2.11) y se busca una solución perturbada alrededor de la solución en el infinito, es decir, $u \approx (u_\infty + \epsilon\omega)e^{i(\phi^\pm + \epsilon\omega)}$, donde ω y θ son funciones reales de z y t , así la ecuación se satisface automáticamente en $O(1)$ y se tiene en $O(\epsilon)$

$$-\theta_z u_\infty + i\omega_z - \frac{1}{2} \left[i u_\infty \theta_{tt} + \omega_{tt} \right] + 2u_\infty^2 \omega = F[u_\infty + \epsilon\omega] - \left(i \frac{du_\infty}{dz} - u_\infty \frac{d\phi^\pm}{dz} \right), \quad (2.25)$$

el lado derecho es en realidad un término de orden superior por lo que puede eliminarse sin ninguna dificultad, entonces, al orden principal, la capa límite es independiente de la perturbación. Dividiendo la ecuación (2.25) en la parte real e imaginaria

$$\theta_z u_\infty = 2u_\infty^2 \omega - \frac{1}{2} \omega_{tt} \quad \text{y} \quad \omega_z = \frac{1}{2} u_\infty \omega_{tt}. \quad (2.26)$$

Empleando las condiciones de compatibilidad $\omega_{zzt} = \omega_{tzz}$ y $\theta_{zzt} = \theta_{tzz}$, derivando las ecuaciones (2.26) se obtiene

$$\begin{aligned} \theta_{zz} u_\infty &= 2u_\infty^2 \omega_z - \frac{1}{2} \omega_{ttz} & \text{y} & & \omega_{zz} &= \frac{1}{2} u_\infty \omega_{ttz}, \\ \rightarrow \theta_{zz} u_\infty &= 2u_\infty^2 \left(\frac{1}{2} u_\infty \theta_{tt} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{2} u_\infty \theta_{tt} \right) & \text{y} & & \omega_{zz} &= \frac{1}{2} u_\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(2u_\infty \omega - \frac{1}{2} \frac{w_{tt}}{u_\infty} \right), \\ \Rightarrow \theta_{zz} &= u_\infty^2 \theta_{tt} - \frac{1}{4} u_\infty \theta_{ttt} & \text{y} & & \omega_{zz} &= u_\infty^2 \omega_{tt} - \frac{1}{4} w_{ttt}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

que es la misma ecuación para ambas funciones aunque necesita una solución diferente para cada una. Esto se debe a las condiciones de contorno para hacer coincidir correctamente la región interna con la región externa. En el lado izquierdo del estante, se hace coincidir el estante quasi-estacionario distinto de cero con el estado de equilibrio en el infinito; las condiciones de contorno son

$$\omega(-\infty) = 0, \quad \omega(\infty) = q_1^-, \quad \theta(-\infty) = 0, \quad \theta_t(\infty) = \phi_{1t}^-. \quad (2.28)$$

En el lado derecho del estante las condiciones de contorno son

$$\omega(-\infty) = q_1^+, \quad \omega(\infty) = 0, \quad \theta_t(-\infty) = \phi_{1t}^+, \quad \theta(\infty) = 0. \quad (2.29)$$

Si hacemos $\omega = e^{i\left(kt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^z \omega(s,k) ds\right)}$, entonces la relación de dispersión para las ecuaciones (2.27)

$$\omega^2 = u_\infty^2(z)k^2 + \frac{1}{4}k^4. \quad (2.30)$$

Para ondas largas ($k \ll 1$), tenemos aproximadamente $\omega(Z,k) \approx \pm u_\infty(z)k$ o $\omega = e^{i\left(kt \pm \frac{1}{\epsilon} \int_0^Z u_\infty(Z)\right)}$. Por tanto, vemos que las soluciones de onda larga se mueven con velocidad instantánea $V(z) = \pm u_\infty(z)$.

Con esto, se buscan soluciones a las ecuaciones (2.27) en un marco de referencia móvil:

$$x = t - \int_0^z V dz, \quad \zeta = z \text{ y } V = \pm u_\infty$$

$$\begin{aligned} \omega_{\zeta\zeta} &= 2V\omega_{\zeta x} - \frac{1}{4}\omega_{xxxx}, \\ \theta_{\zeta\zeta} &= 2V\theta_{\zeta x} - \frac{1}{4}\theta_{xxxx}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Supongamos que las derivadas con respecto a x son pequeñas, es decir, ondas largas, Se busca un equilibrio óptimo en las ecuaciones (2.31), tomamos

$$\partial_{\zeta\zeta} \ll \partial_{\zeta x} \sim \partial_{xxxx} \ll 1.$$

Con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2V\omega_{\zeta x} - \frac{1}{4}\omega_{xxxx}, \\ 0 &= 2V\theta_{\zeta x} - \frac{1}{4}\theta_{xxxx}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ahora hay dos soluciones similares que encontramos para satisfacer las condiciones de contorno (2.28) y (2.29) a partir de la coincidencia derivada de las dos regiones. Esto se hace usando el cambio de variable $\xi = x/\zeta^{1/3}$ para reducir las ecuaciones (2.31) a ecuaciones tipo Airy. Las soluciones son expresadas en términos de las integrales de las funciones de Airy

$$\omega(x) = c_1 \int_{-\infty}^{ax/\zeta^{1/3}} Ai(s) ds, \quad (2.33)$$

donde $a = -2\left(\frac{V}{3}\right)^{1/3}$. Observar que el signo de a depende del signo de la velocidad V , de modo que la forma de ω es válido en ambos límites. Para el límite de la izquierda $c_1 = q_1^-$ y para el límite de la derecha $c_1 = q_1^+$.

$$\theta(\zeta, x) = c_2 \int_{\pm\infty}^x \int_{-\infty}^{a\tilde{x}/\zeta^{1/3}} Ai(s) ds d\tilde{x}, \quad (2.34)$$

donde el límite inferior de la primera integral es $-\infty$ es para el límite izquierdo y $+\infty$ es para el límite derecho. Para el límite izquierdo se tiene que $c_2 = \phi_{1t}^-$ y para el límite derecho $c_2 = \phi_{1t}^+$. Un punto importante es que para el caso de un solitón negro hay dos capas límites que se alejan de la solución del solitón con velocidad u_∞ generando un estante.

2.2.3. Leyes de conservación perturbadas

Aún queda por resolver los parámetros de evolución lenta $\sigma_0(Z)$ y $t_0(Z)$ para el solitón negro. Esto se puede hacer derivando las ecuaciones para el crecimiento del estante a partir de las leyes de conservación perturbadas asociadas con la ecuación NLS a partir de la solución de orden principal y la información asintótica sobre la solución perturbada. El estante esta asociado con los parámetros asintóticos q_1^\pm y ϕ_{1t}^\pm que a su vez se expresan en términos de σ_{0z} y t_{0z} .

Se usa el Hamiltoniano H , la energía E , el momento I y el centro de la energía R que

están definidas como

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} (u_{\infty}^2 - |u|^2)^2 \right] dt, \quad (2.35)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - |u|^2] dt, \quad (2.36)$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} [u u_t^*] dt, \quad (2.37)$$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} t [u_{\infty}^2 - |u|^2] dt, \quad (2.38)$$

donde u^* denota el complejo conjugado.

Tenga en cuenta que dado que la energía total estándar sería infinita, se define la energía de un pulso oscuro como la diferencia de la energía total y la energía de una onda continua de magnitud correspondiente. Para la ecuación NLS sin perturbar, las primeras tres integrales son cantidades conservadas, mientras que la última se puede escribir en términos del momento, es decir, $dR/dz = -I$

Las ecuaciones de evolución para estas integrales son

$$\frac{dH}{dz} = \epsilon \left(E \frac{d}{dZ} u_{\infty}^2 + 2 \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F[u] u_z^* dt \right), \quad (2.39)$$

$$\frac{dE}{dz} = 2\epsilon \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} (F[u_{\infty}] u_{\infty} - F[u] u^*) dt, \quad (2.40)$$

$$\frac{dI}{dz} = 2\epsilon \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F[u] u_t^* dt, \quad (2.41)$$

$$\frac{dR}{dz} = -I + 2\epsilon \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} t (F[u_{\infty}] u_{\infty} - F[u] u^*) dt. \quad (2.42)$$

2.2.4. El solitón negro

Comenzamos con la energía de conservación perturbada

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - |u|^2] dt = 2\epsilon \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} (F[u_{\infty}] u_{\infty} - F[u] u^*) dt. \quad (2.43)$$

Sustituyendo en $u = qe^{i\phi}$, $F[u] = i\gamma u_{tt}$, $T = t - t_0$, expandiendo $q = q_0 + \epsilon q_1 + \dots$ y tomando los términos hasta $O(\epsilon)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - (qe^{i\phi})(qe^{-i\phi})] dt &= 2\epsilon \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\gamma u_{tt} u^*) dt, \\
\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - q^2] dt &= 2\epsilon \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\gamma (q_{tt} + 2iq_t \phi_t - q\phi_t^2 + iq\phi_{tt}) e^{i\phi} (qe^{-i\phi}) \right) dt, \\
\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - q_0^2 - 2\epsilon q_0 q_1] dT &= 2\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} (-\gamma q_{tt} q) dt, \\
\Rightarrow \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} [q_0^2 - u_{\infty}^2 + 2\epsilon q_0 q_1] dt &= 2\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \gamma q_{0TT} q_0 dT. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Para $O(1)$ la ecuación (2.44) se satisface, pues

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} [q_0^2 - u_{\infty}^2] dT = 0$$

Para $O(\epsilon)$ se tiene

$$\frac{d}{dz} \int_{-u_{\infty}z}^{u_{\infty}z} q_0 q_1 dT = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} q_{0T}^2 dT. \tag{2.45}$$

Esta es una ecuación para el cambio de energía causado por la propagación del estante. Nótese que el lado izquierdo de la ecuación (2.45) solo se está integrando sobre $T \in [-u_{\infty}z, u_{\infty}z]$ la región interna alrededor del solitón definido por las capas límites encontradas antes. Como q_0 y q_1 son solo funciones de T y Z , se puede aplicar el teorema fundamental del calculo para llegar a

$$u_{\infty} \left[q_1(u_{\infty}z) q_0(u_{\infty}z) + q_1(-u_{\infty}z) q_0(-u_{\infty}z) \right] = -\gamma u_{\infty}^3 \frac{4}{3}, \tag{2.46}$$

y para z grande, se toma $q_0 \rightarrow \pm u_{\infty}$ y $q_1 \rightarrow q_1^{\pm}$, dejandonos con

$$q_1^+ - q_1^- = -\frac{4}{3} \gamma u_{\infty}. \tag{2.47}$$

Al sustituirlo en la aproximación asintótica (2.24) encontrada anteriormente para q_1^{\pm} , se llega a una aproximación para σ_0 , esto es

$$\sigma_{0z} = -\gamma \frac{4}{3} u_{\infty}^2. \tag{2.48}$$

Ahora, se considera la conservación del momento modificado

$$\frac{d}{dz} Im \int_{-\infty}^{\infty} uu_t^* dt = 2\epsilon Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_t^* dt. \quad (2.49)$$

De nuevo, sea $u = qe^{i\phi}$, $F[u] = i\gamma u_{tt}$, $T = t - t_0$ y usar la expansión de perturbación para u hasta $O(\epsilon)$ esto es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} Im \int_{-\infty}^{\infty} qe^{i\phi}(e^{-i\phi}[q_t - iq\phi_t])dt &= 2\epsilon Re \int_{-\infty}^{\infty} i\gamma(q_{tt} + iq\phi_{tt} - q\phi_t^2 + 2iq_t\phi_t)(q_t - iq\phi_t)dt, \\ -\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} q^2\phi_T dT &= 2\epsilon Re \int_{-\infty}^{\infty} i\gamma q_T q_{TT} dT, \\ -\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} (q_0 + \epsilon q_1)^2(\phi_{0T} + \epsilon\phi_{1T})dT &= 2\epsilon Re \int_{-\infty}^{\infty} i\gamma(q_{0T} + \epsilon q_{1T})(q_{0TT} + \epsilon q_{1TT})dT, \\ \Rightarrow -\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} [q_0^2\phi_{0T} + \epsilon(q_0^2\phi_{1T} + 2q_0q_1\phi_{0T})]dT &= 2\epsilon Re \int_{-\infty}^{\infty} i\gamma q_{0T}q_{0TT}dT \end{aligned} \quad (2.50)$$

que, usando $\phi_{0T} = 0$, se reduce de la misma manera que la conservación de la energía

a

$$\phi_{1t}^+ + \phi_{1t}^- = 0. \quad (2.51)$$

Sustituyendo en la aproximación asintótica (2.24) encontrada antes para ϕ_{1t}^{\pm} se llega a una expresión para t_0

$$t_{0z} = 0. \quad (2.52)$$

2.2.5. El solitón gris

Ahora consideramos el caso general de un solitón gris con velocidad $A(Z)$; también recordar que $(A^2 + B^2)(Z) = u_{\infty}^2(Z)$. Sea $u = qe^{i\phi}$, donde $q > 0$ y ϕ son funciones reales de z y t , además se introduce un marco de referencia móvil $T = t - \int_0^z A(\epsilon s)ds - t_0$ y $\zeta = z$, para que con $u = u(\zeta, T, Z)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = u_\zeta - Au_T, \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_T, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= u_{TT},
\end{aligned} \tag{2.53}$$

de esta manera la ecuación (2.12) se convierte en

$$iu_\zeta - iAu_T - \frac{1}{2}u_{TT} + (|u|^2 - u_\infty^2)u = \epsilon F[u]. \tag{2.54}$$

Entonces usando $u = qe^{i\phi}$ y las ecuaciones (2.14) se obtiene

$$iq_\zeta - q\phi_\zeta - iAq_T + q\phi_T A - \frac{1}{2}\left(q_{TT} + iq\phi_{TT} - q\phi_T^2 + 2iq_T\phi_T\right) + (|u|^2 - u_\infty^2)u = \epsilon F[u], \tag{2.55}$$

separando en parte real e imaginaria

$$q_\zeta = Aq_T + \frac{1}{2}\left(q\phi_{TT} + 2q_T\phi_T\right) + \epsilon \text{Im}(F[u]) \tag{2.56}$$

$$q\phi_\zeta = Aq\phi_T - \frac{1}{2}\left(q_{TT} - q\phi_T^2\right) + (|u|^2 - u_\infty^2)u - \epsilon \text{Re}(F[u]). \tag{2.57}$$

Ahora escribimos la ecuación (2.57) en términos de la variable de evolución lenta $\zeta = \epsilon Z$ y la expansión en series de $q = q_0 + \epsilon q_1 + O(\epsilon)$ y $\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + O(\epsilon)$. Para $O(1)$, las ecuaciones se satisfacen por la solución de solitón (2.17).

Buscamos soluciones estacionarias para $O(\epsilon)$, es decir de la ecuación (2.56) y (2.57)

$$\begin{aligned}
q_{0Z} &= A(q_{0T} + \epsilon q_{1T}) + \frac{1}{2}\left((q_0 + \epsilon q_1)(\phi_{0TT} + \epsilon \phi_{1TT}) + 2(q_{0T} + \epsilon q_{1T})(\phi_{0T} + \epsilon \phi_{1T})\right) + \\
&\quad + \epsilon \text{Im}(F[u_0]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_0\phi_{0Z} &= A(q_0 + \epsilon q_1)(\phi_{0T} + \epsilon \phi_{1T}) - \frac{1}{2}\left((q_{0TT} + \epsilon q_{1TT}) - (q_0 + \epsilon q_1)((\phi_{0T} + \epsilon \phi_{1T})^2)\right) \\
&\quad + ((q_0 + \epsilon q_1)^2 - u_\infty^2)(q_0 + \epsilon q_1) - \epsilon \text{Re}(F[u_0])
\end{aligned}$$

de esta manera se obtiene

$$0 = Aq_{1T} + \frac{1}{2} \left(q_0 \phi_{1TT} + q_1 \phi_{0TT} + 2(q_{0T} \phi_{1T} + q_{1T} \phi_{0T}) \right) + \text{Im}(F[u_0]) - q_{0Z}, \quad (2.58)$$

$$0 = A(q_0 \phi_{1T} + q_1 \phi_{0T}) - \frac{1}{2} \left(q_{1TT} - \phi_{0T}^2 q_1 - 2q_0 \phi_{1T} \phi_{0T} \right) + 3q_0^2 q_1 - u_\infty^2 q_1 - \text{Re}(F[u_0]) - q_0 \phi_{0Z}, \quad (2.59)$$

donde $u_0 = q_0 e^{i\phi_0}$ y

$$q_{0Z} = \frac{1}{2} \left(AA_Z + BB_Z \tanh^2(x) \right) q_0^{-1} + q_{0T} \left(\frac{B_Z}{B} - t_{0Z} \right), \quad (2.60)$$

y

$$\phi_{0Z} = (AB_Z - BA_Z) \tanh(x) q_0^{-2} + \phi_{0T} \left(\frac{B_Z}{B} - t_{0Z} \right) + \sigma_{0Z}. \quad (2.61)$$

Considere que la ecuación (2.58) en el límite $T \rightarrow \pm\infty$ usando $q_0 \rightarrow u_\infty$ y $u_{\infty Z} = \text{Im}F[u_\infty]$, que nos da

$$0 = Aq_{1T}^\pm + \frac{u_\infty}{2} \phi_{1TT}^\pm. \quad (2.62)$$

Supongamos que q_1 tiende a una constante con respecto a t ; es decir, $q_{1T} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Como resultado $\phi_{1TT} \rightarrow 0$. Entonces q_1 y ϕ_{1T} tienden asintóticamente a constantes cuando $t \rightarrow \pm\infty$, que corresponde a un estante que se desarrolla alrededor del solitón. Sustituyendo ϕ_{0T} en la ecuación (2.59) en el límite $T \rightarrow \pm\infty$, se obtiene

$$A\phi_{1T}^\pm + 2u_\infty q_1^\pm = -\frac{\text{Re}(F[u_\infty])}{u_\infty} \pm \frac{(AB_Z - BA_Z)}{u_\infty^2} + \sigma_{0Z}. \quad (2.63)$$

Definimos $\Delta\phi_0 = 2\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$ como cambio de fase a través de núcleo del solitón. Esto es consistente con los parámetros del solitón A y B expresados en términos de la magnitud de fondo u_∞ y el cambio de fase $\Delta\phi_0$,

$$A = u_\infty \cos\left(\frac{\Delta\phi_0}{2}\right) \quad \text{y} \quad B = u_\infty \text{sen}\left(\frac{\Delta\phi_0}{2}\right). \quad (2.64)$$

Usando $\phi_Z^\pm = -Re(F[u_\infty])/u_\infty$ y sustituyendo la ecuación (2.64) en la ecuación (2.63) encontramos

$$A\phi_{1T}^\pm + 2u_\infty q_1^\pm = \phi_Z^\pm \pm \frac{\Delta\phi_{0Z}}{2} + \sigma_{0Z}. \quad (2.65)$$

2.2.6. Leyes de conservación para solitones grises

Ahora se usan las leyes de conservación modificadas (2.42) para resolver los parámetros del estante q_1^\pm y ϕ_{1t}^\pm así como las variables de evolución lenta A , σ_{0Z} . Observar que si encontramos A , entonces $B = (u_\infty^2 - A^2)^{1/2}$. El borde del estante todavía se propaga con velocidad $V(Z) = u_\infty(Z)$, sin embargo, la velocidad puede ahora variar en z . En términos del marco de referencia móvil, los límites del estante son

$$S_L(\zeta) = - \int_0^\zeta [u_\infty(\epsilon s) + A(\epsilon s)] ds \quad \text{y} \quad S_R(\zeta) = \int_0^\zeta [u_\infty(\epsilon s) - A(\epsilon s)] ds, \quad (2.66)$$

donde S_L y S_R da la posición de T de los límites izquierdo y derecho del estante en ζ . Notemos que $A \leq u_\infty$ para todo Z , el solitón no puede alcanzar el estante. La región interior consta del solitón central y el estante que se expande a su alrededor; mientras que la región exterior consta de las condiciones de contorno infinitas.

Comenzamos con la ecuación de evolución para el Hamiltoniano (2.39)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{1}{2} (u_\infty^2 - |u|^2)^2 \right] dt &= \epsilon (u_\infty^2)_z \int_{-\infty}^{\infty} [u_\infty^2 - |u|^2] dt + \\ &+ 2\epsilon Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u] u_\zeta^* dt. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Sustituyendo $u = (q_0 + \epsilon q_1) e^{i(\phi_0 + \epsilon \phi_1)}$ y cambiando las variables al marco de referencia

movil, esto es

$$\begin{aligned}
u_t &= [(q_{0T} + \epsilon q_{1T}) + (q_0 + \epsilon q_1)(i\phi_{0T} + i\epsilon\phi_{1T})] e^{i(\phi_0 + \epsilon\phi_1)}, \\
|u_t|^2 &= q_{0T}^2 + q_0^2 \phi_{0T}^2, \\
|u|^2 &= q_0^2,
\end{aligned}$$

con esto y hasta $O(\epsilon)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(q_{0T}^2 + q_0^2 \phi_{0T}^2) + (u_{\infty}^2 - q_0^2)^2 \right] dT &= 2\epsilon (u_{\infty}^2)_z \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - q_0^2] dt - \\
&- 4\epsilon Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u_0] A u_{0T}^* dT,
\end{aligned} \tag{2.68}$$

donde de aqui en adelante $u_0 = q_0 e^{i\phi_0}$. El Hamiltoniano es único entre las ecuaciones de evolución (2.42) en el que la contribución del estante aparece solo en $O(\epsilon^2)$ o superior y que $O(\epsilon)$ puede ignorarse.

Ahora se pone en forma del solitón (2.17) para obtener

$$2B^2 B_Z = (u_{\infty}^2)_z B - A Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u_0] u_{0T}^* dT. \tag{2.69}$$

Tomando la derivada con respecto a Z de la ecuación $u_{\infty}^2 = A^2 + B^2$, se obtiene $(u_{\infty}^2)_z = 2AA_Z + 2BB_Z$, en el cual se puede usar, esto es

$$\begin{aligned}
2B^2 B_Z &= (2AA_Z + 2BB_Z)B - A Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u_0] u_{0T}^* dT \\
\Rightarrow 2BA_Z &= Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u_0] u_{0T}^* dT.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Las ecuaciones de evolución para la energía (2.44) y el momento (2.49) es que ambas permanecen iguales después de transforse en el marco de referencia movil, esto es

$$\frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - |u|^2] dT = 2\epsilon Im \int_{-\infty}^{\infty} [F[u_{\infty}] u_{\infty} - F[u] u^*] dT, \tag{2.71}$$

$$\frac{d}{d\zeta} Im \int_{-\infty}^{\infty} u u_T^* dT = 2\epsilon Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u] u_T^* dT. \tag{2.72}$$

La región interna sobre la cual q_1 y ϕ_1 son relevantes es $T \in [S_L(\zeta), S_R(\zeta)]$ y fuera de esta región $q_1 = \phi_{1T} = 0$. Para $O(1)$, las ecuaciones se satisfacen y para $O(\epsilon)$ se tiene

$$B_Z - \frac{d}{d\zeta} \int_{S_L(\zeta)}^{S_R(\zeta)} q_0 q_1 dT = Im \int_{-\infty}^{\infty} (F[u_\infty]u_\infty - F[u_0]u_0^*) dT, \quad (2.73)$$

y

$$-2(AB)_Z - \frac{d}{d\zeta} \int_{S_L(\zeta)}^{S_R(\zeta)} (2\phi_{0T}q_0q_1 + \phi_{1T}q_0^2) dT = 2Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u_0]u_{0T} dT. \quad (2.74)$$

Dado que los integrandos del lado izquierdo no son funciones de ζ , se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo para llegar a

$$B_Z - u_\infty [(u_\infty - A)q_1^+ + (u_\infty + A)q_1^-] = Im \int_{-\infty}^{\infty} (F[u_\infty]u_\infty - F[u_0]u_0^*) dT \quad (2.75)$$

y

$$2(AB)_Z + u_\infty^2 [(u_\infty - A)\phi_{1T}^+ + (u_\infty + A)\phi_{1T}^-] = -2Re \int_{-\infty}^{\infty} F[u_0]u_{0T}^* dT. \quad (2.76)$$

Ahora tratamos con la evolución del centro de la energía

$$\frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} t(u_\infty^2 - |u|^2) dt = -Im \int_{-\infty}^{\infty} uu_t^* dt + 2\epsilon Im \int_{-\infty}^{\infty} t(F[u_\infty]u_\infty - F[u]u^*) dt, \quad (2.77)$$

que después de transformar al marco de referencia en movimiento, ahora es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(T + \int_0^\zeta Ads + t_0 \right) (u_\infty^2 - |u|^2) dt &= -Im \int_{-\infty}^{\infty} uu_T^* dT + 2\epsilon Im \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(T + \int_0^\zeta Ads + t_0 \right) (F[u_\infty]u_\infty - F[u]u^*) dT, \end{aligned}$$

Después de reorganizar algunos términos, se tiene

$$\frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} T(u_{\infty}^2 - |u|^2) dT \quad (2.78a)$$

$$+ \left(\int_0^{\zeta} A + t_0 \right) \left[\frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - |u|^2] dT - 2\epsilon Im \int_{-\infty}^{\infty} \left(F[u_{\infty}]u_{\infty} - F[u]u^* \right) dT \right] \quad (2.78b)$$

$$+ A \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - |u|^2] dT + Im \int_{-\infty}^{\infty} uu_T^* dT \quad (2.78c)$$

$$= -\epsilon t_{0Z} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{\infty}^2 - |u|^2] dT + 2\epsilon Im \int_{-\infty}^{\infty} T \left[F[u_{\infty}]u_{\infty} - F[u]u^* \right] dT. \quad (2.78d)$$

La ecuación (2.78a) nos da

$$\frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} T(u_{\infty}^2 - |u|^2) dT = -2 \left[S_R(u_{\infty} - A)q_1^+ + S_L(u_{\infty} + A)q_1^- \right] u_{\infty}. \quad (2.79)$$

Los términos de la ecuación (2.78b) da la ecuación de la energía y se cancelan. Los términos de la ecuación (2.78c) se calculan hasta $O(\epsilon)$ utilizando los resultados anteriores integrando la ecuación de energía y momento (2.76)

$$E(Z) = 2B - 2 \left[S_R(Z)q_1^+ - S_L(Z)q_1^- \right] u_{\infty} + \epsilon E_1(Z) + O(\epsilon^2),$$

y

$$I(Z) = -2AB - u_{\infty}^2 \left[S_R(Z)\phi_{1t}^+ - S_L(Z)\phi_{1t}^- \right] + \epsilon I_1(Z) + O(\epsilon^2).$$

Reuniendo todo en términos de $Z = \epsilon\zeta$ arroja

$$\begin{aligned} 2\epsilon B t_{0Z} = & 2\epsilon Im \int_{-\infty}^{\infty} T \left(F[u_{\infty}]u_{\infty} - F[u_0]u_0^* \right) dT + A\epsilon E_1(Z) + \epsilon I_1(Z) \quad (2.80) \\ & + \left[2u_{\infty}^2 [S_R(u_{\infty} - A)q_1^+ + S_L(u_{\infty} + A)q_1^-] + 2u_{\infty} A [S_R q_1^+ - S_L q_1^-] + \right. \\ & \left. + u_{\infty}^2 [S_R \phi_{1t}^+ - S_L \phi_{1t}^-] \right]. \end{aligned}$$

Después de algunas cancelaciones y en términos de $O(1)$

$$2[S_R q_1^+ + S_L q_1^-] + [S_R \phi_{1T}^+ - S_L \phi_{1T}^-] = 0 \quad (2.81)$$

los términos $O(\infty)$ que incluye t_{0Z} y los términos de energía y momento de orden superior que no han sido determinados. Las ecuaciones (2.65), (2.70), (2.75), (2.76) y (2.81) se puede ahora usar para resolver los 6 parámetros q_1^\pm , $\phi_{1t}^\pm (= \phi_{1T}^\pm)$, A y σ_0 .

$$\frac{d}{dZ}u_\infty = \text{Im}(F[u_\infty]), \quad (2.82a)$$

$$2B\frac{d}{dZ}A = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F[u_0]u_{0T}^* dT, \quad (2.82b)$$

$$u_\infty \frac{d}{dZ}\sigma_0 = B_Z - \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F[u_\infty]u_\infty - F[u_0]u_0^* \right) dT + \text{Re} \left(F[u_\infty] \right), \quad (2.82c)$$

$$q_1^+ = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{0Z} + \Delta\phi_{0Z}}{u_\infty - A}, \quad (2.82d)$$

$$q_1^- = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{0Z} - \Delta\phi_{0Z}}{u_\infty + A}, \quad (2.82e)$$

$$\phi_{1T}^+ = -2q_1^+, \quad (2.82f)$$

$$\phi_{1T}^- = 2q_1^-, \quad (2.82g)$$

$$B_Z = \frac{u_\infty u_{\infty Z} - AA_Z}{B}, \quad (2.82h)$$

$$\Delta\phi_{0Z} = \frac{2AB_Z - 2BA_Z}{u_\infty^2}. \quad (2.82i)$$

Se han agregado las ecuaciones (2.82h) y (2.82i) a la lista ya que ha menudo es más

facil usar estas formulaciones para B y $\Delta\phi_0$ explícitamente y luego tomar derivadas.

Combinando las ecuaciones (2.70) y (2.76)

$$2(AB)_Z + u_\infty^2 \left[(u_\infty - A)\phi_{1T}^+ + (u_\infty + A)\phi_{1T}^- \right] = 4BA_Z, \quad (2.83)$$

que puede reescribirse como

$$2AB_Z - 2BA_Z + u_\infty^2 \frac{d}{d\zeta} \left[\phi_1(S_R) - \phi_1(S_L) \right] = 0. \quad (2.84)$$

Si definimos $\Delta\phi_1$ como

$$\Delta\phi_1 = \phi_1(S_R) - \phi_1(S_L), \quad (2.85)$$

entonces $\epsilon\phi_1$ es el cambio de fase a través del estante. Sustituyendo esta definición junto con (2.82i) en la ecuación (2.84) llegamos a

$$\frac{d}{dZ} \Delta\phi_0 + \epsilon \frac{d}{dZ} \Delta\phi_1 = 0. \quad (2.86)$$

Por tanto, el cambio de fase total en la energía interior permanece constante, lo que es consistente con nuestro resultado anterior de que $\Delta\phi_\infty$ (el cambio de fase de $-\infty$ a ∞) permanece constante para todas las perturbaciones.

2.2.7. t_{0Z} y términos de orden superior

Para encontrar el parámetro final t_0 , empleamos los términos de corrección de primer orden, Buscamos una solución en serie de la ecuación (2.11) de la forma $u = u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2)$ y para $O(\epsilon)$ tenemos

$$iu_{1z} + \left(-\frac{1}{2}\partial_t^2 + 2|u_0|^2 - u_\infty^2 \right) u_1 + (u_0^2)u_1^* = F[u_0] - iu_{0z}. \quad (2.87)$$

Después de cambiar variables al marco de referencia móvil $T = t - \int_0^\zeta A(\epsilon s) ds - t_0$, $z = \zeta$ tenemos

$$iu_{1\zeta} + \left(-iA\partial_T - \frac{1}{2}\partial_T^2 + 2|u_0|^2 - u_\infty^2 \right) u_1 + (u_0^2)u_1^* = F[u_0] - iu_{0z}. \quad (2.88)$$

Aquí

$$u_{0Z} = A_Z e^{i\sigma} + \frac{B_Z}{B} \left(u_0 - A e^{i\sigma} \right) + u_{0T} \left(-t_{0Z} + \frac{B_Z T}{B} \right) + i\sigma_{0Z} \sigma_0. \quad (2.89)$$

Si buscamos soluciones estacionarias $\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} = 0 \right)$, esto puede ser escrito como un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de orden 2

$$L\mathbf{U}_1 = \mathbf{G}[u_0], \quad (2.90)$$

donde

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \text{Re}[u_1] \\ \text{Im}[u_1] \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{G}[u_0] = \begin{pmatrix} \text{Re}[F[u_0] - iu_{0Z}] \\ \text{Im}[F[u_0] - iu_{0Z}] \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial_T^2 + (3A^2 + B^2 \tanh(BT) - u_\infty^2) & A\partial_T + 2AB \tanh(BT) \\ -A\partial_T + 2AB \tanh(BT) & -\frac{1}{2}\partial_T^2 + (A^2 + 3B^2 \tanh(BT) - u_\infty^2) \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

En el límite $A \rightarrow 0$, este sistema se desacopla en 2 ecuaciones diferenciales de orden 2 y que dan dos soluciones estrictamente reales y dos soluciones estrictamente imaginarias.

Para cada solución que se encontró para $A = 0$, asumimos que existe una solución para $A \neq 0$ que difiere solo en dirección perpendicular; es decir, si $U_H = \begin{pmatrix} u_R \\ 0 \end{pmatrix}$ se satisface la

ecuación (2.92) con $A = 0$; entonces existe u_I tal que $U_H = \begin{pmatrix} u_R \\ u_I \end{pmatrix}$ satisface la ecuación

(2.92) con $A \neq 0$; es decir solo cambia el segundo componente y, por lo tanto, el sistema se reduce a la ecuación de segundo orden que es consistente con las ecuaciones restantes.

Bajo esta suposición, encontramos un conjunto completo de soluciones homogéneas

$$U_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sech}^2(BT) \end{pmatrix}, \quad U_{12} = \begin{pmatrix} B \tanh(BT) \\ -A \end{pmatrix}, \quad (2.93a)$$

$$U_{13} = \begin{pmatrix} B(BT \tanh(BT) - 1) \\ A \left(-BT + \frac{3}{2}BT \operatorname{sech}^2(BT) + \frac{3}{2}\tanh(BT) \right) \end{pmatrix} \quad (2.93b)$$

$$U_{14} = \begin{pmatrix} -\frac{4AB}{A^2 - B^2} \cosh^2(BT) \\ 3BT \operatorname{sech}^2(BT) + 4 \tanh(BT) \cosh(2BT) \end{pmatrix} \quad (2.93c)$$

y usando la variación de parámetros, podemos obtener una solución particular, U_{1p} para el forzamiento $G[u_0]$.

Después de combinar la parte real e imaginaria, la solución completa de la ecuación (2.88) viene dada por

$$u_1 = c_1 u_{11} + c_2 u_{12} + c_3 u_{13} + c_4 u_{14} + u_{1p}, \quad (2.94)$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son funciones de Z y u_{1p} es dependiente de t_0 que aún esta por determinar. Tomamos $c_4 = 0$ para eliminar el crecimiento exponencial en u_{14} y separar la contribución de t_{0Z} que aparece linealmente en la solución particular u_{1p}

$$u_1 = c_1 u_{11} + c_2 u_{12} + c_3 u_{13} + t_{0Z} u_{1p}^{(1)} + u_{1p}^{(2)}, \quad (2.95)$$

donde

$$u_{1p}^{(1)} = 1 - i \left[BT \operatorname{sech}^2(BT) + \tanh(BT) \right] \frac{A}{B}, \quad (2.96)$$

tal que $u_{1p}^{(2)}$ no le queden incógnitas.

Poner u_1 en términos de la función de la magnitud y la fase q_0, q_1, ϕ_0 y ϕ_1 , expandimos

nuestra aproximación previa para u

$$u = (q_0 + \epsilon q_1)e^{i(\phi_0 + \epsilon \phi_1)} = q_0 e^{i\phi_0} + \epsilon (q_1 + i\phi_1 q_0) e^{i\phi_0} + O(\epsilon^2), \quad (2.97)$$

de modo que

$$u_0 = q_0 e^{i(\phi_0)}, \quad (2.98a)$$

$$u_1 = (q_1 + iq_0 \phi_1) e^{i\phi_0}, \quad (2.98b)$$

$$u_1 = \left[q_1 \cos(\phi_0) - q_0 \phi_1 \sin(\phi_0) \right] + i \left[q_1 \sin(\phi_0) + q_0 \phi_1 \cos(\phi_0) \right], \quad (2.98c)$$

Observando el comportamiento asintótico de la solución u_1 cuando $t \rightarrow \pm\infty$, encontramos la ecuación

$$u_{1T}^\pm = -\phi_{1T}^\pm(\pm B) + i\phi_{1T}^\pm(A). \quad (2.99)$$

Ya que u_{11T} , u_{12T} y u_{1pT} van a cero en el límite $t \rightarrow \pm\infty$, la ecuación anterior puede ser usada para encontrar c_3 .

Con esto, ahora podemos encontrar una ecuación diferencial de segundo orden para t_0 a partir del Hamiltoniano en $O(\epsilon^2)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ} H_1 + \frac{d}{d\zeta} H_2 = & -4u_\infty \text{Im}[F[u_\infty]] \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_1^* dT \\ & + 2\text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F[u_0] u_{0Z}^* dT, \\ & - 2A \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F[u_0] u_{1T}^* + F'[u_0][u_1] u_{0T}^* \right) dT, \end{aligned} \quad (2.100)$$

donde

$$F'[u_0][u_1] = \frac{d}{d\epsilon} F[u_0 + \epsilon u_1]. \quad (2.101)$$

En el lado izquierdo tenemos la evolución lenta de los términos $O(\epsilon)$ y la evolución rápida en los términos $O(\epsilon^2)$. H_1 es dependiente en u_0 y u_1 y esta dado por

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\text{Re} \left(u_{0T} u_{1T}^* \right) + \left(u_{\infty}^2 - |u_0|^2 \right) \text{Re} (u_0 u_1^2) \right] dT. \quad (2.102)$$

H_2 es dependiente de u_0 , u_1 y la corrección u_2 de orden ϵ^2 . Sin embargo, como antes, asumimos una solución estacionaria (en el marco de referencia móvil) u_2 , entonces la derivada de H_2 con respecto a la variable rápida de evolución ζ depende solo del comportamiento asintótico de u_0 , u_1 y está dado por

$$\frac{d}{d\zeta} H_2 = 4u_{\infty}^2 \left[u_{\infty} (q_1^{+2} + q_1^{-2}) - A (q_1^{+2} - q_1^{-2}) \right]. \quad (2.103)$$

Aunque no es inmediatamente obvio, encontramos que c_1 y c_2 no contribuyen al Hamiltoniano en la ecuación (2.103), así que t_0 es la única incógnita. Tomamos $t_0(0) = 0$ y para encontrar la condición inicial adecuada $t_{0z}(0)$, requerimos que el Hamiltoniano sea representado por H_0 a $z = 0$, es decir, los términos de orden superior son inicialmente cero

$$H_1(0) = 0. \quad (2.104)$$

Nuestra predicción para t_0 difiere mucho de la dada por métodos basados en el llamado conjunto completo de funciones de Jost al cuadrado. Esta discrepancia puede explicarse parcialmente por el supuesto de que la función de Jost al cuadrado forma una base para el espacio de solución de la ecuación (2.88).

Las eigenfunciones se encuentran en la teoría de dispersión inversa para la NLS de desfoco, sin embargo, hemos resuelto explícitamente el primer término de corrección y encontramos que la solución tiene un estante en expansión. De esto deducimos que las funciones de Jost al cuadrado asociadas al solitón son una base insuficiente.

2.2.8. Amortiguamiento lineal

Aplicamos ahora los resultados obtenidos en la sección al caso de amortiguamiento lineal

$$F[u] = -i\gamma u, \quad (2.105)$$

que fue a la vez uno de los primeros ejemplos comunmente utilizados en el estudio de los solitones oscuros perturbados.

En este ejemplo, se tiene un fondo en movimiento, que al resolver la ecuación:

$$\frac{d}{dz}u_\infty = \epsilon \text{Im}[F[u_\infty]], \quad (2.106)$$

nos da

$$\frac{d}{dz}u_\infty = -\gamma u_\infty. \quad (2.107)$$

A partir de las ecuaciones (2.82), se pueden determinar los parámetros del solitón que varía lentamente

$$A_Z = -\gamma A, \quad \sigma_{0Z} = \gamma \frac{B}{u_\infty}, \quad q_1^\pm = \gamma \frac{(u_\infty \pm A)}{2Bu_\infty}, \quad (2.108a)$$

$$\phi_{1T}^+ = -\gamma \frac{(u_\infty + A)}{Bu_\infty}, \quad \phi_{1T}^- = \gamma \frac{(u_\infty - A)}{Bu_\infty}, \quad (2.108b)$$

$$t_{0ZZ} = -\gamma t_{0Z} + \gamma^2 \frac{3A}{2Bu_\infty}, \quad t_{0Z}(0) = \gamma \frac{A(0)}{2B(0)u_\infty(0)}. \quad (2.108c)$$

En la figura 2.5 muestra que la teoría asintótica predice bien la existencia de un estante elevado y la dinámica del borde del estante. El método aproxima con precisión la altura del fondo y el valle del solitón. Como se predijo, los intentos previos de utilizar el método de dispersión inversa no son adecuados es por esto que no se habia obtenido información de t_0 .

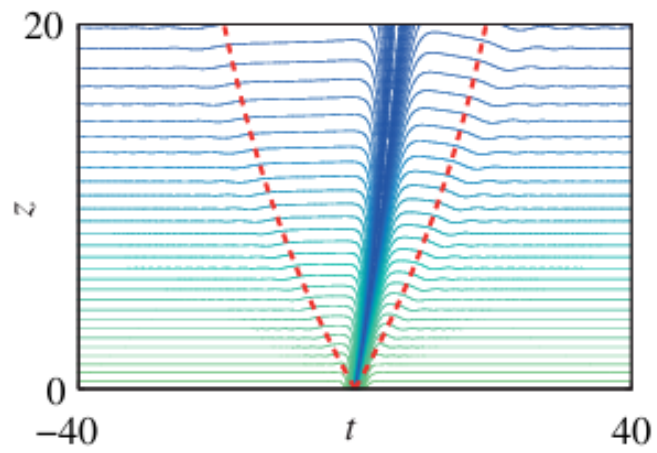


Figura 2.5: Borde del estante; $F[u] = -i\gamma u$ (ver [75]).

Ecuación no lineal de Schrödinger generalizada

3.1. Dinámica de solitones en la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada

Como se mencionó anteriormente, la ecuación no lineal de Schrödinger surge cuando se describen pulsos de duración de picosegundo en fibras ópticas. A medida que la duración del pulso disminuye, los resultados de la ecuación NLS no son confiables, por lo tanto la ecuación NLS debe generalizarse. Para ello, Kodama [76], propuso una ecuación no lineal de Schrödinger generalizada, la cual es

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 + i\alpha(u_{xxx} + \beta_1 u_x |u|^2 + \beta_2 u^2 u_x^*) = 0, \quad (3.1)$$

donde u_{xx} es la velocidad de grupo de dispersión, $u|u|^2$ es la ley no lineal de Kerr, u_{xxx} es el tercer orden de dispersión.

Potasek y Tabor [77] encontraron soluciones tipo solitón de la ecuación (3.1) utilizando ansatz. En Kumari [78] emplearon el método elíptico de Jacobi a la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada.

El objetivo es encontrar solitones y estructuras elípticas de Jacobi de la ecuación no lineal

de Schrödinger Generalizada (GNLS-e.) mediante la aplicación del Método de Expansión Elíptica de Jacobi Modificado [79]- [82] (MJEEM por sus siglas en inglés) e investigando la dinámica de sus ondas de solitón.

El Método

Consideremos

$$F(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.2)$$

como una ecuación diferencial ordinaria no lineal.

Basado en [83], se elige la siguiente serie como la solución de la ecuación (3.2)

$$u(\xi) = c_0 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{J(\xi)}{1 + J^2(\xi)} \right)^{i-1} \left(c_i \frac{J(\xi)}{1 + J^2(\xi)} + d_i \frac{1 - J^2(\xi)}{1 + J^2(\xi)} \right), \quad c_N \text{ ó } d_N \neq 0, \quad (3.3)$$

donde c_0, c_i y $d_i (1 \leq i \leq N)$ son incógnitas, N es el número de balance y $J(\xi)$ como una función elíptica de Jacobi que satisface

$$\left(J'(\xi) \right)^2 = D + EJ^2(\xi) + FJ^4(\xi). \quad (3.4)$$

La ecuación elíptica de Jacobi (3.4) dependiendo de D, E y F se admiten las siguientes soluciones exactas (ver Tabla 3.1):

Las funciones elíptica de Jacobi tienen las siguientes características

1. $sn^2(\xi) + cn^2(\xi) = 1$.
2. $sn(\xi) = sn(\xi, m) \rightarrow \tanh(\xi)$ cuando $m \rightarrow 1$.
3. $ns(\xi) = \left(sn(\xi, m) \right)^{-1} \rightarrow \coth(\xi)$ cuando $m \rightarrow 1$.

Solitones y las Estructuras Elípticas de Jacobi

Se obtendrán las estructuras elípticas de Jacobi empleando el MJEEM. Para ello, se aplica la siguiente transformación

$$u(x, t) = U(\xi)e^{i(\kappa_2 x - \nu_2 t)}, \quad \xi = \kappa_1 x - \nu_1 t, \quad (3.5)$$

Tabla 3.1: Ecuación (3.4) y sus soluciones de funciones elípticas de Jacobi.

No.	D	E	F	$J(\xi)$
1	1	$-(1 + m^2)$	m^2	$sn(\xi)$
2	$1 - m^2$	$2m^2 - 1$	$-m^2$	$cn(\xi)$
3	m^2	$-(m^2 + 1)$	1	$ns(\xi)$
4	$-m^2$	$2m^2 - 1$	$1 - m^2$	$nc(\xi)$

a la ecuación GNLS. Se ha obtenido que

$$\begin{aligned}
 u_t &= -(i\nu_2 U(\xi) + \nu_1 U'(\xi))e^{i(\kappa_2 x - \nu_2 t)}, \\
 u_{xx} &= (2i\kappa_1 \kappa_2 U'(\xi) - \kappa_2^2 U(\xi) + \kappa_1^2 U''(\xi))e^{i(\kappa_2 x - \nu_2 t)}, \\
 u|u|^2 &= U^3(\xi)e^{i(\kappa_2 x - \nu_2 t)}, \\
 u_{xxx} &= (-i\kappa_2^3 U(\xi) + 3i\kappa_1^2 \kappa_2 U''(\xi) - 3\kappa_1 \kappa_2^2 U'(\xi) + \kappa_1^3 U'''(\xi))e^{i(\kappa_2 x - \nu_2 t)}, \\
 u_x |u|^2 &= U^2(\xi)(i\kappa_2 U(\xi) + \kappa_1 U'(\xi))e^{i(\kappa_2 x - \nu_2 t)}, \\
 u^2 u_x^* &= U^2(\xi)(-i\kappa_2 U(\xi) + \kappa_1 U'(\xi))e^{i(\kappa_2 x - \nu_2 t)}.
 \end{aligned}$$

Las relaciones anteriores junto con la transformación producen

$$\begin{aligned}
 \kappa_1^2(-3\alpha\kappa_2 + 1)U'''(\xi) + (\alpha\kappa_2^3 - \kappa_2^2 + \nu_2)U(\xi) + (1 - \kappa_2(\beta_1 - \beta_2)\alpha)U^3(\xi) &= 0, \quad (3.6) \\
 \alpha\kappa_1(\beta_1 + \beta_2)U'(\xi)U^2(\xi) + (-3\alpha\kappa_1\kappa_2^2 + 2\kappa_1\kappa_2 - \nu)U'(\xi) + \alpha\kappa_1^3 U'''(\xi) &= 0.
 \end{aligned}$$

Después de integrar la segunda ecuación con respecto a ξ , obtenemos

$$\alpha\kappa_1^3 U'''(\xi) + (-3\alpha\kappa_1\kappa_2^2 + 2\kappa_1\kappa_2 - \nu)U(\xi) + \frac{1}{3}\alpha\kappa_1(\beta_1 + \beta_2)U^3(\xi) = 0. \quad (3.7)$$

Comparando términos correspondientes en la ecuación (3.6) y la ecuación (3.7) se obtiene

como resultado

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= -\frac{\alpha\kappa_1 - 1}{3\alpha}, \\ \nu_1 &= -\frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}, \\ \alpha &= -\frac{-3 + \beta_1 - \beta_2}{2\kappa_1\beta_2}.\end{aligned}$$

Ahora basta resolver la ecuación (3.6) con las condiciones anteriores.

Debido a la ecuación (3.6) y sus términos especiales, es decir, $U''(\xi)$ y $U^3(\xi)$, tenemos que $N = 1$.

Se recomienda una estructura no trivial de la siguiente manera

$$U(\xi) = c_0 + c_1 \frac{J(\xi)}{1 + J^2(\xi)} + c_2 \frac{1 - J^2(\xi)}{1 + J^2(\xi)}, \quad c_2 = d_1, \quad (3.8)$$

los cuáles c_0, c_1 y c_2 se determinan en el proceso de solución y $J(\xi)$ es una función elíptica de Jacobi. Sustituyendo la estructura no trivial (3.8) en la ecuación (3.6) y aplicando cálculos simbólicos se adquiere un sistema no lineal de tipo algebraico cuya solución arroja

Para $D = 1, E = -(m^2 + 1)$ y $F = m^2$, los resultados son

I. $c_0 = 0, c_1 = \pm 4\sqrt{-6(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\kappa_1}, c_2 = 0, \nu_2 = -(\kappa_1^2(217\beta_1^3 - 651\beta_1^2\beta_2 + 639\beta_1\beta_2^2 - 221\beta_2^3 - 1953\beta_1^2 + 3906\beta_1\beta_2 - 1917\beta_2^2 + 5859\beta_1 - 5859\beta_2 - 5859))/(54\beta_2(\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2 - 6\beta_1 + 6\beta_2 + 9)), m = 1,$

II. $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = \pm 2\sqrt{6}\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\kappa_1}, \nu_2 = (\kappa_1^2(107\beta_1^3 - 321\beta_1^2\beta_2 + 333\beta_1\beta_2^2 - 103\beta_2^3 - 963\beta_1^2 + 1926\beta_1\beta_2 - 999\beta_2^2 + 2889\beta_1 - 2889\beta_2 - 2889))/(54\beta_2(\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2 - 6\beta_1 + 6\beta_2 + 9)), m = 1,$

III. $c_0 = 0, c_1 = \pm 2\sqrt{-6(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\kappa_1}, c_2 = \sqrt{6}\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\kappa_1}, \nu_2 = -(\kappa_1^2(55\beta_1^3 - 165\beta_1^2\beta_2 + 153\beta_1\beta_2^2 - 59\beta_2^3 - 495\beta_1^2 + 990\beta_1\beta_2 - 459\beta_2^2 + 1485\beta_1 - 1485\beta_2 - 1485))/(54\beta_2(\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2 - 6\beta_1 + 6\beta_2 + 9)), m = 1.$

Ya que $J(\xi) = sn(\xi)$ y $sn(\xi, 1) \rightarrow tanh(\xi)$, entonces, las soluciones exactas de la ecuación GNLS son las siguientes

$$u_{1,2}(x, t) = \pm 4\sqrt{-6(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\kappa_1} \frac{\tanh\left(\kappa_1 x + \frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}t\right)}{1 + \tanh^2\left(\kappa_1 x + \frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}t\right)} e^{i\left(-\frac{\alpha\kappa_1 - 1}{3\alpha}x - \nu_2 t\right)},$$

con ν_2 en I,

$$u_{3,4}(x, t) = \pm 2\sqrt{6}\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\kappa_1} \frac{1 - \tanh^2\left(\kappa_1 x + \frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}t\right)}{1 + \tanh^2\left(\kappa_1 x + \frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}t\right)} e^{i\left(-\frac{\alpha\kappa_1 - 1}{3\alpha}x - \nu_2 t\right)},$$

ν_2 en II,

$$u_{5,6}(x, t) = \left[\pm 2\sqrt{-6(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\kappa_1} \frac{\tanh\left(\kappa_1 x + \frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}t\right)}{1 + \tanh^2\left(\kappa_1 x + \frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}t\right)} + \right. \\ \left. + \sqrt{6}\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\kappa_1} \frac{1 - \tanh^2\left(\kappa_1 x + \frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}t\right)}{1 + \tanh^2\left(\kappa_1 x + \frac{8\alpha^3\kappa_1^3 + 27\alpha^2\nu_2 - 6\alpha\kappa_1 - 2}{27\alpha^2}t\right)} \right] e^{i\left(-\frac{\alpha\kappa_1 - 1}{3\alpha}x - \nu_2 t\right)},$$

ν_2 en III.

Discusión de Resultados

Se obtuvieron soluciones exactas de la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada en presencia de la velocidad de grupo, la dispersión de tercer orden y diferentes no linealidades usando el MJEEM. Aquí se investiga el efecto de los parámetros no lineales como lo son β_1 y β_2 sobre las características dinámicas del solitón oscuro, y para ello consideramos el siguiente conjunto de valores:

1.- $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1.5$ y $\kappa_1 = 0.1$

2.- $\beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.5$ y $\kappa_1 = 0.1$

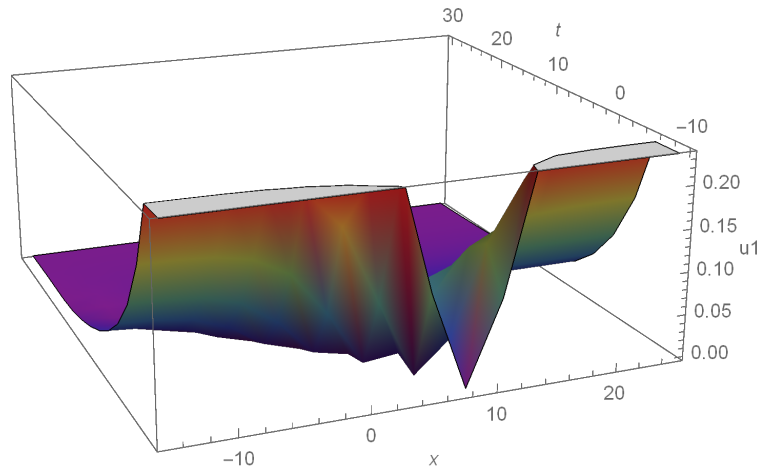


Figura 3.6: Solitón oscuro para $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 1.5$ y $\kappa_1 = 0.1$.

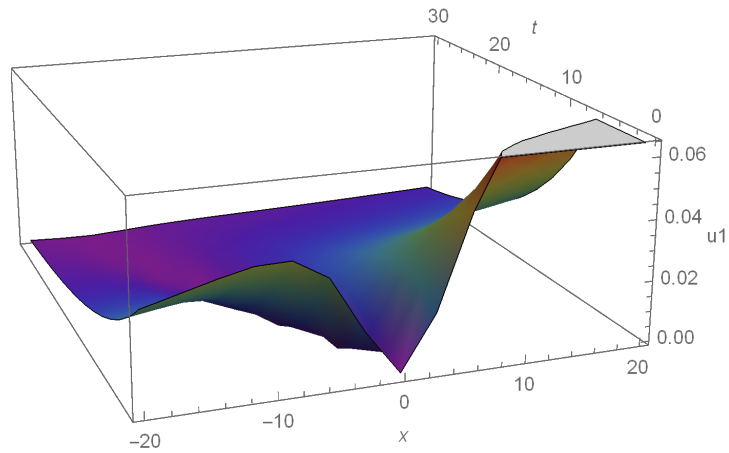


Figura 3.7: Solitón oscuro para $\beta_1 = 2.5$, $\beta_2 = 1.5$ y $\kappa_1 = 0.1$.

3.- $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3.5$ y $\kappa_1 = 0.1$

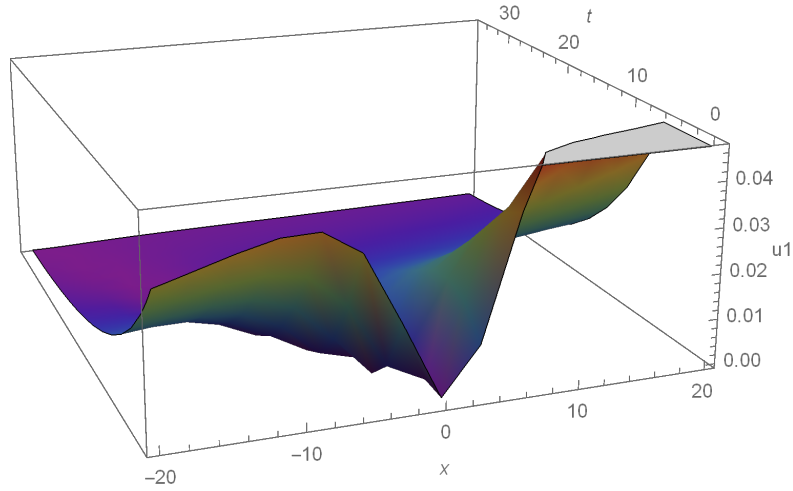


Figura 3.8: Solitón oscuro para $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 3.5$ y $\kappa_1 = 0.1$.

Entonces podemos notar que el ancho del solitón oscuro aumenta cuando β_1 o β_2 aumenta y la amplitud del solitón oscuro disminuye en el aumento de β_1 o β_2 .

Estos resultados brindan formas de controlar la evolución dinámica de las ondas tipo solitón en la ecuación GNLS que involucra la dispersión de la velocidad de grupo, la dispersión de tercer orden y diferentes no linealidades.

3.2. Ecuación no lineal de Schrödinger perturbada

La ecuación (1.20) también es conocida como ecuación no lineal de Schrödinger integrable que representa el régimen de dispersión anómalo y el régimen de dispersión normal. Estas ecuaciones se utilizan para abordar paquetes de onda débilmente no lineales y dar solitones de envolventes brillantes y oscuras.

Entre las ecuaciones GNLS, el de particular interés son las ecuaciones no lineales perturbadas. Las formas generalizadas de la ecuación NLS han atraído muchos trabajos de investigación de las matemáticas, la ciencia y la aplicación física de la óptica no lineal,

entre otras.

El modelo de Sasa-Satsuma [84] cubre el efecto de las perturbaciones y se han utilizado para caracterizar modelos de pulsos ultracortos. La ecuación integrable de Sasa-Satsuma es

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + u|u|^2 + i(u_{xxx} + 6|u|^2u_x + 3u(|u|^2)_x) = 0. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) presenta aplicaciones científicas como la dinámica de ondas de agua profundas [84]- [86], en medios dispersivos no lineales [87]- [91]. La ecuación de Sasa-Satsuma interpreta la propagación de pulsos ultracortos y de femtosegundos en fibras ópticas.

Consideremos una ecuación de Schrödinger no lineal perturbada generalizada, con no linealidad resultado de la ley de Kerr

$$iu_t + r_1u_{xx} + r_2u_{yy} + u|u|^2 - i\left(au_x - b(u|u|^2)_x - cu(|u|^2)_x\right) + u_{xxxx} - u_{yyyy} = 0, \quad (3.10)$$

donde a, b, c, r_1 y r_2 son parámetros reales. La ecuación PGNLS contiene términos de dispersión de cuarto orden, los términos de desplazamiento de frecuencia propia y los términos que describen la profundización automática en las direcciones x y y .

La ecuación no lineal de Schrödinger perturbada explica muchos fenómenos físicos y ópticos, como las comunicaciones en fibras ópticas, las ondas de agua pocas profundas, en los condensados de Bose-Einstein, etc. En base a esto es de gran importancia encontrar soluciones exactas de estas ecuaciones.

Encontremos las soluciones de solitones oscuros para la PNL (3.10), donde dichas soluciones pueden establecerse como

$$u(x, y, t) = R \tanh(\alpha x + \beta y - \mu t) e^{i(\alpha x + \beta y - \lambda t)}, \quad (3.11)$$

donde R, α, β, μ y λ son constantes. Sustituyendo (3.11) en la ecuación (3.10) y colecionando los coeficientes de funciones hiperbólicas obtenemos un sistema de ecuaciones. Al resolverlo conduce a los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
 R &= R, & (\text{dejado como parámetro libre}) \\
 \mu &= \mu, & (\text{dejado como parámetro libre}) \\
 \lambda &= \alpha^2 + \mu, \\
 a &= -\frac{2\alpha^2 - \mu}{\alpha}, \\
 b &= \frac{2\alpha^2 + R^2}{\alpha R^2}, \\
 c &= -\frac{3(2\alpha^2 + R^2)}{2\alpha R^2}, \\
 \alpha &= \beta.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Consecuentemente, obtenemos las siguientes soluciones de solitones oscuros

$$u(x, y, t) = R \tanh(\alpha x + \alpha y - \mu t) e^{i(\alpha(x+y) - (\alpha^2 + \mu)t)}, \tag{3.13}$$

válido en las condiciones derivadas anteriormente (3.12) y cuya gráfica es

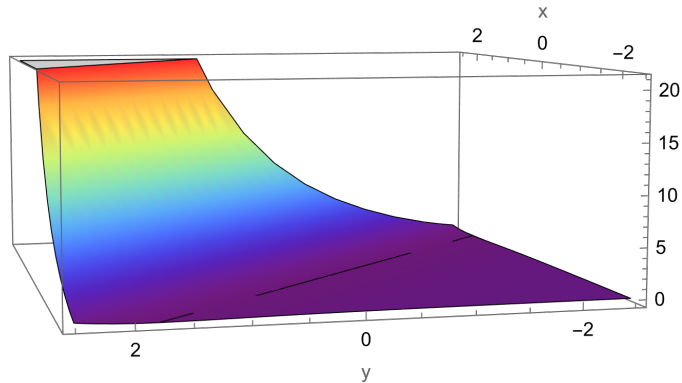


Figura 3.9: Solitón Oscuro con $\alpha = 1$ y $R = 1$.

Estos resultados son prometedores para avanzar en el estudio de ecuaciones extendidas

que incluyen derivadas de orden superior, este resultado son de particular interés para explicar la dinámica de las ondas en modelos con pulsos ultracortos.

3.3. Ecuación de Schrödinger con no linealidades cúbico-quíntico y séptico

La ecuación de Schrödinger no lineal (NLS) aparece en otras formas de no linealidades, como en el caso de la cúbica-quinta(CQ), cúbica-quínta-séptica(CQS), la ley potencial, las no linealidades logarítmicas y una variedad de otras formas. Recientemente se ha encontrado mucho interés en la investigación de soluciones explícitas no triviales a ecuaciones NLS con no linealidades moduladas en el tiempo y en el espacio debido a sus aplicaciones en la teoría de campo medio.

De acuerdo a los estudios, los modelos de dimensiones superiores son muy realistas al describir fenómenos físicos y ópticos no lineales, como la propagación de pulsos ópticos ultracortos [92], etc. La ecuación (1.20) incluye solo la dispersión de velocidad de grupo y la modulación de fase propia y estos brindan una propagación de pulso de solitón oscuro para los medios anómalos y normales.

Entonces, se necesita una ecuación de Schrödinger no lineal de orden superior, que debería incluir no linealidades cúbica-quinta, para modelar la propagación de pulsos ópticos en régimen ópticos altamente no lineales. Sin embargo, cuando la saturación es muy fuerte, se necesita el uso de las no linealidades cúbico-quínto-séptico para explicar la estructura de la saturación fuerte [93]- [96].

Consideremos la ecuación NLS altamente dispersiva, con índice de refracción cúbico-

quinto-séptico(CQS)

$$iu_t + pu_{xx} + qu_{yy} + ru_{zz} + au|u|^2 + bu|u|^4 + cu|u|^6 + u_{xxxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (3.14)$$

donde a, b y c representan los coeficientes de las no linealidades cúbica-quinta-séptica, respectivamente. Los coeficientes p, q y r son parámetros relacionados con la dispersión de velocidades de grupo.

La ecuación (3.14) describe la propagación de pulsos ópticos ultracortos en medios altamente no lineales. Nos enfocamos en la no linealidad de orden superior y la dispersión de sexto orden, mediante la búsqueda de soluciones de solitones oscuros en un medio que comprende efectos no-Kerr CQS.

Para determinar las soluciones de solitones oscuros para la ecuación (3.14), asumimos que dichas soluciones tiene la siguiente forma

$$u(x, y, z, t) = \mu \tanh(\alpha x + \beta y + \gamma z) e^{i\lambda t}, \quad (3.15)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ y λ son constantes. Sustituyendo (3.15) en (3.14) y juntando los términos de \tanh^i , $i = 0, 2, 4, 6$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 720\alpha^6 + c\mu^6 &= 0, \\ -1680\alpha^6 + 24\alpha^4 + b\mu^4 &= 0, \\ 1232\alpha^6 - 40\alpha^4 + 2p\alpha^2 + 2q\beta^2 + 2r\gamma^2 + a\mu^2 &= 0, \\ 272\alpha^6 - 16\alpha^4 + 2p\alpha^2 + 2q\beta^2 + 2r\gamma^2 + \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu \quad (\text{dejado como parámetro libre}), \\
\lambda &= -272\alpha^6 + 16\alpha^4 - 2p\alpha^2 - 2q\beta^2 - 2r\gamma^2, \\
a &= -\frac{2(616\alpha^6 - 20\alpha^4 + p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2)}{\mu^2}, \\
b &= \frac{24\alpha^4(70\alpha^2 - 1)}{\mu^4}, \\
c &= -\frac{720\alpha^6}{\mu^6},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde p, q y r son tomados en cuenta como parámetros libres. Consecuentemente, obtenemos las siguientes soluciones de solitones oscuros

$$u(x, y, z, t) = \mu \tanh(\alpha x + \beta y + \gamma z) e^{i(-272\alpha^6 + 16\alpha^4 - 2p\alpha^2 - 2q\beta^2 - 2r\gamma^2)t}, \tag{3.18}$$

válido en las condiciones derivadas en (3.17).

La ecuación no lineal de Schrödinger de sexto orden con no linealidades cúbicas-quinta-séptica, caracterizada por términos de dispersión de cuarto y sexto orden ha modelado la propagación de pulsos ópticos ultracortos en medios altamente no lineales; este modelo contiene muchos tipos de diferentes no linealidades que surgen en diversas aplicaciones de la óptica no lineal. Con el ansatz de solitón oscuro, bajo restricciones relacionadas con los coeficientes de las no linealidades CQS, estos resultados son de particular importancia para explicar la dinámica de las ondas en un material no lineal.

Conclusiones

4.1. Conclusiones

En el presente trabajo se exponen las ideas fundamentales de la teoría de perturbaciones y su aplicación en sistemas no lineales descritos por la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada. En particular, se aplicaron estos métodos en problemas actuales de la física matemática. Se estudiarán las condiciones necesarias para el surgimiento de soluciones solitónicas de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) y la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada (GNLSE), como lo son las soluciones de solitones brillantes y grises, pero principalmente soluciones de solitones oscuros. En general, dichas soluciones solitónicas evolucionan de manera adiabática cuando se encuentran inmersa en un medio o por acción de perturbaciones mecánicas, lo cual lleva al análisis perturbativo de solitones. Contrario al caso del estudio de la evolución de solitones brillantes en sistemas gobernados por la ecuación no lineal de Schrödinger y su familia de ecuaciones, la evolución de solitones oscuros sigue siendo poco conocida. Razón por la cual el presente estudio es de vital importancia para comprender diversos fenómenos que aparecen en diversas ramas de la física actual como: óptica no lineal, condensados de Bose-Einstein, en la teoría de plasmas de Einstein-Maxwell dentro de la relatividad general, la dinámica de biomoléculas por mencionar algunos. El objetivo del presente fue analizar la evolución

de solitones oscuros en la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada. Lo anterior nos condujo al estudio de métodos perturbativos modernos como lo son los métodos directos, quasi-analíticos y analíticos y, su posterior aplicación a diversas formas de la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada. En particular, se analizaron la evolución de solitones oscuros en la ecuación de Schrödinger con no linealidades cúbica, cúbica-quinta, cúbica-quinta y séptica, entre otras. El presente trabajo no sólo presenta una exposición detallada de métodos perturbativos modernos, sino que también los amplía y puede servir como punto de partida para nuevas investigaciones y aplicaciones.

4.2. Análisis prospectivo

El actual trabajo de tesis presenta una clara y detallada exposición acerca del panorama actual de los métodos perturbativos directos aplicados a sistemas no lineales. En particular, se emplean para analizar la evolución de solitones oscuros en sistemas gobernados por la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada. Dicha ecuación diferencial no lineal aparece en diversas áreas de la física matemática. La comprensión de la evolución de estas estructuras no lineales es de vital importancia en el estudio de las pinzas ópticas y en la interacción de impulsos nerviosos en el fluido axoplasmático cuando se presenta un cambio de fase en la neurona. La aplicación potencial de los métodos expuestos en el presente trabajo pueden extenderse a la mayoría de ecuaciones diferenciales no lineales. En particular, el interés en métodos asintóticos basados en las funciones elípticas de Jacobi se ha incrementado y podrían ser fundamentales para encontrar respuestas a problemas actuales como son el estudio de la superconductividad anómala en el grafeno o velocidades superlúnicas.

Anexo

5.1. Congresos y participaciones

Durante la elaboración del presente trabajo de tesis se participó en los siguientes congresos, seminarios y se publicó un capítulo de libro relacionado con los temas aquí tratados.

- Ponente en el II SIMPOSIO NACIONAL “Retos en Física Nuclear y Procesos No Lineales REFINL 2021” con el título “Líquidos cuánticos y el método de expansión F” en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México.
- Participación en la XXVIII ESCUELA DE VERANO EN FÍSICA, organizada por el Instituto de Física, el Instituto de Ciencias Físicas y el Posgrado de Ciencias Físicas de la UNAM; del 21 de Junio al 2 de Julio de 2021.
- Participación en la 5^a Escuela de Superconductividad, organizada por el Instituto de Ingeniería de la UNAM, el Instituto de Física de la UNAM y el Instituto de Física de la Benemérita universidad Autónoma de Puebla; Noviembre del 2021.
- Participación como asistente en el X Congreso Regional de Óptica, CReO 2021, organizada por el capítulo estudiantil OSA/SPIE-CICESE.
- Participación en el LXV CONGRESO NACIONAL DE FISICA, celebrado en Zaca-

tecas, Zacatecas del 2 al 7 de octubre de 2022.

- Participación y acreditación del curso Ofimática: Excel Intermedio-Avanzado, septiembre del 2022.
- Autor principal del capítulo “El método de expansión F generalizado” del libro “Retos de Física Nuclear y Fenómenos no lineales”, 1^o ed., McGraw Hill; Toluca, Estado de México: Universidad Autónoma del Estado de México, 2023.

Bibliografía

- [1] Zabusky, N. J., & Kruskal, M. D. (1965). Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6), 240.
- [2] Hasegawa, A., & Tappert, F. (1973). Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*, 23(3), 142-144.
- [3] Lentz, E. W. (2021). Breaking the warp barrier: hyper-fast solitons in Einstein–Maxwell-plasma theory. *Classical and Quantum Gravity*, 38(7), 075015.
- [4] Luo, Z. H., Pang, W., Liu, B., Li, Y. Y., & Malomed, B. A. (2021). A new form of liquid matter: Quantum droplets. *Frontiers of Physics*, 16(3), 1-21.
- [5] Cabrera, C. R., Tanzi, L., Sanz, J., Naylor, B., Thomas, P., Cheiney, P., & Tarruell, L. (2018). Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates. *Science*, 359(6373), 301-304.
- [6] Paredes, A., Salgueiro, J. R., & Michinel, H. (2022). On vortex and dark solitons in the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 133340.

- [7] Michinel, H., Salgueiro, J. R., & Paz-Alonso, M. J. (2004). Square vortex solitons with a large angular momentum. *Physical Review E*, 70(6), 066605.
- [8] Kolomeisky, E. B., & Sarabamoun, E. (2020). Solitons in the Einstein universe. *Physical Review D*, 101(4), 043515.
- [9] Saxena, A., Kevrekidis, P. G., & Cuevas-Maraver, J. (2020). Nonlinearity and topology. *Emerging Frontiers in Nonlinear Science*, 25-54.
- [10] Agüero, M., & Alvarado, R. (1999). On certain symmetries of the nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(3), 493.
- [11] Akhmediev, N. (2021). Waves that appear from nowhere: complex rogue wave structures and their elementary particles. *Frontiers in Physics*, 8, 612318.
- [12] Serkin, V. N., Belyaeva, T. L., Alexandrov, I. V., & Melchor, G. M. (2001, April). Novel topological quasi-soliton solutions for the nonlinear cubic-quintic Schrödinger equation model. In *Optical Pulse and Beam Propagation III* (Vol. 4271, pp. 292- 302). SPIE.
- [13] Agüero Granados, M. A., & Serkin, V. N. (2020). *Introducción a la teoría de solitones*. Ediciones y Gráficos Eón, SA de CV.
- [14] Hasegawa, A. (1989). Optical solitons in fibers. In *Optical solitons in fibers* (pp. 1-74). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [15] Torres, O. P., & Granados, M. A. (2016). Exact traveling wave solutions in the coupled plane-base rotator model of DNA. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 86, 8-14.

- [16] Kartavenko, V. G. (1984). Soliton-like solutions in nuclear hydrodynamics. *Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)*, 40(2).
- [17] Hacinliyan, I., & Erbay, S. (2004). Coupled quintic nonlinear Schrödinger equations in a generalized elastic solid. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(40), 9387.
- [18] Arshad, M., Seadawy, A. R., & Lu, D. (2017). Exact bright–dark solitary wave solutions of the higher-order cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation and its stability. *Optik*, 138, 40-49.
- [19] Seadawy, A. R., Rizvi, S. T., Mustafa, B., Ali, K., & Althubiti, S. (2022). Chirped periodic waves for an cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with self steepening and higher order nonlinearities. *Chaos, Solitons & Fractals*, 156, 111804.
- [20] Peng, Y. Z., & Krishnan, E. V. (2007). New exact solutions for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation.
- [21] Belmonte-Beitia, J., & Cuevas, J. (2009). Solitons for the cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation with time-and space-modulated coefficients. *Journal of physics A: mathematical and theoretical*, 42(16), 165201.
- [22] Belyaeva, T., Agüero, M. A. & Pavón, O. (2023). *Retos de física nuclear y procesos no lineales*. McGraw- Hill/UAEMéx.
- [23] Hasegawa A., & Kodama Y.(1995). *Solitons in Optical Communications*. Oxford series in Optical and Imaging Sciences.

- [24] Karpman, V. I., & Maslov, E. M. (1977). Perturbation theory for solitons. *JETP*, 73, 537-559.
- [25] Karpman, V. I., & Solov'ev, V. V. (1981). A perturbational approach to the two-soliton systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 3(3), 487-502.
- [26] Karpman, V. I. (1979). Soliton evolution in the presence of perturbation. *Physica Scripta*, 20(3-4), 462.
- [27] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C., & Segur, H. (1973). Nonlinear-evolution equations of physical significance. *Physical Review Letters*, 31(2), 125.
- [28] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C., & Segur, H. (1974). The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Studies in applied mathematics*, 53(4), 249-315.
- [29] Scott, A. (2006). *Encyclopedia of nonlinear science*. Routledge.
- [30] Ao, S. M., & Yan, J. R. (2005). A perturbation method for dark solitons based on a complete set of the squared Jost solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(11), 2399.
- [31] Kodama, Y., & Ablowitz, M. J. (1981). Perturbations of solitons and solitary waves. *Studies in Applied Mathematics*, 64(3), 225-245.
- [32] Pavón-Torres, O., Collantes C., J., & Agüero Granados, M. (2021). Método quasi-estacionario en el estudio de perturbaciones a las soluciones solitónicas de la ecuación no lineal de Schrödinger. *CIENCIA Ergo-Sum*, 28(2).

- [33] Pavon-Torres, O., Agüero, M., Belyaeva, T., Ramirez, A., & Serkin, V. (2019). Unusual self-spreading or self-compression of the cubic-quintic NLSE solitons owing to amplification or absorption. *Optik*, 184, 446-456.
- [34] Zakharov, V. E. (1968). Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 9(2), 190-194.
- [35] Gurevich, A. (2012). *Nonlinear phenomena in the ionosphere (Vol. 10)*. Springer Science & Business Media.
- [36] Balakrishnan, R. (1985). Soliton propagation in nonuniform media. *Physical Review A*, 32(2), 1144.
- [37] Zhao, W., & Bourkoff, E. J. J. B. (1992). Generation, propagation, and amplification of dark solitons. *JOSA B*, 9(7), 1134-1144.
- [38] Richardson, D. J., Chamberlin, R. P., Dong, L., & Payne, D. N. (1994). Experimental demonstration of 100 GHz dark soliton generation and propagation using a dispersion decreasing fibre. *Electronics Letters*, 30(16), 1326-1327.
- [39] Yang, S., Zhang, Q. Y., Li, L., Jin, L., & Chen, S. C. (2022). Generation of dark solitons in a self-mode-locked Tm-Ho doped fiber laser. *Infrared Physics & Technology*, 121, 104043.
- [40] Maiden, M. D., Anderson, D. V., Franco, N. A., El, G. A., & Hoefler, M. A. (2018). Solitonic dispersive hydrodynamics: theory and observation. *Physical review letters*, 120(14), 144101.

- [41] Yang, S., Zhang, Q. Y., Zhu, Z. W., Qi, Y. Y., Yin, P., Ge, Y. Q., ... & Zhang, H. (2022). Recent advances and challenges on dark solitons in fiber lasers. *Optics & Laser Technology*, 152, 108116.
- [42] Lawrence, B. L., Cha, M., Kang, J. U., Torruellas, W., Stegeman, G., Baker, G., ... & Etemad, S. (1994). Large purely refractive nonlinear index of single crystal P-toluene sulphonate (PTS) at 1600nm. *Electronics Letters*, 30(5), 447-448.
- [43] Wright, E. M., Lawrence, B. L., Torruellas, W., & Stegeman, G. (1995). Stable self-trapping and ring formation in polydiacetylene para-toluene sulfonate. *Optics letters*, 20(24), 2481-2483.
- [44] Stegeman, G. I. (2020). Applications of organic materials in third-order nonlinear optics. In *Nonlinear optics of organic molecules and polymers* (pp. 799-812). CRC Press.
- [45] Lawrence, B. L., & Stegeman, G. I. (1998). Two-dimensional bright spatial solitons stable over limited intensities and ring formation in polydiacetylene para-toluene sulfonate. *Optics letters*, 23(8), 591-593.
- [46] He, J. R., Yi, L., & Li, H. M. (2014). Self-similar propagation and asymptotic optical waves in nonlinear waveguides. *Physical Review E*, 90(1), 013202.
- [47] Caplan, R. M., Carretero-González, R., Kevrekidis, P. G., & Malomed, B. A. (2012). Existence, stability, and scattering of bright vortices in the cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(7), 1150-1171.

- [48] Hao, R., Li, L., Li, Z., Yang, R., & Zhou, G. (2005). A new way to exact quasi-soliton solutions and soliton interaction for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients. *Optics communications*, 245(1-6), 383-390.
- [49] Kumar, A., Sarkar, S. N., & Ghatak, A. K. (1986). Effect of fifth-order nonlinearity in refractive index on Gaussian pulse propagation in lossy optical fibers. *Optics letters*, 11(5), 321-323.
- [50] Gatz, S., & Herrmann, J. (1992). Soliton propagation and soliton collision in double-doped fibers with a non-Kerr-like nonlinear refractive-index change. *Optics letters*, 17(7), 484-486.
- [51] Agüero, M. (2001). A note on grey solitons of the cubic–quintic Schrödinger equation. *Physics Letters A*, 278(5), 260-266.
- [52] Serkin, V. N., Chapela, V. M., Percino, J., & Belyaeva, T. L. (2001). Nonlinear tunneling of temporal and spatial optical solitons through organic thin films and polymeric waveguides. *Optics communications*, 192(3-6), 237-244.
- [53] Yang, Q., & Zhang, J. F. (2005). Optical quasi-soliton solutions for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients. *International Journal of Modern Physics B*, 19(31), 4629-4636.
- [54] Dai, C., Wang, Y., & Yan, C. (2010). Chirped and chirp-free self-similar cnoidal and solitary wave solutions of the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients. *Optics Communications*, 283(7), 1489-1494.

- [55] Jiang, L. H., & Wu, H. Y. (2011). Spatiotemporal self-similar waves for the $(3+1)$ -dimensional inhomogeneous cubic–quintic nonlinear medium. *Optics Communications*, 284(7), 2022-2026.
- [56] Dai, C. Q., Wang, Y. Y., & Wang, X. G. (2011). Ultrashort self-similar solutions of the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients in the inhomogeneous fiber. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(15), 155203.
- [57] Chen, Y. X., & Lu, X. H. (2011). Spatiotemporal similaritons in $(3+1)$ -dimensional inhomogeneous nonlinear medium with cubic-quintic nonlinearity. *Communications in Theoretical Physics*, 55(5), 871.
- [58] Dai, C. Q., Chen, R. P., & Zhou, G. Q. (2011). Spatial solitons with the odd and even symmetries in $(2+1)$ -dimensional spatially inhomogeneous cubic-quintic nonlinear media with transverse W-shaped modulation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 44(14), 145401.
- [59] Zhang, J. F., Zhang, M. Y., & Dai, C. Q. (2012). Analytical nonautonomous soliton solutions for the cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients. *Optics Communications*, 285(5), 755-760.
- [60] Yan, Z., & Dai, C. (2013). Optical rogue waves in the generalized inhomogeneous higher-order nonlinear Schrödinger equation with modulating coefficients. *Journal of Optics*, 15(6), 064012.

- [61] Loomba, S., Pal, R., & Kumar, C. N. (2015). Bright solitons of the nonautonomous cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with sign-reversal nonlinearity. *Physical Review A*, 92(3), 033811.
- [62] Wang, P., Feng, L., Shang, T., Guo, L., Cheng, G., & Du, Y. (2015). Analytical soliton solutions for the cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation with Raman effect in the nonuniform management systems. *Nonlinear Dynamics*, 79, 387-395.
- [63] Pal, R., Goyal, A., Loomba, S., Raju, T. S., & Kumar, C. N. (2016). Compression of optical similaritons induced by cubic-quintic nonlinear media in a graded-index waveguide. *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 25(03), 1650033.
- [64] Yu, F. (2016). Nonautonomous soliton, controllable interaction and numerical simulation for generalized coupled cubic–quintic nonlinear Schrödinger equations. *Nonlinear Dynamics*, 85, 1203-1216.
- [65] Chen, R. P., & Dai, C. Q. (2017). Vortex solitons of the (3+ 1)-dimensional spatially modulated cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation with the transverse modulation. *Nonlinear Dynamics*, 90(3), 1563-1570.
- [66] Chen, Y. X., Xu, F. Q., & Hu, Y. L. (2017). Bright spatial solitons in quintic-septimal nonlinear media with two families of PT-symmetric potentials. *The European Physical Journal Plus*, 132, 1-6.
- [67] Arshad, M., Seadawy, A. R., & Lu, D. (2017). Exact bright–dark solitary wave solutions of the higher-order cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation and its stability. *Optik*, 138, 40-49.

- [68] Inc, M., Yusuf, A., Aliyu, A. I., & Baleanu, D. (2017). Optical soliton solutions for the higher-order dispersive cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation. *Superlattices and Microstructures*, 112, 164-179.
- [69] Nath, D., Roy, B., & Roychoudhury, R. (2017). Periodic waves and their stability in competing cubic-quintic nonlinearity. *Optics Communications*, 393, 224-231.
- [70] Zakeri, G. A., & Yomba, E. (2018). Solitons in multi-body interactions for a fully modulated cubic–quintic Gross–Pitaevskii equation. *Applied Mathematical Modelling*, 56, 1-14.
- [71] Wang, C. Y. (2018). The analytic solutions of Schrödinger equation with Cubic–Quintic nonlinearities. *Results in Physics*, 10, 150-154.
- [72] Chen, Y. X. (2018). Vortex and multipole coupled solitons in the spatially modulated cubic–quintic–septimal nonlinear material. *Computers & Mathematics with Applications*, 76(9), 2119-2128.
- [73] Sharafali, A., Nithyanandan, K., & Porsezian, K. (2019). Self-similar pulse compression by defective core photonic crystal fiber with cubic–quintic nonlinearities. *Optik*, 178, 591-601.
- [74] Huang, D. J., & Zhang, H. Q. (2005). The extended first kind elliptic sub-equation method and its application to the generalized reaction Duffing model. *Physics Letters A*, 344(2-4), 229-237.

- [75] Ablowitz, M. J., Nixon, S. D., Horikis, T. P., & Frantzeskakis, D. J. (2011). Perturbations of dark solitons. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 467(2133), 2597-2621.
- [76] Kodama, Y. (1985). Optical solitons in a monomode fiber. *Journal of Statistical Physics*, 39, 597-614.
- [77] Potasek, M. J., & Tabor, M. (1991). Exact solutions for an extended nonlinear Schrödinger equation. *Physics Letters A*, 154(9), 449-452.
- [78] Kumari, P., Gupta, R. K., Kumar, S., & Nisar, K. S. (2022). Doubly periodic wave structure of the modified Schrödinger equation with fractional temporal evolution. *Results in Physics*, 33, 105128.
- [79] Hosseini, K., Salahshour, S., Mirzazadeh, M., Ahmadian, A., Baleanu, D., & Khoshrang, A. (2021). The $(2+1)$ -dimensional Heisenberg ferromagnetic spin chain equation: its solitons and Jacobi elliptic function solutions. *The European Physical Journal Plus*, 136(2), 1-9.
- [80] Hosseini, K., Mirzazadeh, M., Osman, M. S., Al Qurashi, M., & Baleanu, D. (2020). Solitons and Jacobi elliptic function solutions to the complex Ginzburg–Landau equation. *Frontiers in Physics*, 8, 225.
- [81] Hosseini, K., & Mirzazadeh, M. (2020). Soliton and other solutions to the $(1+2)$ -dimensional chiral nonlinear Schrödinger equation. *Communications in Theoretical Physics*, 72(12), 125008.

- [82] Khalil, T. A., Badra, N., Ahmed, H. M., & Rabie, W. B. (2022). Optical solitons and other solutions for coupled system of nonlinear Biswas–Milovic equation with Kudryashov’s law of refractive index by Jacobi elliptic function expansion method. *Optik*, 253, 168540.
- [83] Ma, H. C., Zhang, Z. P., & Deng, A. P. (2012). A new periodic solution to Jacobi elliptic functions of MKdV equation and BBM equation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 28(2), 409-415.
- [84] Al-Ghafri, K. S., Krishnan, E. V., & Biswas, A. (2021). W-shaped and other solitons in optical nanofibers. *Results in Physics*, 23, 103973.
- [85] Sasa, N., & Satsuma, J. (1991). New-type of soliton solutions for a higher-order nonlinear Schrödinger equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 60(2), 409-417.
- [86] Yang, B., & Chen, Y. (2019). High-order soliton matrices for Sasa–Satsuma equation via local Riemann–Hilbert problem. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 45, 918-941.
- [87] Triki, H., & Biswas, A. (2018). Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger’s model. *Optik*, 173, 235-241.
- [88] Guo, L., Cheng, Y., Mihalache, D., & He, J. (2019). Darboux transformation and higher-order solutions of the Sasa-Satsuma equation. *Rom. J. Phys*, 64, 104.

- [89] Wazwaz, A. M. (2020). Higher dimensional nonlinear Schrödinger equations in anomalous dispersion and normal dispersive regimes: Bright and dark optical solitons. *Optik*, 222, 165327.
- [90] Wazwaz, A. M. (2020). Two new Painlevé-integrable $(2+1)$ and $(3+1)$ -dimensional KdV equations with constant and time-dependent coefficients. *Nuclear Physics B*, 954, 115009.
- [91] Wazwaz, A. M., & Mehanna, M. (2021). Bright and dark optical solitons for a new $(3+1)$ -dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Optik*, 241, 166985.
- [92] Triki, H., Porsezian, K., & Choudhuri, A. (2017). Solitons in the nonlinear Schrödinger equation with two power-law nonlinear terms modulated in time and space. *Physical Review E*, 95(6), 062208.
- [93] Messouber, A., Triki, H., Azzouzi, F., Zhou, Q., Biswas, A., Moshokoa, S. P., & Belic, M. (2018). Propagation properties of dipole-managed solitons through an inhomogeneous cubic–quintic–septic medium. *Optics Communications*, 425, 64-70.
- [94] Xu, G. Q. (2011). New types of exact solutions for the fourth-order dispersive cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(12), 5967-5971.
- [95] Guo, C., & Guo, B. (2019). The existence of global solutions for the fourth-order nonlinear Schrödinger equations. *J. Appl. Anal. Comput.*, 9(3), 1183-1192.
- [96] Zayed, E. M., Al-Nowehy, A. G., & Elshater, M. E. (2017). Solitons and other solutions to nonlinear Schrödinger equation with fourth-order dispersion and dual power law

nonlinearity using several different techniques. The European Physical Journal Plus,
132, 1-14.