Estimación

proporciones

Estimación por intervalos para proporciones

Un estimador puntual natural de la proporción ***p*** en un experimento binomial se encuentra dado por el estadístico proporción ***p=x/n***, donde ***x*** representa el número de éxitos en ***n*** pruebas o experimentos realizados.

Entonces la proporción de la muestra ***p=x/n*** se utilizará como estimador puntual del parámetro **P**.

Si no se espera que la proporción P desconocida esté demasiado cerca de 0 ó de 1, se puede establecer un intervalo de confianza para P al considerar la distribución muestral de proporciones.

Estimación para la Proporción

Recordemos para la distribución Binomial

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Para la distribución de proporciones

$$z = \frac{p - P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}$$

$$z = \frac{np - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$$

Resolvemos para estimar la proporción

$$P = p \pm z\sqrt{\frac{Pq}{n}}$$

$$n\pi = np \pm z\sqrt{n\pi(1-\pi)}$$

En este despeje observamos de la primera ecuación que se necesita el valor del parámetro **P** y es precisamente lo que queremos estimar, por lo que lo sustituiremos por la proporción de la muestra **p** siempre y cuando el tamaño de muestra no sea pequeño.

Estimación para la Proporción

$$P = p \pm z\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Cuando ***n*** es pequeña y la proporción desconocida ***P*** se considera cercana a 0 ó a 1, el procedimiento del intervalo de confianza que se establece aquí no es confiable, por tanto, no se debe utilizar. Para estar seguro, se debe requerir que **np** ó **nq** sea mayor o igual a **5**.

El error de estimación será la diferencia absoluta entre p y P, y podemos tener el nivel de confianza de que esta diferencia no excederá a l factor

$$Z\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Ejemplo

Un exportador de cerámica Maya utiliza un conjunto de pruebas para evaluar la autenticidad del producto. Todas las piezas deben pasar todas las pruebas antes de venderse. Una muestra aleatoria de 500 piezas tiene como resultado 15 de ellas fallan en una o más pruebas. Encuentra un intervalo de confianza de 90% para la proporción de las piezas de la población que no pasan todas las pruebas.

Solución

Datos

$x=15$

$n=500$

$IC=90\%$

Fórmula

$$P = p \pm z\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Z

Se sabe con un índice de confianza del 90% que la proporción de piezas defectuosos que no pasan las pruebas en esa población esta entre 0.0175 y 0.0425.

Un exportador de cerámica Maya utiliza un conjunto de pruebas para evaluar la autenticidad del producto. Todas las piezas deben pasar todas las pruebas antes de venderse. Una muestra aleatoria de 500 piezas tiene como resultado 15 de ellas fallan en una o más pruebas. Encuentra un intervalo de confianza de 90% para la proporción de las piezas de la población que no pasan todas las pruebas.

$$p = x/n = \tfrac{15}{500} = 0.03$$

$$IC = 0.5 - (0.90/2) = 0.05$$

Z=1.645

$$P = 0.03 \pm 1.645\sqrt{\frac{0.03 \cdot 0.97}{500}}$$

$$P = 0.03 \pm 0.01255$$

$$P_1 = 0.0425$$

$$P_2 = 0.0175$$

$0.0175 \leq P \leq 0.0425$

Ejemplo

En una muestra de 400 artículos fabricadas por tu compañía, se encontraron 20 defectuosos. Si la proporción p de artículos defectuosos en esa muestra se usa para estimar P, que vendrá a ser la proporción verdadera de todas los artículos defectuosas fabricados por tu compañía. Encuentre el máximo error de estimación "ε" tal que se pueda tener un 95% de confianza en que P dista menos de ε que de p.

Solución

En una muestra de 400 artículos fabricadas por tu compañía, se encontraron 20 defectuosos. Si la proporción p de artículos defectuosos en esa muestra se usa para estimar P, que vendrá a ser la proporción verdadera de todas los artículos defectuosas fabricados por tu compañía. Encuentre el máximo error de estimación "ε" tal que se pueda tener un 95% de confianza en que P dista menos de ε que de p.

Datos

$x=20$

$n=400$

$IC=95\%$

Fórmula

$$P = p \pm z\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$p = x/n = \frac{20}{400} = 0.05$$

$$IC = 0.5-(0.95/2) = 0.025$$

z=1.96

$$P = 0.05 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{400}}$$

$$\varepsilon = 1.96\sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{400}} = 0.02135$$

Si ***p=0.05*** se usa para estimar ***P***, podemos tener un ***95%*** de confianza en que ***P*** dista menos del 0.02135 de **p**.

En otras palabras, si ***p=0.05*** se usa para estimar ***P***, el error máximo de estimación será aproximadamente 0.02135 con un nivel de confianza del 95%.

$$P = 0.05 \pm 0.02135$$

$0.02865 \leq P \leq 0.07135$

Ejemplo

En un estudio de 300 accidentes automovilísticos en cierta ciudad de la República Mexicana reporta que 60 tuvieron consecuencias fatales. Con base en esta muestra, construya un intervalo del 90% de confianza para aproximar la proporción de todos los accidentes automovilísticos que en esa ciudad tienen consecuencias fatales.

Solución

Datos

$x=60$

$n=300$

$IC=90\%$

Fórmula

$$P = p \pm z\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

En un estudio de 300 accidentes automovilísticos en cierta ciudad de la República Mexicana reporta que 60 tuvieron consecuencias fatales. Con base en esta muestra, construya un intervalo del 90% de confianza para aproximar la proporción de todos los accidentes automovilísticos que en esa ciudad tienen consecuencias fatales.

$$p = x/n = \tfrac{60}{300} = 0.2$$

$$IC = 0.5 - (0.90/2) = 0.05$$

z=1.645

$$P = 0.2 \pm 1.645\sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{300}}$$

$$P = 0.2 \pm 0.03798$$

$$P_1 = 0.238$$

$$P_2 = 0.162$$

0.162 ≤ P ≤ 0.238

Estimación por intervalos para la diferencia de medias

Si se tienen dos poblaciones con medias μ_1 y μ_2 y varianzas σ_1 y σ_2 respectivamente, un estimador puntual de la diferencia entre μ_1 y μ_2 está dado por la estadística x_2-x_1. Para obtener una estimación puntual de μ_1-μ_2, se seleccionan dos muestras aleatorias independientes, de cada población, de tamaño n_1 y n_2, se calcula la diferencia x_2-x_1, de las medias muestrales.

Recordemos que la distribución muestral de diferencia de medias está dada por:

$$z = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Que al despejar tenemos lo siguiente:

$$(\mu_1 - \mu_2) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

En el caso en que se desconozcan las varianzas de la población y los tamaños de muestra sean mayores a 30 se podrá utilizar la varianza de la muestra como una estimación puntual.

Ejemplo

Se lleva a cabo un experimento en que se comparan dos tipos de motores, A y B. Se mide el rendimiento en millas por galón de gasolina. Se realizan 50 experimentos con el motor tipo A y 75 con el motor tipo B. La gasolina que se utiliza y las demás condiciones se mantienen constantes. El rendimiento promedio de gasolina para el motor A es de 36 millas por galón y el promedio para el motor B es 24 millas por galón. Encuentre un intervalo de confianza de 96% sobre la diferencia promedio real para los motores A y B. Suponga que las desviaciones estándar poblacionales son 6 y 8 para los motores A y B respectivamente.

Solución

Se lleva a cabo un experimento en que se comparan dos tipos de motores, A y B. Se mide el rendimiento en millas por galón de gasolina. Se realizan 50 experimentos con el motor tipo A y 75 con el motor tipo B. La gasolina que se utiliza y las demás condiciones se mantienen constantes. El rendimiento promedio de gasolina para el motor A es de 36 millas por galón y el promedio para el motor B es 24 millas por galón. Encuentre un intervalo de confianza de 96% sobre la diferencia promedio real para los motores A y B. Suponga que las desviaciones estándar poblacionales son 6 y 8 para los motores A y B respectivamente.

Datos

$x_1=36$

$x_2=24$

$n_1=50$

$n_2=75$

$IC=96\ \%$

$\sigma_1=6$

$\sigma_2=8$

Fórmula

$$(\mu_1-\mu_2)=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$IC=0.5-(0.96/2)=0.02$$

z=2.055

x_1-x_2=36-24=12

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{36}{50}+\frac{64}{75}}=\sqrt{1.5733}=1.2543$$

$$(\mu_1-\mu_2)=12\pm(2.055\times1.2543)$$

$$(\mu_1-\mu_2)=12\pm(2.057)$$

$9.4224 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 14.57$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00103	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02067	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04456	0.04363	0.04272	0.04181	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06425	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07214	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09852
-1.1	0.13566	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15865	0.15625	0.15386	0.15150	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17878	0.17618	0.17361	0.17105	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21185	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23269	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21769	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26434	0.26108	0.25784	0.25462	0.25143	0.24825	0.24509
-0.5	0.30853	0.30502	0.30153	0.29805	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28095	0.27759
-0.4	0.34457	0.34090	0.33724	0.33359	0.32997	0.32635	0.32276	0.31917	0.31561	0.31206
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36692	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34826
-0.2	0.42074	0.41683	0.41293	0.40904	0.40516	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38590
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43250	0.42857	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48404	0.48006	0.47607	0.47209	0.46811	0.46414