Parámetros Poblacionales

- Estadísticos muéstrales

Ejemplo 3

Una empresa dedicada al transporte y distribución de mercancías, tiene una plantilla de *50* trabajadores. Durante el último año se ha observado que *25* trabajadores han faltado un solo día al trabajo, 20 trabajadores han faltado dos días y 5 trabajadores han faltado tres días. Si se toma una muestra aleatoria, con reemplazamiento, de tamaño dos (X_1, X_2) del total de la plantilla, obtener:

1. La distribución de probabilidad del número de días que ha faltado al trabajo un empleado, su media y su varianza.
2. Distribución de probabilidad del estadístico media muestral.
3. La distribución de probabilidad del estadístico varianza muestral.
4. La media y varianza del estadístico media muestral.
5. La probabilidad de que el estadístico media muestral, sea menor que 2.
6. La media y varianza del estadístico varianza muestral.
7. La probabilidad de que el estadístico varianza muestral, sea menor o igual que 0.5.

Solución 1

50 trabajadores.
25 han faltado 1 día
20 han faltado 2 días
5 han faltado 3 días.

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) = E(x)$$

$$\sigma^2 = Var(x) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

X: Número de días que ha faltado un empleado elegido aleatoriamente de la plantilla total.

x_i	$P(X=x_i)$		
1	P(X=1)=P(1)	25/50	0.5
2	P(X=2)=P(2)	20/50	0.4
3	P(X=3)=P(3)	5/50	0.1

Han faltado 25 una vez, 20 dos veces y 5 tres veces, por lo que el total de faltas es 80

$$\mu = \frac{1}{50} 80 = 1.6$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{50}\left(25\times(1-1.6)^2 + 20\times(2-1.6)^2 + 5\times(2-1.6)^2\right)$$

$$1\frac{25}{50} + 2\frac{20}{50} + 3\frac{5}{50} = \frac{25+40+15}{50} = \frac{80}{50} = 1.6$$

$$(1-1.6)^2(0.5) + (2-1.6)^2(0.4) + (3-1.6)^2(0.1) = 0.478$$

Debido a ello μ y σ^2 serán consideradas como la media y la varianza poblacional, respectivamente.

Solución 2

Seleccionamos una muestra aleatoria, con reemplazamiento, de tamaño dos (X_1, X_2) :

X_1: Variable aleatoria correspondiente al número de días que falta el primer trabajador seleccionado.

X_2: Variable aleatoria correspondiente al número de días que falta el segundo trabajador seleccionado.

Ambas variables aleatorias X_1 y X_2 tienen la misma distribución de probabilidad que la de la variable aleatoria X, correspondiente a la población. Pero como nos interesa obtener la distribución de probabilidad de estadístico media muestral ocupamos la fórmula:

$$\overline{X} = \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2\right)$$

Para tener las distribuciones de probabilidad de los estadísticos X y S^2 muestral necesitaremos tener los diferentes valores que puede tomar y sus probabilidades. Para ello empezaremos obteniendo las posibles muestras, con reemplazamiento, de tamaño dos.

Para obtener las probabilidades correspondientes a los diferentes valores muestrales, tendremos en cuenta que las variables X_1 y X_2 son independientes, pues el muestreo hizo con reemplazamiento.

(X_i,X_j)	$X=(X_i+X_j)/2$		s^2	$P(X_1,X_2)$
1,1	(1+1)/2	1	0.00	0.25
1,2	(1+2)/2	1.5	0.50	0.2
1,3	(1+3)/2	2	2.00	0.05
2,1	(2+1)/2	1.5	0.50	0.2
2,2	(2+2)/2	2	0.00	0.16
2,3	(2+3)/2	2.5	0.50	0.04
3,1	(3+1)/2	2	2.00	0.05
3,2	(3+2)/2	2.5	0.50	0.04
3,3	(3+3)/2	3	0.00	0.01

$$P(\overline{X_1}, X_2) = P(\overline{X_1}) \times P(X_2)$$

La información que nos proporciona la tabla la utilizamos para obtener la distribución de probabilidad del estadístico media muestral X.

$$P(\overline{X} = 1) = 0.25$$

$$P(\overline{X} = 1.5) = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

$$P(\overline{X} = 2) = 0.05 + 0.16 + 0.05 = 0.26$$

$$P(\overline{X} = 2.5) = 0.04 + 0.04 = 0.08$$

$$P(\overline{X} = 3) = 0.01$$

Valor del estadístico X	P(X=x)
1	0.25
1.5	0.4
2	0.26
2.5	0.08
3	0.01

Solución 3

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{2-1}\left[(1-1)^2 + (1-1)^2\right] = 0$$

$$= \frac{1}{2-1}\left[(1-1.5)^2 + (2-1.5)^2\right] = 0.5$$

$$= \frac{1}{2-1}\left[(1-2)^2 + (3-2)^2\right] = 2.0$$

$$= \frac{1}{2-1}\left[(2-1.5)^2 + (1-1.5)^2\right] = 0.5$$

$$= \frac{1}{2-1}\left[(2-2)^2 + (2-2)^2\right] = 0.0$$

Solución 4

Luego la distribución de probabilidad del estadístico varianza muestral S^2 está dada por

Valor del estadístico s^2	$P(s^2)$
0.00	0.42
0.50	0.48
2.00	0.10

Para el cálculo de la media y varianza del estadístico media muestral tendremos en cuenta su distribución de probabilidad dada.

$$\mu_{\bar{x}} = E\left[\bar{X}\right] = \sum_i \bar{x} \times P\left(\bar{X} = \bar{x}_i\right)$$

$$= (1)\times 0.25 + (1.5)\times 0.50 + (2)\times 0.26 + (2.5)\times 0.08 + (3)\times 0.01$$

$$= 1.6$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = E\left(\left(\bar{X} - E\left[\bar{X}\right]\right)^2\right)$$

$$= \sum_i \left(\bar{x}_i - 1.6\right)^2 \times P(\bar{X} = \bar{x}_i)$$

$$= (1-1.6)^2 \times 0.25 + \cdots + (3-1.6)^2 \times 0.01$$

$$= 0.22$$

Solución 5

Al considerar la distribución de probabilidad del estadístico media muestral *X* podemos calcular

$$P(X<2)=P(X=1)+P(X=1.5)$$
$$=0.25+0.40=0.65$$

Solución 6

Al considerar la distribución de probabilidad del estadístico media muestral S^2 podemos calcular

$$\mu_{s^2}=E\left(s^2\right)=\sum_i s_i^2\times P(S^2=s_i^2)$$
$$=0.0\left(0.42\right)+0.5(0.48)+2.0\left(0.1\right)$$
$$=0.44$$

$$\sigma^2_{s^2}=Var\left(S^2\right)=E\left[\left(S^2-E\left[S^2\right]\right)^2\right]$$
$$=\sum_i\left(s_i^2-\mu_{S^2}\right)P\left(S^2=s_i^2\right)$$
$$=\left(0.0-0.44\right)^2\times 0.42+\left(0.5-0.44\right)^2\times 0.48+\left(2.0-0.44\right)^2\times 0.10$$
$$=0.32$$

Solución 7

Basándonos en la distribución de probabilidad del estadístico varianza muestral S^2 se tiene que

$$P(S^2 < 0.5) = P(S^2 = 0.0) + P(S^2 = 0.5)$$
$$= 0.42 + 0.48 = 0.90$$

Con este ejemplo, queda de manifiesto que incluso para muestras de tamaño pequeño y estadísticos con pocos valores se hace pesado la obtención de la distribución de probabilidad de los estadísticos muestrales.

MEDIA VARIANZA DE ALGUNOS ESTADÍSTICOS

En el Ejemplo anterior hemos obtenido:

- La media, μ, y varianza σ^2, poblacional.
- Los estadísticos media X y varianza S^2 muestral.
- La media y varianza de los estadísticos media muestral X, y varianza muestral S^2 para una muestra de tamaño n = 2.

	Poblacional X	Estadístico media muestral $\bar{X}$	Estadístico varianza muestral S^2
Media	$\mu = E[X] = 1{,}6$	$\mu_{\bar{X}} = E[\bar{X}] = 1{,}6$	$\mu_{S^2} = E[S^2] = 0{,}44$
Varianza	$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 0{,}44$	$\sigma^2_{\bar{X}} = \text{Var}(\bar{X}) = 0{,}22$	$\sigma^2_{S^2} = \text{Var}(S^2) = 0{,}32$

1. $E\left[\overline{X}\right]=E\left[X\right]$

Es decir, que la media del estadístico media muestral es igual a la media de la población.

2. $E\left[S^2\right]=Var\left(X\right)$

Es decir, que la media del estadístico varianza muestral es igual a la varianza de la población.

3. $Var\left(\overline{X}\right)=\dfrac{Var\left(X\right)}{2}$

Es decir, que la varianza del estadístico media muestral es igual a la varianza de la población dividida por el tamaño de la muestra, n.

Estos resultados no sólo se verifican para este ejemplo sino que se verifican en general, como veremos en los siguientes teoremas.

Teorema

Si (X1,..., Xn) es una muestra aleatoria simple de tamaño n procedente de una población, descrita por la variable aleatoria X, con media E[X] = μ y varianza Var(X) = σ^2, entonces la esperanza de la media muestral es igual a la media de la población, y la varianza de la media muestral es igual a la varianza poblacional, σ^2, dividida por n.

$$E\left[\overline{X}\right] = \mu \quad y \quad Var\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$