



Universidad Autónoma del Estado de México
Unidad Académica Profesional Nezahualcóyotl

*Licenciatura en Ingeniería en Sistemas
Inteligentes*

Unidad de aprendizaje: **Lógica
Matemática**

Inferencia Lógica

Dra. Dora María Calderón Nepamuceno



La unidad de aprendizaje (UA) de **Lógica Matemática (5 créditos)** tiene como área curricular **Herramientas para los sistemas inteligentes** y forma parte del núcleo **sustantivo** esta UA es el inicio de la seriación más larga del mapa curricular.

Objetivo

3

El presente material tiene como objetivo ilustrar cada una de las reglas de inferencia.

El alumno serán capaz de identificar y utilizar cada una de las **reglas de inferencia**.



1. Contenido

Simbolización de proposiciones

- Reglas de inferencia y demostración
- Deducción proposicional
- Otras reglas de Inferencia
- Bicondicionales
- Resumen de reglas de inferencia

Reglas de Inferencia y Demostración

Las reglas de inferencia que rigen el uso de los términos de enlace son muy simples.



Modus Ponendo Ponens (PP).

Modus Ponendo Ponens. El nombre modus ponendo ponens se puede explicar de la siguiente manera: Esta regla de inferencia es el método (modus), que afirma (ponens) el consecuente, afirmando (ponendo) el antecedente.

Ejemplo PP

Sea

P = «Él está en el partido de fútbol»

Q = «Él está en el estadio»,

Entonces

Premisa 1: $P \rightarrow Q$

Premisa 2: P

Conclusión: Q

La regla de inferencia modus ponendo ponens permite demostrar Q a partir de $P \rightarrow Q$ y P

Ejemplo PP

El segundo ejemplo se simboliza de la manera siguiente, donde P es la proposición «Hace frío» y Q es la proposición «El lago se helará».

Premisa 1: $\neg P \rightarrow \neg Q$

Premisa 2: $\neg P$

Conclusión: $\neg Q$



Recuérdese que la regla se aplica a la forma de las proposiciones, o sea, que siempre que se dé una proposición condicional y se dé precisamente el antecedente de aquella condicional, se sigue precisamente el consecuente.

Demostraciones. Cuando se usa una regla de inferencia para pasar de un conjunto de proposiciones a otra proposición se demuestra que la última proposición es consecuencia lógica de las otras.

Demostración en un paso (Formal)

Utilizando modus ponendo ponens como regla, se demostró una conclusión a partir de un conjunto de premisas. Por ejemplo, de

$R \rightarrow S$ y R se demostró S . Se podría esquematizar la demostración de manera clara poniendo:

(1) $R \rightarrow S$ P

(2) R P

(3) S PP



Demostraciones en dos pasos

Algunas veces no se puede ir directamente de las premisas a la conclusión por un solo paso. Pero esto no impide poder llegar a la conclusión. Cada vez se deduce una proposición por medio de una regla, entonces esta proposición se puede utilizar junto con las premisas para deducir otra proposición. Considérese un ejemplo en el que se tienen tres premisas:

Ejemplo

(1) $A \rightarrow B$ P

(2) $B \rightarrow C$ P

(3) A P

Se quiere probar la proposición C . Para llegar a C , se necesitan dos pasos, cada uno permitido por el modus ponendo ponens, PP.

(1) $A \rightarrow B$ P

(2) $B \rightarrow C$ P

(3) A P

(4) B PP 1, 3

(5) C PP 2, 4

Doble negación (DN)

La regla de doble negación es una regla simple que permite pasar de una premisa única a la conclusión. Un ejemplo simple es el de una negación de negación, que brevemente se denomina «doble negación».

Modus Tollendo Tollens (TT)

La regla de inferencia que tiene el nombre latino modus tollendo tollens se aplica también a las proposiciones condicionales. Pero en este caso, negando (tollendo) el consecuente, se puede negar (tollens) el antecedente de la condicional.

Ejemplo

Premisa 1. Si tiene luz propia, entonces el astro es una estrella.

Premisa 2. El astro no es una estrella.

Conclusión: No tiene luz propia

Se simbolizará el ejemplo de la manera siguiente: Sea

$P = \text{«Tiene luz propia»}$

$Q = \text{«El astro es una estrella»}.$

Premisa 1 : $P \rightarrow Q$

Premisa 2: $\neg Q$

Conclusión: $\neg P$

Se considera ahora un ejemplo de una demostración en el que se aplican las tres reglas expuestas hasta aquí. Se trata de demostrar $\neg\neg R$.

(1)	$P \rightarrow Q$	P
(2)	$\neg Q$	P
(3)	$\neg P \rightarrow R$	P
(4)	$\neg P$	TT 1,2
(5)	R	PP 3, 4
(6)	$\neg\neg R$	DN 5

Adjunción (A) y Simplificación (S).

Se suponen dadas dos proposiciones como premisas. La primera es Jorge es adulto. La segunda es María es adolescente. Si ambas proposiciones son verdaderas, entonces se podrían juntar en una proposición molecular utilizando el término de enlace «y» y se tendría una proposición verdadera que se leería

Jorge es adulto y María es adolescente.

La adjunción y simplificación se simboliza de la siguiente forma:

Regla de simplificación (S)

$$\frac{P \ \& \ Q \quad Q \ \& \ P}{P \quad Q}$$

Regla de adjunción (A)

$$\frac{P \quad Q}{P \ \& \ Q \quad Q \ \& \ P}$$

Disyunciones como premisas.

Quizá se ha observado que en las reglas estudiadas hasta ahora, se han estado utilizando conjunciones, condicionales, y negaciones.

Sin embargo, daremos un significado más amplio a la disyunción. Se denomina sentido incluyente. En el sentido inclusivo, cuando se utiliza la palabra «o», se supone que por lo menos un miembro de la disyunción se presenta y quizá ambos.

Modus Tollendo Ponens (TP).

La regla anteriormente sugerida es la que se denomina modus tollendo ponens. Dice que negando (tollendo) un miembro de una disjunción se afirma (ponens) el otro miembro.

Simbólicamente, el modus tollendo ponens se puede expresar:

De la premisa	$P \vee Q$
y la premisa	$\neg P$
se puede concluir	Q

○

De la premisa	$P \vee Q$
y la premisa	$\neg Q$
se puede concluir	P

Ley de Adición (LA).

La ley de adición expresa el hecho que si se tiene una proposición que es cierta, entonces la disyunción de aquella proposición y otra cualquiera "ha de ser también cierta. Si se da la proposición P , entonces la proposición $P \vee Q$ es consecuencia.

P

$P \vee Q$

Q

$P \vee Q$

Ley del Silogismo Hipotético (SH).

a veces también llamado **argumento cadena, regla de cadena**, o el **principio de transitividad** de la implicación. Simbolicemos este razonamiento:

D = «Hace calor»

S = «Juana va a nadar»

H = «Arregla la casa después de comer».

(1)	$D \rightarrow S$	P
(2)	$S \rightarrow H$	P
(3)	$D \rightarrow H$	HS

Ley del Silogismo Disyuntivo. (DS)

El silogismo disyuntivo es aquel cuya premisa mayor establece una disyunción exclusiva, de manera que los dos miembros no pueden ser simultáneamente verdaderos, ni simultáneamente falsos.

Para simbolizar el razonamiento, sea

R = «Llueve»

D = «El campo está seco»

P = «Jugaremos dentro».

B = «Jugaremos baloncesto».

(1) R \vee D	P
(2) R \rightarrow P	P
(3) D \rightarrow B	P
(4) P \vee B	DS

Ley de simplificación disyuntiva. (DP)

Si alguien dice «El equipo de los "Gigantes" ganará o el equipo de los "Gigantes" Ganará», se puede concluir que opina simplemente que «El equipo de los "Gigantes" ganará». En forma simbólica el razonamiento es:

GVG

G



Leyes conmutativas (CL).

Estas reglas, probablemente, parecerán muy triviales; sin embargo, se han de enunciar, pues no se puede dar ningún paso como conocido, si no se tiene una regla explícita que lo permita. El razonamiento que sigue es un ejemplo del uso de una de las leyes conmutativas.

Ejemplo P

Galileo murió en 1642 e Isaac Newton nació en 1642. Por tanto, Isaac Newton nació en 1642 y Galileo murió en 1642.

En forma simbólica:

P&Q

Se deduce

Q&P

De igual forma se puede utilizar para la disyunción.

Las leyes de Morgan DL.

Son un par de reglas de transformación que son ambas reglas de inferencia válidas. Las normas permiten la expresión de las conjunciones y disyunciones puramente en términos de sí vía negación.

Ejemplo

(1) No llueve y no hace sol,

(2) No ocurre que llueva o que haga sol.

Si (1) y (2) significan lo mismo en el lenguaje corriente, entonces en Lógica será válido concluir (1) de (2) o (2) de (1), lo que expresado en símbolos es:

a) de $\neg P \ \& \ \neg Q$ se puede concluir $\neg(P \vee Q)$ y

b) de $\neg(P \vee Q)$ se puede concluir $\neg P \ \& \ \neg Q$

Así (b) dice que si no se tiene o P o Q, entonces no se tiene P y no se tiene Q. Estas son las denominadas leyes de Morgan.

$$\frac{\neg P \ \& \ \neg Q}{\neg(P \vee Q)}$$

Estas leyes también se aplican a otras formas proposicionales, como se puede ver al considerar las dos proposiciones equivalentes:

(3) O no hace calor o no nieva

(4) No ocurre a la vez que hace calor y que nieva.

Puesto que (3) y (4) tienen el mismo significado, una puede deducirse de la otra.

Por tanto, en símbolos lógicos se puede escribir:

(c) de $\neg P \vee \neg Q$ se puede concluir $\neg(P \& Q)$,

(d) de $\neg(P \& Q)$ se puede concluir $\neg P \vee \neg Q$.

(c) y (d) son, pues, otros dos ejemplos de la aplicación de las leyes de Morgan.

$$\frac{\neg P \vee \neg Q}{\neg(P \& Q)}$$

Otro caso:

(e) de $P \& Q$ se puede concluir $\neg(\neg P \vee \neg Q)$

Y finalmente

(f) de $\neg(P \vee \neg Q)$ se puede concluir $\neg P \& \neg \neg Q$



Resumiendo, lo que se ha de hacer para aplicar las leyes de Morgan, cuya abreviatura es DL, como una regla de operación, es verificar los siguientes pasos:

1. Cambiar $\&$ en \vee o \vee en $\&$;
2. Negar cada miembro de la disyunción o conjunción;
3. Negar la fórmula completa

Proposiciones bicondicionales

Este término de enlace es «si y sólo si». Las proposiciones que utilizan este término de enlace se denominan proposiciones bicondicionales. El símbolo que se utilizará para este término de enlace es:

En forma simbólica la proposición sería:
 $P \leftrightarrow Q,$

La proposición bicondicional $P \leftrightarrow Q$ tiene la misma fuerza que dos proposiciones condicionales; primera $P \rightarrow Q$ y segunda, $Q \rightarrow P$.

Por ejemplo:

Si el agua alcanza cierta altura, entonces el campo se inunda.

Ley bicondicional

También significa que si el campo se inunda, entonces el agua alcanza cierta altura.

Así se tiene una nueva regla que nos permite deducir ambas $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$ de $P \leftrightarrow Q$. Esta ley se denominará la ley de las proposiciones bicondicionales, LB.

Resumen: Reglas de Inferencia

<p>Modus ponendo ponens (PP)</p> $\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$	<p>Modus tollendo tollens (TT)</p> $\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$
<p>Modus tollendo ponens (TP)</p> $\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline Q \end{array} \quad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array}$	<p>Doble negación (DN)</p> $\begin{array}{l} P \\ \hline \neg\neg P \end{array} \quad \begin{array}{l} \neg\neg P \\ \hline P \end{array}$
<p>Regla de simplificación (S)</p> $\begin{array}{l} P \& Q \\ \hline P \end{array} \quad \begin{array}{l} Q \& P \\ \hline Q \end{array}$	<p>Regla de adjunción (A)</p> $\begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline P \& Q \end{array} \quad \begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline Q \& P \end{array}$

Ley del silogismo hipotético (HS)

$P \rightarrow Q$

$Q \rightarrow R$

$P \rightarrow R$

Ley de la Adición (LA)

P

Q

PV Q

PV Q

Leyes de Morgan (DL)

1. Cambiar & por V o V por &
2. Negar cada miembro de la conjunción o disjunción.
3. Negar la fórmula completa.

Ley de la simplificación disyuntiva (DP)

PVP

P

Ley del silogismo disyuntivo (DS)

P V Q

P V Q

P \rightarrow R

P \rightarrow R

Q \rightarrow S

Q \rightarrow S

R V S

SVR

Leyes conmutativas

P&Q

PVQ

Q & P

QVP

Ley de las proposiciones bicondicionales (LB)

$P \leftrightarrow Q$

$P \rightarrow Q$

$P \leftrightarrow Q$

$Q \rightarrow P$

$P \rightarrow Q$

$Q \rightarrow P$

$P \leftrightarrow Q$

$P \leftrightarrow Q$

$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$

Regla de premisas (P)

Una premisa se puede introducir en cualquier punto de la deducción.

Conclusión

La finalidad de la inferencia lógica es utilizar las reglas de inferencia de manera que conduzcan a otras fórmulas que se denominan conclusiones. El paso lógico de las premisas a la conclusión es una deducción. La conclusión que se obtiene se dice que es una consecuencia lógica de las premisas si cada paso que se da para llegar a la conclusión está permitido por una regla.



Conclusión

De tal forma que se puede concluir que la inferencia lógica da como resultado de premisas verdaderas se obtienen sólo conclusiones que son verdaderas. Es decir, si las premisas son verdaderas, entonces las conclusiones que se derivan de ellas lógicamente, han de ser verdaderas.

Bibliografía

- 1) **Cuena, J.** : *Lógica Informática*. Alianza Editorial, 1986
Kenneth H. Rosen: *Discrete Mathematics and its Applications*, 5.ª edición.
- 2) **F Suppes, S Hill**, "Logica M
- 3) **Nerode, A., A. Shore, R.**: *Logic for applications*. Springer-Verlag , New York 1993
"matematica" Reverte 1968