Universiada Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Material de apoyo
para la UA de Topología de Conjuntos

Funciones Irreducibles y HU-terminales

Fernando Orozco Zitli

Propósito general de la Unidad de Aprendizaje

Conocer ejemplos de funciones atómicas, irreducibles, monótonas y HU-terminales y algunas relaciones entre estas.

Habilidades

Habilidades desarrolladas en los estudiantes:

Abstración, rigor matemático y análisis en el estudio de algunas clases de funciones.

Divulgar:

Divulgar los resultados que se conocen sobre algunas clases de funciones.

Indicaciones

- Se requiere haber cubierto el cincuenta porciento de la UA Topología de Conjuntos.
- Se consideran una gran variedad de dibujos.

Contenido

Funciones

– Atómicas
– Irreducibles
– Monótonas
– Abiertas
– HU-Terminales

Introducción

Dada la existencia de una gran variedad de clases de funciones, no es posible abarcar un gran número de ellas.

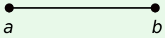
En este material se presentan algunos ejemplos de las siguientes clases de funciones: atómicas, irreducibles, monótonas, HU-Terminales y las relaciones entre estas.

Definición de un continuo

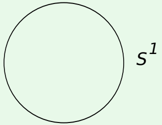
Un continuo es un espacio métrico compacto y conexo.

Ejemplos:

Un intervalo cerrado.

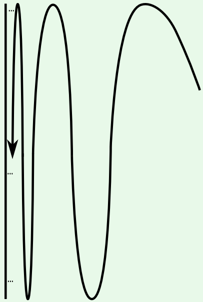


Un círculo.



Definición de un continuo irreducible

Sean X un continuo y $A \subset X$. Decimos que X es **irreducible sobre** A si ningún subcontinuo propio de X contiene a A. Un continuo X se dice que es **irreducible** si existen $p, q \in X$ tales que X es irreducible sobre $\{p, q\}$. Cuando X sea irreducible sobre $\{p, q\}$, donde $p, q \in X$, entonces decimos que X es irreducible entre p y q.



La cerradura de la gráfica de la función $\text{sen}(\frac{1}{x})$ es irrreducible.

Definiciones de algunas clases de funciones

Sean X e Y continuos. Decimos que una función continua y supravectiva $f : X \to Y$ es:

Atómica, si para cada subcontinuo K de X tal que $f(K)$ es no degenerado, $f^{-1}(f(K)) = K$.

Irreducible, si para cada subcontinuo irreducible no degenerado I de Y, $f^{-1}(I)$ es irreducible.

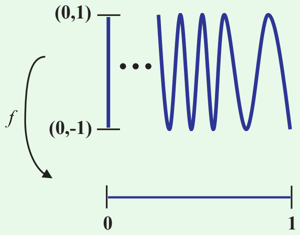
Monótona, si para cada $t \in Y$, se tiene que $f^{-1}(t)$ es conexo.

Abierta, si para cada abierto U en X, $f(U)$ es abierto en Y.

Funciones atómitas

Ejemplo

Sea X la cerradura de la gráfica de la función $\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$. Definamos $f : X \to [0, 1]$ como $f(x, y) = x$



Veamos que:

1. f es irreducible.
2. f es monótona.
3. f no es interior en $q = (0, x)$ para $x \in (0, 1]$.
4. f es interior en $p = \left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, $x \in (0, 1)$.
   (Una función suprayectiva, continua entre continuos $g : X \to Y$ es **interior en un punto** $p \in X$ si para cada abierto U que contiene a p, se tiene que $g(p) \in int(f(U))$).
5. f no es abierta.

Algunos resultados

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces

1. f es abierta si y solo si f es interior en cada punto $p \in X$.
2. f es monótona si y solo si para cada subcontinuo Q de Y, $f^{-1}(Q)$ es conexo.
3. Si f es inyectiva, entonces f es atómica.
4. Si f es atómica, entonces f es monótona.

Relaciones entre familias de funciones

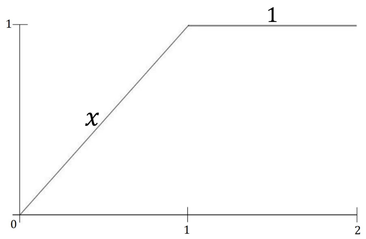
Dados X y Y continuos, denotamos por $\mathcal{AT}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{O}$ a la familia de todas las funciones atómicas, irreducibles, monótonas y abiertas, respectivamente.

1. $\mathcal{AT} \subsetneq \mathcal{I} \subsetneq \mathcal{M}$.

La siguiente función que es irreducible y no es atómica.

Sea $f : [0,2] \to [0,1]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$



La gráfica de f.

f no es atómica

Sea $K = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Entonces $f(K) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Notemos que $f^{-1}(f(K)) = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \neq K$.

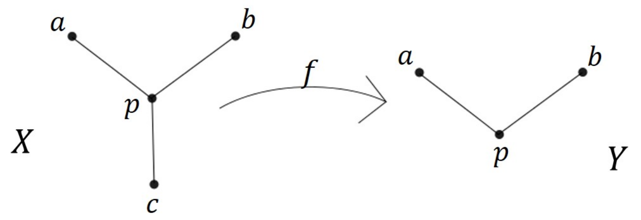
Por lo que f no es atómica.

Es fácil probar que f es irreducible.

La siguiente función es monótona y no es irreducible.

Sean X un triodo simple, $pa \cup pb \cup pc$, y Y el arco, $pa \cup pb$. Sea $f : X \to Y$ definidad por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in pa \cup pb, \\ \\ p, & \text{si} \quad x \in pc. \end{cases}$$



f no es irreducible.

Observemos que Y es irreducible sobre $\{a, b\}$, pero $f^{-1}(Y) = X$, el cual no es irreducible.

Por lo tanto f no es irreducible.

Es fácil probar que f es monótona.

Iniciamos con la definición de un continuo unicoherente.

Un continuo X es llamado **unicoherente** si dados A, B subcontinuos propios de X tales que $A \cup B = X$ entonces $A \cap B$ es conexo.

Un continuo X es llamado **hereditariamente unicoherente** si la intersección de cualesquiera dos subcontinuos de X es conexo.

Un arco y la cerradura de la gráfica de la función $Sen(\frac{1}{x})$.

son continuos hereditariamente unicoherentes.

Sea X un continuo hereditariamente unicoherente.

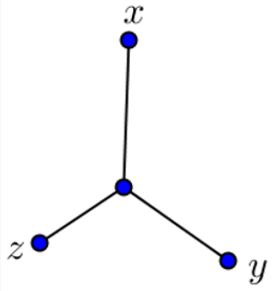
Un subcontinuo K de X es llamado un continuo HU-terminal de X si K está contenido en un subcontinuo irreducible de X y para cada subcontinuo irreducible I de X que contenga a K, existe un punto $x \in X$ tal que I es irreducible sobre $K \cup \{x\}$.

Ejemplo:

Consideremos al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología usual. Entonces K es un continuo HU-terminal de $[0, 1]$ si y solo si $K \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$.

Ejemplo:

Sea $X = px \cup py \cup pz$ un triodo simple. Entonces cada continuo HU-terminal de X contiene al menos un punto del conjunto $\{x, y, z\}$.



Dados X y Y continuos hereditariamente unicoherentes, denotamos por

$\mathcal{HU}$-$\mathcal{T}$ a la familia de todas las funciones $f : X \to Y$ que mandan cada continuo HU-terminal de X sobre un continuo HU-terminal de Y.

A los elementos de $\mathcal{HU}$-$\mathcal{T}$ se les conoce como funciones HU-terminales.

Sean X y Y continuos hereditariamente unicoherentes.

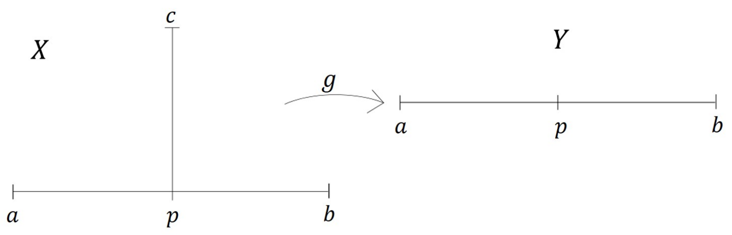
Si $f : X \to Y$ es una función continua tal que $f \in \mathcal{I}$ y K es un continuo HU-terminal de X, entonces $f(K)$ es un subcontinuo HU-terminal de Y.

En la clase de los continuos hereditariamente unicoherentes, se tiene que $\mathcal{AT} \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{HU}$-$\mathcal{T}$.

La siguiente función es HU-terminal pero no irreducible.

Sean $X = pa \cup pb \cup pc$ un triodo simple, donde $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (0, 1)$ y $p = (0, 0)$, $Y = pa \cup pb$.

Sea $g : X \to Y$ definida por $g(x, y) = (x + y, 0)$.



La función g cumple lo siguiente:

1. g es continua y suprayectiva.
2. $g \notin \mathcal{M}$, ya que $g^{-1}(b) = \{b, c\}$.
3. $g \notin \mathcal{I}$, pues $g \notin \mathcal{M}$.
4. $g \notin \mathcal{AT}$, pues $g \notin \mathcal{I}$.

Probaremos que $g \in \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$.

Sea K un continuo HU-terminal de X.

Como X es un triodo simple, $K \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$.

Dado que $g(a) = a$, $g(b) = b$ y $g(c) = b$, $g(K) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$.

Por lo que $g(K)$ es un continuo HU-terminal de Y.

Por tanto $g \in \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$.

Mostraremos que existe una función f tal que $f \in \mathcal{M}$ y que $f \notin \mathcal{HU}$-$\mathcal{T}$.

Sean $X = pa \cup pb \cup pc$ un triodo simple y $Y = pa \cup pb$.

Definimos $f : X \to Y$ como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in pa \cup pb, \\ p, & \text{si} \quad x \in pc. \end{cases}$$

La función f cumple que:

$f \in \mathcal{M}$ y $f \notin \mathcal{I}$.

$f \notin \mathcal{HU}$-$\mathcal{T}$, se sigue de que $\{c\}$ es un continuo HU-terminal de X y de que $\{f(c)\} = \{p\}$ no es un continuo HU-terminal de Y.

Concluimos con el siguiente resultado:

En la clase de los continuos hereditariamente hunicoherentes, se tiene que:

1. $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$.
2. $\mathcal{AT} \subsetneq \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$.
3. $\mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{M}$.
4. $\mathcal{M} \nsubseteq \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}$.

Una pregunta:

Sea $\mathcal{S} \in \{\mathcal{AT}, \mathcal{I}, \mathcal{M}, \mathcal{HU}\text{-}\mathcal{T}\}$.

¿Cuál es la relación que hay entre $\mathcal{S}$ y la clase de las funciones abiertas?

Bibliografía

- Anderson, R. D., *Atomic decompositions of continua*, Duke Math. J. 23 (1956), 507-514.
- Charatonik, J. J., *Confluent mapping and unicoherence of continua*, Fund. Math. **56** (1964), 213-220.
- Davis, J. F., *Semi-confluent mappings on continua*, Proceeding of the Guilford College Sesquicentennial Topology conference, 1988 (Greenboro, NC 1988), Guilford College, Greensboro, NC 1988, 13-17.
- Emeryk, A. and Horbanowicz, Z., *On atomic mappings*, Colloq. Math. **27** (1973), 49-55.
- Lelek, A. and Read, D. R., *Compositions of confluent mappings and some other classes of functions*, Colloq. Math. **29** (1974), 101-112.

Bibliografía

Maćkowiak, T., *Semi-confluent mappings and their invariants*, Fund. Math. **79** (1973), 251-264.

——, *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math., 158 (1979).

McAuley, L. F., *An atomic decomposition of continua into aposyndetic continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 1-11.

—— , *Open mappings and open problems*, Topology Conference Arizona state University, Tempe, Arizona 1967, E. E. Grace, editor, 1968, 184-202.

——, *More about open mappings and open problems*, Proceedings of the Auburn Topology Conference, March 1969, W.R.R. Transue, editor, Auburn University, Auburm, Alabama 1969, 57-70.

Bibliografía

- Charatonik, J.J., *Absolutely terminal continua and confluent mappings*, Comment. Math. Univ. Carol. 32, 2(1991), 377-382.
- Charatonik, J.J., *Atomic mappings and extremal continua*, Extracta Math. 7 (1992), 131-134.
- Charatonik, J.J., *Mapping invariance of extremal continua*, Topology Appl. 43 (1992), 275-282.
- Gordh, G. R., Jr., *Terminal subcontinua of hereditarily unicoherent continua*, Pacific J. Math. 47 (1973), 457-464.
- Pyrih, P., Bárta, T., Opěla, D., Růžička, P. y Šámal, R., *Irreducible mappings and HU-terminal continua*, Electronic Journal: Southwest Journal of Pure and Applied Math. 1 (1999), 31-41.