ANALISIS COMBINATORIO

OBJETIVOS:

- proporcionar los fundamentos de las probabilidades y su aplicación para procesos estadísticos

- Utilizar las propiedades conjuntistas para el planteamiento del problema.

ANALISIS COMBINATORIO :

Es parte de la matemática que estudia sistemáticamente las distintas Ordenaciones de los diferentes elementos de un conjunto dado cundo se forman grupos de un grado determinado.

ANALISIS COMBINATORIO

PRINCIPIO FUNDAMENTAL :

“ Si cierta selección de ordenación de objetivos puede realizarse de “ m ” maneras diferentes y otra selección puede efectuarse de “ n “ maneras distintas , ambas selecciones , se pueden producir de “ m x n “ maneras diferentes.

Ejemplo 1 :

Si un partido político tiene 3 candidatos a la presidencia y 5 candidatos a la vicepresidencia , El número de parejas distintas de candidatos para ambos cargos se formaran de 3 x 5 = 15 formas.

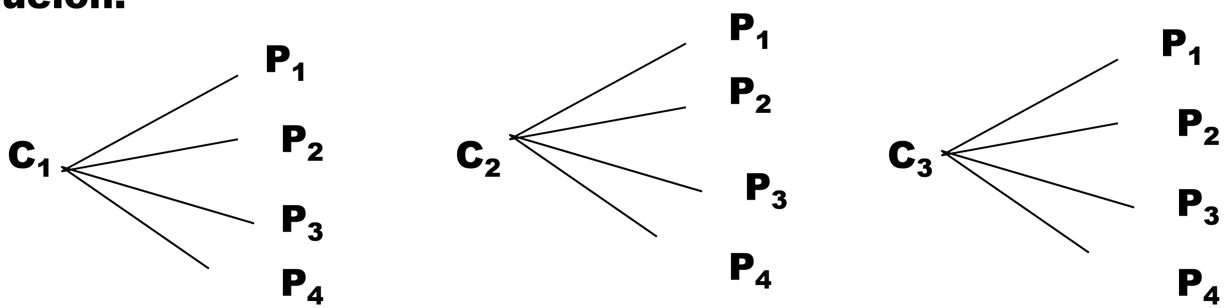
ANALISIS COMBINATORIO

PRINCIPIO FUNDAMENTAL :

Ejemplo 2 :

Si Carlos tiene 3 camisas de vestir y 4 pantalones ¿ Cuáles y cuántos serian las diferentes formas que tendrá para vestirse con dichas prendas?

Solución:



4 formas **4 formas** **4 formas**

Luego tendremos : $3 \times 4 = 12$ formas de vestirse.

ANALISIS COMBINATORIO

FACTORIAL DE UN NÚMERO:

Dado un número natural " n" ; el factorial de n, denotado por :

n ! Se leen factorial de n y se define así:

n ! = n (n – 1) (n – 2) (n – 3) ....x3 x2 x 1

Ejemplo:

3 ! = 3 x 2 x 1

6 ! =6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Nota :

Decir factorial de 0 o factorial de 1 ; no tiene sentido ; se considera que 0! = 1

ANALISIS COMBINATORIO

ORDENACIÓN DE ELEMENTOS:

Se pueden ordenar de diferentes clases:

Clases de ordenación:

a. **Por el número de elementos:**

- **Monaria : 1 elemento**
- **Binaria : 2 elementos**
- **Ternaria : 3 elementos**

b. **Por la disposición de sus elementos :**

- **Lineal : Sus elementos están uno a continuación de otros**
- **Circular : Sus elementos se disponen en un contorno cerrado.**

ANALISIS COMBINATORIO

ORDENACIÓN DE ELEMENTOS:

Clases de ordenación:

c. **Por la clase de elementos :**

- **Sin repetición : Elementos distintos**
- **Con repetición : Se repite algún elemento**

d. **Por la forma de ordenación :**

- **variaciones**
- **Permutaciones**
- **Combinaciones.**

ANALISIS COMBINATORIO

PERMUTACIONES:

Sea " n " el número de elementos de un conjunto A y " r " un número natural donde $0 < r \leq n$; las permutaciones se definen como el número de ordenaciones diferentes que se pueden formar con los elementos del conjunto A , tomando en grupos de " n " en " n " o de " r " en " r " pueden ser sin repetición o con repetición.

ANALISIS COMBINATORIO

Permutaciones sin repetición:

a) De " n " elementos diferentes tomados todos a la vez :

Si " n " es el número de elementos de un conjunto A; el número de permutaciones que pueden hacerse con todos los " n " elementos se obtiene así:

$$\boxed{P(n,n) = n!}$$

Ejemplo

De un conjunto A = { x ,y , z}. Hallar el número de permutaciones que pueden formarse con todo los elementos de A.

Solución:

Como n = 3 , el número de permutaciones sin repetición será:

$$P(3,3) = 3! = 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 6$$

x y z yxz zxy

xzy yzx zyx

ANALISIS COMBINATORIO

Permutaciones sin repetición:

b) De " n " elementos diferentes tomados de " r " en " r " con r < n

De " n " elementos diferentes , el número de permutaciones diferentes sin repetición tomados de " r " en " r " está dado por:

$$\boxed{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Ejemplo

Si A = { a , b, c, d} . Cuantas ordenaciones diferentes pueden formarse tomando grupos de a 2 ?

Solución:

n = 4 ; r = 2 como: $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$P(4,2) = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

ANALISIS COMBINATORIO

Ejemplo 1:

Supongamos que Alberto (A) , Beatriz (B) , Carlos (C) y Daniel (D) se quieren Sentar en dos sillas disponibles. ¿de cuántas maneras diferentes se puede ubicar ?

Silla I	**A**	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**C**	**C**	**C**	**D**	**D**	**D**
Silla II	**B**	**C**	**D**	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**D**	**A**	**B**	**C**

12 maneras diferentes

$$P_n^m = \frac{m!}{(m-n)!} = P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4x3x2!}{2!} = 4x3 = 12$$

ANALISIS COMBINATORIO

Ejemplo 2 :

De un conjunto de 5 libros , ¿Cuántos grupos de a 3 se podrán formar?

Solución.

Como m = 5
n = 3

$$P_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Se tiene que :

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}{2 \text{ x } 1} = 60$$

Ejemplo 3 :

Se tiene 5 libros de distintas materias . ¿De cuántos modos diferentes podrán disponerse?

Solución.

m = 5
n = 5

$$\Rightarrow P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 120$$

ANALISIS COMBINATORIO

Permutaciones sin repetición:

Ejemplo

Si A = { a , b, c, d} . Cuantas ordenaciones diferentes pueden formarse tomando grupos de a 2 ?

Estas ordenaciones se pueden efectuar así: Para A= { a , b, c, d} ordenando en grupos de a 2 serán:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Nota:

1. **Las permutaciones son variaciones o arreglos de "m" elementos tomados de " m " en " m "**
2. **Las permutaciones se caracterizan porque intervienen todos , y los grupos difieren solo en el orden en que están agrupados.**

ANALISIS COMBINATORIO

Permutaciones con repetición:

a) De " n " elementos diferentes tomados todos a la vez

$$\boxed{P(n,n) = n^n}$$

Ejemplo

Cuantas permutaciones diferentes se pueden formar con los elementos de { x , y , z} tomados todos a l a vez y con repetición.

Solución.

A = { x , y , z} ; n = 3 y $P(n,n) = n^n$

$$P(3,3) = 3^3 = 27$$

ANALISIS COMBINATORIO

Permutaciones con repetición:

b) De " n " elementos diferentes tomados de " r " en " r " (r < n) y con repetición.

Esta dado por:

$$\boxed{P(n,r) = n^r}$$

Ejemplo

Cuántos números diferentes de 2 cifras pueden formarse con los dígitos 1 , 2 , 3 , 4 , si se permite la repetición.

Solución:

n = 4 ; r = 2 ; $P(n,r) = n^r$

$$P(4,2) = 4^2 = 16$$

11	21	31	41
12	22	32	42
13	23	33	43
14	24	34	44

ANALISIS COMBINATORIO

LAS COMBINACIONES :

Las combinaciones son las diferentes grupos de "n" elementos que se pueden formar tomándolos de " r " en " r " , donde 0 < r $\leq$ n ; de modo que cada grupo difiere del otro en por lo menos un elemento.

En las combinaciones sólo se tiene en cuenta los elementos que intervienen en ellas y no en el orden en que están agrupados la fórmula correspondiente es:

$$\boxed{C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

También se denota así : $\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

ANALISIS COMBINATORIO

LAS COMBINACIONES :

Ejemplo:

De un grupo de 10 libros ¿Cuántas selecciones de 4 libros se pueden hacer?

Solución:

n = 10 ; r = 4

Como: $$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ **Se tiene:**

$$C(10,4) = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!}$$

$$\frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6!}{4!\,.\,6!} = \frac{10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7}{4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x} 1} = 210$$

ANALISIS COMBINATORIO

LAS COMBINACIONES :

Ejemplo:

En una clínica hay 7 médicos y 12 enfermeras , ¿Cuántos grupos de trabajo conformado por 3 médicos y 5 enfermeras pueden formarse?

Solución:

a. De un total de 7 médicos , formaremos grupos de a 3

n = 7 ; r = 3

$$C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!.4!} = \frac{7 \text{ x } 6 \text{ x } 5}{3 \text{ x } 2 \text{ x } 1} = 35$$

b. De un total de 12 enfermeras, formamos grupos de a 5

n = 12 ; r = 5

$$C(12,5) = \frac{12!}{5!.7!} = \frac{12 x 11 x 10 x 9 \ x 8}{5 x 4 x 3 x 2 x 1} = 792$$

Luego; se podrán formar un total de 792 x 35 = 27 720 grupos diferentes.

ANALISIS COMBINATORIO

PROPIEDADES PRINCIPALES DE LAS COMBINACIONES :

1. $C_{(n,r)} = C_r^n = \binom{n}{r}$

2. $C_{(n,r)} = \binom{n}{r} = 1, \ \text{si } r = n$

3. $C_{(n,1)} = \binom{n}{1} = n$

4. $C_{(n,n-r)} = \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

5. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

ANALISIS COMBINATORIO

Ejemplo

Hallar el valor de “m” , si $\binom{m}{3} = 12m$

Solución:

$$\binom{m}{3} = 12m \Rightarrow \frac{m!}{3!\,(m-3)!} = 12m$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)!}{3!\,(m-3)!} = 12m \Rightarrow \frac{m(m-1)(m-2)}{3x2} = 12m$$

$$(m-1)(m-2) = 72 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 72$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m - 70 = 0 \Rightarrow (m-10)\ (m+7) = 0 \Rightarrow m = 10$$

ANALISIS COMBINATORIO

Ejemplo

Un estudiante tiene que contestar 8 de 10 preguntas en un examen.

a. ¿ De cuántas maneras puede el estudiante escoger las 8 preguntas ?

b. Si las 3 primeras son obligatorias , ¿ de cuantas maneras puede escoger las preguntas?

C. Si tiene que contestar 4 de las 5 primeras ¿ de cuántas formas puede hacerlo?

Solución:

a. Como interesa subconjuntos de 8 preguntas de un conjunto de 10 preguntas sin importar el orden estaría dado por:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(10,8) = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10 \text{ x } 9\text{x } 8!}{8! \text{ x } 2\text{x}1} = 45 \text{ formas}$$

ANALISIS COMBINATORIO

Solución:

b. Puesto que las 3 primeras son obligatorias ; las 5 restantes tendrá que escoger de las 7 preguntas sobrantes.

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(7,5) = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \text{ x } 6 \text{ x } 5!}{5! \text{ x } 2\text{x}1} = 21 \text{ formas}$$

c. Si tiene que contestar 4 de las 5 primeras lo haría:

$$C(5,4) = \frac{5!}{4!\,.\,1!} = 5 \text{ maneras}$$

Las 4 preguntas restantes seleccionará de las 5 preguntas finales.

$$C(5,4) = 5 \text{ maneras}$$

Luego : C(5 , 4) . C(5 , 4) = 5 x 5 = 25

ANALISIS COMBINATORIO

Ejemplo

Encontrar el número total de enteros positivos que pueden formarse utilizando los dígitos { 1 , 2 , 3 , 4 } si ningún dígito ha de repetirse cuando se forma un número:

Solución:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(4,1) = \frac{4!}{3!} = 4$$

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

$$P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x} 1 = 24$$

$$P(4,4) = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x} 1 = 24$$

El número de enteros positivos diferentes es :

4 + 12 + 24 + 24 = 64

ANALISIS COMBINATORIO

Problemas

1. **En una carrera de caballos, participan 6 de estos ejemplares. ¿De cuántas maneras podrán ocupar los primeros 3 puestos ?.**

A) 120 B) 180 C) 60 D) 240 E) 20

Solución:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6x5x4x3!}{3!} = 120$$

ANALISIS COMBINATORIO

Problemas

2. **Un entrenador de fútbol tiene 16 jugadores . De cuántas maneras podrá formar su equipo . Si cualquiera de los jugadores , puede desempeñarse en cualquier puesto? Además se sabe que un jugador no puede jugar por estar lesionado.**

A) 1356 **B) 1365** **C) 1500** **D) 3003** **E) 1615**

Solución:

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(15,11)=\frac{15!}{11!\,4!}=\frac{15x14x13x12x11!}{11!\,x4x3x2x1}=1365$$

ANALISIS COMBINATORIO

Problemas

3. **En un mercado venden 6 tipos diferentes de frutas y 8 tipos diferentes de verduras . ¿ De cuántas maneras una señora podrá comprar 3 tipos diferentes de frutas y dos tipos de verduras?**

A) 280 **B) 48** **C) 560** **D) 140** **E) 96**

Solución:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6x5x4x3!}{3!\ x3x2x1} = 20$$

$$C(8,2) = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8x7x6!}{6!\ x2x1} = 28$$

$$\text{Luego.} \quad 20 \text{ x } 28 = 560$$

ANALISIS COMBINATORIO

Problemas

4. **Se debe formar una comisión de tres profesionales : un abogado , un Ingeniero y un médico ¿ Cuántas posibilidades de formar dicha comisión hay ? . Si se cuentan con tres abogados , cuatro ingenieros y seis médicos.**

A) 13 **B) 72** **C) 48** **D) 36** **E) 18**

Solución:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(3,1)\ .C(4,1).C(6,1) = \frac{3!}{1!\,2!}\cdot\frac{4!}{1!\,3!}\cdot\frac{6!}{1!\,5!} = 3x4x6 = 72$$

ANALISIS COMBINATORIO

Problemas

5. Un equipo de Investigación consta de 10 integrantes ; de ellos , 4 son Biólogos. ¿ Cuántos grupos de 3 miembros se pueden formar de manera que se considere a por lo menos un Biólogo?

A) 100　B) 140　C) 85　D) 220　E) 240

Solución:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10x9x8x7!}{3x2x1x7!} = 120$$

El número_de grupos de 3 miembros en los que no hay Biólogo :

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6x5x4x3!}{3x2x1x3!} = 20$$

El grupo solicitado es :　120 - 20 = 100

PROBABILIDADES

EXPERIMENTO ALEATORIO:

Un experimento aleatorio o estadístico es cualquier experimento u operación cuyo resultado no puede predecirse con exactitud antes de realizarse el experimento.

Ejemplos:

- **Lanzar una moneda y observar si sale cara.**
- **Lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior.**
- **De un lote de bombillas de luz , extraer uno que sea defectuoso.**

PROBABILIDADES

ESPACIO MUESTRAL:

Es el conjunto formado por todo los resultados posibles del experimento aleatorio. Denotaremos por la notación Ω (omega) o con la letra S

Ejemplos:

1. **Para el lanzamiento de un dado, el espacio muestral es:**
   $\Omega = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$
   Porque un dado tiene 6 caras y de lanzarlo cualquiera de ellas puede quedar arriba.

2. **En el lanzamiento de una moneda , el espacio muestral es:**
   $\Omega = \{$ **cara , sello** $\}$

PROBABILIDADES

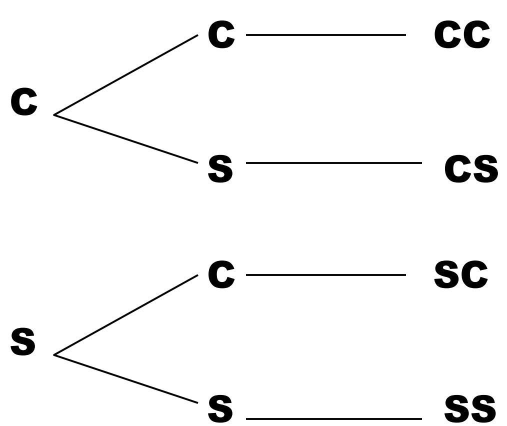
ESPACIO MUESTRAL:

Ejemplos:

3. **En el lanzamiento de una moneda dos veces , su espacio muestral es:**

   Ω **= { CC , CS , SC , SS }**

Este espacio muestral se puede obtener con el diagrama del árbol



PROBABILIDADES

SUCESO O EVENTOS

Se llama suceso o evento , cualquier subconjunto del espacio muestral Ω . A los sucesos generalmente se les denota por letras mayúsculas , tales como A , B , C, etc.

Entonces : A es un suceso $\Leftrightarrow$ A $\subset \Omega$
Relacionando con la teoría conjuntista al espacio muestral Ω se le llama el universo y el $\phi \subset \Omega$; luego:
Ω (universo) se llama suceso seguro.
ϕ (nulo) se llama suceso imposible.

PROBABILIDADES

SUCESO O EVENTOS

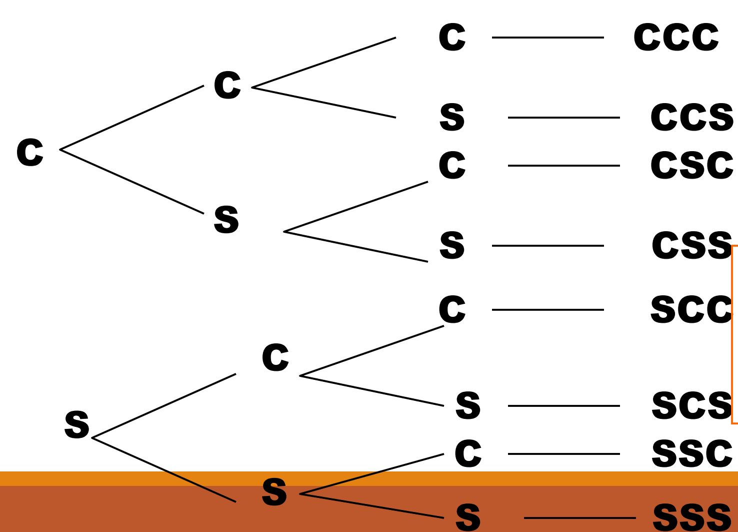
Ejemplo:

En el lanzamiento de una moneda, tres veces podemos enunciar los siguientes sucesos:

A = Se obtiene exactamente una cara.

B = se obtiene por lo menos dos caras

Ω = { CCC , CCS , CSC , CSS , SCC , SCS , SSC , SSS }



Exactamente una cara

A = { CSS , SCS SSC }

Se obtiene por lo menos dos caras

B = { CCC , CCS CSC , SCC }

PROBABILIDADES

SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Sabemos que si A y B son conjuntos disjuntos, entonces $A \cap B = \phi$

Por lo tanto :

A y B son dos sucesos que no pueden ocurrir a la vez, entonces, se dice que son mutuamente excluyentes.

Ejemplo:

Sea el experimento aleatorio : El lanzamiento de dos dados. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{ (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)$$
$$(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6)$$
$$(3,1)\ (3,2)\ (3,3)(3,4)\ (3,5)\ (3,6)$$
$$(4,1)\ (4,2)\ (4,3)(4,4)\ (4,5)\ (4,6)$$
$$(5,1)\ (5,2)\ (5,3)(5,4)\ (5,5)\ (5,6)$$
$$(6,1)\ (6,2)\ (6,3)(6,4)\ (6,5)\ (6,6) \}$$

PROBABILIDADES

SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Ejemplo:

Sea el experimento aleatorio : El lanzamiento de dos dados. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{ (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)$$
$$(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)$$
$$(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)$$
$$(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6)$$
$$(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)$$
$$(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) \}$$

Sean los sucesos :

Suceso A : Obtener una suma igual a 6 Entonces :

$A = \{(1,5)(5,1)(2,4)(4,2)(3,3)\}$

Suceso B : Obtener una suma igual a 5

$B = \{(1,4)(4,1)(2,3)(3,2)\}$

$A \cap B = \phi$ **Luego A y B son mutuamente excluyentes.**

PROBABILIDADES

SALGUNAS PROPIEDADES CONJUNTISTAS

1. **Ley de la idempotencia**

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

2. **Ley conmutativa**

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

3. **Ley asociativa**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

4. **Ley distributiva**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

5. **Ley D' Morgan**

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

PROBABILIDADES

ALGUNAS PROPIEDADES CONJUNTISTAS

6. Ley del complemento

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \phi$$

$$(A')' = A$$

$$U' = \phi \ \text{(complement o de un suceso seguro)}$$

$$\phi' = U \ \text{(complemen to del suceso imposible)}$$

7. Ley de identidad

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cap U = A$$

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

Sea el suceso o evento A del espacio muestral Ω ; la probabilidad de A denotada por P(A) es la razón entre el número de resultados favorables al suceso A y el número total de resultados del espacio muestral.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \qquad P(A) = \frac{n^{o} \text{ de casos favorables}}{n^{o} \text{ de casos posibles}}$$

Ejemplo 1 :

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par , cuando se tira un dado?

Solución:

Experimento aleatorio: Lanzamiento de un dado

Ω= {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} ; n(Ω) = 6

Suceso A : Obtener un número par: A = { 2 , 4 , 6 } $\Rightarrow$ n(A) = 3

Luego $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} = 0.5$$

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

Ejemplo 2 :

Si se lanza una moneda tres veces ¿Cuál es la probabilidad de

a. Obtener exactamente dos caras ?

b. Al menos dos caras ?

c. ninguna cara?

Solución:

Ω = { CCC , CCS , CSC , CSS , SCC , SCS , SSC , SSS } $\Rightarrow$ n(Ω) = 8

A : Exactamente dos caras .

A = { CCS , CSC SCC }

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0.375$$

B : Al menos dos caras .

B = { CCC , CCS , CSC , SCC }

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

C : Ninguna cara .

C = { SSS}

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8} = 0.125$$

PROBABILIDADES

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

1. **La probabilidad de un suceso A , toma valores entre 0 y 1 ; es decir $0 \leq P(A) \leq 1$.**

2. **La probabilidad de un suceso seguro Ω es 1 $P(\Omega) = 1$**

3. **Si un suceso $A = \phi$, A es un suceso imposible $P(A) = 0$**

4. **Si A y B son sucesos de Ω ; donde $A \cap B = \phi$; entonces , la probabilidad de ocurrencia del suceso $A \cup B$ es :**

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 1

Una caja contiene 4 bolas blancas y 6 negras. Si se extrae al azar una bola ¿ Cuál es la probabilidad que la bola extraída sea blanca?

Solución :

Experimento aleatorio: Extraer una bola de una caja que contiene 4 bolas blancas y 6 negras

$$\Omega = \{ b_1 , b_2 , b_3 , b_4 , n_1 , n_2 , n_3 , n_4 , n_5 , n_6 \} \Rightarrow n(\Omega) = 10$$

Suceso A : Extraer una bola blanca

$$A = \{ b_1 , b_2 , b_3 , b_4 \} \quad \Rightarrow n(A) = 4$$

La probabilidad de extraer una bola blanca es:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0.4$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 2

La probabilidad de que no asistan a clase no menos de 8 estudiantes es 0.2 y la probabilidad de que no asistan a clase no más de 5 estudiantes es 0.3 . Hallar la probabilidad de que no asistan 6 ó 7 estudiantes.

Solución :

Sean los sucesos :

A : No asistan a clase no menos de 8 estudiantes

A = { 8 , 9 , 10 , ...}

B: No asisten a clase no más de 5 estudiantes.

B = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 }

C : No asisten a clase a 6 ó 7 estudiantes .

C = { 6 , 7 }

Como A , B y C son mutuamente excluyentes donde

A $\cup$ B $\cup$ C = Ω (Universo) ; entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$= 0.2 + 0.3 + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - 0.5 \Rightarrow P(C) = 0.5$$

PROBABILIDADES

TEOREMAS SOBRE PROBABILIDADES

1. **Si ϕ (Suceso imposible) ; entonces $P(\phi) = 0$**

2. **Si A' es un suceso complementario de A ; entonces P(A') = 1 – P(A)**

   Esto se deduce de la siguiente relación :

   Como $A \cup A' = \Omega$

   A y A' son sucesos excluyentes, por lo tanto:

$$P(A) + P(A') = P(\Omega)$$

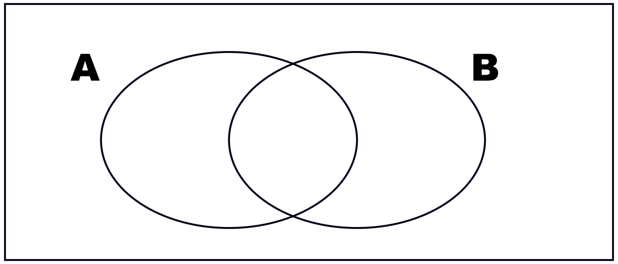
$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \boxed{P(A') = 1 - P(A)}$$

PROBABILIDADES

TEOREMAS SOBRE PROBABILIDADES

3. Si A y B son sucesos no excluyentes (conjuntos no comparables) ; se tiene que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \ldots\ldots\ldots \ (1)$$



Si la relación (1) dividimos por n(Ω) ; se tiene:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

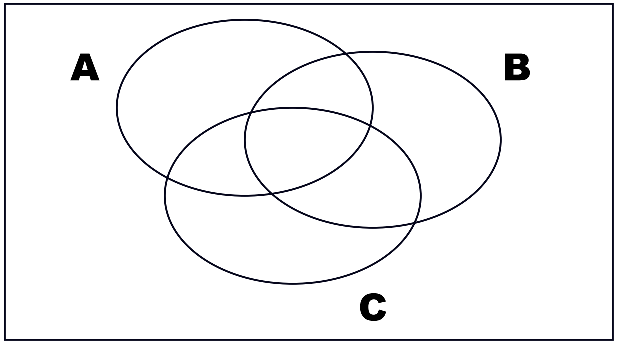
Por definición de probabilidades se tiene::

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

PROBABILIDADES

TEOREMAS SOBRE PROBABILIDADES

Extendiendo para tres conjuntos no comparables. Se tiene que:



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 1:

De un total de 200 estudiantes ; 120 están matriculados en Anatomía y 90 en Biología; 50 en ambos cursos. Si se elige al azar uno de los 200 estudiantes, ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido esté matriculado en una de las asignatura?

Solución:

PROBABILIDADES

Ejemplo 1:

Solución:

Espacio muestral: n(Ω) = 200

Suceso A : Seleccionar un alumno matriculado en Anatomía

$$n(A) = 120 \Rightarrow P(A) = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$$

Suceso B : Seleccionar un alumno matriculado en Biología

$$n(B) = 90 \Rightarrow P(B) = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}$$

Suceso (A $\cap$B) : Seleccionar un alumno matriculado en Anatomía y Biología

$$n(A \cap B) = 50 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

Como se sabe que : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{9}{20} - \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{5}$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 2:

Halar la probabilidad de que en el lanzamiento de dos dados se obtenga suma par, suma menor que 5 o ambos.

Solución:

Espacio muestral: n(Ω) = 36

Suceso A : Se obtenga suma par

A ={ (1,1) (1,3) (1,5) (2,2) (2,4) (2,6) (3 ,1) (3 ,3) (3,5) (4,2) (4,4) (4,6) (5,1) (5,3)(5,5) (6,2) (6,4) (6,6) }

$$n(A) = 18 \Rightarrow P(A) = \frac{18}{36}$$

Suceso B : Se obtenga suma menor que 5

B ={ (1,1) (1,2) (1,3) (2,1) (2,2) (3,1) }

$$n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36}$$

Suceso ambos : A $\cap$B $\Rightarrow$ n(A $\cap$B) = 4 $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{36}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{18}{36} + \frac{6}{36} - \frac{4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 3:

En un salón de clase de 40 alumnos, 30 de ellos postulan a la universidad de San Marcos y 26 a la universidad de San Martín. Se elige al azar un alumno de este salón. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un alumno que postula a ambas Universidades?

Solución:

Suceso A : Alumnos que postulan a San Marcos ; n(A) = 30

Suceso B : Alumnos que postulan a San Martín ; n(B) = 26

Suceso $A \cap B$: Alumnos que postulan a ambas universidades.

Sabemos que :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 40$$

$$n(A \cup B) = 30 + 26 - n(A \cap B) = 40 \Rightarrow 56 - n(A \cap B) = 40$$

$$n(A \cap B) = 16$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} = 0.4$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 4:

Con 7 ingenieros y 4 médicos se van formar comités de 6 miembros.

¿Cuál es la probabilidad que el comité incluya

a. Exactamente dos médicos?

b. A los sumo tres Ingenieros?

Solución:

Espacio muestral : $n(\Omega) = C(11,6) = \dfrac{11!}{6!\,5!} = \dfrac{11x10x9x8x\ 7}{5x4x3x2x1} = 462$

Evento A : exactamente dos médicos

$$n(A) = C(4,2)\ xC(7,4)$$

$$n(A) = \frac{4!}{2!\,.\,2!} \cdot \frac{7!}{4!.3!} \Rightarrow n(A) = 210$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{210}{462} = 0.4545$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 4:

Con 7 ingenieros y 4 médicos se van formar comités de 6 miembros.

¿Cuál es la probabilidad que el comité incluya

a. Exactamente dos médicos?

b. A los sumo tres Ingenieros?

Solución:

Evento B: A lo sumo tres ingenieros:

$$n(B) = C(7,2)\ x\ C(4,4) + C(7,3)\ x\ C(4,3)$$

$$n(B) = \frac{7!}{2!\,.\,5!}\cdot\frac{4!}{4!.0!} + \frac{7!}{3!\,.\,4!}\cdot\frac{4!}{3!.1!} = 21 + 140 = 161$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{161}{462} = 0.348$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 5:

De un grupo de personas, el 30% practica fútbol y el 40% juega ajedrez. De los futbolistas el 50% juega ajedrez. Si se elige aleatoriamente una persona.

¿Cuál es la probabilidad que:

a. Juega fútbol o ajedrez?

b. Practica solo uno de estos deportes?

c. No practica ni fútbol ni ajedrez?

Solución:

Suceso A : Persona elegida es futbolista , P(A) =0.30

Suceso B : Persona elegida juega ajedrez P(B) = 0.40

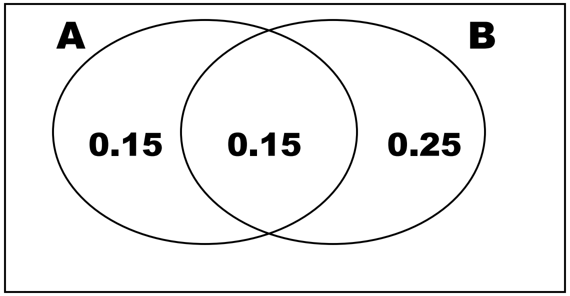
Suceso $A \cap B$: Practican ambos deportes ; $P(A \cap B)$=0.15

Suceso $A \cup B$: Persona elegida juega fútbol o ajedrez

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.30 + 0.40 - 0.15 = 0.55$

PROBABILIDADES

Ejemplo 5:



Suceso C : Practica un solo deporte ; $C = (A \cap B') \cup (B \cap A')$

$$P(C) = P(A \cap B') + P(B \cap A')$$

$$P(C) = 0.15 + 0.25 = 0.40$$

Suceso D : No practica ni fútbol ni ajedrez ; $D = A' \cap B' = (A \cup B)'$

$$P(D) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(D) = 1 - 0.55 = 0.45$$

PROBABILIDADES

Ejemplo 6:

En cierta ciudad el porcentaje de personas que leen los periódicos A , B , C y sus combinaciones como sigue:

A : 9.8% A y B : 5.1% A , B y C : 2.4%

B : 22.9% A y C : 3.7%

C : 12.1% B y C : 6%

(a) ¿Qué porcentaje de la población leen al menos uno de los periódicos?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que una persona seleccionada aleatoriamente de esta población sea lector del periódico A y no lo sea de los periódicos B y C.

Solución:

Suceso A $\cup$ B $\cup$ C : Leen al menos un de los periódicos

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.098 + 0.229 + 0.121 - 0.051 - 0.037 - 0.06 + 0.024$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.324$$

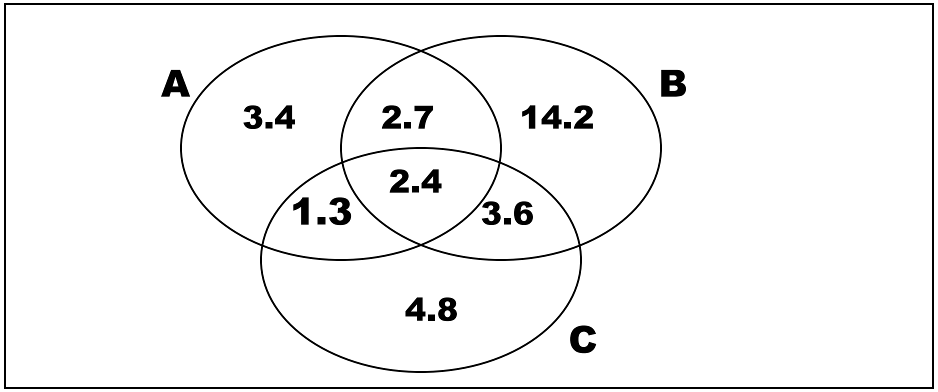
PROBABILIDADES

Ejemplo 6:

A : 9.8% **A y B : 5.1%** **A , B y C : 2.4%**

B : 22.9% **A y C : 3.7%**

C : 12.1% **B y C : 6%**



Suceso A ∩ B' ∩ C' : Leen el periódico A y no leen el periódico B y C.

$$P(A \cap B' \cap C') = 0.034$$

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD CONDICIONAL:

Sean los sucesos A y B en el espacio muestral Ω con

P(A) $\neq \phi$.

La probabilidad condicional de B , habiendo ocurrido

A, denotado por P(B / A) se define así:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD CONDICIONAL:

Ejemplo 1 :

Se lanza un dado . Si se obtiene un número par. ¿Cuál es la probabilidad que sea menor o igual a 4 ?

Solución:

Experimento aleatorio : Lanzamiento de un dado

Ω **= { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } ; n (**Ω**) = 6**

Suceso A : Obtener un número de un par:

A = { 2 , 4 , 6 } $\Rightarrow$ **n (A) = 3** $\Rightarrow P(A) = \frac{3}{6}$

Suceso B : Obtener un número menor o igual a 4

B = {1 , 2 , 3 , 4 } $\Rightarrow$ **n (B) = 4**

Como A $\cap$**B = { 2 , 4 }** $\Rightarrow$ **n(A** $\cap$**B) = 2** $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6}$

Luego: $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} \Rightarrow P(B/A) = \frac{2}{3}$$

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD CONDICIONAL:

Ejemplo 2 :

Una caja contiene 6 bolas azules , 10 blancas y 4 negras . Si se extrae al azar una por una y sin repetición. ¿Cuál es la probabilidad que de 3 bolas que se extraen sucesivamente , la primera sea azul, la segunda se blanca y la tercera sea negra?

Solución:

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD CONDICIONAL:

Ejemplo 2 :

Solución:

De un total de 20 bolas , el espacio muestral es n(Ω) = 20

Si el suceso A : seleccionar una bola azul $n(A)=6 \Rightarrow P(A)=\frac{6}{20}$

La probabilidad de seleccionar una bola blanca después de haber seleccionado una azul es: $P(B/A)=\frac{10}{19}$

La probabilidad de seleccionar una bola negra después de haber seleccionado una azul y una blanca es : $P(N/AB)=\frac{4}{18}$

Luego: La probabilidad de seleccionar 3 bolas , de modo que la primera sea azul, la segunda sea blanca y la tercera negra es:

$$P(ABN)=\left(\frac{6}{20}\right)\left(\frac{10}{19}\right)\left(\frac{4}{18}\right)=\frac{2}{57}$$

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD CONJUNTA:

La probabilidad conjunta es aquella donde los sucesos ocurren simultáneamente.

Ejemplo.

- **La probabilidad de que un número sea par y menor que 6.**
- **La probabilidad de que sea médico y egresado de la Universidad de San Martín.**

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD CONJUNTA:

Con los datos que se indican en el cuadro :

sexo / Profesión	Hombre (H)	Mujer (M)	Totales
Medico (Q)	20	25	45
Ingeniero (I)	15	12	27
Totales	35	37	72

Hallar : $P(H \cap Q)\,;\, P(M \cap I)\,;\; P(M \cap Q)\,;\, P(I)\,;\, P(Q)\,;\, P(Q/H)$

Solución:

Según el cuadro , el número de elementos del espacio muestral es : n(Ω)=72

Luego:

$$n(H \cap Q) = 20 \Rightarrow P(H \cap Q) = \frac{20}{72}$$

$$n(M \cap I) = 12 \;\Rightarrow P(M \cap I) = \frac{12}{72}$$

PROBABILIDADES

PROBABILIDAD CONJUNTA:

sexo / Profesión	Hombre (H)	Mujer (M)	Totales
Medico (Q)	20	25	45
Ingeniero (I)	15	12	27
Totales	35	37	72

$$n(M \cap Q) = 25 \Rightarrow P(M \cap Q) = \frac{25}{72} \qquad n(I) = 27 \Rightarrow P(I) = \frac{27}{72}$$

$$n(H) = 35 \Rightarrow P(H) = \frac{35}{72}$$

$$n(Q / H) = \frac{P(Q \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{35}{72}} \Rightarrow P(Q/H) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

PROBABILIDADES

SUCESOS INDEPENDIENTES :

Se dice que el suceso A es independiente del suceso B (A y B en Ω) ;

si : P(B / A) = P(B)

Es decir la probabilidad de ocurrencia de A no afecta la ocurrencia de B.

PROBABUILDAD CONJUNTA DE SUCESOS INDEPENDIENTES :

si A y B son sucesos independientes , la probabilidad conjunta de que los Sucesos de A y B ocurran es igual al producto de la probabilidad de ocurrencia de A y B . O sea :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

En general:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)\ldots\ldots\ldots P(A_n)$$

PROBABILIDADES

ejemplo :

Un dado tiene una cara pintada de rojo, dos de verde y el resto de negro. Se lanza el dado 4 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que las primeras veces se obtenga rojo y la última verde?

Solución:

Sucesos

$$A_i : \text{ La cara obtenida es roja} \Rightarrow n(A_i) = 1 \Rightarrow P(A_i) = \frac{1}{6}$$

$$B_i : \text{ La cara obtenida es verde} \Rightarrow n(B_i) = 2 \Rightarrow P(B_i) = \frac{2}{6}$$

$$C_i : \text{ La cara obtenida es negra} \Rightarrow n(C_i) = 3 \Rightarrow P(C_i) = \frac{3}{6}$$

Como A_i , B_i , C_i son sucesos independientes se tiene que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4) = P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(B_4)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{648}$$