

Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Soluciones no-clásicas en el modelo de transmisión de pulso nervioso de Heimburg-Jackson modificado

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Físico

PRESENTA

José Blancas Espinoza

ASESOR:

Dr. en C. Máximo Augusto Agüero Granados

COASESOR:

Dr. en C. Omar Pavón Torres

Toluca, Estado de México

Septiembre, 2026



Índice general

1. Resumen 6
2. Antecedentes históricos 8
3. Importancia del problema 12
4. Objetivos 14
   - 4.1. Objetivo General. 14
   - 4.2. Objetivos Particulares. 14
5. Marco Teórico 15
   - 5.1. Aspectos físicos básicos 15
   - 5.2. Aspectos biológicos 22
   - 5.3. Necesidad de otro modelo 37
   - 5.4. Modelo de Heimburg-Jackson 40
6. Metodología 46
7. Discusión de Resultados 49
   - 7.1. Modelo Heimburg-Jackson con fricción 49
   - 7.2. Modelo Heimburg-Jackson modificado 66
8. Conclusiones 88

Bibliografía **89**

Anexos 93

Glosario 93

Índice de figuras

1. Gráfica de solitón obtenido para la ec. KdV, en t=1 . . . 21
2. Ejemplo gráfico sobre la micro y macro glía. 23
3. Esquema de la morfología de una Neurona. 26
4. Sección transversal de un axón 31
5. Ejemplo de respuestas a potenciales locales y potenciales de acción. 34
6. Esquema comparativo de los modelos HH y HJ. 40
7. Transición en el estado de segregación debido al pulso. . 41
8. Esquema de paso del pulso. 42
9. Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz peakon exponencial en el modelo H-J con fricción. 53
10. Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz coseno hiperbólico cuadrático en el modelo H-J con fricción. 59
11. Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz sinh-cosh ii en el modelo H-J con fricción. 65
12. Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz coseno hiperbólico cuadrático en el modelo H-J modificado. 71
13. Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz seno hiperbólico en el modelo H-J modificado. 76

14. Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz peakon exponencial en el modelo H-J modificado. 80
15. Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz sinh-cosh ii en el modelo H-J modificado. 87

1. Resumen

El estudio de pulsos nerviosos ha llevado a diversas maneras de modelar el mismo fenómeno, a partir de sus propiedades eléctricas, mecánicas o incluso termodinámicas. Debido a esto, cada modelo presenta alcances y limitaciones diferentes al momento de explicar no solo la propagación de los pulsos, si no, también a fenómenos aledaños, consecuencia de dicha propagación.
Entre tales modelos, se halla el propuesto por Thomas R. Heimburg y Andrew D. Jackson (Heimburg & Jackson, 2005), el cual con un enfoque termodinámico es compatible con soluciones solitónicas.

En la presente tesis se estudia la ecuación de Heimburg-Jackson modificada, se le llama así debido a la incorporación de términos adicionales que buscan representar valiosa información del modelo físico en cuestión, por ejemplo, con nuevas ideas relativas a la aceleración no constante de los pulsos nerviosos.

Para dar solución a las ecuaciones resultantes tanto del modelo de Heimburg-Jackson con fricción como modificado, se trabaja bajo la metodología propuesta por Abdul-Majid Wazwaz (Wazwaz, 2006), un enfoque de esquemas hiperbólicos con el correspondiente balance de la ecuación diferencial no lineal en términos energéticos, que da paso a una gama de soluciones solitónicas.
Una vez obtenidas las soluciones se estudia su validez, condiciones de existencia y se determina bajo que rango de valores paramétricos surgen solitones regulares y singulares o su mutua transformación en alguna región del espacio-tiempo de 1+1 dimensiones.

Aunque el desarrollo de la metodología y su posterior análisis se realizaron de manera analítica, se hace uso de software y lenguajes de programación como Python para la verificación y representación gráfica de las soluciones.
Finalmente, en la discusión de resultados se caracterizan las solucio-

nes obtenidas, dependiendo del tipo de solitón y las consecuencias de su propagación.

2. Antecedentes históricos

La actividad neuronal , y por ende, la transmisión de información en el cerebro ha sido un fenómeno que ha cautivado a físicos y biólogos por igual, y en una aproximación a dar una explicación de su funcionamiento han surgido modelos que buscan capturar la esencia de dichos fenómenos.

Uno de los puntos de vista más interesantes nace de la idea de considerar a los impulsos nerviosos como un solitón. Un solitón es una onda solitaria, por primera vez registrada en 1834 cuando un ingeniero naval escocés de nombre John S. Russell se hallaba realizando experimentos navales en el Canal Union en Hermiston. En dicho canal de baja profundidad, Russell observó un bote jalado por caballos detenerse, y en consecuencia la formación de una protuberancia, una elevación en el agua que siguió propagándose por delante, lo notable de dicha masa de agua, era que no cambiaba ni de forma ni de velocidad, como era lo usual. Russell atraído por tal hecho siguió la onda por un tiempo, y pasadas dos millas la onda fue disminuyendo gradualmente hasta finalmente perderse.

Russell la llamó una onda de translación, y continuó realizando experimentos buscando replicar el fenómeno y obtener más información. De estos experimentos destacan varios puntos que hacen a este fenómeno particular: la propagación se traslada sin cambios aparentes en forma o velocidad, la existencia de una onda de esta clase puede dar paso, a partir de la primera, a dos o más ondas del mismo tipo, la colisión entre dos de estas ondas no ocasiona cambios tras la interacción, como si no hubiese ocurrido en primer lugar, y finalmente obtiene una expresión para la velocidad dependiente de la profundidad del canal:

$$c^2 = g(h + \nu),$$

donde c es la velocidad de la onda, g la aceleración debida a la gravedad, h la profundidad del canal y ν la amplitud. Es notable observar entonces que una onda más alta viaja más rápido que una onda de me-

nor amplitud.
Aún con todo esto ya reportado ante la Asociación Británica, no se le dio una relevancia especialmente grande, y fue visto más como una curiosidad académica. De manera independiente, entre 1871 y 1877, Joseph Boussinesq y Lord Rayleigh propusieron una formulación matemática a dichas observaciones.
Fue hasta 1895 cuando Diderick Korteweg y Gustav de Vries, estudiante de Diderick, exponen el desarrollo de una formulación que se le conoce como la ecuación Korteweg de Vries o ecuación KdV.

$$u_t + 6u_x + u_{xxx} = 0.$$

De donde se observa la aparición de términos no lineales y dispersivos, ignorados hasta ese momento. Esto es clave debido a una de las condiciones necesarias de existencia para este tipo de entidades, el balance entre no linealidad y dispersión. Sin embargo, transcurre más tiempo antes de que se pudiese ver la gran variedad de aplicaciones que se le da a la no linealidad.
En 1955 Enrico Fermi, John Pasta, Stanislaw Ulam y Mary Tsingou realizaron un experimento en el Laboratorio Nacional de los Álamos, donde mediante una simulación numérica, modelaron una cadena unidimensional de osciladores acoplados considerando términos no lineales, donde la idea era mostrar la conservación de la energía, al observar cómo la energía inicial en un modo vibracional se redistribuía en las demás, es decir había equipartición de la energía como se predice en la termodinámica estadística.
Lejos de lo esperado, la energía no se difundió de manera uniforme, y en vez de llegar a un equilibrio térmico, pasado un tiempo, el sistema llegaba a un estado casi igual que su estado inicial, es decir, existía recurrencia.
Tales hallazgos llevaron a investigadores como Norman Zabusky y Martin Kruskal a retomar la ecuación KdV pero esta vez numéricamente. Entre sus hallazgos se encuentran que las ondas que colisionan permanecen intactas, y que su comportamiento podría asemejarse al

comportamiento de una partícula. A ellos se les debe el término de *solitón*.

Esto marca un antes y un después en el estudio de entidades no lineales, y da paso un amplio número de aplicaciones de esta y otras ecuaciones no lineales, en fenómenos de diversos tipos: acústicos, electromagnéticos, hidrodinámicos, plasmas, así como lo que compete a este trabajo: neurobiológicos.
Previo a ahondar en ello, también cabe señalar otro de los aspectos más interesantes de los solitones, su forma, que es una de las convenciones habituales de clasificarlos, hay de muchos tipos: brillantes, oscuros, respiradores, vórtices, kinks, compactones, todos ellos con características distintas de acuerdo al perfil de la onda y otro de los aspectos que los vuelve tan bellos de estudiar.

Volviendo a los modelos de pulsos nerviosos, fue al principio del siglo XX, siendo más precisos en 1952, cuando Alan Hodgkin y Andrew Huxley propusieron su propio modelo. El Modelo de Hodgkin-Huxley (Hodgkin & Huxley, 1952) describe al pulso, llamado para este caso el potencial de acción, como un fenómeno electroquímico. Las señales nerviosas eran vistas como la propagación de una dislocación local de un potencial eléctrico, y sí, la idea ha dado paso a modelos especialmente eficientes, sin embargo, encontró limitaciones al tratar de dar una explicación a otros fenómenos igual de importantes desencadenados de la propagación del pulso, tales como cambios mecánicos, cambios térmicos reversibles o una propagación sin mucha disipación energética.
Son tales discrepancias las que llevaron a científicos a buscar ideas alternativas al modelo, los cuales, impulsados adicionalmente por ciertas observaciones realizadas experimentalmente, por investigadores como Ichiji Tasaki (Tasaki, 1949), los cuales estudiaron los cambios en el grosor de la membrana durante el impulso o la liberación/reabsorción de calor casi reversible, llevaron a especular que se podría evaluar el

fenómeno desde un punto de vista ya fuese mecánico o termodinámico.
No obstante, es hasta 2005 cuando Thomas Heimburg y Andrew D. Jackson propusieron un modelo basado en un solitón de densidad en la membrana lipídica (Heimburg & Jackson, 2005). Esta representación es capaz de explicar los efectos mecánicos y térmicos, además predicen propagaciones casi reversibles.

Tal enfoque sería la alternativa clara al modelo de Hodgkin-Huxley, ya que donde este falla el modelo Heimburg-Jackson no. Sin embargo, hoy en día ambos modelos son objeto de múltiples estudios, lo cual significa que ambos modelos son correctos, y la búsqueda de una explicación donde ambos fenómenos coexisten aún es necesaria, en investigaciones recientes se siguen hallando una gran variedad de soluciones como las encontradas por (Chakraborty et al., 2025; Drab et al., 2022; Ozsahin et al., 2024) o se han hallado mejoras en el modelo para describir la propagación (Pavón-Torres et al., 2024).

3. Importancia del problema

La necesidad de contar con un modelo que sea capaz de describir con precisión la transmisión de los impulsos nerviosos y, por ende, la información que llevan es vital para comprender el funcionamiento de cualquier organismo vivo.
El sistema nervioso se encarga de la comunicación del cuerpo y la respuesta a su entorno, mediante la memoria, la coordinación muscular, la reacción a estímulos, los pensamientos, etc. En consecuencia, las funciones más básicas del organismo no podrían llevarse a cabo si no fuera por el sistema nervioso.
Entender la transmisión de información nos permite tener una visión mucho más profunda de cómo operan los organismos o, incluso, yendo más allá, la vida misma.
Y, desde el punto de vista de las aplicaciones, es fundamental para el tratamiento de enfermedades; comprensiblemente, aquellas relacionadas con el sistema nervioso son las que más se benefician de este estudio.

Si bien los modelos preexistentes, a pesar de ser muy eficientes y capaces de explicar varios aspectos del fenómeno, necesitan mejoras, a fin de ofrecer descripciones y predicciones no solo más detalladas y precisas, sino también para abarcar más fenómenos.
En ese sentido, trabajar con una ecuación modificada, tal como se propone en este trabajo de tesis, constituye precisamente la idea de mejorar el modelo. Y presentar no solo un conjunto de soluciones novedosas, sino también determinar bajo qué condiciones dichas soluciones son válidas.

Por otro lado, es bien sabido, que para la integración de ecuaciones diferenciales no lineales o integro diferenciales, no existe un método ideal como en el caso de ecuaciones diferenciales lineales, por ende trabajar analíticamente modelos como el de Heimburg-Jackson puede resultar especialmente complicado, sin embargo han surgido metodo-

logías que pueden aplicarse a familias de ecuaciones con cierta similitud y que han dado buenos resultados.
Sin embargo, es necesario aplicar transformaciones y métodos, como el de Hirota o las expansiones exponenciales, para acercarse a soluciones.
Por lo tanto, en el presente trabajo se expone una metodología coherente para la búsqueda de soluciones solitónicas con estas características y, además, dada su relativa sencillez, resulta muy práctica y potente en la búsqueda de soluciones del tipo solitón.

4. Objetivos

4.1. Objetivo General.

El objetivo del presente trabajo es el análisis de las condiciones de existencia de pulsos nerviosos tipo solitónicos modelados bajo la ecuación de Heimburg-Jackson modificada que considera términos adicionales debidos a la fricción, viscosidad y no linealidad. Dentro de estas estructuras es posible la aparición de solitones compactos, picos, respiradores y solitones oscuros que son estructuras clásicas y no-clásicas con comportamiento tipo partícula.

4.2. Objetivos Particulares.

- Análisis de la ecuación de evolución de los pulsos nerviosos bajo el supuesto de la presencia de fuerzas de fricción en el modelo de Heimburg-Jackson, lo cual nos sugiere la introducción de un término con derivadas mixtas en espacio-tiempo unidimensional.
- Estudio de la ecuación de evolución de Heimburg-Jackson considerando además de la fricción una componente que mostraría el cambio de aceleración de los pulsos nerviosos a lo largo de la longitud del axón.
- Análisis del balance paramétrico-energético en estas dos versiones para inferir si existen o no estructuras compactas, así como también estructuras singulares viajeras además de las clásicas.
- Determinar bajo qué rango de valores paramétricos surgen solitones regulares y singulares o su mutua transformación en alguna región del espacio-tiempo de 1+1 dimensiones. El término adicional es crucial en la obtención de solitones tanto clásicos como no clásicos.

5. Marco Teórico

5.1. Aspectos físicos básicos

Ondas

Una onda la definiremos en su formato clásico como un fenómeno ondulatorio, donde existe un transporte de energía en un medio perturbado, donde dicha perturbación avanza, pero su medio material no. Independientemente de la forma de la perturbación, la onda debe tener una única dependencia, que siempre queda expresada en términos de una variable ζ que a su vez son una expresión de la posición y el tiempo: $\zeta = x \pm vt$.
Dicho de otra forma, los perfiles de una onda ψ se pueden construir siempre de la forma:

$$\psi = f(\zeta) = f(x,t) = f(x \pm vt). \tag{1}$$

Donde x es la posición, t el tiempo y v la velocidad de la onda. Y en general, las ondas se modelan bajo una ecuación diferencial de segundo orden, conocida como Ecuación de onda. Y su deducción vendría de la siguiente manera: Se toma la derivada parcial de $\psi(x,t)$, con respecto a x, manteniendo t constante

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{2}$$

Y como $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 1$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \tag{3}$$

Ahora, fijando x y derivando respecto a t, se obtiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{4}$$

Y en este caso, como $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \pm v$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \tag{5}$$

Ahora calculando las segundas derivadas parciales, para la segunda derivada parcial espacial se tendría:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}. \tag{6}$$

Y para la segunda derivada parcial temporal:

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pm v \frac{\partial f}{\partial \zeta}\right) = \pm v \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right). \tag{7}$$

Y recordando $\psi(x,t) = f(\zeta)$, lo que implica que $\psi_t = f_t$, con lo que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \pm v \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}. \tag{8}$$

Por comparación de (6) y (8) es notorio que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Que finalmente podemos reescribir como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Esta última ecuación (10) es la que se conoce como la ecuación de onda, y cualquier solución generada por este modelo es por lo tanto una onda.

Ondas No-lineales

Previo a entrar de lleno con los aspectos de una onda no lineal, es necesario comprender el concepto de no-linealidad. De acuerdo con Evans (2022) «una ecuación diferencial parcial (PDE) es una ecuación que involucra una función desconocida de dos o más variables y algu-

nas de sus derivadas parciales». A partir de lo cual se define que:

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0, \qquad (x \in U), \qquad (11)$$

se le conoce como una ecuación diferencial parcial de orden k, donde

$$F : R^{n^k} \times R^{n^{k-1}} \cdots \times R^n \times R \times U \to R, \qquad (12)$$

está dado, y

$$u : U \to R, \qquad (13)$$

es la incógnita.

Ahora bien, una de las formas comunes de clasificar las ecuaciones diferenciales en general, es en base a la linealidad. Tomando de nuevo un extracto de Evans (2022) :

Una ecuación diferencial parcial se le llama **lineal** si tiene la forma:

$$\sum a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)_{|\alpha|=k}, \qquad (14)$$

para funciones dadas $a_\alpha\,(|\alpha| \leq k), f$.

Es decir, las variables dependientes u y todas sus derivadas $D^\alpha u$ son de primer grado. Además los coeficientes a_α dependen exclusivamente de la variable independiente x.

De no cumplir alguna de estas propiedades hacen de la ecuación diferencial parcial una ecuación diferencial parcial **no - lineal**. El ser no-lineales tiene consecuencias importantes en el cómo tratar este tipo de ecuaciones. Una de ellas si no la más importante, es que estas soluciones no caen en el principio de superposición, es decir la suma de dos o más soluciones no asegura ser solución de la ecuación, y por tanto, se extiende a que métodos usuales, para hallar soluciones que se basan o aprovechan de este principio, quedan totalmente descartados; métodos como las transformadas de Fourier o Laplace no son aplicables. Esto ha llevado al desarrollo de metodologías en la búsqueda de soluciones, como lo serian el método de dispersión inversa, pares de Lax o sí es el caso métodos numéricos. Y es que, los problemas que

involucran fenómenos no lineales son más comunes de lo que parecen dado que los fenómenos lineales son de una forma resultado de aproximaciones o convenciones que permiten simplificar modelos que en esencia pueden ser mucho más profundos. Dicho esto, una de las áreas más interesantes de los fenómenos no lineales, son aquellos relacionado con la naturaleza ondulatoria. En general, una onda de amplitud finita regida por una ecuación de evolución no-lineal es lo que se considera como una onda no-lineal.

Solitones

Un fenómeno común en ondas no-lineales es que su velocidad de fase dependa solo de su amplitud. Por ello, la velocidad de la onda es mayor cuanto más grande sea su amplitud y menor en el caso contrario. De modo que, una onda de gran amplitud en la parte posterior, que alcanza a una de menor amplitud por la parte frontal, lleva a un aumento de la pendiente y forma de la onda, y posteriormente debido a la no-linealidad, a la ruptura de dicha onda. Por lo tanto, como lo indica Taniuti y Nishihara (1983) «en una ecuación de evolución no-lineal sin disipación, ni dispersión es, en general, posible que la ondas inicialmente suaves se vuelvan discontinuas después de un tiempo finito, de modo que las soluciones no existen para todo el tiempo». Entonces la pregunta natural es ¿qué ocurre cuando sí hay términos asociados a la disipación o dispersión?: El nacimiento de un solitón. Un solitón es una entidad no lineal nacida del balance de fuerzas opuestas: no linealidad - dispersión, no linealidad - disipación, y es precisamente este balance que dota de su característica principal, a diferencia de las ondas tradicionales, los solitones mantienen su forma y amplitud mientras se propagan sin dispersarse ni cambiar de velocidad. Dicho de otro modo, en un sistema físico, especialmente aquellos modelados bajo términos no lineales, es natural obtener soluciones del tipo ondulatorio, las cuales son susceptibles a deteriorarse con el paso del tiempo, al introducir términos dispersivos. Ahora bien, el régimen no lineal es el que se opone a las fuerzas producidas por la dispersión, si

la dispersión degrada la onda hacia fuera, la no linealidad la aplana en sentido opuesto, permitiendo así que la onda se mantenga en forma y velocidad a lo largo del tiempo. Los solitones son soluciones estables y a menudo se pueden entender como objetos topológicos en el espacio de configuración de las ecuaciones, lo que los hace especialmente interesantes cuando se modelan temas como el que atañe este trabajo, en fenómenos donde las pérdidas de información son de pocas a nulas y es necesario una solución lo suficientemente estable como para mantenerse en largas distancias sin verse afectado por el entorno; por lo que los solitones se han observado en diversos sistemas físicos naturales, como en láseres, fibras ópticas, plasmas y fluidos. Ejemplifiquemos una obtención clásica de una solución exacta que da como resultado un solitón. Para ello se hará uso de la ecuación conocida como ecuación de Korteweg-de Vries (ecuación KdV); que entre otras cosas, permite el modelaje de aguas poco profundas:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{15}$$

Para resolver a esta ecuación se propone una solución tipo onda viajera $u(x,t) = \phi(z)$ con $z = x - vt$, con $v > 0$.
Reescribiendo la ecuación (1) en términos de $\phi(z)$ y obtenemos:

$$-v\phi' + \phi\phi' + \phi''' = 0. \tag{16}$$

Realizando una primera integración obtenemos:

$$-v\phi + \frac{1}{2}\phi^2 + \phi'' = \alpha. \tag{17}$$

Debido a que ϕ y $\phi''(z) \to 0$ en el límite $z \to \pm\infty$, entonces $\alpha = 0$

$$-v\phi + \frac{1}{2}\phi^2 + \phi'' = 0. \tag{18}$$

Multiplicando la expresión anterior por ϕ':

$$-v\phi'\phi + \frac{1}{2}\phi'\phi^2 + \phi'\phi'' = 0, \tag{19}$$

$$-v\frac{1}{2}(\phi^2)' + \frac{1}{6}(\phi^3)' + \frac{1}{2}(\phi'^2)' = 0. \tag{20}$$

Realizando una integración obtenemos:

$$-v\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{6}\phi^3 + \frac{1}{2}\phi'^2 = \alpha_1. \tag{21}$$

Debido a que ϕ y $\phi'(z) \to 0$ en el límite $z \to \pm\infty$, entonces $\alpha_1 = 0$

$$-v\phi^2 + \frac{1}{3}\phi^3 + \phi'^2 = 0. \tag{22}$$

Que podemos reescribir como:

$$3(\phi')^2 = (3v - \phi)\phi^2, \tag{23}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3v-\phi}\phi}\phi' = 1, \tag{24}$$

Utilizando el cambio de variable $t^2 = 3v - \phi$ obtenemos

$$\frac{2\sqrt{3}}{3v - t^2}t' = -1. \tag{25}$$

Integrando (11) obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{v}}\ln\left(\frac{\sqrt{3v}+t}{\sqrt{3v}-t}\right) = -z + \alpha_2, \tag{26}$$

$$\frac{\sqrt{3v}+t}{\sqrt{3v}-t} = e^{-\sqrt{v}(z+\alpha_2)}, \tag{27}$$

$$t + te^{-\sqrt{v}(z+\alpha_2)} = \sqrt{3v}\left(e^{-\sqrt{v}(z+\alpha_2)} - 1\right), \tag{28}$$

$$t = \sqrt{3v}\left(\frac{e^{-\sqrt{v}(z+\alpha_2)} - 1}{e^{-\sqrt{v}(z+\alpha_2)} + 1}\right), \tag{29}$$

$$t = -\sqrt{3v}\tanh\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(z+\alpha_2)\right), \tag{30}$$

$$t^2 = 3v\tanh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(z+\alpha_2)\right), \tag{31}$$

$$3v-\phi = 3v\tanh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(z+\alpha_2)\right), \tag{32}$$

$$\phi = 3v\left[1-\tanh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(z+\alpha_2)\right)\right], \tag{33}$$

$$\phi = 3v\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(z+\alpha_2)\right). \tag{34}$$

Siendo α_2 solo la fase podemos igualarla a cero, y quedarnos con la solución en términos de $u(x,t)$:

$$u(x,t) = 3v\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt)\right). \tag{35}$$

Este última ecuación (35) es lo que se conoce como una típica solución solitónica. Gráficamente se observa como:

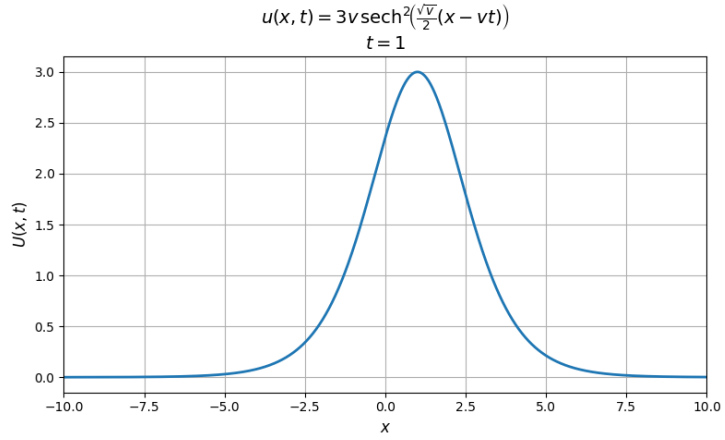


Figura 1: Gráfica de solitón obtenido para la ec. KdV, en t=1

Otro de los aspectos clave de los solitones radica en su dinámica. Cuando un solitón colisiona con otro, durante la interacción sus amplitudes se suman, pero a diferencia de una onda donde existirían efectos

de interacción constructiva o destructiva que resultaría en la amplificación o aniquilación de las ondas, aquí los solitones emergen como si no se hubiesen encontrado en primer lugar, conservando su perfil original, tanto en velocidad y forma.

5.2. Aspectos biológicos

El tejido nervioso se compone de células, las cuales se considerará como unidades funcionales independientes, que se comunican entre ellas por medio de la sinapsis. Entendiendo la sinapsis como el lugar anatómico donde ocurre el intercambio de información, y dicho intercambio como transmisión sináptica. Durante dicho intercambio,

la información codificada por algún potencial se transmite a la célula siguiente. No obstante, no todas las células nerviosas pueden llevar acabo esta comunicación. He aquí que se identifiquen dos grandes conjuntos que conforman el sistema nervioso: las **Células nerviosas** o también llamadas **Neuronas** y las **Células de Sostén o Neuroglía.** Y en ambos casos, tanto las neuronas como la neuroglia comparten los orgánulos que se encuentran de manera general en las células, como lo serían el retículo endoplasmático, el aparato de Golgi, mitocondrias y distintas estructuras vesiculares.

La diferencia esencial a entender es que las neuronas son las células especializadas, y por tanto, encargadas de la comunicación a largas distancias, mientras que la neuroglía no es capaz de efectuar tales comunicaciones, y en cambio, tiene otras funciones enfocadas en estabilidad, mantenimiento y desarrollo.

Iniciemos hablando de la neuroglía, la cual son tejidos nerviosos especializados en protección y soporte del resto de células nerviosas, por ello que sean más numerosas que las neuronas. Esta se clasifica en dos conjuntos: microglía y macroglía. La microglía tiene funciones de limpieza de restos tras eventos de muerte celular como lesiones o enfermedades. La macroglía se compone de oligodendrocitos, células de Schwann y Astrocitos; los dos primeros se encargan de envolver

espacios internodales axónicos de mielina, mientras que los astrocitos aportan nutrientes, se encargan de los restos de los neurotransmisores y fungen como célula sostén. Con todo esto, se puede resumir que la función de la neuroglía está lejos de los aspectos de señalización de las neuronas, y cae más bien en aportar y mantener la estructura para que, precisamente, la señalización pueda existir.

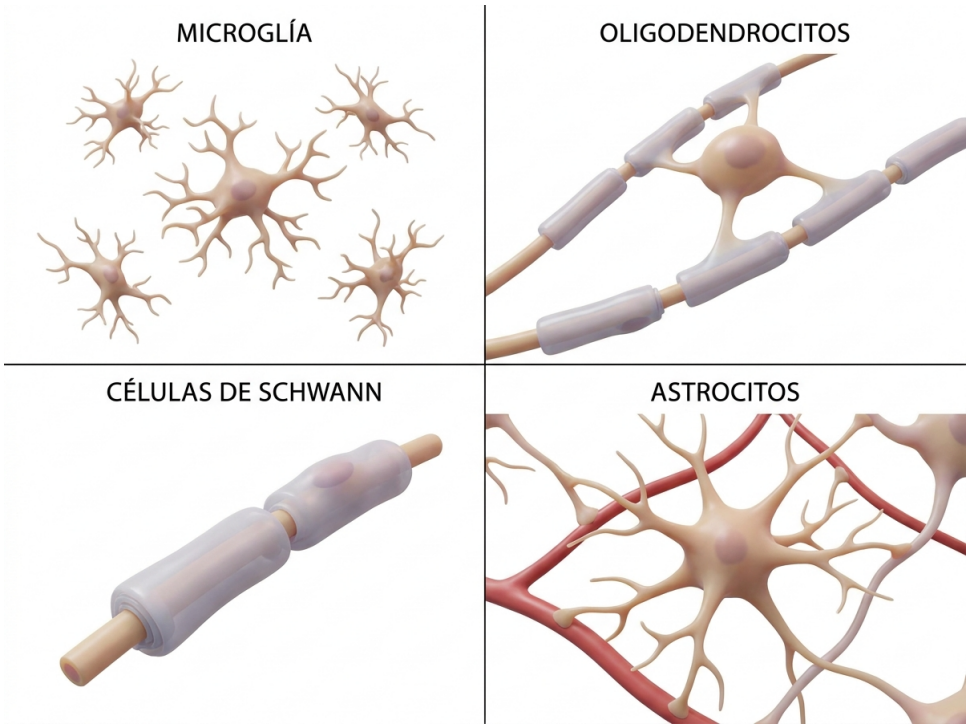


Figura 2: Ejemplo gráfico sobre la micro y macro glía. Se muestran las diferencias esquemáticas de dichos cuerpos biológicos. Nota. Adaptado de (Kandel, 2000, p. 21).

Dicho esto, es momento de hablar del otro conjunto del sistema nervioso y el encargado de la señalización: las neuronas; estas son el medio principal de comunicación en el organismo, organizando y llevando las señales del exterior para su posterior traducción y respuesta. Para entender cómo se llevan a cabo tales eventos, es necesario comprender los componentes que las conforman, tomando entonces la morfología de las neuronas se tienen cuatro regiones bien definidas:

1. Cuerpo Celular

2. Dendritas

3. Axón

4. Terminales presinápticas

En el plano estructural los orgánulos membranosos están distribuidos selectivamente por todas las neuronas y el citoesqueleto determina la forma de la neurona. Dichas estructuras se asocian acorde a su función durante la transmisión sináptica en: componentes de entrada, componente desencadenante, componente de transmisión y componente de salida.
Con esto se tiene las estructuras principales:

Cuerpo Celular o Soma: Es el centro metabólico de la célula. Contiene al núcleo, donde se almacenan los genes, y al retículo endoplasmático donde se sintetizan las proteínas que la célula necesita. Y es a partir del soma donde se extienden tanto las dendritas como un único axón.

Dendrita: Es una prolongación corta y ramificada del soma. Son receptores de impulsos nerviosos y señales químicas provenientes de otras neuronas. Son ricas en ribosomas y proteínas específicas del citoesqueleto, que se refleja en su función de recepción e integración de información.

Es decir las dendritas se pueden considerar como ramas que surgen del cuerpo de la neurona, y son receptores de aferencias sinápticas.

Aferencia: Es la transmisión de impulsos nerviosos desde los órganos receptores (en la periferia) hacia el sistema nervioso central.

Axón: Es una fibra nerviosa, se extiende desde el soma y consiste en un eje cilíndrico (axoplasma) rodeado por una vaina de mielina, por fuera de la cual hay una membrana delgada (neurilema)

Los axones entonces se componen de fibras o ramas, envueltas por mielinas que funge como aislante, lo cual aumenta la velocidad de conducción. Pero, también cabe destacar que la continuidad de las vainas de mielina está cortada o interrumpida a intervalos regulares, lo que se conoce como Anillos o Nódulos de Ranvier.

Terminaciones presinápticas: Son las ramas ya en división del axón justo al final de su extensión, y que se dividen para formar los lugares de comunicación con otras neuronas o células diana.

Célula diana: Es una célula sobre la que actúa una señal biológica, y en cualquier caso debe poseer los mecanismos para detectar dicha señal, ejemplos de ella serían células nerviosas, ganglios autónomos, células de los músculos, glándulas.

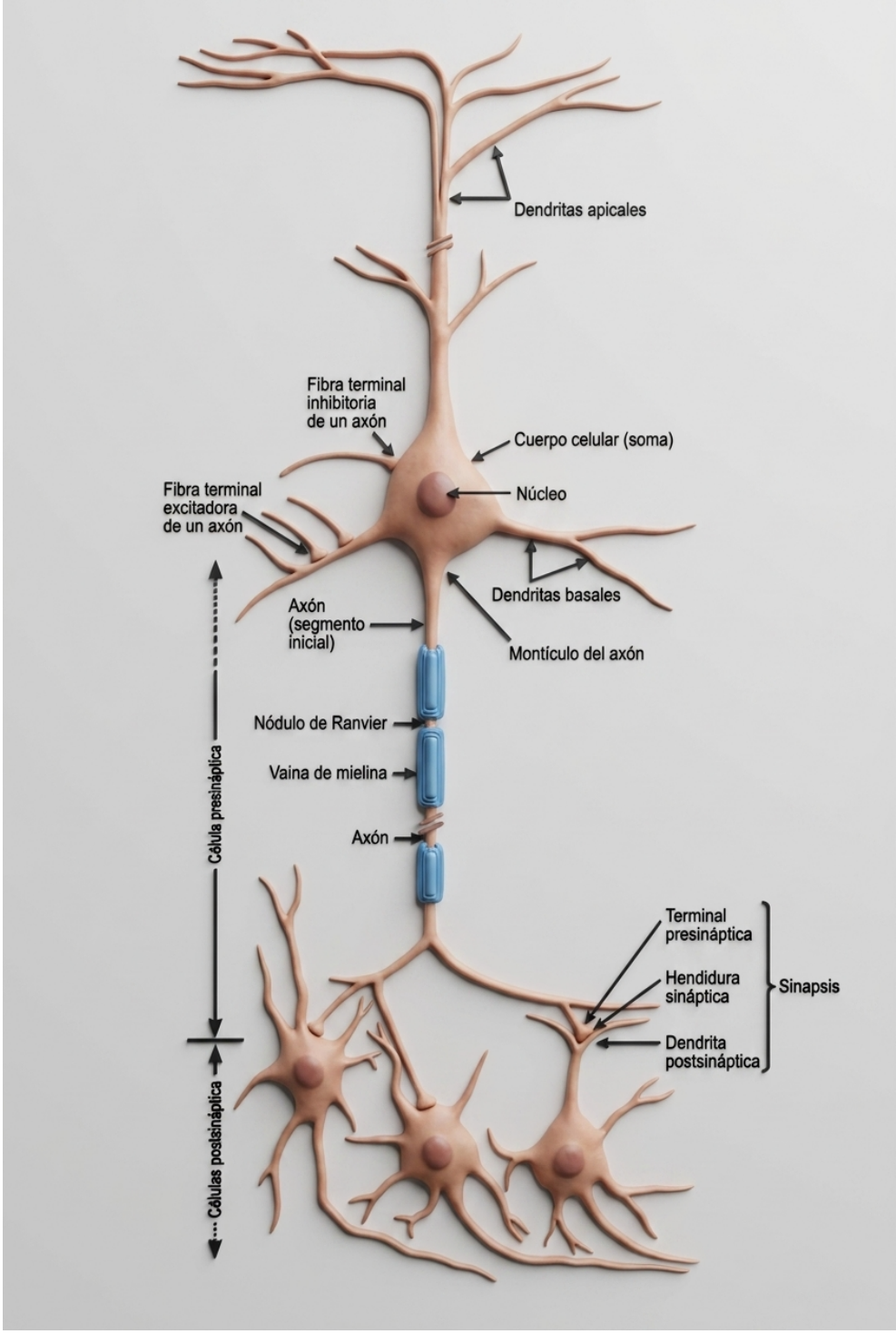


Figura 3: Esquema de la morfología de una Neurona. Nota. Adaptado de (Kandel, 2000, p. 22).

Tomemos como ejemplo de la estructura de una neurona típica la figura anterior (3), donde se observa cómo el núcleo se halla al interior del soma, de las cuales nacen ramificaciones, las cuales son las dendritas donde se llevará a cabo la comunicación inter neuronal. Por otro lado, también hay una prolongación mayor que parte del montículo y se desenvuelve como el cuerpo del axón, el cual está segmentado en vainas recubiertas de mielina y espacios carentes de la misma llamados nódulos de Ranvier. Para finalmente conectarse a otros axones o bien a las fibras terminales de otras neurona, estableciendo así la sinapsis.

Centrándonos en la organización célular básica de las neuronas, es notorio entonces que, es semejante al de otras células, pero con el detalle de estar especializado en la comunicación intercelular, de lo cuál lo más sobresaliente es la ramificación extensa de las neuronas o como es llamado normalmente, la arbolización compleja de dendritas. Las neuronas funcionan en conjuntos particulares funcionales conocidos como **circuitos neuronales**. En los cuales se procesan tipos específicos de información y por ello aportan las bases para la sensación, percepción y conducta.

Si bien la variedad de composición química específica (a nivel molecular), la morfología y la funcionalidad de las neuronas puede llegar a ser distinta según su especialización, la señalización de todas se organiza de la misma manera en todas las neuronas:

1. El componente de entrada produce señales graduadas en respuesta a un estímulo.

2. En el componente desencadenante se determina si el conjunto de señales es suficiente para generar un potencial de acción.

3. Si es el caso y se ha conformado un potencial de acción, entonces, el componente de conducción propaga el potencial de acción.

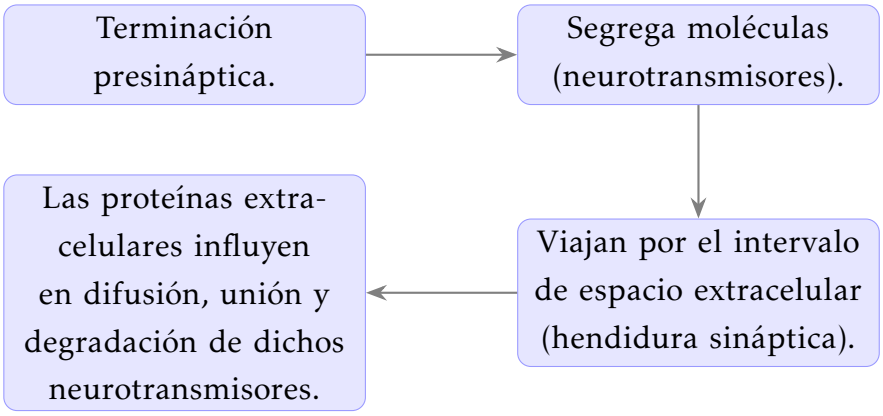
4. El componente de salida libera el neurotransmisor.

5. Se completa la transmisión sináptica al transformar la señal nerviosa en la respuesta correspondiente, por ejemplo sensitiva, motora, etc.

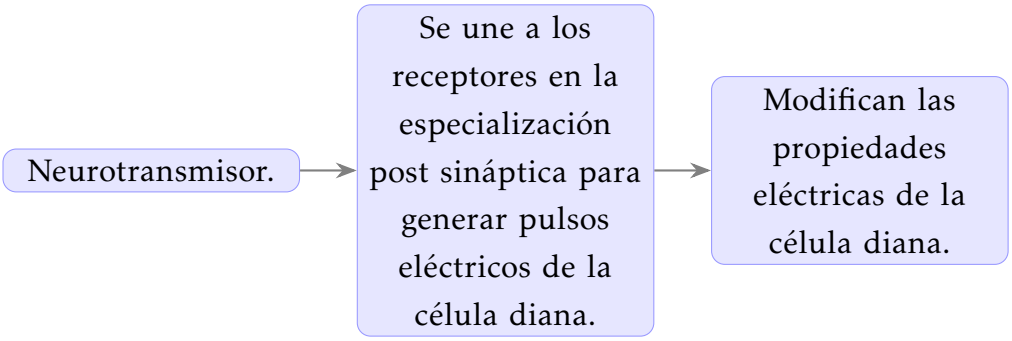
La complejidad de las funciones que desempeñan las neuronas se debe a los circuitos anatómicos que forman, los cuales son específicos, de ahí que la información que transmiten sea particular. Además, la complejidad de los circuitos no es la única característica que tienen, sino también su capacidad para modificarse debido a la memoria y experiencias, lo que los dota de adaptabilidad y da paso a conceptos más abstractos como la conducta.

Además de lo anteriormente mencionado, el espectro de configuraciones neuronales varía desde células sin dendritas hasta ramificaciones extensas complejas. Resultando así en que, el qué tantas ramas haya, implica un mayor número de aferencias y complejidad en las ramificaciones. Y que, en condiciones típicas, la terminación pre sináptica sea inmediatamente adyacente a una especialización post sináptica.

A continuación se presenta el flujo de información en el siguiente diagrama:



Y en ese sentido:



Se puede entender entonces, que las membranas pre y post sinápticas realizan transformaciones diferentes de la información:

- La membrana pre sináptica transforma un potencial de acción en liberación química.
- El espacio sináptico (hendidura) transporta esa señal.
- La membrana post sináptica transforma la señal química en cambios mecánicos, eléctricos y bioquímicos.
- La información transmitida por la sinapsis a las dendritas es integrada en el origen del axón.

Sin embargo, es necesario no perder de vista que las membranas pre y post sinápticas no tienen un contacto tangible real, están separadas por la hendidura sináptica.

El tipo más común de sinapsis en el cerebro es una conexión: axón→ axón, pero eso no descarta otros tipos como lo serían: axón → soma, axón→axón o dendrita→dendrita. En ese sentido lo único realmente obligatorio para poder clasificar a una célula como una neurona, es que sea especializada en recibir, traducir y transmitir información, el formato en que esto ocurra puede variar, pero para fines de este trabajo, quedará centrado en los del primer tipo, es decir de axón a dendrita.

Debido a la variedad existente por la funcionalidad específica de los circuitos neuronales, estos varían mucho en disposición respecto

unos de otros. Sin embargo, se identifican tres componentes esenciales y comunes de todos los conjuntos en base al circuito de conducción en el que se desempeñan: neuronas aferentes, neuronas eferentes e interneuronas; siendo las primeras aquellas que mandan información entre el encéfalo y la médula espinal, las eferentes fuera del sistema nervioso central, y finalmente las interneuronas solo en circuitos locales cortos.

Previo a introducirse a cómo es que exactamente se envía y recibe señales, es necesario entender los elementos fundamentales para que esto ocurra, y en primera instancia tendremos el lugar donde los potenciales ocurren: la membrana plasmática. Lo que hay que entender de los axones como el lugar de transporte de señales, es que esto ocurre en sus membranas. Las membranas en general de todas las células, se forman por una doble capa continua (bicapa) de lípidos y proteínas. Las capas son fluidas de forma que las distintas moléculas lipídicas puedan difundirse dentro su propia monocapa, y que las proteínas estén inmersas en las capas. Los posibles conjuntos lipídicos que conformen la membrana son muy variados, a centenares, sin embargo se pueden destacar tres tipos: los fosfolípidos, el colesterol y los glucolípidos. Pero independientemente de la cantidad presente de ellos, las composiciones de las monocapas interna y externa son distintas entre sí, lo que las lleva a distintas funciones para una misma membrana. Pero aun con todo eso, su papel primario es ser un aislante que separa dos soluciones conductoras: el citoplasma y el líquido extracelular; y, para el caso de las neuronas los iones a conducir en dichas soluciones que nos interesarán serán el K^+, Na^+ y el Cl^-; dicho de otro modo, cada neurona tiene una separación de cargas a través de su membrana, es decir los iones positivos y negativos están distribuidos en las superficies interna y externa, habiendo una mayor concentración de positivos en una cara y negativos en la otra. En reposo, el exceso de cargas positivas es en la cara externa debido a la presencia de los iones de Na^+, y el exceso de cargas negativas en la cara interna por los iones de K^+. Tomemos como ejemplo el esquema siguiente:

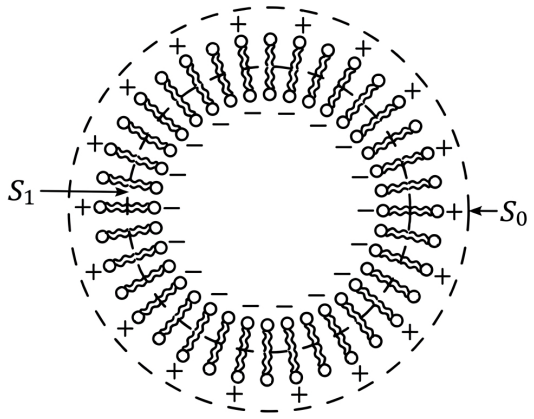


Figura 4: Sección transversal de un axón, las superfices S_0 y S_1 corresponden con las monocapas que conforman la bicapa de la membrana, se muestra la distribución de cargas. Nota. Adaptado de (Andersen et al., 2009).

Como se observa en la Figura (4), siendo la vista de una sección transversal del axón, se consideran dos capas, correspondientes con cada monocapa de la membrana, para este caso la superficie externa S_0 se halla cargada positivamente y la superficie interna S_1 se halla cargada negativamente. Se considera entonces que la superficie externa funge como referencia y por lo tanto su voltaje es 0, mientras que la superficie interna estará, en este caso, a -70mV respecto de la externa.

No obstante, estas cargas halladas en las superficies no están estáticas, hay un flujo constante pasivo que se debe a otra de las características de composición de la membrana: las proteínas, en este caso se consideran dos tipos esenciales, canales y transportadores. De forma general, en su estado basal, las neuronas se hallan en un potencial negativo, denominado **potencial de membrana en reposo**, que se debe a la diferencia de voltaje entre el interior y el exterior de la célula cuando no está siendo estimulada. En casos típicos dicho potencial se halla entre $-40mV$ a $-90mV$, y en promedio a $-70mV$ Con todo esto, rescatamos los aspectos indispensables de la membrana:

1. Tienen una distribución no uniforme de iones.

2. Son selectivamente permeables a diferentes iones.

Lo primero indica que las neuronas tienen un medio para generar un voltaje a través de la membrana que en promedio es constante. Mientras que lo segundo, habla de las cargas al interior cambiaran con la llegada o salida de iones particulares que solo la membrana determinará por medio de sus canales.

Ahora, conviene separar qué papel juegan las proteínas. En cuanto a los transportadores activos, estos cambian su disposición con el fin de introducir o expulsar iones al interior de la célula; mientras que, los canales iónicos solo permiten el paso a ciertos iones de manera selectiva. Cabe diferenciar que los transportadores actúan en contra del gradiente de concentración del ión en cuestión, y en contra parte, los canales mueven iones a favor del gradiente de concentración.

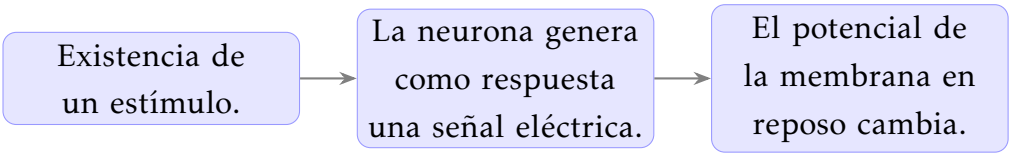
Así, ambas proteínas trabajan de forma opuesta pero con el fin de alcanzar el potencial de la membrana en reposo, o salir de él y transmitir información. Para analizar cómo trabajan dichas proteínas, se utilizará un ejemplo sencillo: Se consideran dos compartimentos con distintas concentraciones de soluciones de iones. Y entre ellas una membrana permeable a un tipo de ión en particular, si por ejemplo hay 10 veces más concentración de un lado, habrá un gradiente de concentración de iones que ocasione un flujo del compartimento del de más al de menos. Una vez que el segundo compartimiento se torne más positivo respecto al primero, el segundo será entonces menos atrayente de iones positivos, es decir al incrementar la carga positiva de un lado, generará un gradiente eléctrico opuesto que frene el movimiento de carga. Es decir, el flujo se desatará por un gradiente de concentración y se frenará por un gradiente eléctrico. He aquí el papel de los transportadores activos y canales iónicos, poner en marcha y detener el flujo de iones en base a un balance electroquímico y así llegar a un equilibrio. Este balance no se debe confundir con el estado de reposo de la membrana, donde aún hay flujo, puesto que en general el potencial de la membrana estará más cerca del equilibrio del ión que tenga la mayor permeabilidad de la membrana. En el cual, la permeabilidad de la membrana a cada ión

es proporcional al número de canales abiertos que permiten el paso del ión en cuestión. Por ello, es que en reposo, el potencial de la membrana está más cerca del potencial de equilibrio para el K^+. Aunque esto no significa que no sea permeable para el Na^+, de ahí que sea un flujo pasivo.

Señales eléctricas de las células nerviosas

Las células nerviosas producen señales eléctricas que se utilizan para transmitir información, pero existe un detalle, las neuronas por sí solas no son buenas conductoras eléctricas, es por ello que cuentan con mecanismos para generar señales basadas en el flujo de iones a través de sus membranas plasmáticas.

Visto de forma sencilla tendríamos:



En un sentido más amplio, la existencia de un estímulo constituye el punto de partida para la generación de una respuesta eléctrica por parte de una neurona. Como se muestra en el esquema previo, ante un estímulo, ya sea de naturaleza externa o interna, la neurona genera una señal que se manifiesta como un cambio en el potencial de membrana respecto a su estado de reposo. Tales cambios en el potencial pueden producirse en diferentes magnitudes. Un aumento positivo en el valor del potencial se denomina despolarización, y se considera una acción excitadora. Por otro lado, el cambio de potencial a valores más negativos recibe el nombre de hiperpolarización, y se considera una acción inhibidora. Tanto la despolarización como la hiperpolarización, son resultado de respuesta a estímulos o a señales provenientes de otras células, y todas provienen de lo que se denominan señales graduadas,

y, estas solo tendrán la magnitud para propagarse localmente por la membrana. Si bien todas estas señales ocasionan cambios en el valor del potencial, se puede observar dos grupos dependiendo si provienen del exterior o el interior, siendo un potencial receptor si son debidos a estímulos exteriores como lo serían luz en un foto receptor, presión en un mecano receptor, una molécula odorante en una neurona olfativa o calor en un termo receptor. O si provienen por transmisiones locales de información neurona a neurona, es decir al interior, son lo que se considerará un potencial sináptico.

Inicialmente, el componente de entrada produciría una señal graduada, y bajo una situación cualquiera, una corriente eléctrica que pase a través del axón se debería a la acción de alguno de estos potenciales (receptor o sináptico), pero, como ya se mencionó previamente, los axones intrínsecamente no son buenos conductores, por lo que dicha señal se dispersaría rápidamente, por lo que para que la información sea capaz de recorrer grandes distancias es necesario otro modo de propagación, he ahí que las neuronas tengan un «sistema de compensación» que es el medio primario de transmisión de señales, lo que se conoce como **potenciales de acción**. Estos potenciales son cambios

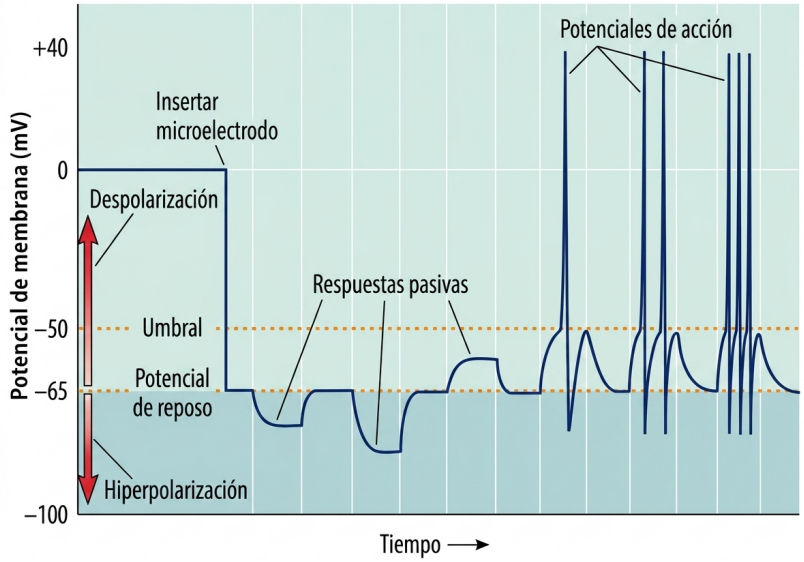


Figura 5: Ejemplo de respuestas a potenciales locales y potenciales de acción. Nota. Adaptado de (Purves et al., 2025, p. 27).

Observemos la figura (5), la actividad de las señales graduadas solo dará variaciones menores en el valor del potencial en su estado de reposo, lo que se traduce en respuestas pasivas, pero si se logra acumular las suficientes de estas señales y la intensidad sobrepasa el umbral, es cuando dará paso a una despolarización súbita, o lo que ya mencionamos como potencial de acción.

Para comprender los potenciales de acción es necesario retomar ciertos aspectos de la membrana: La membrana en su estado basal es negativa, los potenciales de receptor y/o sinápticos ocasionarán cambios en cuán negativa es. Es aquí donde entra en juego el componente desencadenante, en esta zona la actividad de los componentes graduados se incorporan, y, cuando la suma de los potenciales alcanza y supera un umbral que se le conoce como **Potencial Umbral**, es decir cierto nivel, $-50mV$, la resistencia de la membrana disminuirá, se activaran los canales de sodio, que justamente dependen del voltaje, y permitirán la entrada de una corriente de iones de sodio haciendo el interior de la membrana menos negativo, y en consecuencia la despolarización de la membrana se acelerará, y como resultado el potencial se hará breve pero rápidamente positivo, para eventualmente volver a caer a un valor negativo tras el paso de la onda. Es esta respuesta inmediata, este cambio en el potencial de negativo a positivo lo que es el potencial de acción. En términos prácticos: en reposo, la membrana es permeable sobre todo al K^+, pero cuando hay un estímulo capaz de despolarizar lo suficiente a la membrana, se abren los canales de Na^+, permitiendo que en la célula entre más Na^+ a favor de su gradiente de concentración, y que la despolarización sea más abrupta y con ello más canales se abran, todo en una fracción de milisegundos, hasta que la región pasa a un valor próximo al potencial de equilibrio para el Na^+. En ese punto, en el cual la fuerza que impulsa el flujo de iones de sodio es casi mermada ocurre un evento para impedir que la conformación de la célula quedé en ese estado y pueda volver a su estado basal: los canales de Na^+ se inactivan, y los canales de K^+ ahora son los que son abiertos. Los canales de sodio, permanecen en ese estado inactivado,

incapaces de volverse a abrir hasta después de que el potencial de la membrana vuelva a su valor negativo. La apertura de los canales de sodio, es entonces la responsable de la caída precipitada del potencial y la forma en la que el equilibrio osmótico se mantiene en balance, y todo esto es posible gracias a la bomba Na^+, K^+ que regula la entrada y salida de iones gracias a su proceso de autofosforilación que ocasiona cambios en su conformación para bombear uno u otro ión; y obviamente a los canales dependientes de voltaje que permiten el flujo en la membrana. También cabe mencionar que la despolarización autoamplificada es suficiente para alterar el estado eléctrico de las regiones vecinas, por lo que se produce una despolarización local que permite que las zonas aledañas continuas pasen el potencial de acción. Así este pulso, se propaga a lo largo del axón mielinizado y es reexcitado en los nódulos de Ranvier, zonas con poca o nula mielina, en los que se concentran una mayor densidad de canales de Na^+ y de esta forma se conserva más energía metabólica.

Dentro de las características más importantes, tenemos que la amplitud del potencial de acción es independiente de la magnitud de la corriente utilizada para generarlo, lo que lleva a que, en el caso de aumentar la intensidad o duración de corriente estímulo, solo se generarán un mayor número de potenciales de acción de igual magnitud. Esta señal viaja en el componente de conducción, a velocidades de hasta $100 m/s$, pero con todo y ello, lo que determina qué información se transmite son por un lado el número de potenciales recibidos, y el intervalo de tiempo entre ellos, al conjunto de varios potenciales de acción se le conoce como salva de potenciales de acción. Así, la intensidad de la sensación estará en términos de la frecuencia; y la duración dependerá del periodo durante el cuál se recibe la salva. Tras esto, el componente de salida libera neurotransmisores. Cuando un potencial de acción alcanza la terminación de una neurona, estimula para que se de la liberación del neurotransmisor, por mencionar algunos se tendría: el L-glutamato, la acetilcolina, los péptidos como la ence-

falina. E independientemente de cuál se trate, todos se encuentran en unos orgánulos conocidos como vésiculas sinápticas. Para descargar el transmisor, estas se desplazan hacia la membrana plasmática y se difunden a través de la hendidura sináptica, en un proceso que se le conoce como **exocitosis**. Después de la exocitosis, las membranas de las vesículas sinápticas son devueltas al soma para su reutilización o degradación.

5.3. Necesidad de otro modelo

A partir de la explicación de la sección anterior, resulta evidente que la generación y propagación de impulsos nerviosos es un fenómeno cuyas propiedades no son solamente eléctricas, sino que también se debe considerar los aspectos mecánicos, termodinámicos y ópticos que ocurren simultáneamente y son reflejo de un todo. Modelos como el de Hodgkin-Huxley (Hodgkin & Huxley, 1952) o el de FitzHugh-Nagumo (FitzHugh, 1961) son muy útiles y predictivos, pero se enfocan esencialmente en variables electromagnéticas. Y a sabiendas que una membrana biológica como la del axón es un sistema termodinámico; ya que su estado depende de la temperatura, presión, volumen, densidad, composición lipídica, etc; es necesario contar con otros modelos que sean capaces de explicar tales cambios. Esto no implica el rechazo o aceptación de una u otra visión, simplemente cubrir y ampliar otros fenómenos que se manifiestan simultáneamente, y eventualmente tener un modelo integrado que sea capaz de capturar toda esa información. Por el momento, y como se habló en el apartado de objetivos, ese no será el fin último de este trabajo, pero sí aportar a las soluciones que se trazan bajo la perspectiva propuesta de los cambios mecánicos y termodinámicos que se han observado.

Experimentalmente, ya había pruebas de que el paso del impulso nervioso se trataba de un fenómeno reversible. En los años 1840 Hermann von Helmholtz había probado que las contracciones musculares llevaban consigo liberación de calor; esto es relevante ya que en ciertos animales como las ranas, su composición nerviosa y muscular a ni-

vel iónico es similar, lo que podía sugerir, que si en las contracciones musculares había liberación de calor, también debía haberlo durante el paso del pulso eléctrico.
Y efectivamente, décadas después y con mejoras en la precisión experimental se llevo a probar que sí habría producción de calor durante el paso del pulso nervioso, sin embargo era reabsorbido y en consecuencia la integral total sobre el intercambio de calor resultaba cero. La nula disipación de calor, actualmente se ha probado como resultado de que, durante la fase de despolarización de la membrana, sí existe una liberación de calor a los alrededores de la membrana, pero que es reabsorbido completamente durante la fase de repolarización. Por lo tanto, estrictamente hablando no hay intercambio de calor con el exterior, lo que lleva a que se trate de un fenómeno isentrópico. Y un ejemplo claro de un proceso isentrópico es una onda mecánica. Referente a los aspectos mecánicos que cambian en la membrana, Tasaki en 1988 presentó en su trabajo Tasaki, 1988, una recopilación de una serie de experimentos que probaban que durante el paso del pulso, se presentaba un hinchamiento transitorio de la membrana del axón, acompañada de una contracción.

Además en años posteriores se mostró otras características experimentalmente que tampoco podría cubrir los modelos basados puramente en corrientes iónicas; aspectos como la fluorescencia, turbidez y birrefringencia (Tasaki et al., 1968), que exista liberación y absorción de calor durante el pulso y que justamente se encuentre en fase con el potencial de acción (Howarth et al., 1968; Ritchie & Keynes, 1985) o fenómenos como la anestesia (Franks & Lieb, 1994; Miller, 2002) o la interacción que se presenta entre los pulsos (Gonzalez-Perez et al., 2014); han dado paso a la conformación de teorías que se basen en otros fundamentos, especialmente los termodinámicos (Andersen et al., 2009; Heimburg & Jackson, 2005), ya que, justo como lo señala Heimburg (Heimburg, 2025) aunque los cambios eléctricos, mecánicos y de temperatura al momento de medirlos son más remarcables en los aspectos eléctricos, las energías asociadas a dichos cambios no lo

son. Hasta la actualidad, el desarrollo de estos modelos sigue poniendo tela de juicio los aspectos más fundamentales del fenómeno en sí mismo, cuestionando hasta donde es posible tener un modelo que no deje de lado lo que en la realidad ocurre (Appali et al., 2010; Drukarch & Wilhelmus, 2023; Galinsky & Frank, 2025; Mareš et al., 2023; Peets et al., 2023).

Lo que nos lleva a hablar de la teoría solitónica, la cual ha tenido éxito en capturar todos estos aspectos de manera natural dando paso a una gran variedad de soluciones de todo tipo, desde picos, crestas, solitones oscuros, solitones brillantes, compactones, respiradores, etc (Contreras et al., 2013; Fongang Achu et al., 2018; Ozsahin et al., 2024; Vargas et al., 2011).

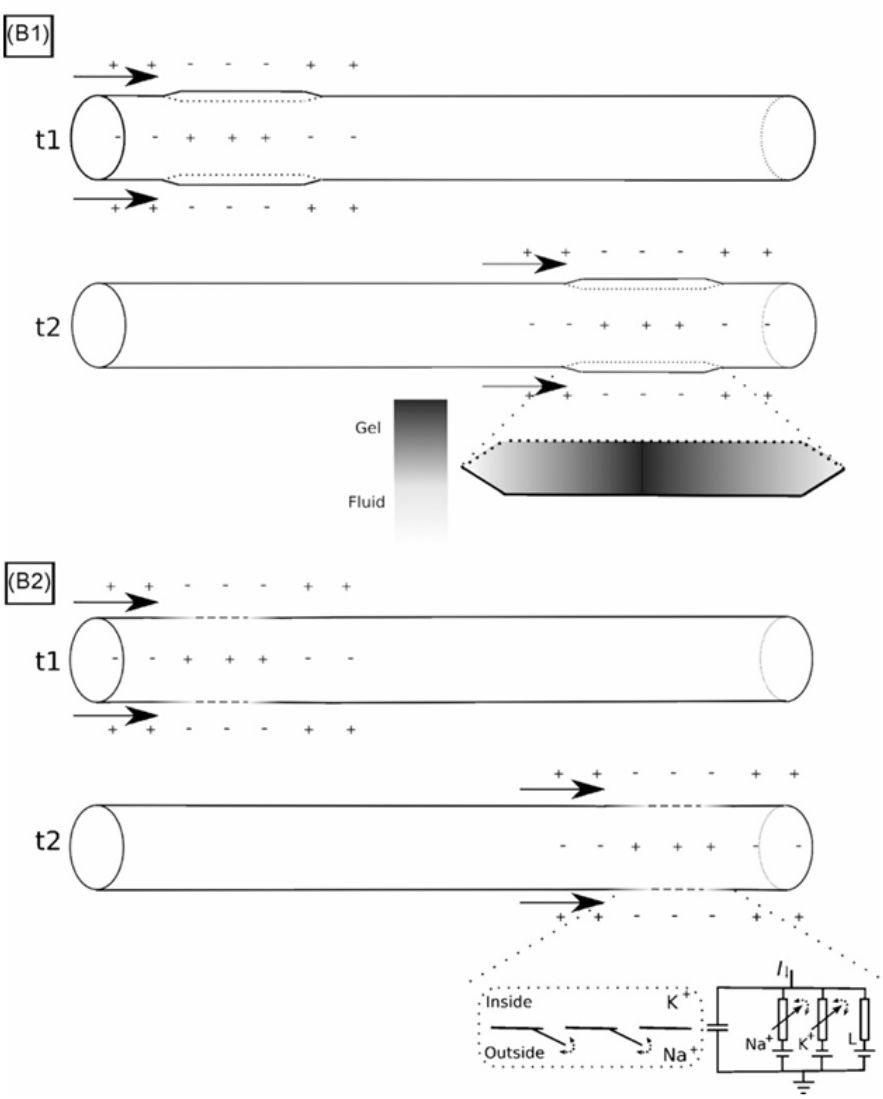


Figura 6: Esquema comparativo de los modelos HH y HJ. Tomado de (Andersen et al., 2009).
(B1) Axón bajo el modelo HJ, el pulso implica una transición de fase con implicaciones mecánicas durante su paso.
(B2) Axón bajo el modelo HH, el pulso implica un cambio en el potencial y por ende una despolarización local de la membrana.

5.4. Modelo de Heimburg-Jackson

Como consideraciones fundamentales para entender el desarrollo del modelo propuesto por Heimburg-Jackson (Heimburg & Jackson,

2005) se tendrán:

- El axón se representa como un cilindro de bicapa, una capa para cada membrana.
- Dichas membranas se componen de lípidos y proteínas.
- La membrana lipídica se halla normalmente fluida, es decir en estado líquido, en condiciones fisiológicas normales, y puede acercarse a una transición de fase fluida a gel en temperaturas cercanas a la corporal.
- En ese rango de temperaturas (T=318.15K), la bicapa muestra un aumento en su compresibilidad y no-linealidad; en consecuencia el axón se puede comprimir sin perder estructura integral.
- Durante la transición de estado, existirán cambios en el área, grosor y volumen de la membrana, contrayéndose longitudinalmente durante el paso del pulso.

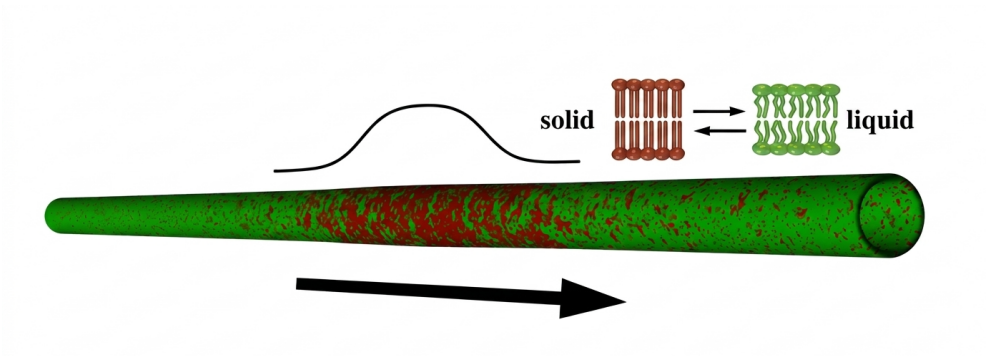


Figura 7: Transición en el estado de segregación debido al pulso. En verde se encuentra la fase líquida y en rojo la fase en gel. Tomado de (González-Pérez et al., 2016).

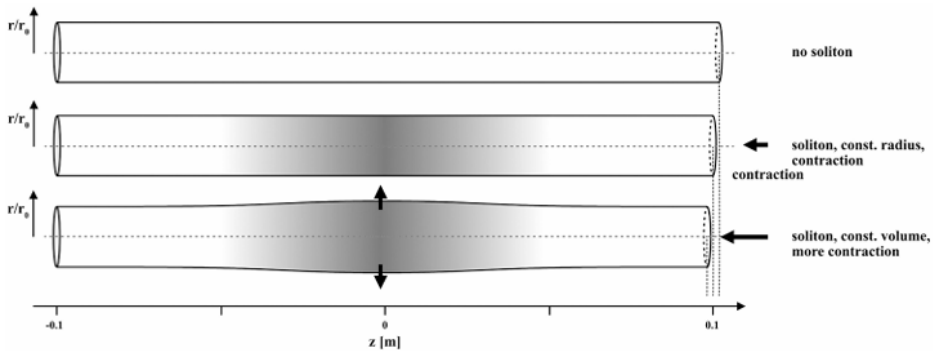


Figura 8: Esquema de paso del pulso, las implicaciones mecánicas se reflejan en una contracción longitudinal y compresión breve de la membrana. Tomado de (Heimburg, 2025).

Con esto, se puede asociar una densidad distinta para cada caso, por un lado la densidad del estado inicial es decir el fluido ρ_0, y por el otro, la densidad del estado una vez el pulso esté ocurriendo, es decir en gel ρ_1. Entonces, el pulso que implica la transición de un estado al otro, conllevará a dicho cambio en la densidad $U = \rho_1 - \rho_0$. Si queremos que se comporte como un fenómeno de dinámica oscilatoria es natural que se modele bajo una ecuación de onda, restringiéndose al escenario más básico de 1+1 dimensiones se tendría:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(c^2 \frac{\partial U}{\partial x}\right). \tag{36}$$

Como primera consideración del modelo, implica una dependencia directa entre la velocidad c y las propiedades intrínsecas de la membrana debido a su composición de lípidos, en este caso la compresibilidad, lo que nos permite representar la velocidad del pulso en términos de una expansión en series de Taylor al rededor de la velocidad del sonido, y con ello una dependencia en el cambio de densidad U, donde se conservara términos hasta el segundo orden:

$$c^2 = c_0^2 + gU + hU^2 + ... \tag{37}$$

Donde c_0 es la velocidad del sonido; y g y h serán las propieda-

des no lineales elásticas de la membrana, que tienen una clara dependencia de la compresibilidad lateral de la membrana K_s^A en su estado basal, y se definen como:

$$c_0^2 = \frac{1}{K_s^A \rho_0}; \tag{38}$$

$$g = -\frac{1}{\left(K_s^A \rho_0\right)^2}; \tag{39}$$

$$h = \frac{1}{K_s^A \rho_0^3}. \tag{40}$$

Ahora, remplazando la forma expandida de c^2 de la ecuación (37) en la ecuación (36)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(c_0^2 + gU + hU^2\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]. \tag{41}$$

Si ahora, añadimos un término debido a la dispersión $-\gamma \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$, donde justamente γ mida el grado de dicha dispersión, recuperaremos el modelo propuesto por Heimburg y Jackson:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(c_0^2 + gU + hU^2\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right] - \gamma \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}. \tag{42}$$

Consideremos el primer caso: tomando en cuenta la fricción, como una derivada mixta $\eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$, donde η será una constante de proporcionalidad asociada a la fricción del nervio.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(c_0^2 + gU + hU^2\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right] + \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) - \gamma \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}. \tag{43}$$

Si añadimos un término que mida cómo cambia la aceleración de un punto del medio respecto de sus vecinos $\kappa \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$, donde κ estará asociado a las deformaciones mecánicas que pueda sufrir el axón; Se obtendrá lo que llamaremos ecuación de Heimburg-Jackson modificada.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(c_0^2 + gU + hU^2\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right] + \eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) - \gamma\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \kappa\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right). \tag{44}$$

En ambos casos, y por comodidad se realizarán los siguientes cambios de variable con el fin de tener una ecuación adimensional:

$$u = \frac{U}{\rho_0}; \tag{45}$$

$$z = \frac{c_0}{\sqrt{\gamma}}x; \tag{46}$$

$$\tau = \frac{c_0^2}{\sqrt{\gamma}}t. \tag{47}$$

Sustituyendo las ecuaciones (45-47) en (43)y realizando su correspondiente regla de la cadena se obtiene la versión adimensional de la ecuación de Heimburg-Jackson con fricción:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1 + \widetilde{p}u + \widetilde{q}u^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \sigma\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) - \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}. \tag{48}$$

Donde se han introducido nuevos parámetros en términos de los anteriores como:

$$\widetilde{p} = \frac{g\rho}{c_0^2}; \tag{49}$$

$$\widetilde{q} = \frac{h\rho^2}{c_0^2}; \tag{50}$$

$$\sigma = \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}. \tag{51}$$

Los cuales se han determinado experimentalmente, para una temperatura T=318.15K (Heimburg & Jackson, 2005) determinaron los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= 4.035 \cdot 10^{-3} g/m^2; \\
c_0 &= 176.6 \cdot m/s; \\
g &= -16.6 \cdot c_0^2/\rho_0; \\
h &= 79.5 \cdot c_0^2/\rho_0^2; \\
\eta &= 2 \cdot m^4/s^2.
\end{aligned} \tag{52}$$

o en su versión adimensional:

$$\begin{aligned}
\widetilde{p} &= -16.6; \\
\widetilde{q} &= 79.5; \\
\sigma &= 0.05,
\end{aligned} \tag{53}$$

donde γ toma valores dependiendo el experimento en cuestión, ocasionando que σ varié de 0.01 a 0.1, lo que ha llevado a tomar como un ajuste paramétrico de disipación moderada a 0.05.
Y de manera análoga, con su sustitución de (45-47), y respectiva derivación por regla de la cadena, se tendría la versión adimensional de la ecuación de Heimburg-Jackson con fricción modificada (44):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1 + \widetilde{p}u + \widetilde{q}u^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \sigma \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) - \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \varphi \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right). \tag{54}$$

Donde de la misma manera se han introducido los parámetros presentados de (49-51), y un nuevo parámetro φ definido como:

$$\varphi = \frac{\kappa c_0}{\sqrt{\gamma}}. \tag{55}$$

En resumen, estas dos ecuaciones (48) y (54) serán las ecuaciones clave que se buscan solucionar, a fin de hallar una representación de esta transición de estado de segregación que funge como el pulso homologo del potencial de acción.

6. Metodología

La metodología se basa en la propuesta de esquemas de solución tipo hiperbólico de Abdul-Majid Wazwaz (Wazwaz, 2006), los cuales están diseñados para determinar de manera directa y sistemática las soluciones como combinaciones especiales de funciones hiperbólicas (sinh, cosh, tanh, coth), así como funciones racionales y algoritmos específicos para la generación de peakons.
Los parámetros involucrados se podrán obtener directamente de las relaciones algebraicas derivadas del balance energético en la ecuación modificada. Considerando así, las siguientes propuestas de solución:

Ansatz Sinh-cosh I

En este caso se considera una combinación lineal del cosh y el sinh:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \cosh^2[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh^2[\mu(z - c\tau)]. \tag{56}$$

con λ, μ, α y β parámetros a determinar.

Ansatz cosh I o Ansatz sinh I

En este caso se considera ya sea un cosh o un sinh como solución:
El ansatz cosh I se lee:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \cosh^2[\mu(z - c\tau)]. \tag{57}$$

El ansatz sinh I se lee:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \sinh^2[\mu(z - c\tau)]. \tag{58}$$

En ambos casos λ, μ y α son parámetros a determinar.

Ansatz sinh-cosh II

La solución toma la forma de una combinación lineal de sinh y cosh:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right] + \beta \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right]. \tag{59}$$

con λ, μ, α y β parámetros a determinar.

Ansatz sinh II o Ansatz cosh II

El ansatz cosh II se lee:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right]. \tag{60}$$

El ansatz sinh II se lee:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right]. \tag{61}$$

En ambos casos λ, μ y α son parámetros a determinar.

Ansatz tanh o Ansatz coth

Para el ansatz tanh se considera una forma racional de la tanh:

$$u(z,\tau) = \frac{1}{\lambda + \alpha \tanh\left[\mu(z - c\tau)\right]}. \tag{62}$$

Y para el caso del ansatz coth, de igual forma se usa una función racional de la coth:

$$u(z,\tau) = \frac{1}{\lambda + \alpha \coth\left[\mu(z - c\tau)\right]}. \tag{63}$$

En ambos casos λ, μ y α son parámetros a determinar.

Algoritmo de peakon exponencial

Para esta solución, se asume que $u(z,\tau)$ toma la forma:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha e^{-\mu(z-c\tau)}. \tag{64}$$

con λ, μ, y α parámetros a determinar.

Ya sea cualquiera la opción que se escoja como solución, el procedimiento es similar: se sustituye en la ecuación original, se obtiene en consecuencia una ecuación reducida a analizar, de la que se recupera un sistema de ecuaciones de las cuales al resolver se halla el valor de los parámetros faltantes, para posteriormente reconstruir la solución con los valores hallados.

7. Discusión de Resultados

7.1. Modelo Heimburg-Jackson con fricción

Como bien se mencionó en el marco teórico, el modelo H-J con fricción adimensional está dado por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1 + \widetilde{p}u + \widetilde{q}u^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \sigma \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) - \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}. \tag{65}$$

Y se puede reescribir como:

$$u_{\tau\tau} = u_{zz} + \widetilde{p}u u_{zz} + \widetilde{q}u^2 u_{zz} + \widetilde{p}u_z^2 + 2\widetilde{q}u u_z^2 + \sigma u_{zz\tau} - u_{zzzz}. \tag{66}$$

A continuación se muestra el desarrollo y resultado obtenidos para los ansatzes correspondientes:

Ansatz: Algoritmo de peakon exponencial

Partiendo del algoritmo de peakon exponencial:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha e^{-\mu|(z-c\tau)|}. \tag{67}$$

Obteniendo sus respectivas derivadas:

$$u_\tau = c\mu\alpha e^{-\mu|(z-c\tau)|} = \mu c(u-\lambda), \tag{68}$$

$$u_{\tau\tau} = \mu c u_\tau = (\mu c)^2 (u-\lambda), \tag{69}$$

$$u_z = -\mu\alpha e^{-\mu|(z-c\tau)|} = \mu(\lambda - u), \tag{70}$$

$$u_{zz} = -mu u_z = \mu^2(\lambda - u), \tag{71}$$

$$u_{zzz} = \mu^2 u_z = \mu^3(\lambda - u), \tag{72}$$

$$u_{zzzz} = -\mu^3 u_z = \mu^4(u-\lambda), \tag{73}$$

$$u_{z\tau} = \mu c u_z = \mu^2 c(\lambda - u), \tag{74}$$

$$u_{zz\tau} = -\mu^2 c u_z = \mu^3 c(u-\lambda). \tag{75}$$

Sustituyendo las parciales halladas previamente en (66) se obtiene:

$$\begin{aligned}&\left(1-c^2\right)\mu^2(u-\lambda)+\widetilde{p}\mu^2u(u-\lambda)+\widetilde{q}u^2\mu^2(u-\lambda)\quad+\widetilde{p}\mu^2(u-\lambda)^2\\&+2\widetilde{q}\mu^2u(u-\lambda)^2+\sigma\mu^3c(u-\lambda)-\mu^4(u-\lambda)=0.\end{aligned}\tag{76}$$

Simplificando obtenemos:

$$\left(1-c^2\right)+\widetilde{p}u+\widetilde{q}u^2+\widetilde{p}(u-\lambda)+2\widetilde{q}u(u-\lambda)+\sigma\mu c-\mu^2=0,\tag{77}$$

$$1-c^2-\widetilde{p}\lambda+\sigma\mu c-\mu^2+u(\widetilde{p}+\widetilde{p}-2\widetilde{q}\lambda)+u^2(\widetilde{q}+2\widetilde{q})=0,\tag{78}$$

$$1-c^2-\widetilde{p}\lambda+\mu(\sigma c-\mu)+2u(\widetilde{p}-\lambda\widetilde{q})+3\widetilde{q}u^2=0.\tag{79}$$

Y regresando a las variables explícitas:

$$\begin{aligned}&1-c^2-\widetilde{p}\lambda+\mu(\sigma c-\mu)+2\left(\lambda+\alpha e^{-\mu|(z-c\tau)|}\right)(\widetilde{p}-\lambda\widetilde{q})\\&+3\widetilde{q}\left(\lambda^2+\alpha^2\left(e^{-\mu|(z-c\tau)|}\right)^2+\lambda\alpha e^{-\mu|(z-c\tau)|}\right)=0,\end{aligned}\tag{80}$$

$$\begin{aligned}&1-c^2-\widetilde{p}\lambda+\mu(\sigma c-\mu)+2\lambda\widetilde{p}-2\lambda^2\widetilde{q}+3\widetilde{q}\lambda^2\\&+e^{-\mu|(z-c\tau)|}(2\alpha\widetilde{p}-2\alpha\lambda\widetilde{q}+3\alpha\lambda\widetilde{q})+3\widetilde{q}\alpha^2e^{-2\mu|(z-c\tau)|}=0,\end{aligned}\tag{81}$$

$$\begin{aligned}&1-c^2+\lambda(\widetilde{p}+\lambda\widetilde{q})+\mu(\sigma c-\mu)+e^{-\mu|(z-c\tau)|}\alpha(2\widetilde{p}+\lambda\widetilde{q})\\&+3\alpha^2\widetilde{q}e^{-2\mu|(z-c\tau)|}=0.\end{aligned}\tag{82}$$

De la ecuación anterior notamos que no es posible obtener los parámetros debido al coeficiente que acompaña al término cuadrático, sin embargo bajo la suposición de que α es pequeño, tal que $\alpha^2\to 0$, es posible desechar los términos asociados al exponente cuadrático, resultando así en la ecuación:

$$1-c^2+\lambda(\widetilde{p}+\widetilde{q}\lambda)+\mu(\sigma c-\mu)+e^{-\mu|(z-c\tau)|}(2\widetilde{p}+\widetilde{q}\lambda)=0.\tag{83}$$

De donde recolectando los coeficientes que acompañan tanto al exponente como los términos lineales, obteniendo las ecuaciones:

coeficientes de e^0 : $\quad 1-c^2+\lambda(\widetilde{p}+\widetilde{q}\lambda)+\mu(\sigma c-\mu)$,

coeficientes de $e^{-\mu|(z-c\tau)|}$: $\quad 2\widetilde{p}+\widetilde{q}\lambda.$

Es decir, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$1-c^2+\lambda(\widetilde{p}+\widetilde{q}\lambda)+\mu(\sigma c-\mu)=0, \tag{84}$$

$$2\widetilde{p}+\widetilde{q}\lambda=0. \tag{85}$$

De (85) obtenemos a λ fácilmente:

$$\lambda=-\frac{2\widetilde{p}}{\widetilde{q}}, \tag{86}$$

y, de (84) podemos obtener a μ

$$1-c^2+\lambda(\widetilde{p}+\widetilde{q}\lambda)+\mu(\sigma c-\mu)=0, \tag{87}$$

$$1-c^2-2\frac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}}(\widetilde{p}-2\widetilde{p})+\mu(\sigma c-\mu)=0, \tag{88}$$

$$1-c^2+2\frac{\widetilde{p}^2}{\widetilde{q}}+\mu(\sigma c-\mu)=0, \tag{89}$$

$$\mu^2-\sigma c\mu-2\frac{\widetilde{p}^2}{\widetilde{q}}-1+c^2=0, \tag{90}$$

$$\left(\mu-\frac{\sigma c}{2}\right)^2-\frac{\sigma^2c^2}{4}-\frac{2\widetilde{p}^2}{\widetilde{q}}-1+c^2=0, \tag{91}$$

$$\left(\mu-\frac{\sigma c}{2}\right)^2=1+\frac{2\widetilde{p}^2}{\widetilde{q}}+c^2\left(\frac{\sigma^2}{4}-1\right), \tag{92}$$

$$\mu=\sqrt{1+\frac{2\widetilde{p}^2}{\widetilde{q}}+c^2\left(\frac{\sigma^2}{4}-1\right)}+\frac{\sigma c}{2}. \tag{93}$$

Con esto hemos obtenido cada parámetro teniendo así:

$\alpha=\alpha_0, \quad$ con α_0 una constante arbitraria,

$\lambda=-\frac{2\widetilde{p}}{\widetilde{q}}$,

$$\mu = \sqrt{1 + 2\frac{\widetilde{p}^2}{\widetilde{q}} + c^2\left(\frac{\sigma^2}{4} - 1\right)} + \frac{\sigma c}{2}.$$

Teniendo así la forma general de la solución

$$u(z,\tau) = -\frac{2\widetilde{p}}{\widetilde{q}} + \alpha_0 e^{\left[\left(-\sqrt{1+2\frac{\widetilde{p}^2}{\widetilde{q}}+c^2\left(\frac{\sigma^2}{4}-1\right)}+\frac{\sigma c}{2}\right)(z-c\tau)\right]}. \tag{94}$$

Y tras haber sustituido los valores adimensionales de (53) se tendría:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0, \\ \lambda &= 0.417, \\ \mu &= 2.658. \end{aligned} \tag{95}$$

Con lo que se obtiene la solución particular:

$$u(z,\tau) = 0.417 + \alpha_0 e^{-2.658(z-\tau)}. \tag{96}$$

La solución se puede observar en la figura (9), lo que ha resultado en una entidad tipo peakon, que como su nombre lo indica posee un pico bien localizado, la solución crece rápidamente y decae de la misma manera; además presenta colas que van al infinito, lo que da la posibilidad de interacciones a largas distancias. Además, es necesario que sea una oscilación pequeña para que esta solución sea válida.

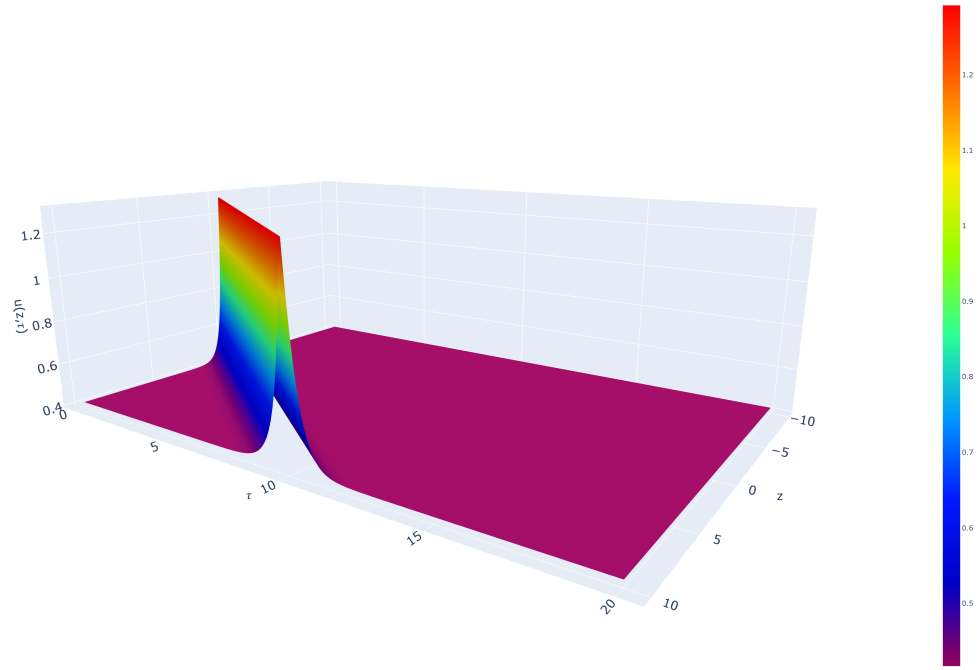


Figura 9: Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz peakon exponencial, ecuación (96) con $\alpha_0 = 1$

Ansatz: Coseno hiperbólico cuadrático

Partiendo del ansatz i:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \cosh^2[\mu(z - c\tau)]. \tag{97}$$

O bien puede ser reescrito como:

$$u(z,\tau) = \lambda + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\cosh[2\mu(z - c\tau)]. \tag{98}$$

Y con las respectivas parciales:

$$u_\tau = -\alpha c\mu \sinh[2\mu(z - c\tau)], \tag{99}$$

$$u_{\tau\tau} = 2\mu^2 c^2 \alpha \cosh[2\mu(z - c\tau)], \tag{100}$$

$$u_z = \alpha\mu \sinh[2\mu(z - c\tau)], \tag{101}$$

$$u_{zz} = 2\alpha\mu^2 \cosh[2\mu(z - c\tau)], \tag{102}$$

$$u_{zzz} = 4\alpha\mu^3 \sinh[2\mu(z - c\tau)], \tag{103}$$

$$u_{zzzz} = 8\alpha\mu^4 \cosh[2\mu(z - c\tau)], \tag{104}$$

$$u_{zz\tau} = -4\alpha\mu^3 \sinh[2\mu(z - c\tau)]. \tag{105}$$

Sustituyendo en (66) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
2\mu^2c^2\alpha\cosh[2\mu(z-c\tau)] =& 2\alpha\mu^2\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\widetilde{p}2\alpha\mu^2\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\widetilde{p}\alpha^2\mu^2\cosh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\widetilde{q}2\alpha\mu^2\left(\lambda+\frac{\lambda}{2}\right)^2\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\widetilde{q}2\alpha^2\mu^2\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\cosh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\widetilde{q}\frac{\alpha^3}{2}\mu^2\cosh^3[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\widetilde{p}\alpha^2\mu^2\sinh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+2\widetilde{q}\alpha^2\mu^2\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\sinh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\widetilde{q}\alpha^3\mu^2\cosh[2\mu(z-c\tau)]\sinh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&-4\sigma\alpha\mu^3c\sinh[2\mu(z-c\tau)] \\
&-8\alpha\mu^4\cosh[2\mu(z-c\tau)],
\end{aligned}
\tag{106}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[1-c^2+\widetilde{p}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\widetilde{q}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\mu^2\right]\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\left[\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cosh^2[2\mu(z-c\tau)]+\widetilde{q}\frac{\alpha^2}{4}\cosh^3[2\mu(z-c\tau)] \\
&-2\sigma\mu c\sinh[2\mu(z-c\tau)]+\left[\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\sinh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\frac{\widetilde{q}}{2}\alpha\cosh[2\mu(z-c\tau)]\sinh^2[2\mu(z-c\tau)]=0,
\end{aligned}
\tag{107}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[1-c^2+\widetilde{p}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\widetilde{q}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\mu^2\right]\cosh\left[2\mu(z-c\tau)\right]\\
&-2\sigma\mu c\sinh\left[2\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cosh^2\left[2\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left(\cosh^2\left[2\mu(z-c\tau)\right]-1\right)\\
&+\frac{\widetilde{q}}{2}\cosh\left[2\mu(z-c\tau)\right]\left(\cosh^2\left[2\mu(z-c\tau)\right]-1\right)\\
&+\frac{\widetilde{q}\alpha^2}{4}\cosh^3\left[2\mu(z-c\tau)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{108}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[1-c^2+\widetilde{p}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\widetilde{q}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\mu^2-\frac{\widetilde{q}}{2}\alpha\right]\cosh\left[2\mu(z-c\tau)\right]\\
&-2\sigma\mu c\sinh\left[2\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cosh^2\left[2\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\frac{\widetilde{q}\alpha^2}{4}+\frac{\widetilde{q}\alpha}{2}\right)\cosh^3\left[2\mu(z-c\tau)\right]-\left[\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{109}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[1-c^2+\widetilde{p}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\widetilde{q}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\mu^2-\frac{\widetilde{q}}{2}\alpha\right]\cosh\left[2\mu(z-c\tau)\right]\\
&-2\sigma\mu c\sinh\left[2\mu(z-c\tau)\right]+2\left[\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cosh^2\left[2\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\frac{\widetilde{q}\alpha^2}{4}+\frac{\widetilde{q}\alpha}{2}\right)\cosh^3\left[2\mu(z-c\tau)\right]-\left[\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha+\widetilde{q}\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{110}
$$

Para que se cumpla la ecuación anterior los coeficientes que acompañan deben eliminarse de manera independiente, por lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
1-c^2+\widetilde{p}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\widetilde{q}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\mu^2-\frac{\widetilde{q}}{2}\alpha=0, \tag{111}
$$

$$\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha + \widetilde{q}\alpha\left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right) = 0, \tag{112}$$

$$\frac{\widetilde{q}\alpha^2}{4} + \frac{\widetilde{q}\alpha}{2}. \tag{113}$$

De esta manera, de (113) tenemos:

$$\frac{\alpha}{2} + 1 = 0, \tag{114}$$

$$\alpha = -2. \tag{115}$$

Con esto en (112):

$$\frac{\widetilde{p}}{2}\alpha + \widetilde{q}\alpha\left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right) = 0, \tag{116}$$

$$\frac{\widetilde{p}}{2} + \widetilde{q}\left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right) = 0, \tag{117}$$

$$\lambda - 1 = -\frac{1}{\widetilde{q}}\frac{\widetilde{p}}{2}, \tag{118}$$

$$\lambda = 1 - \frac{\widetilde{p}}{2q}. \tag{119}$$

Sustituyendo lo previamente hallado en (111) habiendo reorganizado los términos:

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\left[1 - c^2 + \left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right)\left(\widetilde{p} + \widetilde{q}\left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right)\right) - \frac{\widetilde{q}}{2}\alpha\right], \tag{120}$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\left[1 - c^2 + \left(1 - \frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} - 1\right)\left(\widetilde{p} + \widetilde{q}\left(1 - \frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} - 1\right)\right) + \widetilde{q}\right], \tag{121}$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\left[1 - c^2 + \left(-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}\right)\left(\widetilde{p} + \widetilde{q}\left(-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} -\right)\right) + \widetilde{q}\right], \tag{122}$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\left[1 - c^2 + \left(-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}\right)\left(\widetilde{p} - \frac{\widetilde{p}}{2}\right) + \widetilde{q}\right], \tag{123}$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\left[1 - c^2 + \left(-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}\right)\left(\frac{\widetilde{p}}{2}\right) + \widetilde{q}\right] = \frac{1}{4}\left[1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \widetilde{q}\right], \tag{124}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \widetilde{q}}. \tag{125}$$

Con esto hemos resuelto para cada parámetro obteniendo así:

$\alpha = -2,$
$\lambda = 1 - \frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}},$
$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \widetilde{q}}$

Teniendo así la forma general de la solución

$$u(z,\tau) = 1 - \frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} - 2\sinh^2\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \widetilde{q}}\right)(z - c\tau)\right]. \tag{126}$$

Y tras haber sustituido los valores adimensionales de (53) se tendría:

$$\begin{aligned} \alpha &= -2 \\ \lambda &= 1.104 \\ \mu &= 4.433 \end{aligned} \tag{127}$$

Con lo que se obtiene la solución particular:

$$u(z,\tau) = 1.104 - 2\cosh^2\left[4.433\,(z - c\tau)\right]. \tag{128}$$

Para este caso, como se obseva en la figura (10), se ha obtenido una solución que decae progresivamente, y donde el factor determinante en qué tan rápido y profundo lo hace es la constante μ, puesto que la amplitud está fijada por α_0 en un único valor aceptable, y λ termina en términos de las características intrínsecas no lineales de la membrana, más que del movimiento del pulso en sí.

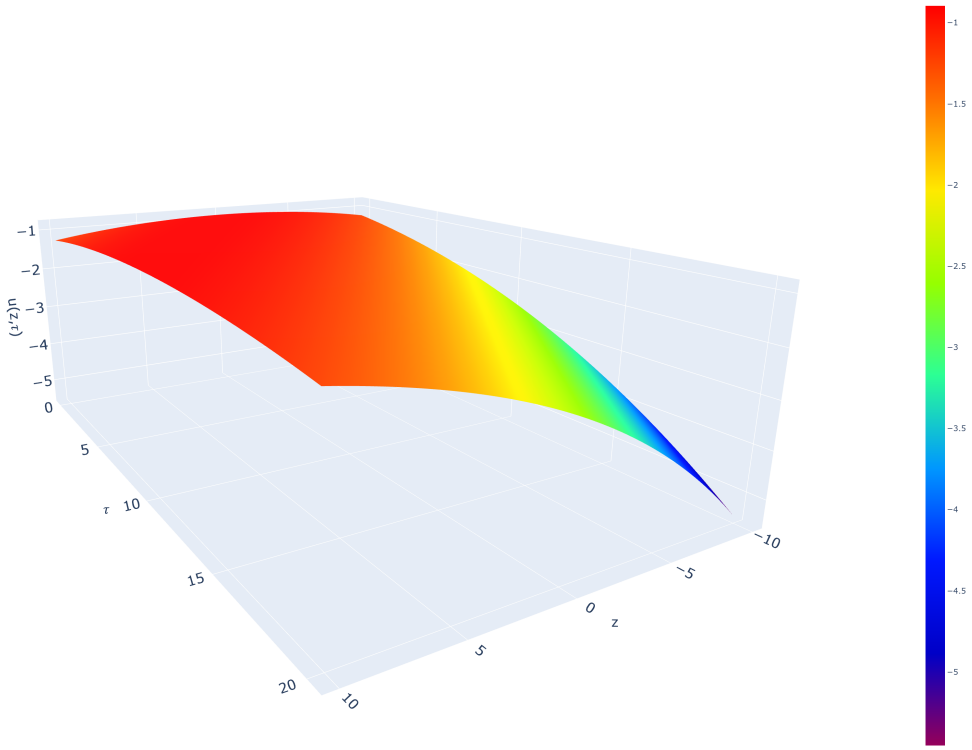


Figura 10: Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz coseno hiperbólico cuadrático dada por la ecuación (128).

Ansatz: Sinh-Cosh ii

Dado el ansatz sinh-cosh ii:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \cosh[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh[\mu(z - c\tau)]. \tag{129}$$

Y con las respectivas derivadas parciales:

$$u_\tau = -\mu c(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]), \tag{130}$$

$$u_{\tau\tau} = c^2\mu^2(\alpha \cosh[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh[\mu(z - c\tau)]), \tag{131}$$

$$u_z = \mu(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]), \tag{132}$$

$$u_{zz} = \mu^2(\alpha \cosh[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh[\mu(z - c\tau)]), \tag{133}$$

$$u_{zzz} = \mu^3(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]), \tag{134}$$

$$u_{zzzz} = \mu^4(\alpha \cosh[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh[\mu(z - c\tau)]), \tag{135}$$

$$u_{zz\tau} = -c\mu^3(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]). \tag{136}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (157) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&- c^2\mu^2\left[\alpha\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\beta\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\right]\\
&+ \mu^2\alpha\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\mu^2\beta\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\mu^2\alpha\lambda\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{p}\mu^2\beta\lambda\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\mu^2 2\alpha\beta\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \alpha^2\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\mu^2\beta\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2\alpha\lambda^2\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\mu^2\beta\lambda^2\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2 4\alpha\beta\lambda\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\mu^2 2\alpha^2\lambda\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2 2\beta^2\lambda\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\mu^2 3\alpha^2\beta\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2 3\alpha\beta^2\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\mu^2\beta^3\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{p}\mu^2\alpha^2\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\mu^2\beta^2\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{p}\mu^2 2\alpha\beta\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 4\widetilde{q}\mu^2\alpha\beta\lambda\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\beta^2\lambda\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+2\widetilde{q}\mu^2\alpha^2\lambda\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\left(2\alpha^2\beta+\beta^3\right)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\left(\alpha^3+2\alpha\beta^2\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&- \sigma c\mu^3\left[\alpha\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\beta\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\alpha^2\beta\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]-\mu^4\alpha\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\alpha\beta^2\cosh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]-\mu^4\beta\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{137}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-\alpha c^2+\alpha+\widetilde{p}\alpha\lambda+\widetilde{q}\alpha\lambda^2-\beta\sigma\mu c-\alpha\mu^2\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(-\beta c^2+\beta+\widetilde{p}\beta\lambda+\widetilde{q}\beta\lambda^2-\alpha\sigma\mu c-\beta\mu^2\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+(2\widetilde{p}\alpha\beta+4\widetilde{q}\alpha\beta\lambda+2\widetilde{p}\alpha\beta+4\widetilde{q}\alpha\beta\lambda)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\widetilde{p}\alpha^2+2\widetilde{q}\alpha^2\lambda+\widetilde{p}\beta+2\widetilde{q}\beta^2\lambda\right)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\widetilde{p}\beta^2+2\widetilde{q}\beta^2\lambda+\widetilde{p}\alpha^2+2\widetilde{q}\alpha^2\lambda\right)\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[3\widetilde{q}\alpha^2\beta+2\widetilde{q}\left(2\alpha^2\beta+\beta^3\right)\right]\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[3\widetilde{q}\alpha\beta^2+2\widetilde{q}\left(\alpha^3+2\alpha\beta^2\right)\right]\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\widetilde{q}\alpha^3+2\widetilde{q}\alpha\beta^2\right)\cosh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\widetilde{q}\beta^3+2\widetilde{q}\alpha^2\beta\right)\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{138}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\alpha\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)-\beta\sigma\mu c\right]\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[\beta\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)-\alpha\sigma\mu c\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+4\alpha\beta\left(\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda\right)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]^2\\
&+\widetilde{q}\beta\left(7\alpha^2+2\beta^2\right)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\widetilde{q}\alpha\left(7\beta^2+2\alpha^2\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\widetilde{q}\alpha\left(\alpha^2+2\beta^2\right)\cosh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\beta\left(\beta^2+2\alpha^2\right)\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{139}
$$

Para que esta última ecuación sea válida, cada término debe anularse de manera independiente; para ello, los coeficientes que acompañan las funciones tipo seno hiperbólico y coseno hiperbólico, son los que deben presentar tal comportamiento.

Sin embargo, a simple vista y considerando que los valores de α, β, λ y μ son únicos, hay varias ecuaciones que no se cumplirían simultáneamente si se considera un simple despeje, ejemplo de ello son los coeficientes $\left(\alpha^2+\beta^2\right)$ y $7\alpha^2+2\beta^2$.

Lo que lleva a imponer una condición sobre α y β, de manera que $\alpha = \alpha_0$ y $\beta = \beta_0$, con α_0 y β_0 constantes arbitrarias lo suficientemente pequeñas, tal que $\alpha^2 \to 0$ y $\beta^2 \to 0$. Con ello la ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned}&\left[\alpha_0\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)-\beta_0\sigma\mu c\right]\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\&+\left[\beta_0\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)-\alpha_0\sigma\mu c\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\&+4\alpha_0\beta_0\left(\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]=0.\end{aligned} \tag{140}$$

Con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_0\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)-\beta_0\sigma\mu c=0, \tag{141}$$

$$\beta_0\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)-\alpha_0\sigma\mu c=0, \tag{142}$$

$$\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda=0. \tag{143}$$

Sin embargo, sumando (141) y (142) es notorio que:

$$(\alpha_0+\beta_0)\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)-(\alpha_0+\beta_0)\sigma\mu c=0. \tag{144}$$

Lo que implica que la ecuación fundamental será:

$$-c^2+\widetilde{q}+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2-\sigma\mu c=0. \tag{145}$$

Dejando así a (143) y (145) como el sistema a resolver.
De (143) se tiene:

$$\lambda=-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}. \tag{146}$$

Y sustituyendo (146) en (145)

$$-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{2\widetilde{q}}+\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}-\mu^2-\sigma\mu c=0, \tag{147}$$

$$\mu^2+\sigma\mu c=-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}, \tag{148}$$

$$\mu^2+\sigma\mu c+\left(\frac{\sigma c}{2}\right)^2=-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}+\left(\frac{\sigma c}{2}\right)^2, \tag{149}$$

$$\left(\mu+\frac{\sigma c}{2}\right)^2=-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}+\left(\frac{\sigma c}{2}\right)^2, \tag{150}$$

$$\mu+\frac{\sigma c}{2}=\sqrt{-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}+\left(\frac{\sigma c}{2}\right)^2}, \tag{151}$$

$$\mu=\sqrt{-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}+\left(\frac{\sigma c}{2}\right)^2}-\frac{\sigma c}{2}. \tag{152}$$

Con esto hemos resuelto para cada parámetro obteniendo así:

$\alpha=\alpha_0$, con α_0 una constante arbitraria,

$\beta=\beta_0$, con β_0 una constante arbitraria,

$\lambda=-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}$,

$\mu=\sqrt{-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}+\left(\frac{\sigma c}{2}\right)^2}\frac{\sigma c}{2}$.

Teniendo así la forma general de la solución

$$\begin{aligned} u(z,\tau)=&-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} \\ &+\alpha_0\cosh\left[\left(\sqrt{-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}+\left(\frac{\sigma c}{2}\right)^2}\mp\frac{\sigma c}{2}\pm\frac{\sigma c}{2}\right)(z-c\tau)\right] \\ &+\beta_0\sinh\left[\left(\sqrt{-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}+\left(\frac{\sigma c}{2}\right)^2}\mp\frac{\sigma c}{2}\pm\frac{\sigma c}{2}\right)(z-c\tau)\right]. \end{aligned} \tag{153}$$

Y tras haber sustituido los valores adimensionales de (53) se tendría:

$$\begin{aligned} \alpha&=\alpha_0, \\ \beta&=\beta_0, \\ \lambda&=0.104, \\ \mu&=0.906. \end{aligned} \tag{154}$$

Con lo que se obtiene la solución particular:

$$u(z,\tau) = 0.104 + \alpha_0 \cosh\left[0.906\,(z-\tau)\right] + \beta_0 \sinh\left[0.906\,(z-\tau)\right]. \quad (155)$$

Esta solución, presenta un comportamiento creciente, a pesar de ser una combinación lineal, su amplitud estará fijada por un único parámetro α_0 que como vimos tiene que ser pequeño, esto significa que se tratará de oscilaciones pequeñas.

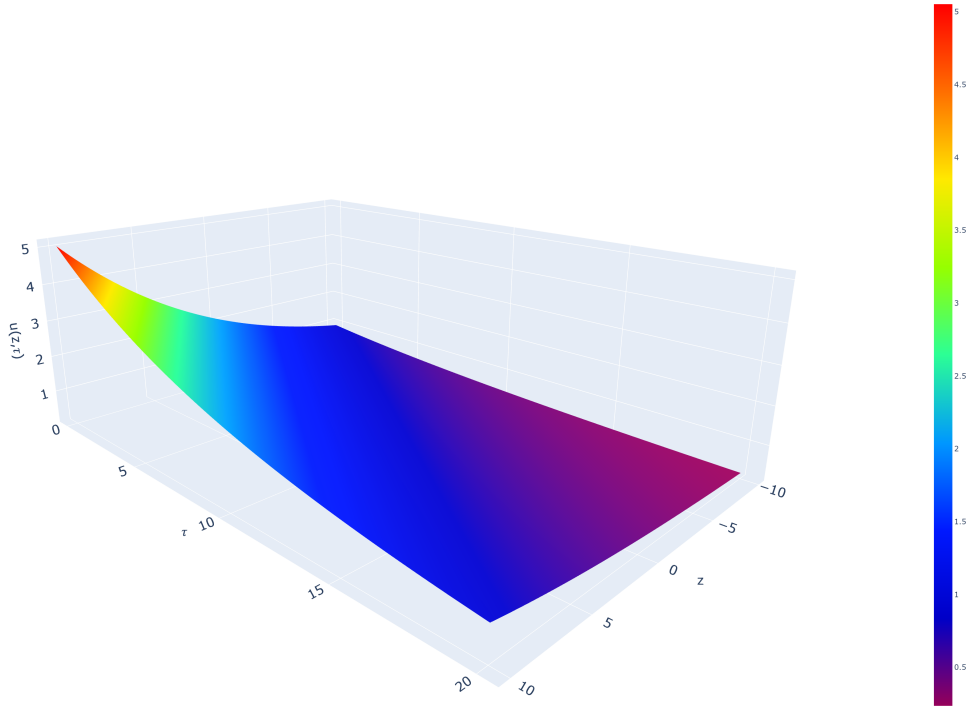


Figura 11: Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz sinh-cosh ii, dado por la ecuación (155), con $\alpha = 2$ y $\beta = 2$

7.2. Modelo Heimburg-Jackson modificado

Sea el modelo H-J modificado adimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1 + \widetilde{p}u + \widetilde{q}u^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \sigma\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) - \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \varphi\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right). \quad (156)$$

Se puede reescribir como:

$$u_{\tau\tau} = u_{zz} + \widetilde{p}uu_{zz} + \widetilde{q}u^2u_{zz} + \widetilde{p}u_z^2 + 2\widetilde{q}uu_z^2 + \sigma u_{zz\tau} - u_{zzzz} + \varphi u_{z\tau\tau}. \quad (157)$$

Ansatz: Coseno hiperbólico cuadrático

Partiendo del ansatz :

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha\cosh^2[\mu(z - c\tau)]. \quad (158)$$

O bien puede ser reescrito como:

$$u(z,\tau) = \lambda + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\cosh[2\mu(z - c\tau)]. \quad (159)$$

Y con las respectivas derivadas parciales:

$$u_\tau = -\alpha c\mu\sinh[2\mu(z - c\tau)], \quad (160)$$

$$u_{\tau\tau} = 2\mu^2c^2\alpha\cosh[2\mu(z - c\tau)], \quad (161)$$

$$u_z = \alpha\mu\sinh[2\mu(z - c\tau)], \quad (162)$$

$$u_{zz} = 2\alpha\mu^2\cosh[2\mu(z - c\tau)], \quad (163)$$

$$u_{zzz} = 4\alpha\mu^3\sinh[2\mu(z - c\tau)], \quad (164)$$

$$u_{zzzz} = 8\alpha\mu^4\cosh[2\mu(z - c\tau)], \quad (165)$$

$$u_{zz\tau} = -4\alpha\mu^3\sinh[2\mu(z - c\tau)], \quad (166)$$

$$u_{z\tau\tau} = 4\alpha\mu^3c^2\sinh[2\mu(z - c\tau)]. \quad (167)$$

Sustituyendo en la ec.(157) tendríamos:

$$
\begin{aligned}
2\mu^2c^2\alpha\cosh[2\mu(z-c\tau)] =& 2\alpha\mu^2\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ 2\alpha\mu^2\widetilde{p}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ \alpha^2\mu^2\widetilde{p}\cosh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ 2\alpha\mu^2\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^2\widetilde{q}\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ 2\alpha^2\mu^2\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\cosh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ \frac{\alpha^3}{2}\mu^2\widetilde{q}\cosh^3[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ \alpha^2\mu^2\widetilde{p}\sinh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ 2\alpha^2\mu^2\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\sinh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ \alpha^3\mu^2\widetilde{q}\cosh^3[2\mu(z-c\tau)] \\
&- \alpha^3\mu^2\widetilde{q}\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&- 4\alpha\mu^3c\sigma\sinh[2\mu(z-c\tau)] \\
&- 8\alpha\mu^4\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+ 4\alpha\mu^3c^2\varphi\sinh[2\mu(z-c\tau)],
\end{aligned}
\tag{168}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-c^2+1+\widetilde{p}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^2\widetilde{q}-\frac{1}{2}\alpha^2\widetilde{q}-4\mu^2\right)\cosh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\left(2\mu c^2\varphi-2\mu c\sigma\right)\sinh[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\left[\frac{1}{2}\alpha\widetilde{p}+\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}+\frac{1}{2}\alpha\widetilde{p}+\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\right]\cosh^2[2\mu(z-c\tau)] \\
&+\left(\frac{\alpha^2}{4}\widetilde{q}+\frac{\alpha^2}{2}\widetilde{q}\right)\cosh^3[2\mu(z-c\tau)]-\left(\frac{\alpha}{2}\widetilde{p}+\alpha\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\right)=0,
\end{aligned}
\tag{169}
$$

$$\left[-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{p}\frac{\alpha}{2}+\lambda^2\widetilde{q}+\lambda\alpha\widetilde{q}+\frac{\alpha^2}{4}\widetilde{q}-\frac{1}{2}\alpha^2\widetilde{q}-4\mu^2\right]\cosh\left[2\mu(z-c\tau)\right]$$
$$+2\mu c(c\varphi-\sigma)\sinh\left[2\mu(z-c\tau)\right]$$
$$+2\alpha\left[\frac{1}{2}\widetilde{p}+\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\right]\cosh^2\left[2\mu(z-c\tau)\right]$$
$$+\frac{3}{4}\alpha^2\widetilde{q}\cosh^3\left[2\mu(z-c\tau)\right]-\alpha\left(\frac{\widetilde{p}}{2}+\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\right)=0, \tag{170}$$

$$\left(1-c^2+\lambda\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}\widetilde{p}+\lambda^2\widetilde{q}-\frac{\alpha^2}{4}\widetilde{q}-4\mu^2\right)\cosh\left[2\mu(z-c\tau)\right]$$
$$+2\mu c(c\varphi-\sigma)\sinh\left[2\mu(z-c\tau)\right]$$
$$+2\alpha\left(\frac{1}{2}\widetilde{p}+\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\right)\cosh^2\left[2\mu(z-c\tau)\right] \tag{171}$$
$$+\frac{3}{4}\alpha^2\widetilde{q}\cosh^3\left[2\mu(z-c\tau)\right]-\alpha\left(\frac{\widetilde{p}}{2}+\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\right)=0.$$

Notemos que para que esta ecuación sea válida, cada término se debe anular independientemente,y la única forma en que es posible es que los coeficientes que acompañan las expresiones de coseno y seno hiperbólico sean cero, sin embargo el coeficiente asociado al $cosh^3$ nos dejaría con una solución trivial, se propone entonces que $\alpha = \alpha_0$ lo suficientemente pequeño tal que $\alpha^2 \to 0$, dejando así la ecuación:

$$\left[1-c^2+\lambda\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}\widetilde{p}+\lambda^2\widetilde{q}-4\mu^2\right]\cosh\left[2\mu(z-c\tau)\right]$$
$$+2\mu c(c\varphi-\sigma)\sinh\left[2\mu(z-c\tau)\right]$$
$$+2\alpha\left(\frac{1}{2}\widetilde{p}+\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\right)\cosh^2\left[2\mu(z-c\tau)\right] \tag{172}$$
$$-\alpha\left(\frac{\widetilde{p}}{2}+\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q}\right)=0.$$

De esta manera se obtiene el sig. sistema de ecuaciones:

$$1 - c^2 + \lambda(\widetilde{p} + \alpha\widetilde{q}) + \frac{\widetilde{p}\alpha}{2} + \lambda^2\widetilde{q} - 4\mu^2 = 0, \tag{173}$$

$$c\varphi - \sigma = 0, \tag{174}$$

$$\frac{\widetilde{p}}{2} + \left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{q} = 0. \tag{175}$$

Ahora bien, de (174) se obtendría:

$$\varphi = \frac{\sigma}{c}. \tag{176}$$

y de (175):

$$\lambda + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}, \tag{177}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2\widetilde{q}}(\widetilde{p} + \alpha\widetilde{q}). \tag{178}$$

Que sustituyendo en (173) se tiene:

$$1 - c^2 - \frac{1}{2\widetilde{q}}(\widetilde{p} + \alpha\widetilde{q})^2 + \widetilde{p}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4\widetilde{q}}(\widetilde{p} + \alpha\widetilde{q})^2 - 4\mu^2 = 0, \tag{179}$$

$$1 - c^2 - \frac{1}{4\widetilde{q}}(\widetilde{p} + \alpha\widetilde{q})^2 + \widetilde{p}\frac{\alpha}{2} - 4\mu^2 = 0, \tag{180}$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\left(1 - c^2 - \frac{1}{4\widetilde{q}}(\widetilde{p} + \alpha\widetilde{q})^2 + \widetilde{p}\frac{\alpha}{2}\right), \tag{181}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1 - c^2 - \frac{1}{4\widetilde{q}}(\widetilde{p} + \alpha\widetilde{q})^2 + \widetilde{p}\frac{\alpha}{2}}. \tag{182}$$

Con esto hemos obtenido cada parámetro teniendo así:

$\alpha = \alpha_0$, con α_0 una constante arbitraria,

$\lambda = -\frac{1}{2\widetilde{q}}(\widetilde{p} + \alpha_0\widetilde{q})$,

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1 - c^2 - \frac{1}{4}\frac{(\widetilde{p}+\alpha_0\widetilde{q})^2}{\widetilde{q}} + \frac{\alpha_0}{2}\widetilde{p}}.$$

Teniendo así la forma general de la solución

$$u(z,\tau) = -\frac{1}{2\widetilde{q}}(\widetilde{p}+\alpha_0\widetilde{q}) + \alpha_0 \sinh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{1 - c^2 - \frac{1}{4}\frac{(\widetilde{p}+\alpha_0\widetilde{q})^2}{\widetilde{q}} + \frac{\alpha_0}{2}\widetilde{p}}(z - c\tau)\right]. \tag{183}$$

Y tras haber sustituido los valores adimensionales de la ecuación (53) se tendría:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0, \\ \lambda &= -0.006\,(-16.6 + 79.5\alpha_0), \\ \mu &= 0.5\sqrt{-0.25\frac{(-16.6+79.5\alpha_0)^2}{79.5} - 8.3\alpha_0}. \end{aligned} \tag{184}$$

Con lo que se obtiene la solución particular:

$$\begin{aligned} u(z,\tau) = &-0.006\,(-16.6 + 79.5\alpha_0) \\ &+ \alpha_0 \cosh^2\left[\left(0.5\sqrt{-0.25\frac{(-16.6+79.5\alpha_0)^2}{79.5} - 8.3\alpha_0}\right)(z - \tau)\right]. \end{aligned} \tag{185}$$

Para esta solución, se recupera un pulso creciente, que de manera similar al caso anterior la velocidad con la que crece y qué tanto lo hace, depende mayormente de la constante μ, sin embargo presenta un mayor disponibilidad en el rango de aparición, debido a que esta ocasión su amplitud y defase están en términos del valor arbitrario α_0, que como vimos anteriormente la condición que se le impone de existencia, es que sean valores pequeños, es decir el pulso será similar a una oscilación pequeña. También cabe señalar que se ha obtenido una condición adicional de existencia para la solución, si bien al inicio se estableció que el término adicional es debido a las deformaciones mecánicas que pueda presentar la membrana, no se estableció una de-

pendencia explícita como en las otras constantes intrínsecas, es justo la ecuación (176), lo que relaciona directamente tales deformaciones con la fricción, en consecuencia la solución nace como balance entre estas dos fuerzas.

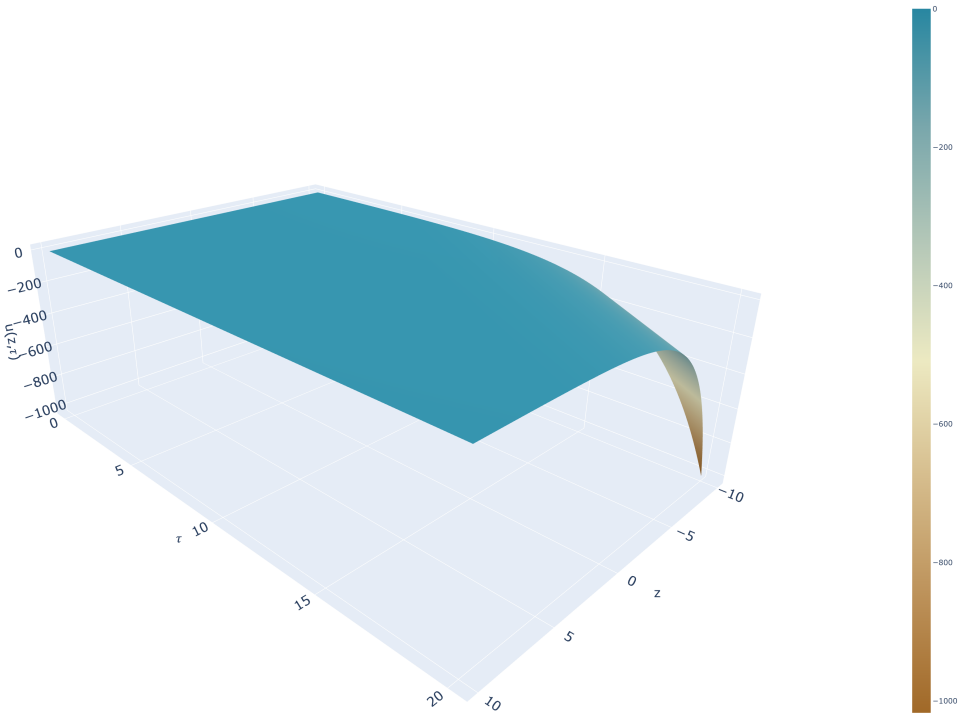


Figura 12: Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz coseno hiperbólico cuadrático, bajo la ecuación (185) con $\alpha = -0.025, \lambda = 0.111$ y $\mu = 0.257$.

Ansatz: Seno hiperbólico

Partiendo del ansatz hiperbólico:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right]. \tag{186}$$

Y con las respectivas parciales:

$$u_\tau = -\alpha\mu c \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right], \tag{187}$$

$$u_{\tau\tau} = \alpha\mu^2 c^2 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right], \tag{188}$$

$$u_z = \alpha\mu \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right], \tag{189}$$

$$u_{zz} = \alpha\mu^2 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right], \tag{190}$$

$$u_{zzz} = \alpha\mu^3 \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right], \tag{191}$$

$$u_{zzzz} = \alpha\mu^4 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right], \tag{192}$$

$$u_{zz\tau} = -\alpha c\mu^3 \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right], \tag{193}$$

$$u_{z\tau\tau} = \alpha\mu^3 c^2 \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right]. \tag{194}$$

Sustituyendo en (157) se tendría:

$$\begin{aligned}
\alpha\mu^2 c^2 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right] =& \alpha\mu^2 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right] + \widetilde{p}\alpha\mu^2 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right] \\
&+ \widetilde{p}\alpha^2\mu^2 \sinh^2\left[\mu(z - c\tau)\right] + \widetilde{q}\alpha\mu^2\lambda^2 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right] \\
&+ 2\widetilde{q}\alpha^2\mu^2\lambda \sinh^2\left[\mu(z - c\tau)\right] + \widetilde{q}\alpha^3\mu^2 \sinh^3\left[\mu(z - c\tau)\right] \\
&+ \widetilde{p}\alpha^2\mu^2 \cosh^2\left[\mu(z - c\tau)\right] + 2\widetilde{q}\alpha^2\mu^2\lambda \cosh^2\left[\mu(z - c\tau)\right] \\
&+ 2\widetilde{q}\alpha^3\mu^2 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right]\cosh^2\left[\mu(z - c\tau)\right] \\
&- \sigma\alpha c\mu^3 \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right] - \alpha\mu^4 \sinh\left[\mu(z - c\tau)\right] \\
&+ \varphi\alpha\mu^3 c^2 \cosh\left[\mu(z - c\tau)\right].
\end{aligned} \tag{195}$$

$$\begin{aligned}
&\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+(\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\alpha\lambda)\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\alpha^2\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+(\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\alpha\lambda)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+2\widetilde{q}\alpha^2\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&++\left(\varphi\mu c^2-\sigma c\mu\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]=0,
\end{aligned}\tag{196}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1-c^2+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\mu c(\varphi c-\sigma)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+2\widetilde{q}\alpha^2\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\alpha^2\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+(\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\lambda)\left(\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\right)=0,
\end{aligned}\tag{197}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1-c^2+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\mu c(\varphi c-\sigma)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+2\widetilde{q}\alpha^2\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+2\widetilde{q}\alpha^2\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\alpha^2\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+2(\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\alpha\lambda)\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\alpha\lambda=0,
\end{aligned}\tag{198}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1-c^2+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2+2\widetilde{q}\alpha^2\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\mu c(\varphi c-\sigma)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+3\widetilde{q}\alpha^2\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+2(\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\alpha\lambda)\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\alpha\lambda=0.
\end{aligned}\tag{199}$$

Notemos solo es posible obtener los parámetros si consideramos $\alpha=\alpha_0$ lo suficientemente pequeño, tal que $\alpha^2\to 0$ de esta manera se desechan los términos con dicho coeficiente y resulta en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
&\left(1-c^2+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\mu c(\varphi c-\mu)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+2(\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\alpha\lambda)\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\alpha+2\widetilde{q}\alpha\lambda=0.
\end{aligned}\tag{200}$$

De donde para que se cumpla la igualdad es necesario que los coeficientes que acompañan las expresiones de sinh o cosh se anulen de manera independiente, de lo que se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$1 - c^2 + \widetilde{p}\lambda + \widetilde{q}\lambda^2 - \mu^2 = 0, \tag{201}$$

$$\varphi c - \sigma = 0, \tag{202}$$

$$\widetilde{p} + 2\widetilde{q}\lambda = 0. \tag{203}$$

De (202) se obtiene:

$$\varphi c = \sigma, \tag{204}$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{c}. \tag{205}$$

De (203):

$$\lambda = -\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}. \tag{206}$$

Y por último, de (201) sustituyendo lo hallado previamente

$$1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{2\widetilde{q}} + \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} - \mu^2 = 0, \tag{207}$$

$$\mu^2 = 1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{2\widetilde{q}}, \tag{208}$$

$$\mu = \sqrt{1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{2\widetilde{q}}}. \tag{209}$$

Con esto hemos resuelto para cada parámetro obteniendo así:

$\alpha = \alpha_0$, con α_0 una constante arbitraria,

$\lambda = -\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}$,

$$\mu = \sqrt{1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{2\widetilde{q}}}.$$

Teniendo así la forma general de la solución

$$u(z,\tau) = -\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} + \alpha_0 \sinh\left(\sqrt{1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{2\widetilde{q}}}(z - c\tau)\right). \tag{210}$$

Y tras haber sustituido los valores adimensionales de (53) se tendría:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0, \\ \lambda &= 0.104, \\ \mu &= 1.316. \end{aligned} \tag{211}$$

Con lo que se obtiene la solución particular:

$$u(z,\tau) = 0.104 + \alpha_0 \sinh\left[1.316\,(z - \tau)\right]. \tag{212}$$

En virtud de lo anterior, la solución obtenida se verá como en el gráfico (13), el pulso resulta ser creciente, pero en particular respecto a la solución previa que tiene una forma similar, lo hace de manera más rápida, también presenta colas infinitas, y tiene un espectro menor ya que el parámetro libre solo está presente en la amplitud. Y de manera análoga a la solución anterior, se ha obtenido una condición de existencia adicional, como lo muestra (205) la solución emergerá como resultado del balance entre fricción y las deformaciones de la membrana.

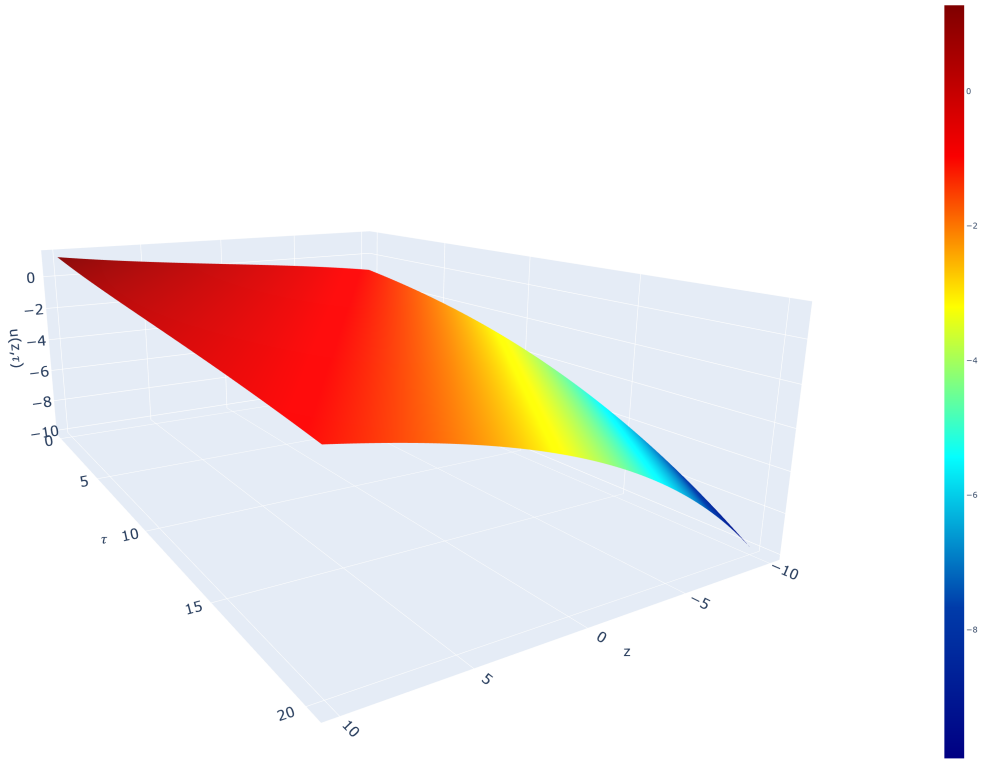


Figura 13: Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz seno hiperbólico, dada por la ecuación (212) con $\alpha = 1$.

Ansatz: Algoritmo de peakon exponencial

Partiendo del ansatz de peakon exponencial:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha e^{-\mu(z-c\tau)}. \tag{213}$$

Y con sus respectivas derivadas parciales:

$$u_\tau = c\mu\alpha e^{-\mu(z-c\tau)} = \mu c\,(u-\lambda), \tag{214}$$

$$u_{\tau\tau} = \mu c u_\tau = \mu^2 c^2\,(u-\lambda), \tag{215}$$

$$u_z = \alpha e^{-\mu(z-c\tau)}(-\mu) = -\mu\,(u-\lambda), \tag{216}$$

$$u_{zz} = -\mu u_z = \mu^2\,(u-\lambda), \tag{217}$$

$$u_{zzz} = \mu^2 u_z = -\mu^3\,(u-\lambda), \tag{218}$$

$$u_{zzzz} = -\mu^3 u_z = \mu^4\,(u-\lambda), \tag{219}$$

$$u_{zz\tau} = -\mu^2 c u_z = \mu^3 c\,(u-\lambda), \tag{220}$$

$$u_{z\tau\tau} = \mu^2 c^2 u_z = -\mu^3 c^2\,(u-\lambda), \tag{221}$$

Sustituyendo en (157) se tendría:

$$\begin{aligned} \mu^2 c^2\,(u-\lambda) =& \mu^2\,(u-\lambda) + \widetilde{p}u\mu^2\,(u-\lambda) + \widetilde{q}u^2\mu^2\,(u-\lambda) \\ &+ \widetilde{p}\mu^2\,(u-\lambda)^2 + 2\widetilde{q}u\mu^2\,(u-\lambda)^2 + \sigma\mu^3 c\,(u-\lambda) \\ &- \mu^4\,(u-\lambda) - \varphi\mu^3 c^2\,(u-\lambda), \end{aligned} \tag{222}$$

$$2\widetilde{q}u\,(u-\lambda) + \widetilde{q}u^2 + \widetilde{p}\,(u-\lambda) + \widetilde{p}u + 1 - c^2 + \sigma c\mu - \mu^2 - \varphi\mu c^2 = 0. \tag{223}$$

Que regresando las variables explícitas se tiene:

$$
\begin{aligned}
&2\widetilde{q}\lambda e^{-\mu(z-c\tau)}\alpha + 2\widetilde{q}\alpha^2 e^{-2\mu(z-c\tau)} + \widetilde{q}\lambda^2 + 2\widetilde{q}\lambda\alpha e^{-\mu(z-c\tau)} \\
&+ \widetilde{q}\alpha^2 e^{-2\mu(z-c\tau)} + \widetilde{p}\alpha e^{-\mu(z-c\tau)} + \widetilde{p}\alpha e^{-\mu(z-c\tau)} + \widetilde{p}\lambda + \widetilde{p}\alpha e^{-\mu(z-c\tau)} \\
&+ 1 - c^2 + \sigma c\mu - \mu^2 - \varphi\mu c^2 = 0,
\end{aligned} \tag{224}
$$

$$
\begin{aligned}
&3\widetilde{q}\alpha^2 e^{-2\mu(z-c\tau)} + 2\alpha\left(2\widetilde{q}\lambda + \widetilde{p}\right)e^{-\mu(z-c\tau)} + 1 - c^2 \\
&+ \sigma c\mu - \mu^2 - \varphi\mu c^2 + \widetilde{q}\lambda^2 + \widetilde{p}\lambda = 0.
\end{aligned} \tag{225}
$$

Observamos que para que la igualdad se cumpla los coeficientes que acompañan al exponencial como los términos libres deben ser igual a cero, para ello deben anularse independientemente, sin embargo para tener una solución válida es necesario que $\alpha = \alpha_0$ tal que $\alpha^2 \to 0$, lo que conlleva a la siguiente ecuación:

$$
2\alpha\left(2\widetilde{q}\lambda + \widetilde{p}\right)e^{-\mu(z-c\tau)} + 1 - c^2 + \sigma c\mu - \mu^2 - \varphi\mu c^2 + \widetilde{q}\lambda^2 + \widetilde{p}\lambda = 0. \tag{226}
$$

Que nos deja con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
2\widetilde{q}\lambda + \widetilde{p} = 0, \tag{227}
$$

$$
1 - c^2 + \sigma c\mu - \mu^2 - \varphi\mu c^2 + \widetilde{q}\lambda^2 + \widetilde{p}\lambda = 0. \tag{228}
$$

De (227) se obtiene:

$$
\lambda = -\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}. \tag{229}
$$

Y de (228) y sustituyendo lo encontrado:

$$
1 - c^2 - \mu^2 + \mu c\left(\sigma - \varphi c\right) + \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} - \frac{\widetilde{p}^2}{2\widetilde{q}} = 0, \tag{230}
$$

$$
1 - c^2 - \mu^2 + \mu c\left(\sigma - \varphi c\right) - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} = 0, \tag{231}
$$

$$\left(\mu - c\frac{\sigma - \varphi c}{2}\right)^2 = 1 - c^2 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + c^2\frac{(\sigma - \varphi c)^2}{4}, \tag{232}$$

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + c^2\left(\left(\frac{\sigma - \varphi c}{2}\right)^2\right)} + c\frac{\sigma - \varphi c}{2}. \tag{233}$$

Con esto hemos obtenido cada parámetro resultando así:

$\alpha = \alpha_0$, con α_0 una constante arbitraria,
$\lambda = -\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}$,
$\mu = \sqrt{1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + c^2\left(\left(\frac{\sigma - \varphi c}{2}\right)^2\right)} + \frac{c}{2}(\sigma - \varphi c)$.

Teniendo así la forma general de la solución

$$u(z,\tau) = -\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} + \alpha_0 e^{-\left[\left(\sqrt{1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + c^2\left(\left(\frac{\sigma - \varphi c}{2}\right)^2\right)} + \frac{c}{2}(\sigma - \varphi c)\right)(|z - c\tau|)\right]}. \tag{234}$$

Y tras haber sustituido los valores adimensionales de (53) se tendría:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0, \\ \lambda &= 0.104, \\ \mu &= 0.365. \end{aligned} \tag{235}$$

Con lo que se obtiene la solución particular:

$$u(z,\tau) = 0.104 + \alpha_0 e^{-0.365(z-\tau)}. \tag{236}$$

De ahí que la solución tome la forma de un pico o cresta que crece rápidamente y vuelve a decrecer con la misma rapidez. El peakon, en cuestión, avanza rápidamente presentando colas que tienden al infinito.

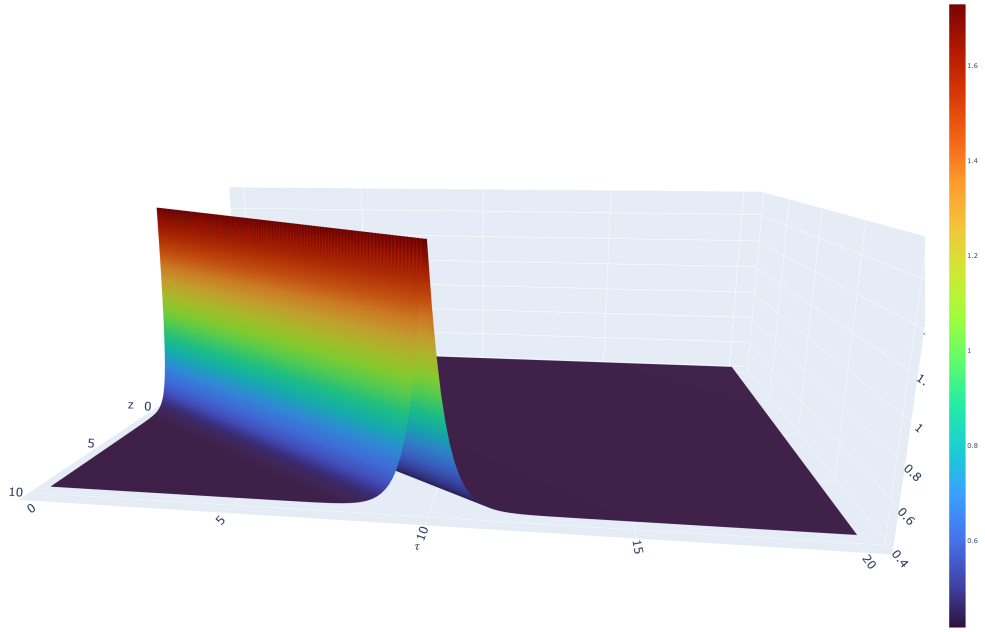


Figura 14: Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz peakon exponencial, dado por la ecuación (236) con $\alpha = 1.5$

.

Ansatz: Sinh-Cosh ii

Considerando el ansatz sinh-cosh ii:

$$u(z,\tau) = \lambda + \alpha \cosh[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh[\mu(z - c\tau)]. \tag{237}$$

Y con las respectivas derivadas parciales:

$$u_\tau = -\mu c(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]), \tag{238}$$

$$u_{\tau\tau} = c^2\mu^2(\alpha \cosh[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh[\mu(z - c\tau)]), \tag{239}$$

$$u_z = \mu(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]), \tag{240}$$

$$u_{zz} = \mu^2(\alpha \cosh[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh[\mu(z - c\tau)]), \tag{241}$$

$$u_{zzz} = \mu^3(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]), \tag{242}$$

$$u_{zzzz} = \mu^4(\alpha \cosh[\mu(z - c\tau)] + \beta \sinh[\mu(z - c\tau)]), \tag{243}$$

$$u_{zz\tau} = -c\mu^3(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]), \tag{244}$$

$$u_{z\tau\tau} = c^2\mu^3(\alpha \sinh[\mu(z - c\tau)] + \beta \cosh[\mu(z - c\tau)]). \tag{245}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (66) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&- c^2\mu^2\left[\alpha\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\beta\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\right]\\
&+ \mu^2\alpha\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\mu^2\beta\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{p}\mu^2\alpha\lambda\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\mu^2\beta\lambda\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{p}\mu^2 2\alpha\beta\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \alpha^2\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\mu^2\beta\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2\alpha\lambda^2\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\mu^2\beta\lambda^2\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2 4\alpha\beta\lambda\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2 2\alpha^2\lambda\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{q}\mu^2 2\beta^2\lambda\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2 3\alpha^2\beta\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2 3\alpha\beta^2\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{q}\mu^2\beta^3\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]+\widetilde{p}\mu^2\alpha^2\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{p}\mu^2\beta^2\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]++2\widetilde{q}\mu^2\alpha\beta^2\cosh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ \widetilde{p}\mu^2 2\alpha\beta\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 4\widetilde{q}\mu^2\alpha\beta\lambda\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\beta^2\lambda\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]+2\widetilde{q}\mu^2\alpha^2\lambda\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\left(2\alpha^2\beta+\beta^3\right)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\left(\alpha^3+2\alpha\beta^2\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+ 2\widetilde{q}\mu^2\alpha^2\beta\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]-\mu^4\alpha\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&- \sigma c\mu^3\left[\alpha\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\beta\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\right]\\
&+ \varphi c^2\mu^3\left(\alpha\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]+\beta\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\right)\\
&- \mu^4\beta\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{246}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-\alpha c^2+\alpha+\widetilde{p}\alpha\lambda+\widetilde{q}\alpha\lambda^2-\beta\sigma\mu c-\alpha\mu^2+\beta\varphi\mu c^2\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(-\beta c^2+\beta+\widetilde{p}\beta\lambda+\widetilde{q}\beta\lambda^2-\alpha\sigma\mu c-\beta\mu^2+\alpha\varphi\mu c^2\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(2\widetilde{p}\alpha\beta+4\widetilde{q}\alpha\beta\lambda+2\widetilde{p}\alpha\beta+4\widetilde{q}\alpha\beta\lambda\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\widetilde{p}\alpha^2+2\widetilde{q}\alpha^2\lambda+\widetilde{p}\beta+2\widetilde{q}\beta^2\lambda\right)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\widetilde{p}\beta^2+2\widetilde{q}\beta^2\lambda+\widetilde{p}\alpha^2+2\widetilde{q}\alpha^2\lambda\right)\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[3\widetilde{q}\alpha^2\beta+2\widetilde{q}\left(2\alpha^2\beta+\beta^3\right)\right]\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[3\widetilde{q}\alpha\beta^2+2\widetilde{q}\left(\alpha^3+2\alpha\beta^2\right)\right]\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\widetilde{q}\alpha^3+2\widetilde{q}\alpha\beta^2\right)\cosh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\widetilde{q}\beta^3+2\widetilde{q}\alpha^2\beta\right)\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{247}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\alpha\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)+\beta\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)\right]\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left[\beta\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)+\alpha\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+4\alpha\beta\left(\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda\right)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda\right)\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]^2\\
&+\widetilde{q}\beta\left(7\alpha^2+2\beta^2\right)\cosh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\widetilde{q}\alpha\left(7\beta^2+2\alpha^2\right)\cosh\left[\mu(z-c\tau)\right]\sinh^2\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\widetilde{q}\alpha\left(\alpha^2+2\beta^2\right)\cosh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]\\
&+\widetilde{q}\beta\left(\beta^2+2\alpha^2\right)\sinh^3\left[\mu(z-c\tau)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{248}
$$

Para que esta última ecuación sea válida, cada término debe anularse de manera independiente; para ello, los coeficientes que acompañan las funciones tipo seno hiperbólico y coseno hiperbólico, son los que deben presentar tal comportamiento.

Sin embargo, a simple vista y considerando que los valores de α, β, λ y μ son únicos, hay varias ecuaciones que serían imposible cumplirse simultáneamente si se considera un simple despeje, ejemplo de ello son

los coeficientes $\left(\alpha^2+\beta^2\right)$ y $7\alpha^2+2\beta^2$.
Lo que lleva a imponer una condición sobre α y β, de manera que $\alpha=\alpha_0$ y $\beta=\beta_0$, con α_0 y β_0 constantes arbitrarias lo suficientemente pequeñas, tal que $\alpha^2\to 0$ y $\beta^2\to 0$. Con ello la ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned}&\left[\alpha_0\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)+\beta_0\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)\right]\cosh\left[\mu\left(z-c\tau\right)\right]\\&+\left[\beta_0\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)+\alpha_0\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)\right]\sinh\left[\mu\left(z-c\tau\right)\right]\\&+4\alpha_0\beta_0\left(\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda\right)\cosh\left[\mu\left(z-c\tau\right)\right]\sinh\left[\mu\left(z-c\tau\right)\right]=0.\end{aligned}\tag{249}$$

Con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_0\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)+\beta_0\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)=0,\tag{250}$$

$$\beta_0\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)+\alpha_0\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)=0,\tag{251}$$

$$\widetilde{p}+2\widetilde{q}\lambda=0.\tag{252}$$

Sin emabargo sumando (250) y (251) es notorio que:

$$\left(\alpha_0+\beta_0\right)\left(-c^2+1+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2\right)+\left(\alpha_0+\beta_0\right)\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)=0.\tag{253}$$

Lo que implica que la ecuación fundamental será:

$$-c^2+\widetilde{q}+\widetilde{p}\lambda+\widetilde{q}\lambda^2-\mu^2+\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)=0.\tag{254}$$

Dejando así a (252) y (254) como el sistema a resolver.
De (252) se tiene:

$$\lambda=-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}.\tag{255}$$

Y sustituyendo (255) en (254)

$$-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{2\widetilde{q}}+\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}-\mu^2+\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)=0,\tag{256}$$

$$\mu^2-\mu c\left(\varphi c-\sigma\right)=-c^2+1-\frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}}\tag{257}$$

$$\mu^2 - \mu c(\varphi c - \sigma) + \frac{c^2}{4}(\varphi c - \sigma)^2 = -c^2 + 1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \frac{c^2}{4}(\varphi c - \sigma)^2, \tag{258}$$

$$\left[\mu - \frac{c}{2}(\varphi c - \sigma)\right]^2 = -c^2 + 1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \frac{c^2}{4}(\varphi c - \sigma)^2, \tag{259}$$

$$\mu - \frac{c}{2}(\varphi c - \sigma) = \sqrt{-c^2 + 1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \frac{c^2}{4}(\varphi c - \sigma)^2}, \tag{260}$$

$$\mu = \sqrt{-c^2 + 1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \frac{c^2}{4}(\varphi c - \sigma)^2} + \frac{c}{2}(\varphi c - \sigma). \tag{261}$$

Con esto hemos obtenido cada parámetro teniendo así:

$\alpha = \alpha_0$, con α_0 una constante arbitraria,

$\beta = \beta_0$, con β_0 una constante arbitraria,

$\lambda = -\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}}$,

$\mu = \sqrt{-c^2 + 1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \frac{c^2}{4}(\varphi c - \sigma)^2} + \frac{c}{2}(\varphi c - \sigma)$.

Teniendo así la forma general de la solución

$$\begin{aligned} u(z,\tau) = &-\frac{\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} \\ &+ \alpha_0 \cosh\left[\left(\sqrt{-c^2 + 1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \frac{c^2}{4}(\varphi c - \sigma)^2} + \frac{c}{2}(\varphi c - \sigma)\right)(z - c\tau)\right] \\ &+ \beta_0 \sinh\left[\left(\sqrt{-c^2 + 1 - \frac{\widetilde{p}^2}{4\widetilde{q}} + \frac{c^2}{4}(\varphi c - \sigma)^2} + \frac{c}{2}(\varphi c - \sigma)\right)(z - c\tau)\right]. \end{aligned} \tag{262}$$

Y tras haber sustituido los valores adimensionales de (53) se tendría:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0, \\ \beta &= \beta_0, \\ \lambda &= 0.104, \\ \mu &= 0.9308. \end{aligned} \tag{263}$$

Con lo que se obtiene la solución particular:

$$u(z,\tau) = 0.104 + \alpha_0 \cosh\left[0.93\,(z-\tau)\right] + \beta \sinh\left[0.93\,(z-\tau)\right]. \tag{264}$$

Esta solución, presenta un comportamiento creciente, a pesar de ser una combinación lineal, su amplitud estará fijada por un único parámetro α_0 que como vimos tiene que ser pequeño, esto significa que se tratará de oscilaciones pequeñas.
Por otro lado, se puede recuperar fácilmente la condición que hemos hallado para los términos debidos a deformaciones como:

$$\varphi = \frac{\sigma}{c}. \tag{265}$$

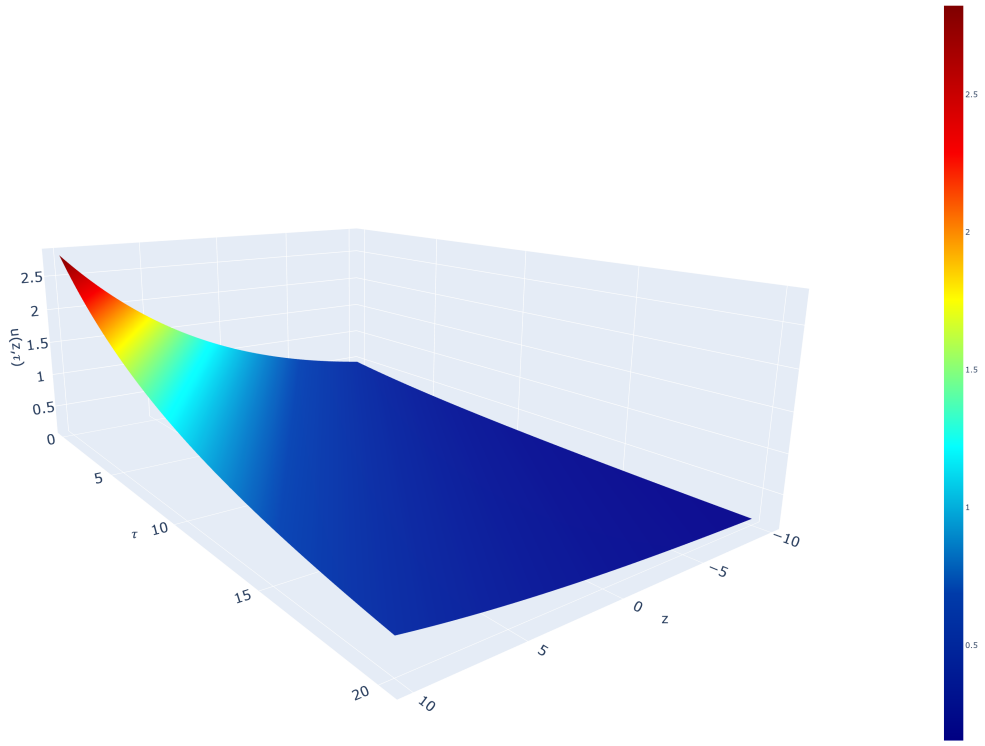


Figura 15: Evolución adiabática de un pulso nervioso modelado bajo el ansatz sinh-cosh ii, dada por la ecuación (264) con $\alpha = 1$, y $\beta = 1$.

8. Conclusiones

Se discutió el transporte de impulsos nerviosos en el axón utilizando un modelo alternativo. El cual se enfoca en los aspectos mecánicos y termodinámicos a escala macro del axón.

Se analizaron dos ecuaciones modificadas obtenidas a partir del modelo de Heimburg-Jackson, una que incluye un término adicional debido a la fricción; y otra ecuación más, que incluye información referente a las deformaciones del axón. Para el caso que solo adiciona la fricción se obtuvieron exitosamente tres soluciones tipo solitón, se encontraron como condiciones de existencia comunes que la amplitud del impulso debe ser pequeña, y en consecuencia se tratarán de oscilaciones pequeñas.
Este hallazgo aparece de manera natural en las otras cuatro soluciones aptas para el modelo modificado.
Además se encontró una condición de existencia de los pulsos: las deformaciones deben compensar los efectos de fricción. Lo cual tiene total sentido considerando las condiciones de las que habitualmente emergen los solitones, es decir el balance no-linealidad y dispersión. Si bien, esto es suficiente en casos como el modelo con fricción, no lo es cuando se toman en cuenta contribuciones adicionales como las deformaciones. Todas estas restricciones son necesarias para que se dé paso a soluciones tipo solitón bajo esta metodología.

Como comentarios finales queda decir que esta investigación se limitó a los aspectos teóricos del fenómeno, como sugerencia para futuros estudios y el paso natural siguiente, sería dar el salto a simulaciones comparativas de estas soluciones contra resultados obtenidos experimentalmente. El avance en técnicas experimentales sigue creciendo, por lo que acompañar dicho avance con un fundamento teórico capaz de modelar, describir y predecir el fenómeno con mayor precisión es, sin lugar a dudas, lo que conforma los aspectos integrales de un estudio más completo.

Bibliografía

Andersen, S. S., Jackson, A. D., & Heimburg, T. (2009). Towards a thermodynamic theory of nerve pulse propagation. *Progress in neurobiology*, *88*(2), 104-113.

Appali, R., Petersen, S., & Van Rienen, U. (2010). A comparision of Hodgkin-Huxley and soliton neural theories. *Advances in Radio Science*, *8*, 75-79.

Chakraborty, C., Saha, N., Aziz-Alaoui, M., Mondal, A., Antonopoulos, C. G., & Zemskov, E. P. (2025). A piecewise-linear adaptive exponential integrate-and-fire neuron model with emerging traveling waves using analytical scheme: C. Chakraborty et al. *Nonlinear Dynamics*, *113*(17), 23507-23520.

Contreras, F., Cervantes, H., Aguero, M., & de Lourdes Najera, M. (2013). Classic and non-classic soliton like structures for traveling nerve pulses. *Int. J. Mod. Nonlinear Theory Appl*, *2*, 7-13.

Drab, M., Daniel, M., Kralj-Iglič, V., & Iglič, A. (2022). Solitons in the Heimburg–Jackson model of sound propagation in lipid bilayers are enabled by dispersion of a stiff membrane. *The European Physical Journal E*, *45*(9), 79.

Drukarch, B., & Wilhelmus, M. M. (2023). Thinking about the action potential: the nerve signal as a window to the physical principles guiding neuronal excitability. *Frontiers in cellular neuroscience*, *17*, 1232020.

Evans, L. C. (2022). *Partial differential equations* (Vol. 19). American mathematical society.

FitzHugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal*, *1*(6), 445-466.

Fongang Achu, G., Moukam Kakmeni, F., & Dikande, A. (2018). Breathing pulses in the damped-soliton model for nerves. *Physical Review E*, *97*(1), 012211.

Franks, N. P., & Lieb, W. R. (1994). Molecular and cellular mechanisms of general anaesthesia. *Nature*, *367*(6464), 607-614.

Galinsky, V. L., & Frank, L. R. (2025). The wave nature of the action potential. *Frontiers in Cellular Neuroscience*, *19*, 1467466.

Gonzalez-Perez, A., Budvytyte, R., Mosgaard, L. D., Nissen, S., & Heimburg, T. (2014). Penetration of action potentials during collision in the median and lateral giant axons of invertebrates. *Physical Review X*, *4*(3), 031047.

González-Pérez, A., Mosgaard, L. D., Budvytyte, R., Villagrán-Vargas, E., Jackson, A. D., & Heimburg, T. (2016). Solitary electromechanical pulses in lobster neurons. *Biophysical chemistry*, *216*, 51-59.

Heimburg, T. (2025). The mechanical properties of nerves, the size of the action potential, and consequences for the brain. *Chemistry and physics of lipids*, *267*, 105461.

Heimburg, T., & Jackson, A. D. (2005). On soliton propagation in biomembranes and nerves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *102*(28), 9790-9795.

Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, *117*(4), 500.

Howarth, J., Keynes, R., & Ritchie, J. (1968). The origin of the initial heat associated with a single impulse in mammalian non-myelinated nerve fibres. *The Journal of physiology*, *194*(3), 745.

Kandel, E. R. (2000). Principles of neural science.

Mareš, J. J., Špička, V., & Hubík, P. (2023). On physical processes controlling nerve signalling. *The European Physical Journal Special Topics*, *232*(20), 3561-3576.

Miller, K. (2002). The nature of sites of general anaesthetic action. *British journal of anaesthesia*, *89*(1), 17-31.

Ozsahin, D. U., Ceesay, B., Baber, M. Z., Ahmed, N., Raza, A., Rafiq, M., Ahmad, H., Awwad, F. A., & Ismail, E. A. (2024). Multiwaves, breathers, lump and other solutions for the Heimburg model in biomembranes and nerves. *Scientific Reports*, *14*(1), 10180.

Pavón-Torres, O., Agüero-Granados, M., & Maguiña-Palma, M. (2024). Interaction and adiabatic evolution of orthodromic and antidromic impulses in the axoplasmic fluid. *Physics Letters A*, *521*, 129740.

Peets, T., Tamm, K., & Engelbrecht, J. (2023). On mathematical modeling of the propagation of a wave ensemble within an individual axon. *Frontiers in cellular neuroscience*, *17*, 1222785.

Purves, D., Augustine, G. J., Groh, J. M., Huettel, S. A., LaMantia, A.-S., & White, L. (2025). *Neurosciences*. De Boeck Supérieur.

Ritchie, J., & Keynes, R. (1985). The production and absorption of heat associated with electrical activity in nerve and electric organ. *Quarterly Reviews of Biophysics*, *18*(4), 451-476.

Taniuti, T., & Nishihara, K. (1983). Nonlinear waves. *Boston: Pitman*.

Tasaki, I. (1988). A macromolecular approach to excitation phenomena: mechanical and thermal changes in nerve during excitation. *Physiological chemistry and physics and medical NMR*, *20*(4), 251-268.

Tasaki, I. (1949). Collision of two nerve impulses in the nerve fibre. *Biochimica et biophysica acta*, *3*, 494-497.

Tasaki, I., Watanabe, A., Sandlin, R., & Carnay, L. (1968). Changes in fluorescence, turbidity, and birefringence associated with nerve excitation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *61*(3), 883-888.

Vargas, E. V., Ludu, A., Hustert, R., Gumrich, P., Jackson, A. D., & Heimburg, T. (2011). Periodic solutions and refractory periods in the soliton theory for nerves and the locust femoral nerve. *Biophysical Chemistry*, *153*(2-3), 159-167.

Wazwaz, A.-M. (2006). Peakons, kinks, compactons and solitary patterns solutions for a family of Camassa–Holm equations by using new hyperbolic schemes. *Applied mathematics and computation*, *182*(1), 412-424.

Anexos

Glosario

Aferencia: Es la transmisión de impulsos nerviosos desde los órganos receptores (en la periferia) hacia el sistema nervioso central.

Astrocitos: Forman parte de la macroglía y son los más numerosos. Tienen varias funciones que van desde aportar nutrientes a la célula, apoyo en la formación de barreras hemato encefálicas, captación del exceso de potasio en el espacio extracelular, se encargan del sobrante de los neurotransmisores tras ser liberados, y en general su función principal es células sostén.

Axón: Es una fibra nerviosa, se extiende desde el soma y consiste en un eje cilíndrico (axoplasma) rodeado por una vaina de mielina, por fuera de la cual hay una membrana delgada (neurilema)

Canales iónicos: Son proteínas que permiten sólo a cierto tipo de iones que atraviesen la membrana en la dirección de sus gradientes de concentración. En este caso hallamos: canales de Sodio, canales de Potasio, canales de Calcio y canales de Cloruro.

Célula: Unidad fundamental de todos los organismos vivos

Célula diana: Es una célula sobre la que actúa una señal biológica, y en cualquier caso debe poseer los mecanismos para detectar dicha señal, ejemplos de ella serían células nerviosas, ganglios autónomos, células de los músculos, glándulas.

Células de Schwann: Forman parte de la macroglía, se hallan en el sistema nervioso periférico, solo pueden envolver un único espacio internodal de un solo axón por célula.

Células de Sostén (Neuroglia): Células que no pueden efectuar señalamiento eléctrico, pero, tienen varias funciones esenciales en el encéfalo tanto para dotar de estabilidad y desarrollo.

Células Gliales: Son tejidos nerviosos especializados en apoyo y protección del resto de células nerviosas, son más numerosas que las neuronas en el encéfalo (en relación 3:1) Y dentro de sus operaciones se encuentran:

- Mantener el medio iónico de las células nerviosas
- Modulan la velocidad de propagación de las señales nerviosas
- Modulan la acción sináptica al controlar la captación de neurotransmisores en la hendidura sináptica
- Proporcionan andamiaje para ciertos aspectos del desarrollo neuronal
- Ayudan en la recuperación neuronal

Y se clasifican en dos conjuntos: microglía y macroglía.

Células nerviosas (Neuronas): Células especializadas en el señalamiento eléctrico en largas distancias.

Cuerpo Celular o Soma: Es el centro metabólico de la célula. Contiene al núcleo, donde se almacenan los genes, y al retículo endoplasmático donde se sintetizan las proteínas que la célula necesita. Y es a partir del soma donde se extienden tanto las dendritas como un único axón.

Dendrita: Es una prolongación corta y ramificada del soma. Son receptores de impulsos nerviosos y señales químicas provenientes de otras neuronas. Son ricas en ribosomas y proteínas específicas del citoesqueleto, que se refleja en su función de recepción e integración de información.

Interneuronas: Son células de circuitos locales, solo participan en la base de distancias cortas sobre las que se extienden sus axones.

Microglía: Se compone por fagocitos que se movilizan después de una lesión, enfermedad o infección, y su función es de eliminar restos celulares de dichos sitos para impedir o no la muerte celular.

Neuronas aferentes: Células nerviosas que transportan información hacia el encéfalo o médula espinal (o bien dentro de ellos)

Neuronas eferentes: Células nerviosas que transportan información fuera del sistema nervioso central

Oligodendrocitos: Forman parte de la macroglía, están limitados al sistema nervioso central (encéfalo y médula osea), y envuelven un promedio de quince espacios internodales axónicos.

Potencial de acción: Fenómeno eléctrico que transporta señales por los circuitos de neuronas, es un cambio transitorio de potencial eléctrico que produce a través de la membrana de un nervio durante el paso de un impulso nervioso. En consecuencia, se tiene una onda autorregenerada de actividad eléctrica que se propaga desde un punto de inicio (botón axónico) hacia la terminación del axón donde hace el contacto sináptico (botones terminales).

Potencial Receptor: Es un cambio local del potencial de la membrana producido directamente por un estímulo como lo serían:

- luz en un foto receptor
- presión en un mecano receptor
- una molécula odorante en una neurona olfativa
- calor en un termo receptor

Su amplitud está en términos de la magnitud del estímulo sináptico; y por lo general tiene efectos despolarizantes.

Potencial Sináptico: Cambios en el potencial debido a señales eléctricas ocasionadas por transmisiones locales de información de una neurona a otra. Su amplitud depende de cuánta cantidad de transmisor químico se libera (neurotransmisor), y su duración de cuánto tiempo esté activo el transmisor. En este caso el efecto que tenga puede ser ya sea excitador o inhibidor en base al tipo de molécula receptora que se activa con el neurotransmisor.

Terminaciones presinápticas: Son las ramas ya en división del axón justo al final de su extensión, y que se dividen para formar los lugares de comunicación con otras neuronas o células diana.

Transmisión sináptica: Fenómeno químico y eléctrico por el cual la información codificada por algún potencial se transmite en los contactos sinápticos (sinapsis) hacia la célula siguiente.

Transportadores activos: Son proteínas que cambian de conformación para mover iones hacia el interior o exterior de la célula en contra de sus gradientes de concentración y consume ATP para poder lograrlo. Como lo sería la bomba Sodio-Potasio