2.5 Distribución de probabilidad binomial, de poisson, normal, exponencial

La distribución normal

De entre todas las distribuciones continuas tiene especial relevancia la distribución Normal o de Gauss. Aparece frecuentemente en las situaciones más variadas.

Las variables que presentan una distribución Normal tienen características comunes tales como la acumulación de valores en torno al valor de la media, la simetría en la distribución de los valores y escasos valores alejados de la media, por ejemplo:

- Caracteres morfológicos de individuos: altura, peso, número de pie, tamaño del palmo, etc.

- Carácterísticas de la mayoría de los productos de consumo: duración de las bombillas, resistencia a la rotura de muebles o de piezas, duración de los electrodomésticos, etc.

- Calificaciones obtenidas en cursos, asignaturas y exámenes.

Se dice que una variable aleatoria continua sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, y se escribe $X \to N(\mu,\sigma)$, cuando tiene la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La gráfica de esta función de densidad tiene forma campaniforme, y se denomina **"campana de Gauss".**

Las Propiedades de la función f(x) se aprecian en su gráfica y son:

- f(x) tiene por dominio $(-\infty,+\infty)$.

- f(x) es continua en su dominio.

- f(x) es simétrica respecto a la recta x=μ.
- Ffx) tiene un máximo absoluto en $(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$
- f(x) tiene dos puntos de inflexión en x= μ+σ y x=μ-σ.

- f(x) es siempre positiva y asintótica con respecto al eje OX.

- La gráfica de la función de densidad f(x) se llama campana de Gauss .

Para el cálculo de probabilidades usamos la función de distribución:

$$F(X) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt.$$

Para x=a este valor representa la probabilidad de que la v.a.X tome valores menores o iguales que a y graficamente representa el área encerrada bajo la curva, el eje OX y la recta x=a.

Puede observarse la dificultad de la integral, es por ello y dado lo habitual que es el uso de esta distribución, que se utiliza una tabla ya confeccionada para el calculo de probabilidades.

Pero como bien estarás pensando es imposible realizar una tabla para cada valor de μ y de σ que pueden tomar los parámetros en la distribución.

Las curvas de las diferentes funciones de densidad son en realidad la misma curva variando su máximo y su curvatura en función de μ y σ, por esto el área encerrada bajo la curva es siempre la misma (como función de densidad que es vale 1) aunque repartida de forma diferente.

Los anteriores argumentos justifican el uso de la N(0,1) como distribución estandar, para la cual existe la tabla de valores de la función de distribución. A partir de ella y mediante un cambio de variable, que denominamos tipificación podemos calcular las probabilidades para cualquier distribución N(μ,σ)

Uso de tablas

La distribución N(0,1), recibe el nombre de distribución **Normal reducida o estandar**. Tiene de media μ =0 y de desviación típica σ = 1. Su función de densidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	07019	07054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678
1,9	0,9713	0,9179	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744

Las tablas nos ofrecen el valor de $F(z_0)= P(Z\leq z_0)$ para valores de z_0 de 0 a 4 . La primera columna corresponde a valores desde 0,0 a 3,9 y el segundo decimal se completa con los valores de la primera fila que van desde 0,00 a 0,09. En la intersección de la fila y la columna correspondiente se encuentra el valor de dicha probabilidad.

Caso 1: $P(Z\leq 1{,}56) = 0{,}9406$

Buscamos el valor en la intersección de la fila de 1,5 y la columna 0,06.
La probabilidad pedida es el área sombreada

Caso 2: $P(Z\geq 1{,}56) = 1 - P(Z\leq 1{,}56) = 1 - 0{,}9406 = 0{,}0594$

Tenemos en cuenta que el area total encerrada por la curva es 1 y procedemos por "paso al contrario"

Caso 3: $P(Z\leq -1{,}56)$ Habrás observado que en tabla sólo aparecen valores positivos de la variable. Tenemos en cuenta que la función y sus valores son simétricos y por tanto

$P(Z\leq -1{,}56)=P(Z\geq 1{,}56) = 1 - P(Z\leq 1{,}56)=1- 0{,}9406 = 0{,}0594$

Caso 4: $P(Z\geq - 1{,}56) = P(Z\leq 1{,}56) = 0{,}9406$

Utilizamos en nuestro razonamiento la simetria de la función

Caso 5: $P(0{,}48\leq z \leq 1{,}56) =P(Z\leq 1{,}56)-P(z\leq 0{,}48) = 0{,}9406 - 0{,}6844 = 0{,}2562$

Caso 6: $P(- 0{,}48 \leq Z\leq 1{,}56) = P(Z\leq 1{,}56) - P(Z\leq - 0{,}48) = P(Z\leq 1{,}56) - P(Z\geq 0{,}48) =P(Z\leq 1{,}56) - (1- P(Z\leq 0{,}48)) =P(Z\leq 1{,}56) + P(Z\leq 0{,}48) -1 = 0.9406 + 0{,}6844 - 1 = 0{,}625$

En ocasiones el problema planteado será el inverso, conocida la probabilidad calcular los valores de la variable.
Caso 7: Hallar z_0 si $P(Z\leq z_0) = 0{,}9410$

El valor no se encuentra en la tabla, pero el más aproximado es 0,9406.
Como 0,9406 esta en la intersección de la fila 1,5 y la columna 0,06 se trata de $z_0 = 1{,}56$

Caso 8: Hallar z_0 si $P(Z\leq z_0) = 0{,}0594$

Como 0,0594 no esta en la tabla, tampoco uno aproximado, deducimos que z_0 corresponde a un valor negativo y recordamos $P(Z\leq -z_0) = 1 - P(Z\leq z_0)$ por tanto $P(Z\leq -z_0) = 1- 0{,}0594 = 0{,}9406$ que si aparece en la tabla como $-z_0 = - 1{,}56$.

Caso 9: Halla z_0 si $P(0{,}48 \leq Z \leq z_0) = 0{,}2562$

Como $P(0{,}48 \leq Z \leq z_0) = P(Z\leq z_0) - P(Z\leq 0{,}48) = 0{,}2562$ buscando en la tabla $P(Z\leq z_0) - 0{,}6844 = 0{,}2562$ entonces despejando $P(Z\leq z_z) = 0{,}2562 + 0{,}6844 = 0{,}9406$

Tenemos que $P(Z \leq z_z) = 0,9406$

Distribución Binomial.

Se tiene un número fijo de pruebas n. Con las siguientes características:

- Cada prueba tiene sólo dos posibles resultados: genéricamente los llamamos éxito y fracaso. Los denotamos con 1 (éxito) y 0 (fracaso).
- El resultado de cada prueba es independiente del resultado de las demás pruebas.
- La probabilidad de éxito no cambia de una prueba a otra.
- Nos interesa sólo el número total de éxitos X y nó el orden en que hayan ocurrido.

Cuando se cumplen las condiciones anteriores X tiene la distribución binomial con parámetros n y p, donde n es el número de intentos y p la probabilidad de obtener un éxito. Los valores posibles son desde cero hasta ene: {0, 1, 2,..., n}. La función de probabilidad es:

f(k) = P(X=k) = nCk pkq(n-k), para k en {0,1,2,...,n}

donde me he visto obligado por la tipografía, a usar el símbolo poco usual nCk para denotar las combinaciones de k objetos tomados de un total de n:

nCk = [n!] / [k!(n-k)!]

además, la letra q representa la probabilidad de fracaso q = 1-p.

La media de la binomial es: E(X) = np y la varianza: var(X) = npq.

EJEMPLO. La probabilidad de que una cierta clase de componente pase con éxito una determinada prueba de impacto es 3/4. Encuentre la probabilidad de que exactamente 2 de los 4 componentes que se prueban pasen la prueba.

SOLUCION Suponiendo que las pruebas son independientes y que p=3/4 para cada una de ellas, se obtiene,

$$P(X=2) = \frac{4!}{2!\ 2!} \cdot \frac{3^2}{4^4}$$

$$= \frac{27}{128}$$

Con frecuencia el interés se centra en problemas donde es necesario encontrar P(X < r) o P(a <= X <= b). Por fortuna, se dispone de las sumas binomiales B(r;n,p) que se dan en el anexo (Tabla A.1) para n = 1,2, ..., 20, y valores seleccionados de p de 0.1 a 0.9. En el siguiente Problema se ilustra el uso de la tabla mencionada.

Parámetros de la Distribución Binomial

Media	$\mu = np$
Varianza	$\sigma^2 = npq$
Desv.Típica	$\sigma = \sqrt{npq}$

Función de Distribución de la v.a. Binomial

$$F(x_i) = p(X \leq x_i) = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

siendo k el mayor número entero menor o igual a x_i.

Esta función de distribución proporciona, para cada número real x_i, la probabilidad de que la variable X tome valores menores o iguales que x_i.

El cálculo de las $F(x) = p(X \leq x)$ puede resultar laborioso, por ello se han construido tablas para algunos valores de *n* y *p* que nos facilitan el trabajo.

Distribución Poisson.

Este modelo se llama así para honrar la memoria de otro gran probabilista y matemático. La v.a. de Poisson se refiere a sucesos en un intervalo de tiempo o en un área específica. El intervalo de tiempo puede ser de cualquier duración, un minuto, una hora, un día, un año. Algunos ejemplos de situaciones modeladas con el modelo de Poisson son: el número de fallas de una máquina en una semana, el número juegos de algún deporte pospuestos por lluvia en una temporada.

Cuando se trata de superficies, los ejemplos son: el número de ratas en un terreno, el número de errores de mecanografía por página, el número de defectos por centímetro cuadrado.

Para que una v.a. sea de Poisson, se requiere que se satisfagan 3 hipótesis (que suelen llamarse también postulados del proceso de Poisson). Usted puede consultar estos postulados en la página 136 de su texto.

En los problemas que resolvemos en este curso, el hecho de que el modelo a utilizar sea el de Poisson, forma parte del enunciado del problema.

La v.a. de Poisson tiene un solo parámetro que es mu = lambdat donde t es la longitud del intervalo o la superficie de la región y lambda es la tasa de ocurrencia de eventos por unidad de medida.

La imagen de la v.a. de Poisson es {0, 1, 2,. . .} es decir todos los enteros no negativos. La función de probabilidad está dada por:

$P(X = k) = \exp(-\mu)[\mu(k) / k!]; k = 0, 1, 2, . . .$

La media y la varianza son:

$E(X) = \mu$, $var(X) = \mu$.

PROBLEMA. Si el promedio de llamadas por día hábil (de ocho horas) que se reciben en un banco es 96. ¿Cuál es la probabilidad de que en una hora se reciban exactamente 14?

SOLUCION Aquí, $\mu = 12$ y

$P(X = 14) = e(-12)[12(14) / 14!] = 0.0905$
En la misma situación ¿Cuál es la probabilidad de tener más de 16 llamadas en una hora?
Ahora queremos:
$P(X > 16) = 1 - P(X <= 16)$
esta última probabilidad la leemos en la tabla de Poisson y tenemos:
$P(X > 16) = 1 - 0.8987 = 0.1013$
[Revise la tabla y asegúrese que la leí bien]

Distribución normal.

La Normal Estándar

El modelo normal estándar es el de una variable aleatoria continua cuya imagen son todos los números reales.

La densidad de la normal estándar es:

$f(z) = (2*)-1/2exp(-z2 / 2)$

Esta función no tiene una integral elemental de modo que se requiere una tabla especial para conocer los valores de la probabilidad de una variable normal. La tabla da probabilidades para

$F(t) = P(Z < t)$

La variable aleatoria normal estándar tiene propiedades importantes:

- La probabilidad está concentrada cerca de cero. Se puede ver, usando la tabla, que la probabilidad de un intervalo cercano a cero es mayor que la de un intervalo del mismo ancho pero alejado de cero. En el salón hacemos varios ejercicios de cálculo de probabilidades que nos convencen de este hecho.

- La probabilidad está simétricamente distribuida alrededor del cero. Haciendo cuentas con la misma tabla se ve que la $F(a) + F(-a) = 1$, para cualquier valor de a. Esto nos lleva a concluir la simetría de la distribución.
- Para algunos cálculos de probabilidad de una normal es conveniente considerar el eje real partido en cuatro pedazos,
    1. antes de -a,
    2. entre -a y 0,
    3. entre 0 y a,
    4. después de a.

Las probabilidades de (1) y (4) son iguales; las de (2) y (4) son iguales; las de (1) y (2) sumadas dan 0.5; las de (3) y (4) suman 0.5.

Use la tabla para calcular: $P(Z < 1.45)$, $P(Z > -0.92)$, $P(-0.53 < Z < 1.23)$. En la tarea tiene Ud. muchos ejercicios más de cálculo de diferentes probabilidades en el modelo normal.

Esta variable aleatoria, debido a la forma de la densidad, tiene un valor central (el cero) que ``atrae'' los valores. La unidad de medida de esta variable es el uno.

Usos de la normal. La normal no estándar

En los casos en que este modelo se usa, generalmente:

- el valor central o promedio vale mu (distinto de cero)
- la unidad de medida o desviación estándar es sigma (distinta de uno).

Para calcular en este caso no estándar, es preciso hacer una transformación que se llama estandarización. Esta estandarización es un codificación de los valores.

La fórmula para estandarizar es:

Z = (X - mu) / sigma

La forma de usar esta codificación la ejemplificamos a continuación:

PROBLEMA Calcular el valor aproximado de f(4), para una n=8 y p=0.5.

SOLUCION

f(4) = p(3.5 < x < 4.5) = p((3.5-µ)/ð<Z< ="p(-.35" font +.35)=".2737" z ð)="p((3.5-4)/2<z

Esta distribución es frecuentemente utilizada en las aplicaciones estadísticas. Su propio nombre indica su extendida utilización, justificada por la frecuencia o normalidad con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en su comportamiento a esta distribución.

Muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene forma de campana.

En otras ocasiones, al considerar distribuciones binomiales, tipo B(n,p), para un mismo valor de *p* y valores de *n* cada vez mayores, se ve que sus polígonos de frecuencias se aproximan a una curva en "forma de campana".

En resumen, la importancia de la distribución normal se debe principalmente a que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal

- *Caracteres morfológicos* de individuos (personas, animales, plantas,...) de una especie, p.ejm. tallas, pesos, envergaduras, diámetros, perímetros,...
- *Caracteres fisiológicos*, por ejemplo: efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- *Caracteres sociológicos*, por ejemplo: consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos, puntuaciones de examen.
- *Caracteres psicológicos*, por ejemplo: cociente intelectual, grado de adaptación a un medio,...
- *Errores* cometidos al medir ciertas magnitudes.
- *Valores estadísticos* muestrales, por ejemplo: la media.
- *Otras distribuciones* como la binomial o la de Poisson son aproximaciones normales, ...

Distribución de Poisson

En teoría de probabilidad y estadística, la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta. Expresa la probabilidad de un número de eventos ocurriendo en un tiempo fijo si estos eventos ocurren con una tasa media conocida, y son independientes del tiempo desde el último evento.

Su distribución de probabilidad está dada por:

$$f(k;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

donde;

- *e* es el base del logaritmo natural (e = 2.71828...),
- k! es el factorial de k,
- λ es un número real positivo, equivalente al número esperado de ocurrencias

durante un intervalo dado. Por ejemplo, si los eventos ocurren de media cada 4 minutos, y estás interesado en el número de eventos ocurriendo en un intervalo de 10 minutos, usarías como modelo una distribución de Poisson con λ = 2.5.

Por ejemplo, si 2% de los libros encuadernados en cierto taller tiene encuadernación defectuosa, obtener la probabilidad de que 5 de 400 libros encuadernados en este taller tengan encuadernaciones defectuosas. $k = 5, \lambda = 400(0.02) = 8$

$$P(5;8) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0.093$$

Su media y su varianza son: $\mu = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$

Propiedades Reproductivas

Dadas n variables aleatorias X_i, tales que:

- todas tienen una distribución de Poisson
- cada una tiene su propio parámetro λ_i (es decir, los lambda no necesariamente tienen que ser iguales)
- son todas independientes entre sí
- se toma la variable aleatoria $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- se toma $\lambda_Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Entonces:

La variable aleatoria Y tiene una distribución Poisson, con parámetro λ_Y

Es decir: Dadas n variables de Poisson cualesquiera independientes, su suma es también una variable de Poisson, cuyo parámetro vale la suma de los parámetros de las variables originales.