UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Centro Universitario UAEM Zumpango

Ingeniero en Computación

Geometría Analítica
Unidad de Competencia II
Álgebra vectorial

UAEM | Universidad Autónoma del Estado de México

M. en C. Rafael Rojas Hernández

rrojas.uaemex@gmail.com

Septiembre 2015

Índice de la presentación

- Información general de la Unidad
- Estructura de la Unidad de Aprendizaje
- Unidad de Competencia II

Información general de la Unidad de Aprendizaje

Unidad de Aprendizaje

Geometría Analítica

Propósito de la Unidad de Aprendizaje

Que el alumno adquiera los fundamentos analíticos y geométricos necesarios para manejar curvas y superficies en forma gráfica, y a través de sus representaciones analíticas en términos de sus diversas ecuaciones. Lo anterior, con el fin de que el alumno disponga de los elementos necesarios para abordar el estudio de otras áreas de las matemáticas, de la física y de la ingeniería en general.

Estructura de la Unidad de Aprendizaje

1. Álgebra vectorial
2. Geometría analítica en el plano
3. Geometría analítica en el espacio

Unidad de competencia II. Geometría analítica en el plano

Objetivo de la Unidad de Competencia

Habilitar al alumno en el uso de procedimientos matemáticos y gráficos para resolver problemas que involucren geometría analítica plana.

Conocimientos

- Obtener las ecuaciones vectorial y cartesiana de una recta, generar puntos de una recta, determinar la pertenencia de puntos a rectas, obtener la intersección entre dos rectas, obtener la distancia de un punto a una recta y la distancia entre dos rectas, y subdividir un segmento.
- Obtener las ecuaciones cartesiana y vectorial de las curvas cónicas: de una circunferencia y sus intersecciones con rectas y otras circunferencias, y de una parábola, elipse e hipérbola.

Unidad de competencia II. Geometría analítica en el plano

Conocimientos

- Determinar las ecuaciones de parábolas, elipses e hipérbolas, con centro o vértice fuera del origen y cualquier inclinación de su eje, y obtener sus elementos constitutivos, aplicando las ecuaciones de transformación de coordenadas.
- Determinar las ecuaciones en coordenadas polares, de diversas curvas de uso común en diversas áreas de las matemáticas y otras ciencias.
- Plantear y resolver problemas que involucren el uso de los conceptos anteriores, generando conclusiones pertinentes de los resultados obtenidos.

Unidad de competencia II. Geometría analítica en el plano

Habilidades

Resolver ejercicios y problemas empleando procedimientos teóricos y prácticos; obteniendo conclusiones pertienentes de los resultados conseguidos y usándolas como elementos de decisión según sea el caso.

Actitudes y valores

Autonomía, responsabilidad, respeto, tolerancia, puntualidad y trabajo.

Unidad de competencia II. Geometría analítica en el plano I

Temario

- Recta en el plano
  - Ecuaciones vectorial y cartesiana
  - Puntos en una recta
- Intersección de rectas
- Intersección de rectas
- Intersección de rectas
- Distancias desde un punto hasta una recta y distancia entre dos rectas
- Familias de rectas
- Segmentos. Partición de segmentos
- Curvas cónicas
  - Circunferencia
    - Ecuaciones cartesiana y vectorial
    - Intersecciones recta-circunferencia y circunferencia-circunferencia
- Secciones cónicas

Unidad de competencia II. Geometría analítica en el plano II

Temario

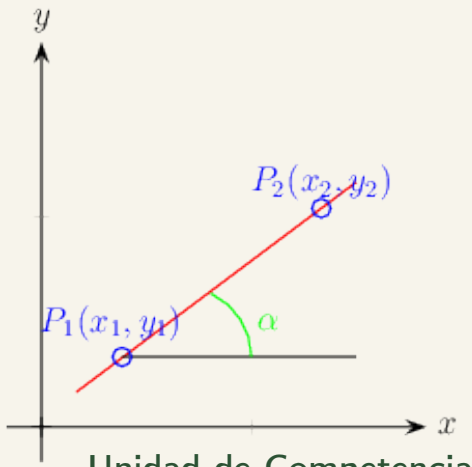
- Parábola
  - Ecuaciones vectorial y cartesiana
- Elipse
  - Ecuaciones vectorial y cartesiana
- Hipérbola
  - Ecuaciones vectorial y cartesiana
- Rotación y/o traslación
  - Rotación
  - Traslación
  - Ecuación general de segundo grado
- Coordenadas polares

Recta

Analíticamente es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables.
Representración gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado con dos variables.

Una recta queda determinada si son conocidas al menos dos condiciones:

- Dos de sus puntos
- Un punto y su dirección



Punto-Pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Pendiente-Ordenada al origen

La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje y en el punto $P(0, b)$ es:

$$y = mx + b$$

Cartesiana

La ecuación de la recta que pasa por los punto $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Abscisa y Ordenada en el origen

La ecuación de la recta que corta al eje coordenado x en el punto $P(a, 0)$ y al eje coordenado y en el punto $Q(0, b)$ es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

General (Cartesiana ordinaria)

Representación mediante una ecuación lineal o de primer grado en las variables x e y, con A, B y C constantes arbitrarias es:

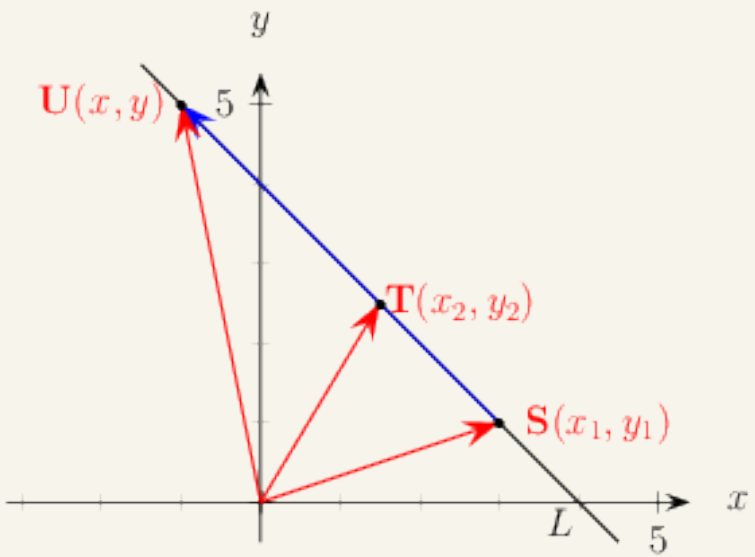
$$Ax + By + C = 0$$

La pendiente estará dada por $m = -\frac{A}{B}$ y su ordenada al origen por $b = -\frac{C}{B}$

Vectorial

La ecuación de la recta representada por el vector **U** y que pasa por los puntos $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$, que son la cabeza de los vectores **S** y **T** respectivamente es:

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} + r(\mathbf{T} - \mathbf{S})$$

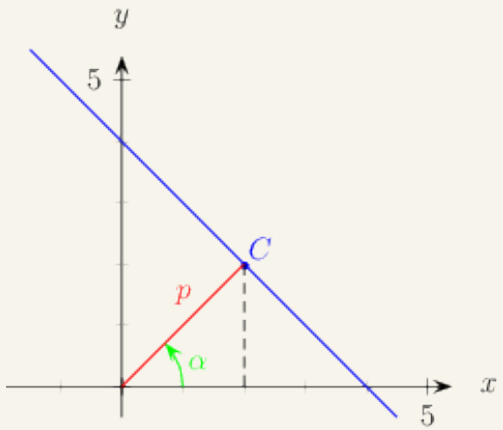


Normal

La ecuación de la recta, a través de su normal, esta representada por las coordenadas del punto C, la distancia de este punto al origen p y el ángulo ω que forma con el eje x es:

$$x\cos\omega + y\,\text{sen}\,\omega - p = 0$$

Su pendiente esta dada por: $m = -\frac{\cos\omega}{\text{sen}\,\omega}$



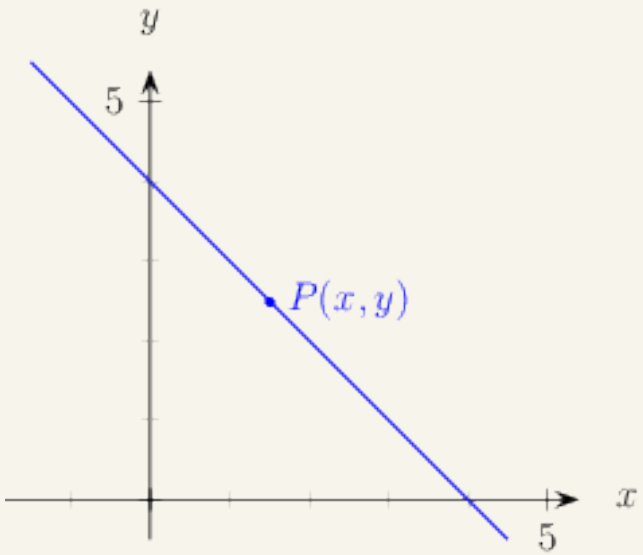
Normal a partir de la ecuación general

La ecuación de la recta, a través de su normal, esta representada por la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ y su normal de la siguiente manera:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

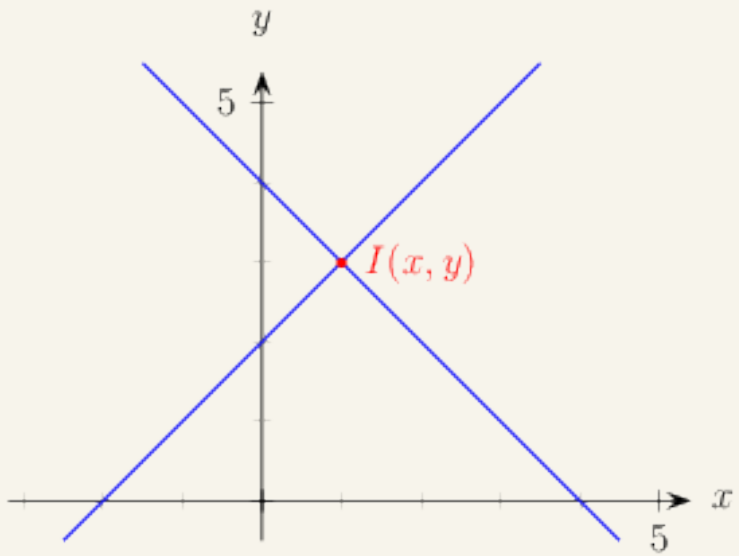
Puntos en una recta

Para conocer si un punto $P(x, y)$ pasa, se encuentra o forma parte de una recta, se verifica sustituyendo a x e y en la ecuación de la recta.



Intersección de dos rectas

La **intersección** de dos rectas *distintas* es un punto $I(x, y)$ o bien el conjunto vacío (si las rectas son paralelas).



Intersección de dos rectas dadas por su ecuación genral

Si las rectas están representadas por sus ecuaciones generales, $L_1 : Ax + By + C = 0$ y $L_1 : A'x + B'y + C' = 0$, encontrando los valores de x e y del sistema de ecuaciones se tiene que:

Solución	Condición	Interpretación
Única	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	Se intersectan en el punto P
No existe	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	Son rectas paralelas
Infinitas	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	Son la misma recta

Intersección de dos rectas en forma explicita

Si las rectas están representadas mediante su forma explicita, $L_1 : y = m_1x + b_1$ y $L_1 : y = m_2x + b_2$, considerando el ángulo que forman entre ella, $\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, se tiene:

Solución	Condición	Interpretación
$\alpha = 0°$	$m_1 = m_2$	Son rectas paralelas
$\alpha = 90°$	$1 + m_1 m_2 = 0$ $m_1 m_2 = -1$	Son rectas perpendiculares

Intersección de dos rectas en forma vectorial

Si las rectas están representadas de forma vectorial,

$$L_1 : \mathbf{U}_1 = \mathbf{S}_1 + r(\mathbf{T}_1 - \mathbf{S}_1)$$

$$L_2 : \mathbf{U}_2 = \mathbf{S}_2 + r(\mathbf{T}_2 - \mathbf{S}_2)$$

se puede considerar que si el ángulo que forman $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_1$ es igual al ángulo que forman $\mathbf{T}_1 - \mathbf{S}_1$ y $\mathbf{T}_2 - \mathbf{S}_2$, por tanto, si $\alpha = \cos_{-1} \frac{(\mathbf{T}_1 - \mathbf{S}_1)(\mathbf{T}_2 - \mathbf{S}_2)}{|\mathbf{T}_1 - \mathbf{S}_1|\,|\mathbf{T}_2 - \mathbf{S}_2|}$ entonces

Solución	Condición	Interpretación
$\alpha = 0°$	$(\mathbf{T}_1 - \mathbf{S}_1)(\mathbf{T}_2 - \mathbf{S}_2) = \lvert\mathbf{T}_1 - \mathbf{S}_1\rvert\,\lvert\mathbf{T}_2 - \mathbf{S}_2\rvert$	Paralelas
$\alpha = 90°$	$(\mathbf{T}_1 - \mathbf{S}_1)(\mathbf{T}_2 - \mathbf{S}_2) = 0$	Perpendiculares

Intersección de dos rectas que pasan por dos puntos

Si las rectas están pasan por dos puntos, $L_1 : P_0(x_0, y_0) y P_1(x_1, y_1)$ y $L_2 : P_2(x_2, y_2) y P_3(x_3, y_3)$, el punto $Q(x, y)$ de intersección esta dado por:

$$x = \frac{m_1 x_0 - m_2 x_2 + y_2 - y_0}{m_1 - m_2}$$

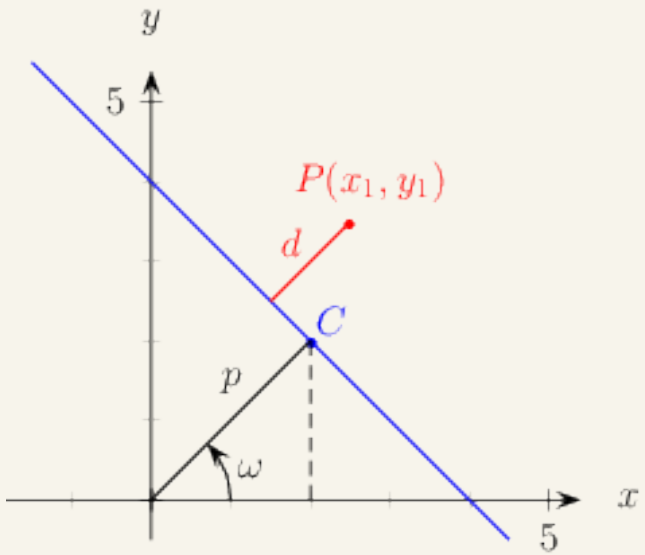
$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) + y_2$$

con m_1 y m_2 las pendientes de las rectas L_1 y L_2 respectivamente

Distancia desde un punto hasta una recta

La distancia d de un punto $P(x_1, y_1)$ hasta una recta L cuya ecuación es $x\cos\omega + y\,\text{sen}\,\omega - p = 0$ esta dada por:

$$d = x_1\cos\omega + y_1\,\text{sen}\,\omega - p$$



Distancia desde un punto hasta una recta

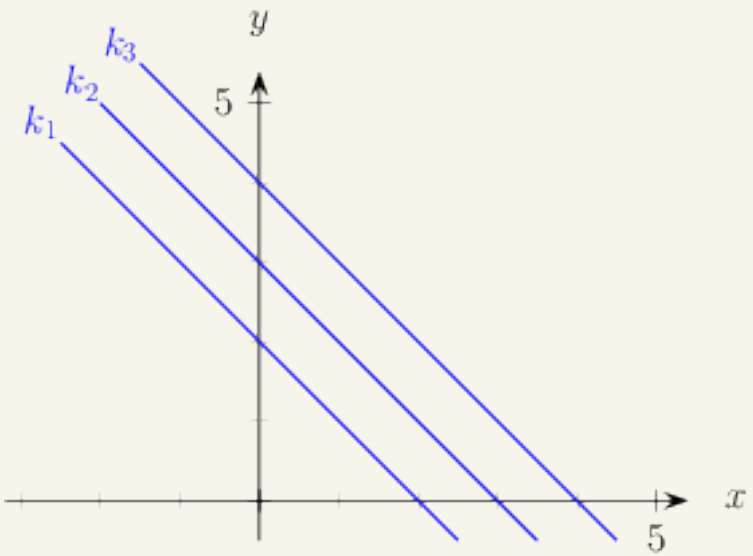
O análogamente:

$$d = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x_1 + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y_1 + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Se utilizará el valor positivo de la raíz positiva cuando $C < 0$ y el valor negativo en caso contrario.

Familias de rectas

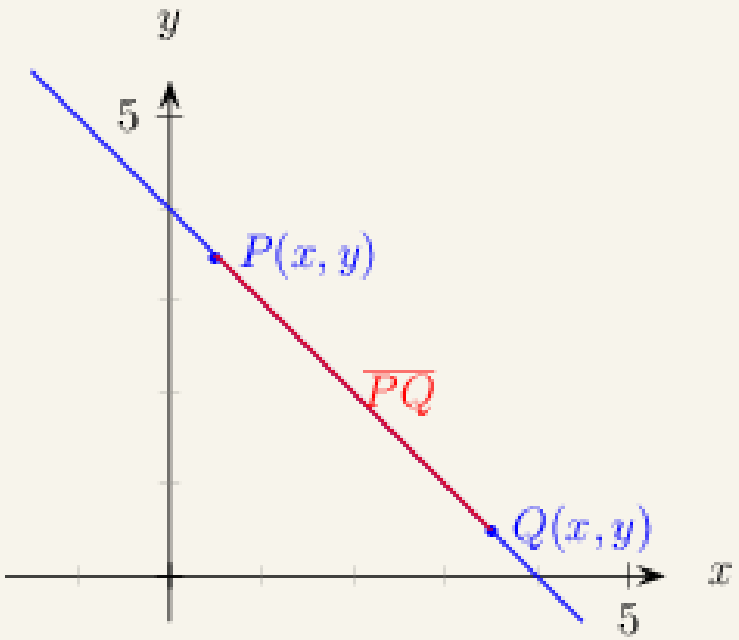
Al conjunto de rectas que satisfacen una única condición geométrica se llama **familia** o **haz de rectas**. Analíticamente pueden representarse por las ecuaciones:
con k como una constante arbitraria que se llama *parámetro* de la familia.



Segmentos. Partición de segmentos

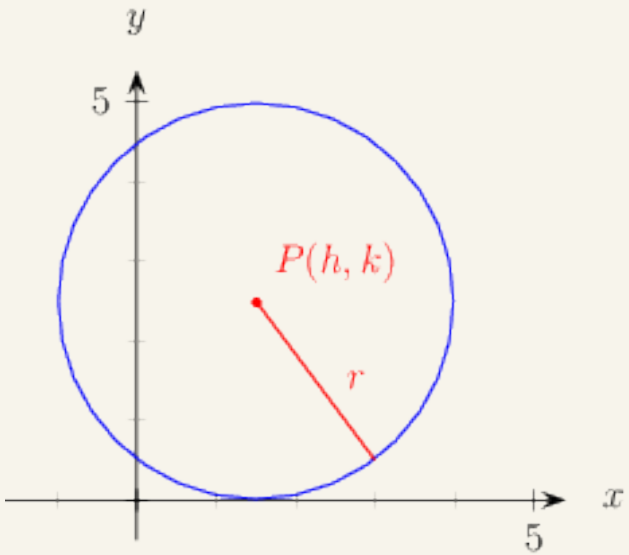
Segmento

Conjunto de valores permitidos de x que restringe un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$



Circunferencia

Lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia (*radio*) constante de un punto fijo (*centro*) en ese plano.
Analíticamente es una ecuación de segundo grado con dos variables.



Ecuaciones cartesiana y vectorial

Ecuación cartesiana

La circunferencia con centro en el punto $P(h, k)$ y con radio constante r, tiene la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Si el centro es el origen la ecuación es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación general

$$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$$

con centro en el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Intersecciones recta-circunferencia

La idea general es lograr la intersección de las ecuaciones de la recta y la circunferencia para buscar una solución, raíces, sin embargo existen tres posibles casos:

1. La intersección se da en dos puntos, existen dos raíces.
2. La intersección se da en un punto, existe una raíz (recta tangente).
3. No existe intersección.

Para lo cual es necesario resolver el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$y = mx + b$$

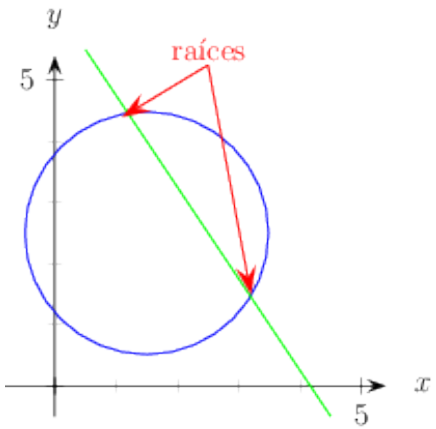
Intersecciones recta-circunferencia

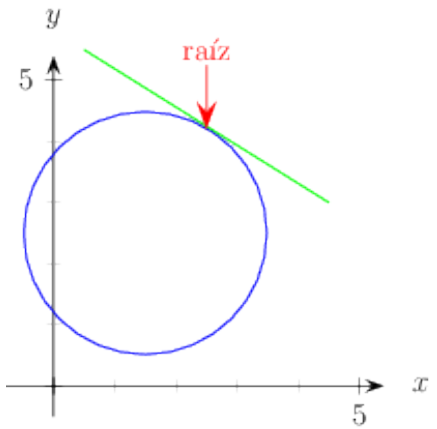
También al obtener la ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ es posible determinar la posición de la circunferencia y la recta mediante

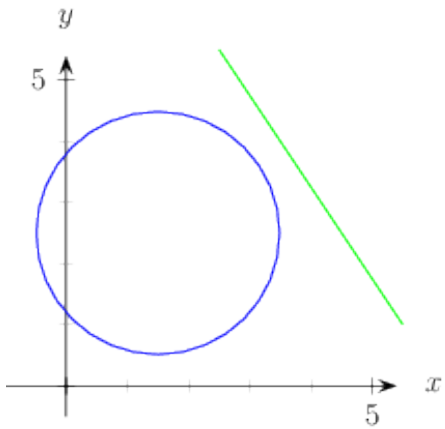
$$\Delta = b^{2-4ac}$$

Si

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Recta secante	Recta tangente	Sin intersección





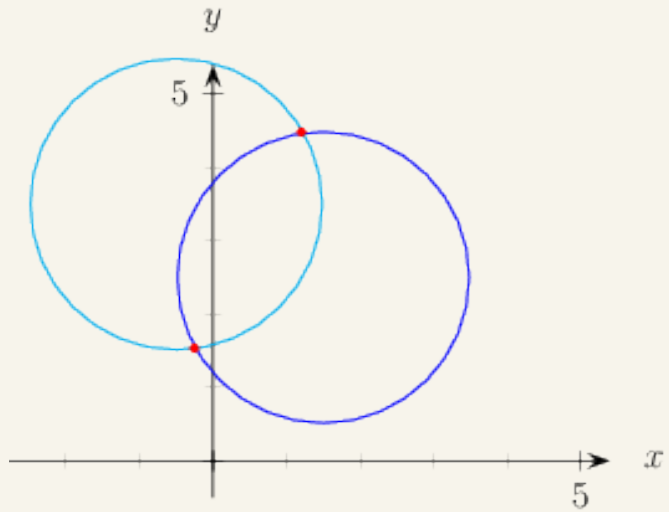


Intersecciones circunferencia-circunferencia

Para obtener los dos puntos de intersección de dos circunferencias a través de sus ecuaciones, para ello es necesario resolver el sistema:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

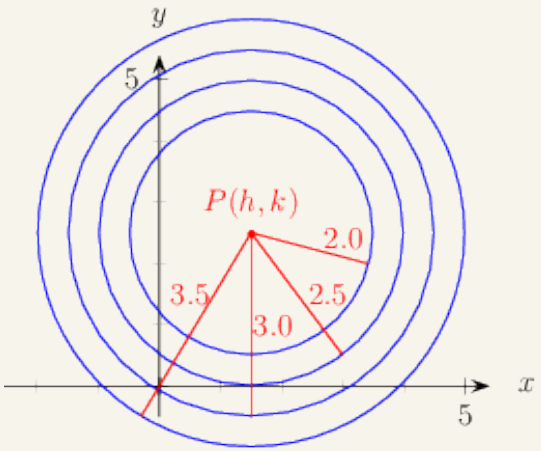


Familia de circunferencias

La ecuación de una circunferencia que satisface solamente a dos condiciones, contiene una constante arbitraria llamada *parámetro*, se dice entonces la ecuación representa a una *familia de funciones*.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=l^2$$

con el parámetro l con cualquier valor positivo.



Secciones cónicas

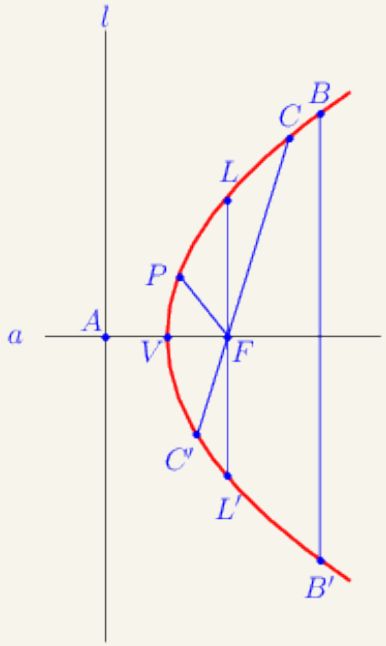
El lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a un punto y una recta es constante recibe el nombre de *sección cónica* o simplemente *cónica*. El punto fijo se llama *foco* de la cónica, la recta fija *directriz* y la relación constante *excentricidad*.

Clasificación de las cónicas de acuerdo al valor de su excentricidad (e):

- Si $e = 1$, la cónica se llama **parábola**.
- Si $e < 1$, la cónica se llama **elipse**.
- Si $e > 1$, la cónica se llama **hipérbola**.

Parábola

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es simpre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.



F: Foco

l: Directriz

a: Eje de la parábola

V: Vértice

A: Intersección eje-directriz

F: Foco

BB': Cuerda

CC': Cuerda focal

LL': Lado recto

P: Radio focal o radio vector

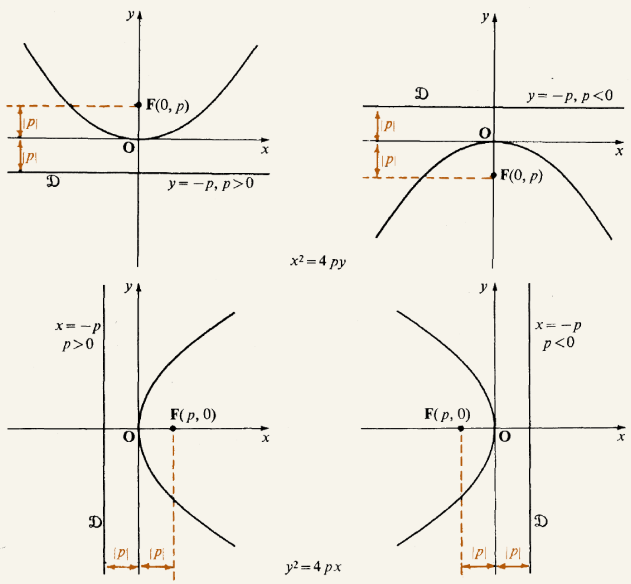
Parábola

Ecuaciones vectorial y cartesiana

Ecuación cartesiana de la parábola

Sea $F(p,0)$ el foco y el vértice $V(0,0)$, entonces la ecuación de la parábola sera:

1. Si el foco esta a la izquierda de la directriz $y^2 = \pm 4px$
2. Si el foco esta a la derecha de la directriz $x^2 = \pm 4py$



Ecuación de la parábola paralelo a un eje coordenado

Sea $F(p,0)$ el foco y el vértice $V(k,h)$, entonces la ecuación de la parábola sera:

1. Eje paralelo al eje x $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
2. Eje paralelo al eje y $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Ecuación de segundo grado de la parábola

Una ecuación de segundo grado en las variables x e y que carezcan del término xy puede escribirse de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a el eje x.
- Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a el eje y

Ecuación de la tangente a una parábola

Para un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ se tiene:

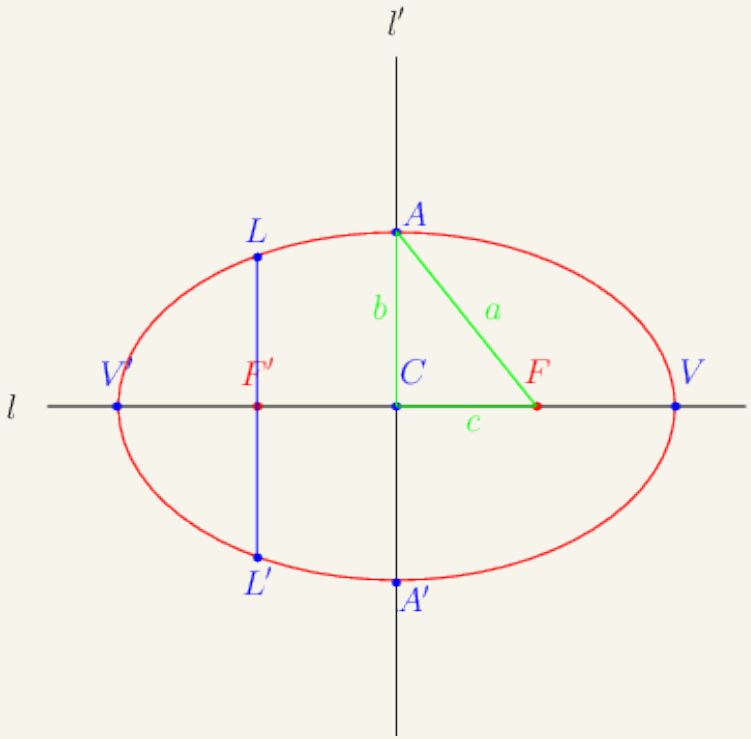
$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Para una tangente de pendiente m se tiene:

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos*.



F, F': Focos

l: Eje focal

l': Eje normal

V, V': Vértices

C: Centro

FF': Distancia entre focos $2c$

VV': Eje mayor $2a$

AA': Eje menor $2b$

LL': Lado recto $\frac{2b^2}{a}$

Ecuación cartesiana de la elipse con centro en el origen

Para todos los casos se cumple que $c^2 = a^2 - b^2$

1. Horizontal: Sean $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ los focos, $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ los vértices, entonces:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Vertical: Sean $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$ los focos, $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$ los vértices, entonces:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ecuación cartesiana de la elipse con centro en el punto $P(h,k)$

Para todos los casos se cumple que $c^2 = a^2 - b^2$

1. Horizontal: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
2. Vertical: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Excentricidad de la elipse

Es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse y esta dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$c \leq a$, $0 \leq e \leq 1$

Ecuación general de la elipse

La ecuación de la elipse esta dada por:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. Horizontal: $A = a^2$, $C = b^2$, $D = -2a^2h$, $E = -2b^2k$ y $F = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$
2. Vertical: $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

Ecuación de la tangente a una Elipse

Para un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ y la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2 + b^2$ se tiene:

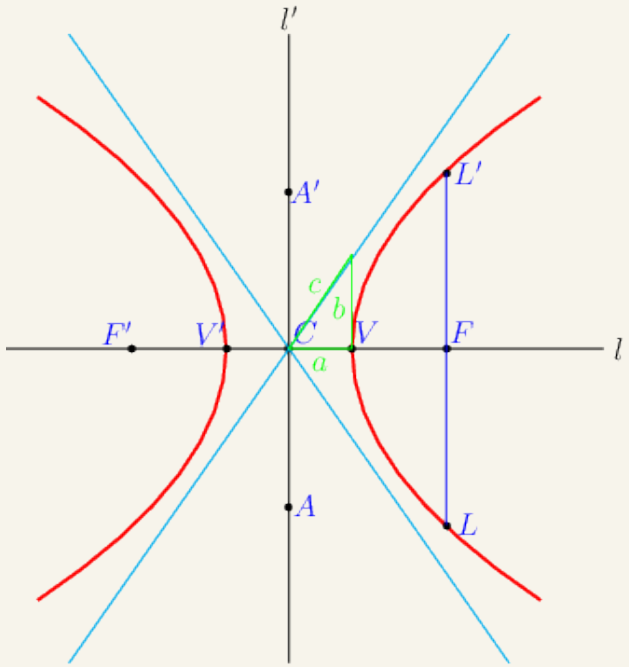
$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

Para una tangente de pendiente m se tiene:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.



F, F': Focos

V, V': Vértices

C: Centro

l: Eje normal

l': Eje focal

Segmento VV': Eje transversal $2a$

Segmento FF': Distancia entre focos $2c$

Segmento AA': Eje conjugado $2b$

Segmento LL': Lado recto $\frac{2b^2}{a}$

Ecuación cartesiana de la Hipérbola con centro en el origen

Para todos los casos se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$

1. Horizontal: Sean $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ los focos, $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ los vértices, entonces:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   con asintotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$

2. Vertical: Sean $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$ los focos, $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$ los vértices, entonces:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

   con asintotas: $y = \pm\frac{a}{b}x$

Ecuación cartesiana de la Hipérbola con centro en el punto $P(h,k)$

Para todos los casos se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$

1. Horizontal: Sean $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ los focos, $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$ los vértices, entonces:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

con asintotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

Ecuación cartesiana de la Hipérbola con centro en el punto $P(h,k)$

2. Vertical: Sean $F(0,c)$ y $F'(0,-c)$ los focos, $V(0,a)$ y $V'(0,-a)$ los vértices, entonces:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

con asintotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

Excentricidad de la hipérbola

Es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse y esta dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$c \leq a$, $0 \leq e \leq 1$

Ecuación general de la Hipérbola

La ecuación de la hipérbola esta dada por:

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. Horizontal: $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = 2a^2k$ y $F = b^2h^2 - a^2k^2 + a^2b^2$
2. Vertical: $A = b^2$, $C = a^2$, $D = 2b^2h$, $E = 2a^2k$ y $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

Ecuación de la tangente a una Hipérbola

Para un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ y la Hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2 + b^2$ se tiene:

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$$

Para una tangente de pendiente m se tiene:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

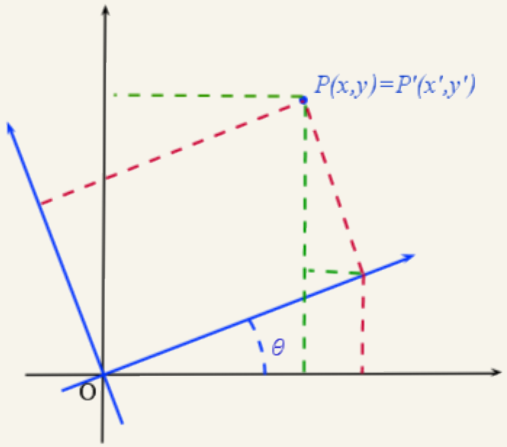
con $|m| > \frac{b}{a}$

Rotación de ejes

Si se desea rotar los ejes con origen O en un ángulo θ en torno a su centro de rotación (origen)y se tiene un punto $P(x, y)$, en el nuevo plano se tiene a $P'(x', y')$ con las coordenadas dadas por:

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$

$$y = y' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

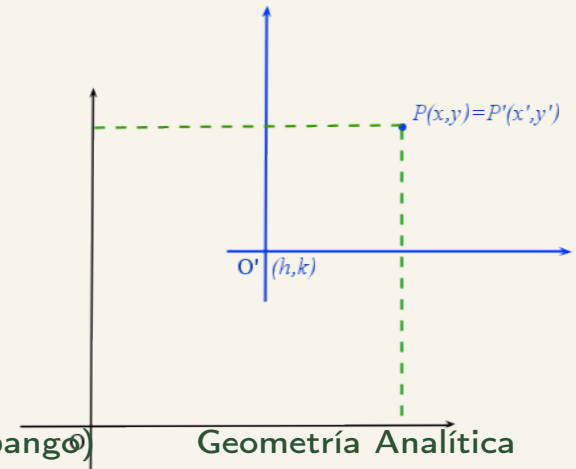


Traslación de ejes

Si se trasladan los ejes coordenados a un nuevo centro u origen $O'(h,k)$, entonces se tendrá un punto $P(x,y)$ trasladado con ese origen de forma que $P'(x',y')$ para el nuevo sistema coordenado. Los valores de x' y y' estaran dados por:

$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$



Ecuación general de segundo grado

Ecuación general de segundo grado

La ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

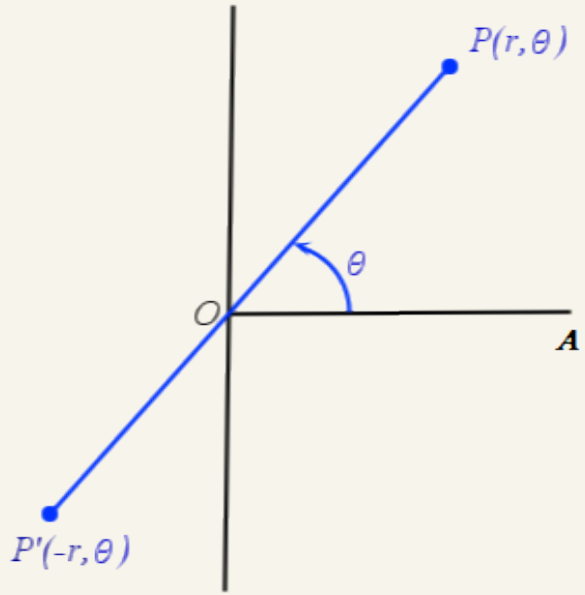
corrsponde a una sección cónica considerando lo siguiente:

$B^2 - 4AC < 0$ la cuerva es una elipse
$B^2 - 4AC = 0$ la cuerva es una parábola
$B^2 - 4AC > 0$ la cuerva es una hipérbola

*En algunos casos particulares la ecuación puede representar degeneraciones (dos rectas, un punto o rectas imaginarias).

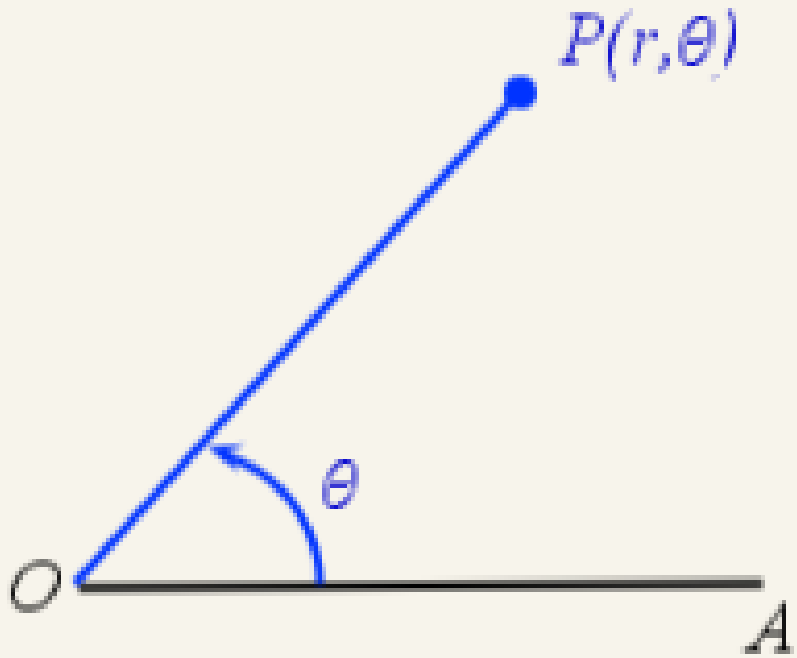
Sistema de coordenadas polares

Sistema de coordenadas por medio del cuar el posible determinar la posiciónd e un punto P cualquier a través de su localización relativa con respecto a una recta fija y a un punto dijo de esa recta. La recta fija se llama *eje polar* ($\overline{OA}$), y el punto se llama *polo*



Coordenadas polares

Las coordenadas polaeres de un punto P son representadas por la pareja ordenada (r, θ), donde r es la distancia del origen al punto y θ es el ángulo entre r y el eje polar $\overline{OA}$.



Relación entre las coordenadas rectangulares y polares

Sean (x, y) las coordenadas de un punto P en un sistemas de ejes coordenados rectangulares, la relación de dicho punto con el sistema de coordenadas polares, y viceversa, estará dada por:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$

Bibliografía

- Arcos Quezada, J. I., Geometría Analítica para estudiantes de ingeniería. Toluca, México. Editorial Kali.
- Haaser, LaSalle, Sullivan., Análisis Matemático volúmenes I y II. México. Editorial Trillas.
- Riddle, D. F., Geometría Analítica. 6ta. Ed. México. International Thomson Editores.
- Wooton, Beckenbach y Fleming. Geometría Analítica Moderna. Publicaciones Cultural. México.
- Lehmann. Geometría Analítica. Limusa. México.
- Filloy, Hitt, Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Solis y Nolasco, Geometría Analítica, Editorial Limusa, México.