

Introducción a la Programación Lineal

Juan Pablo Cobá Juárez Pegueros
Investigación de Operaciones
Ingeniería Mecánica
Facultad de Ingeniería
2015

Historia

- ▶ La investigación de Operaciones se caracteriza por dar un enfoque científico para la toma de decisiones gerenciales.
- ▶ Se trata de aplicar los métodos matemáticos y las capacidades de las computadoras modernas a problemas difíciles y no estructurados que se enfrentan los ingenieros mecánicos en sus ámbitos laborales.

Historia cont.

- ▶ Las raíces de la investigación de operaciones se remontan a los problemas planteados por las primeras civilizaciones.
- ▶ Fue sino hasta la Segunda Guerra Mundial que se identificó como un cuerpo respetable y bien definido de conocimientos.

Historia cont.

- ▶ Desde entonces, ha crecido a un ritmo impresionante cambiando nuestras actitudes hacia la toma de decisiones, e infiltrándose en cada área concebible de aplicación, que cubren una amplia variedad de problemas como pueden ser:
- ▶ Negocios (economía),
- ▶ Industria manufacturera
- ▶ industria militar
- ▶ sector público

Origen

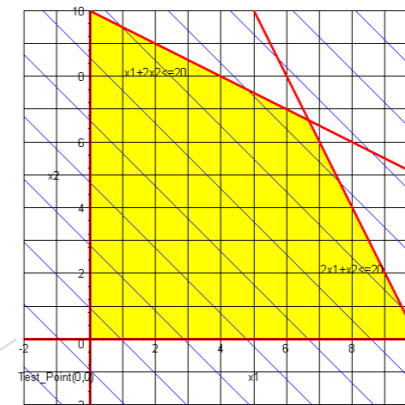
- ▶ La investigación de operaciones es conocida por una variedad de otros nombres. En los Estados Unidos, la ciencia de la administración se ha desempeñado como sinónimo y se utiliza ampliamente hoy en día, mientras que en Gran Bretaña la investigación operativa parece ser el nombre más aceptado

Origen (cont)

- ▶ análisis de sistemas
- ▶ análisis de costo-beneficio
- ▶ el análisis de costo-efectividad

La programación matemática

- ▶ La programación matemática, y en especial la programación lineal, es una de las ramas más desarrolladas y más utilizados de la ciencia administrativa.
- ▶ Se refiere a la asignación óptima de recursos limitados entre las actividades de la competencia, en virtud de un conjunto de restricciones impuestas por la naturaleza del problema que se está estudiando.



La programación matemática

- ▶ Estas restricciones podrían ser de tipo financiero, tecnológico, marketing, organización, o muchas otras consideraciones.
- ▶ En términos generales, la programación matemática se puede definir como una representación matemática orientada a la programación o la planificación de la mejor manera posible la asignación de recursos escasos.
- ▶ Cuando la representación matemática utiliza funciones lineales en exclusiva, tenemos un modelo de programación lineal.

Programación Lineal

The background features abstract, overlapping geometric shapes in various shades of green, ranging from light lime to dark forest green. These shapes are primarily located on the right side of the slide, creating a modern, layered effect. The text 'Programación Lineal' is centered on the left side of the slide in a clean, sans-serif font.

¿Qué es ?

- ▶ Es un modelo matemáticos que permite obtener la solución a problemas que permite tomas decisiones.
- ▶ Permite optimizar recursos o minimizar gastos



Aplicaciones típicas

- Se requiere elaborar un programa de producción y una política de inventario que satisfaga la demanda esto permitiría a la empresa satisfacer la demanda y al mismo tiempo minimizar los costos totales de producción de inventarios
- Determinar cuando un proveedor debe resurtir a sus clientes de modo que los costos del transporte local se minimicen

Aplicaciones típicas

- Seleccionar un portafolio entre diversas alternativas de acciones e inversiones, que le permitan maximizar su inversión.
- Determinar cómo asignar un mejor presupuesto de publicidad entre medios de publicidad como radio, tv, periódicos y revistas determinado la combinación de medios que maximice la efectividad de publicidad.

Propiedad básica de la PL

- Su objetivo es la maximización o minimización de los recursos con los que se cuenta.

Propiedad básica de la PL (maximización y minimización)

- minimizar los costos
- maximizar los rendimientos de la inversión
- maximizar la efectividad de la publicidad
- minimizar los costos del transporte

Segunda propiedad de la PL

- Restricciones
- Limitan el grado en que se puede perseguir el objetivo
- Son otra función general de los problemas de programación lineal

Ejemplo

- RMC, Inc. es una empresa pequeña que fabrica una variedad de productos químicos. En un proceso de producción particular de utilizan 3 materias primas para elaborar dos productos: un aditivo para combustible y una base para solvente. el aditivo se vende a las compañías petroleras y se utiliza en la producción de gasolina. La base para solvente se vende a una variedad de compañías de productos químicos y se usa en artículos de limpieza para el hogar y la industria.

Requerimientos de material

	aditivo	base
Materia 1	0.4	0.5
Materia2		0.2
Materia 3	0.6	0.3

Restricciones

- La producción de RMC está restringida por la disponibilidad de materiales

Material	Cantidad disponible para producción
Material 1	20 ton
Material 2	5 ton
Material 3	21 ton

Contribución de utilidades

- el departamento de contabilidad calculo que la tonelada de aditivo para combustible genera una utilidad de \$40 por tonelada y \$30 por tonelada producida para base de solvente

Formulación del problema

- Hay que traducir una descripción verbal de un problema en un enunciado matemático

Objetivo

- Maximizar la contribución total a las utilidades



¿Qué nos restringe?

- el número de toneladas de material 1 debe ser menor o igual a las 20 toneladas disponibles
- el número de toneladas de material 2 empleadas debe ser menor o igual a las 5 toneladas disponibles
- el número de toneladas de material 3 empleadas debe ser menor o igual a las 21 toneladas disponibles

Variables de Decisión

- F = numero de toneladas de aditivo
- S = numero de toneladas de base para solvente

Contribución de Utilidades

$$\rhd Z = 40F + 30S$$

Restricciones

➤ $0.4F+0.5S\leq 20$

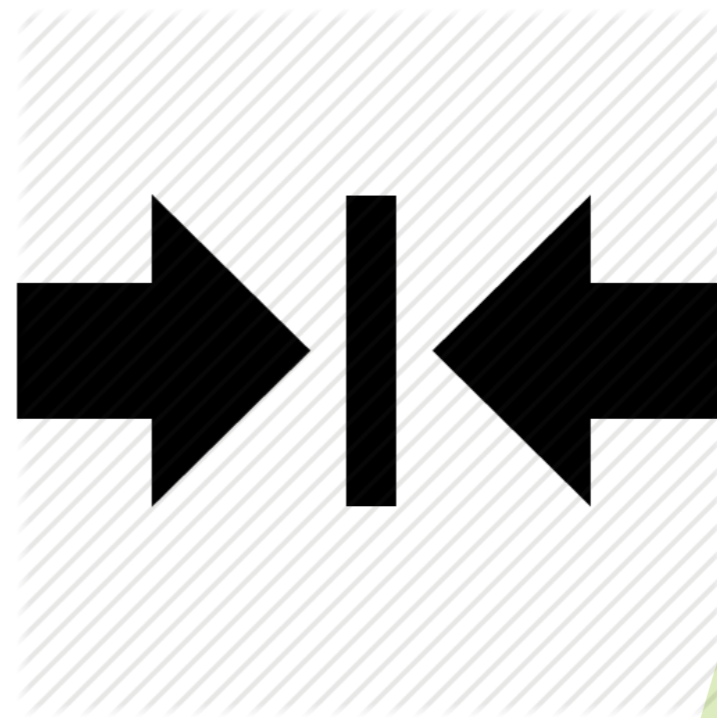
➤ $0.2S\leq 5$

➤ $0.6F+0.3\leq 21$



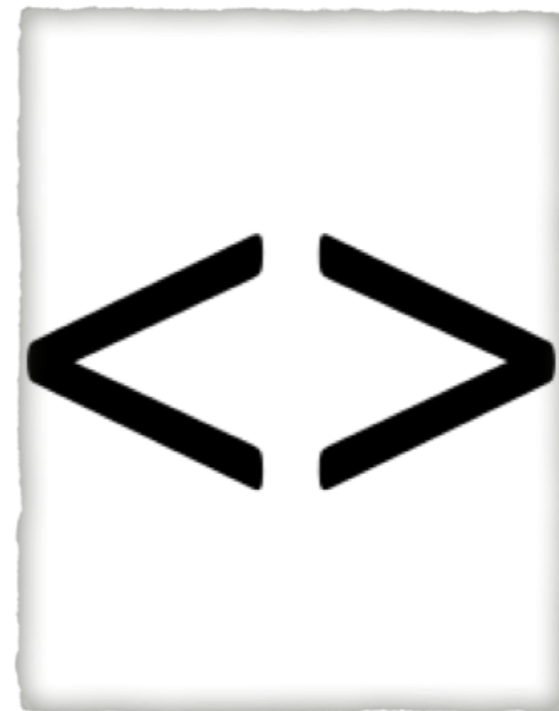
Restricciones

- Encontrar el valor máximo de:
- $Z=40F+30S$
- Sujeto a:
- $0.4F+0.5S\leq 20$
- $0.2S\leq 5$
- $0.6F+0.3\leq 21$
- $F\geq 0, S\geq 0$



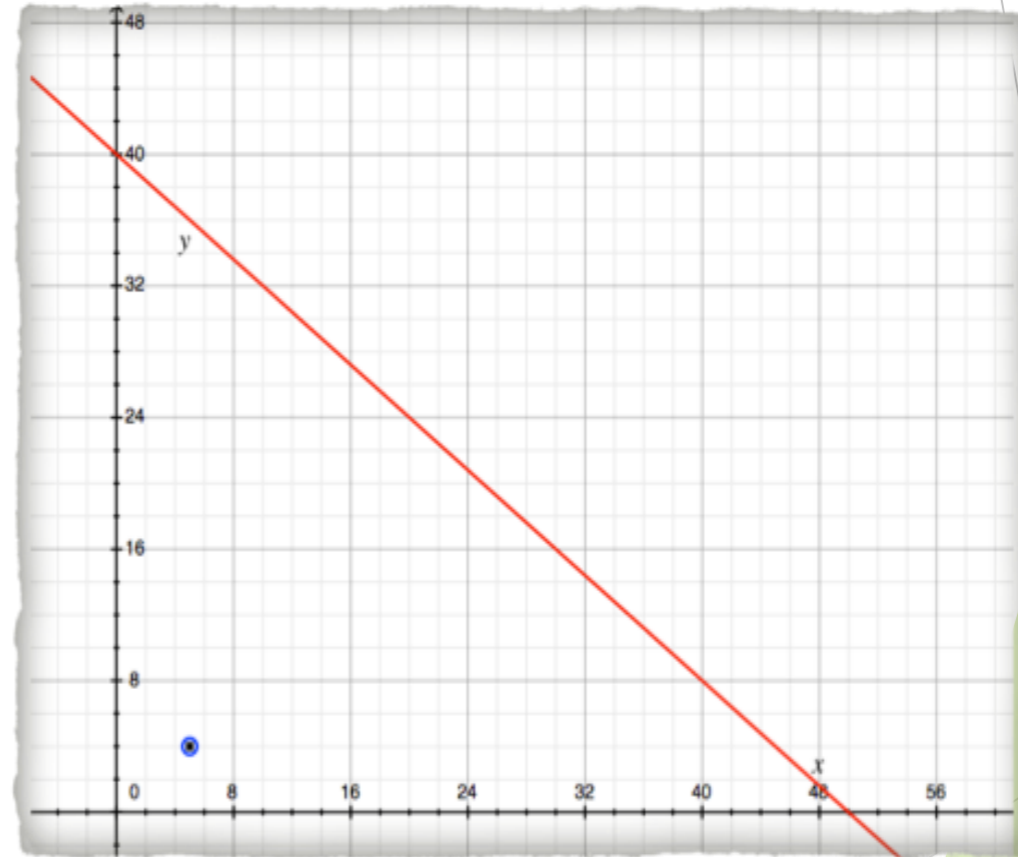
Sistemas de desigualdades lineales

- las restricciones las encontramos en forma de desigualdad
- Un par ordenado (a, b) es una solución de una desigualdad en x e y , si la desigualdad es verdadera cuando a y b son sustituidos por x e y , respectivamente.



Sistemas de desigualdades lineales

- Por ejemplo, $(10, 10)$ es una solución de la desigualdad $0.4F+0.5S\leq 20$
- $0.4(10)+0.5(10)\leq 20$
- La gráfica de una desigualdad es la colección de todas las soluciones de la desigualdad.



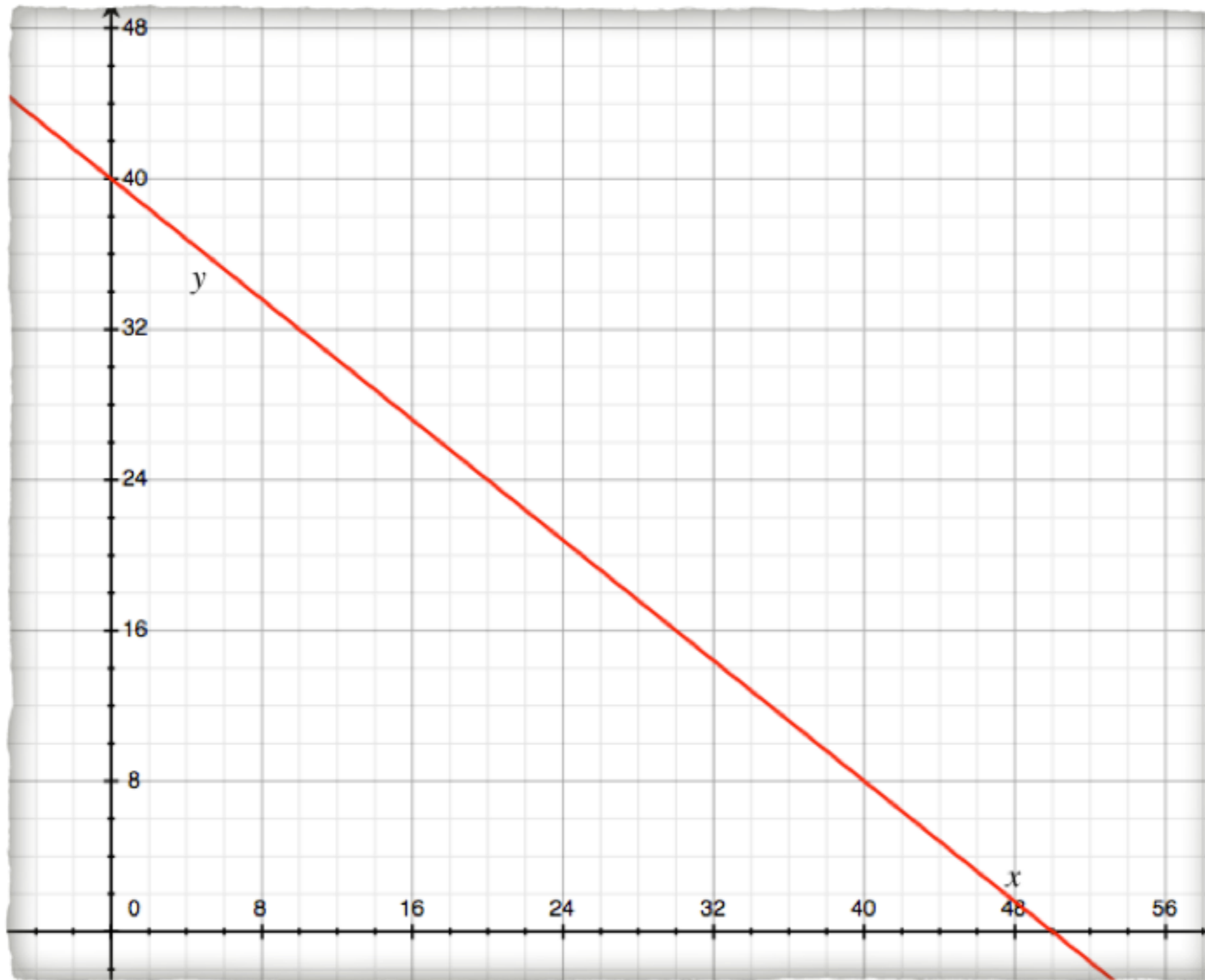
Gráfica de una desigualdad

⇒ $0.4F + 0.5S \leq 20$

⇒ comenzamos por dibujar la gráfica de la ecuación correspondiente

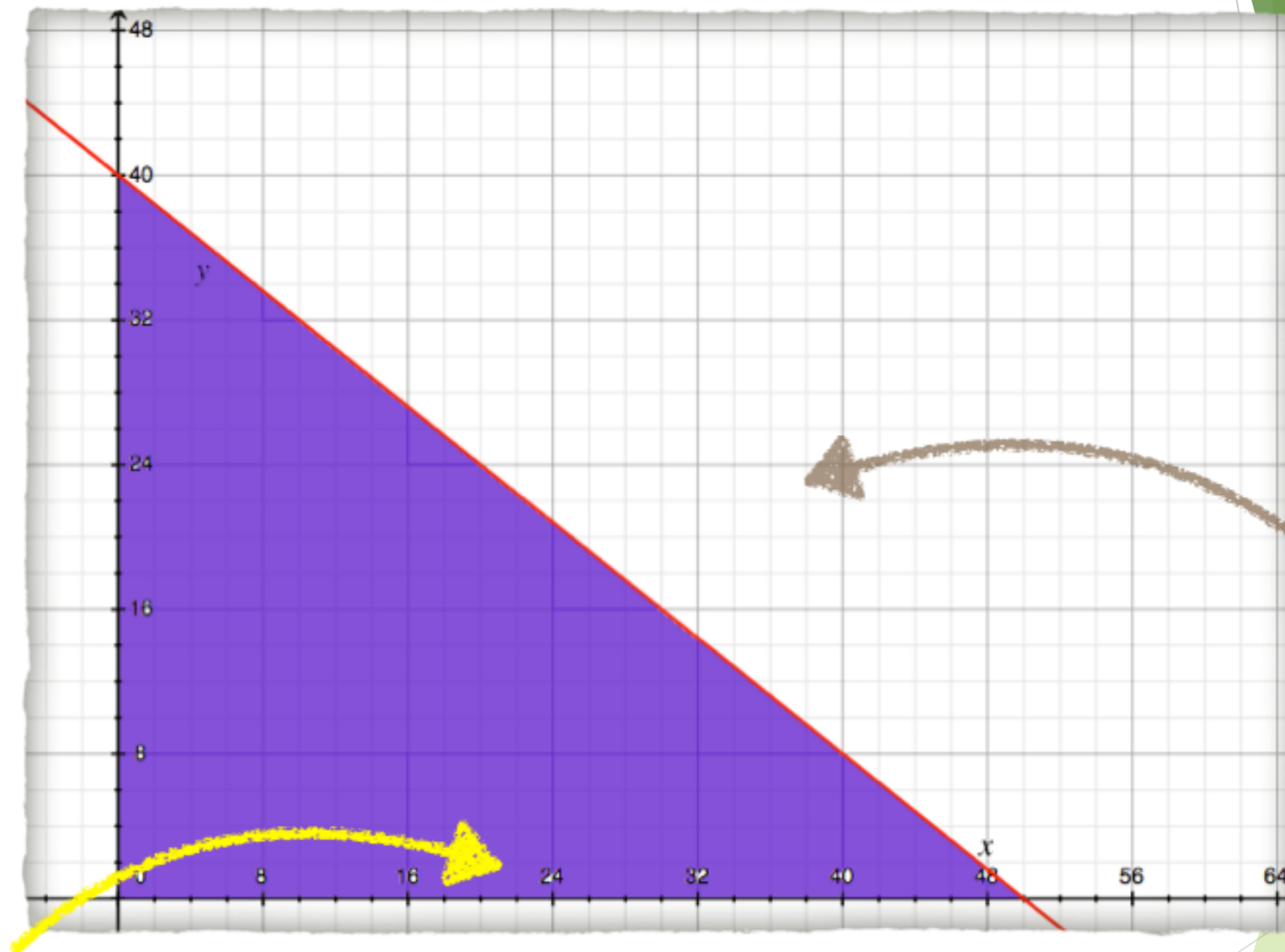
⇒ $0.4F + 0.5S = 20$

Gráfica de una desigualdad



Gráfica de una desigualdad

- La gráfica de la ecuación normalmente separar el plano en dos o más regiones. En cada una de estas regiones, una de las siguientes estipulaciones tiene que ser verdad.
- Todos los puntos de la región son soluciones de la desigualdad.
- No hay puntos en la región, que sean soluciones de la desigualdad.



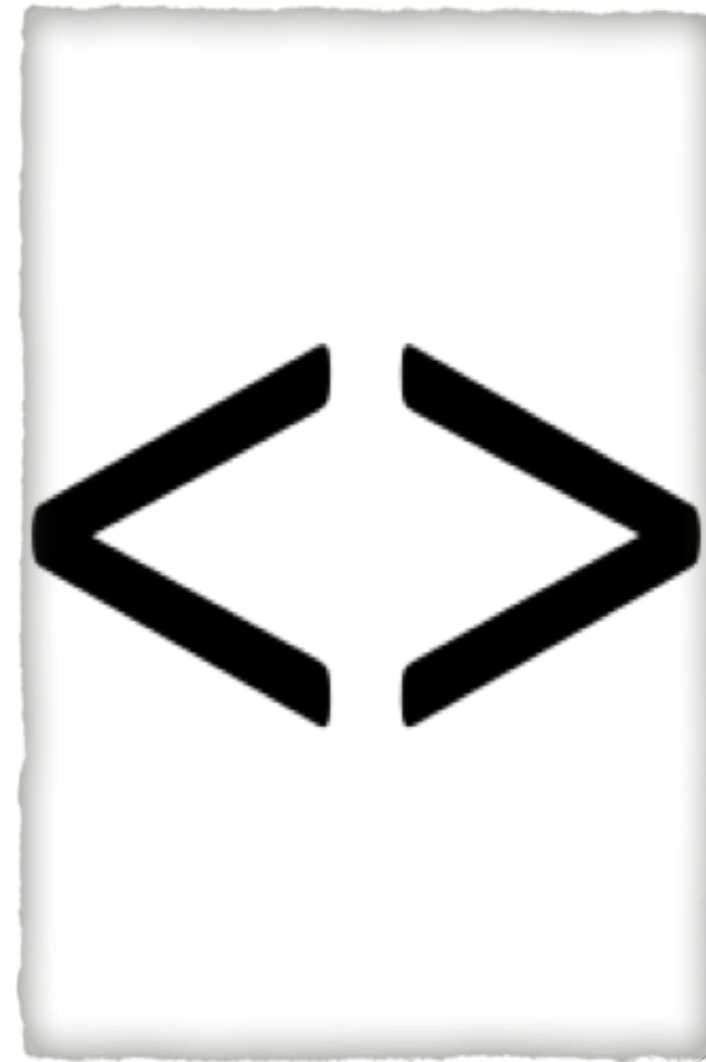
area
soluciones
factibles

area de no
soluciones

Sistemas de Desigualdades

Sistemas de Desigualdades

- Muchos de los problemas prácticos en los negocios, la ciencia y la ingeniería implican sistemas de lineales en las desigualdades.

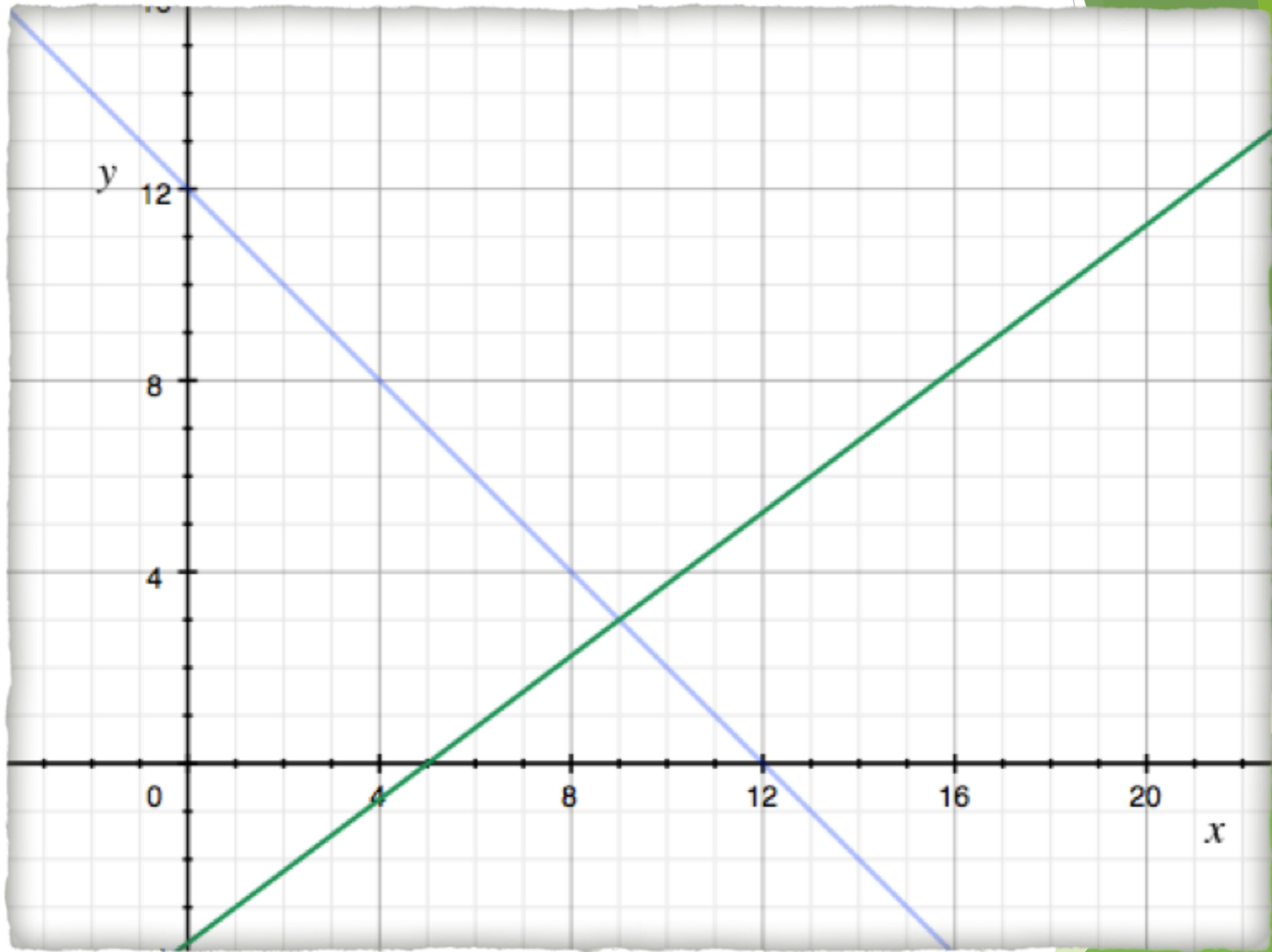


Ejemplo

$$\ni x + y \leq 12$$

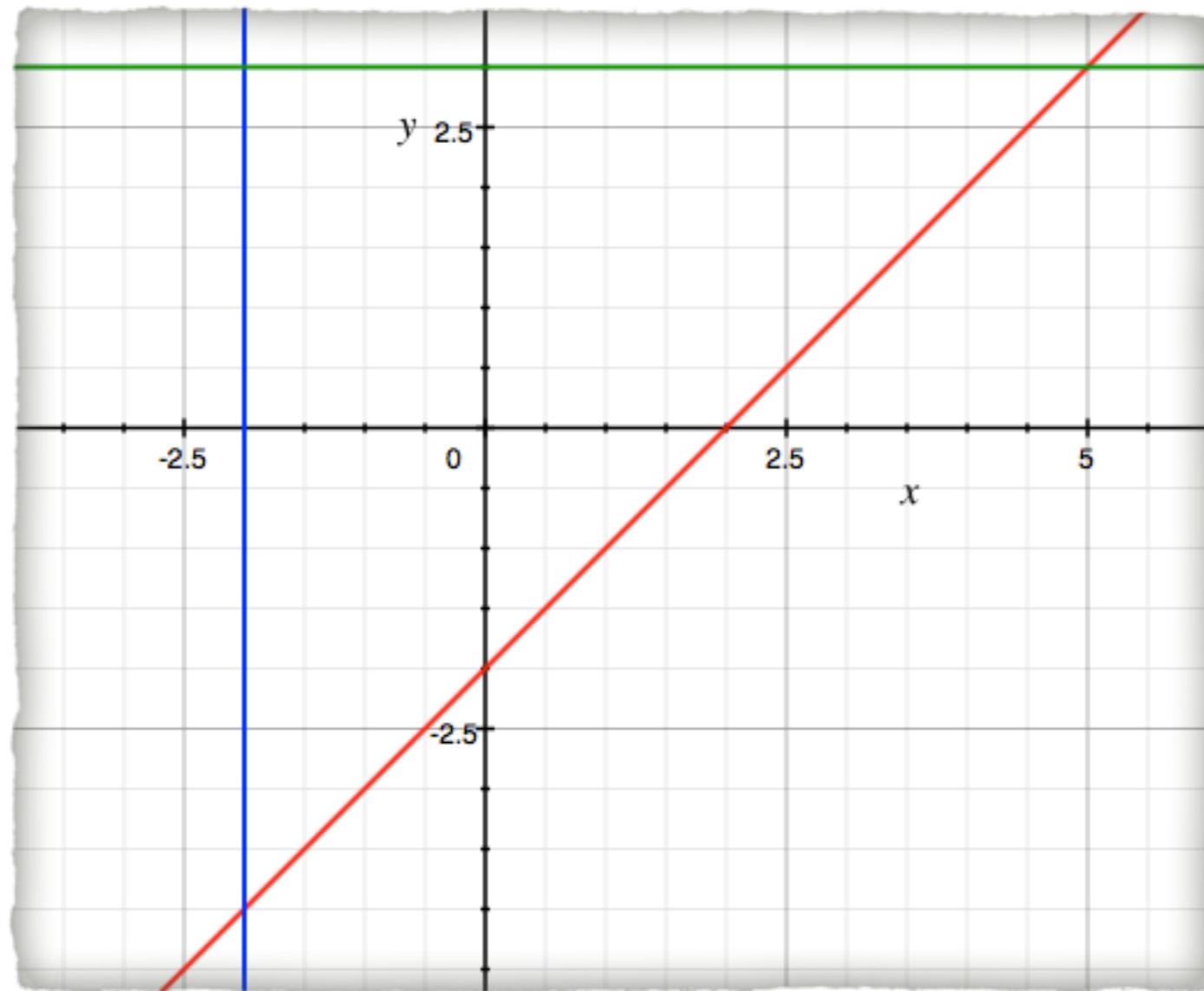
$$\ni 3x - 4y \leq 15$$

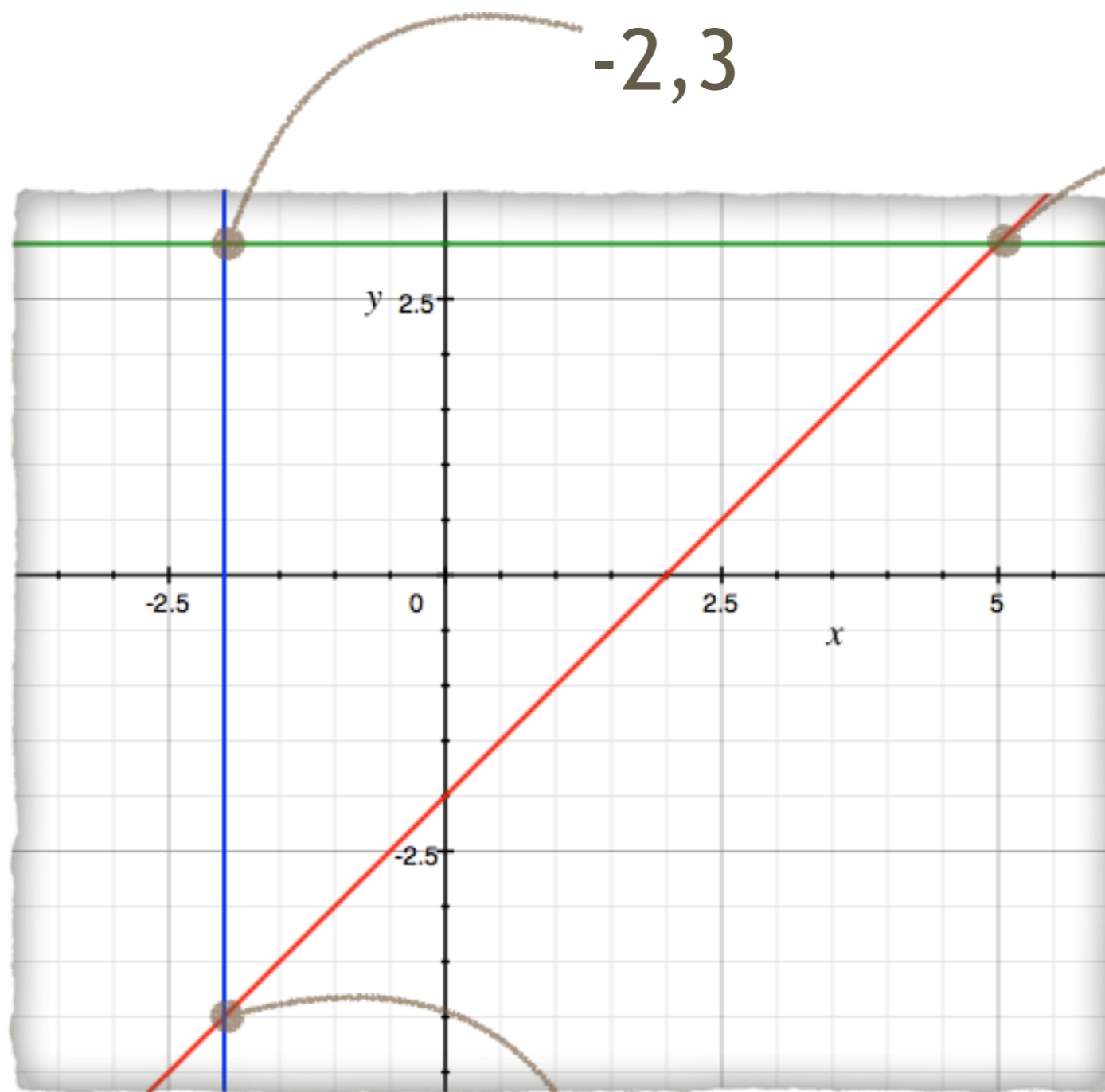
$$\ni x \geq 0 \quad y \geq 0$$



Superposición

- Para encontrar la región común al graficar las desigualdades hay que sobreponerlas en el mismo plano de coordenadas
- ejemplo:
- $x - y < 2$
- $x > 2$
- $y \leq 3$





$-2, 3$

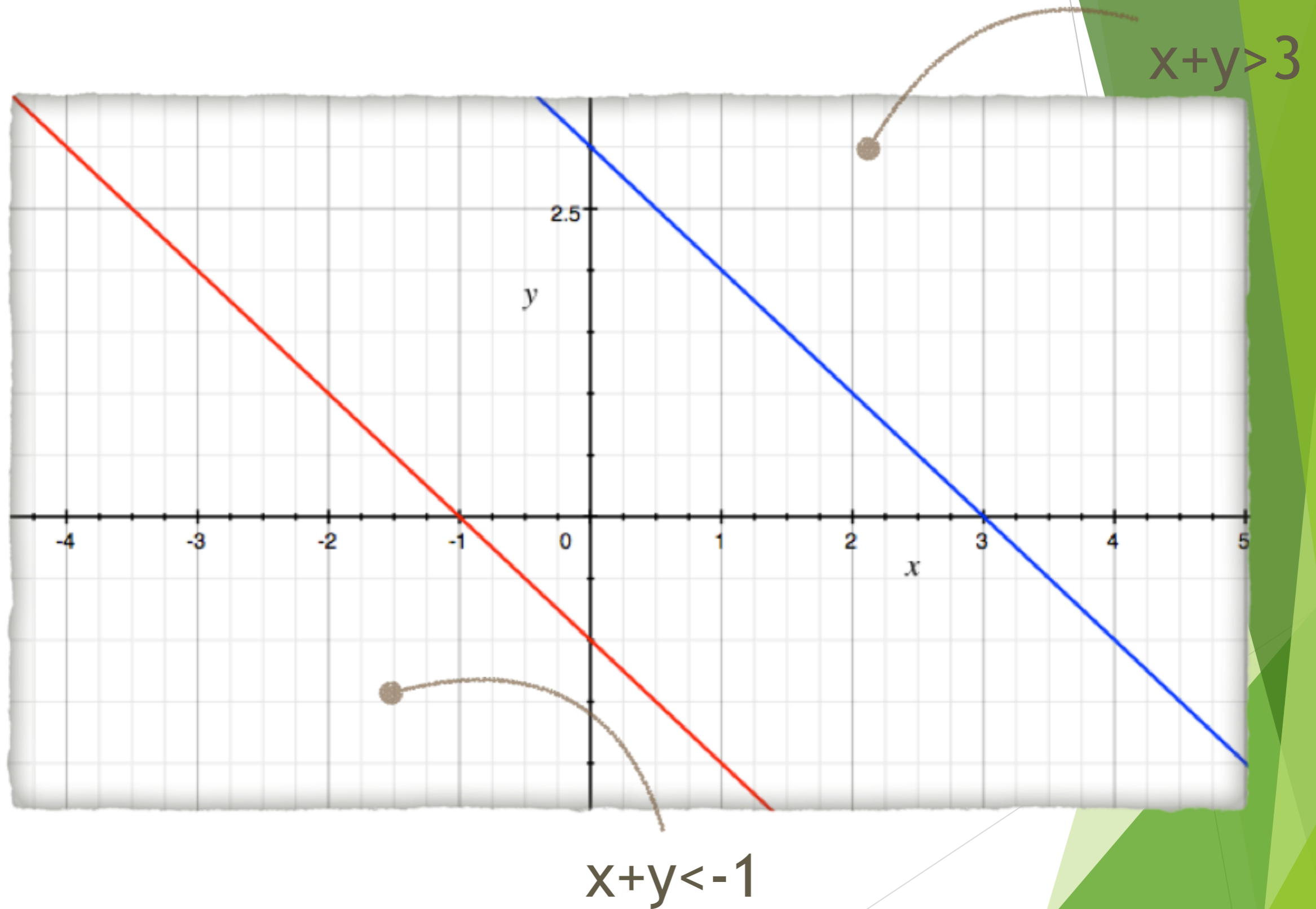
$5, 3$

$-2, -4$

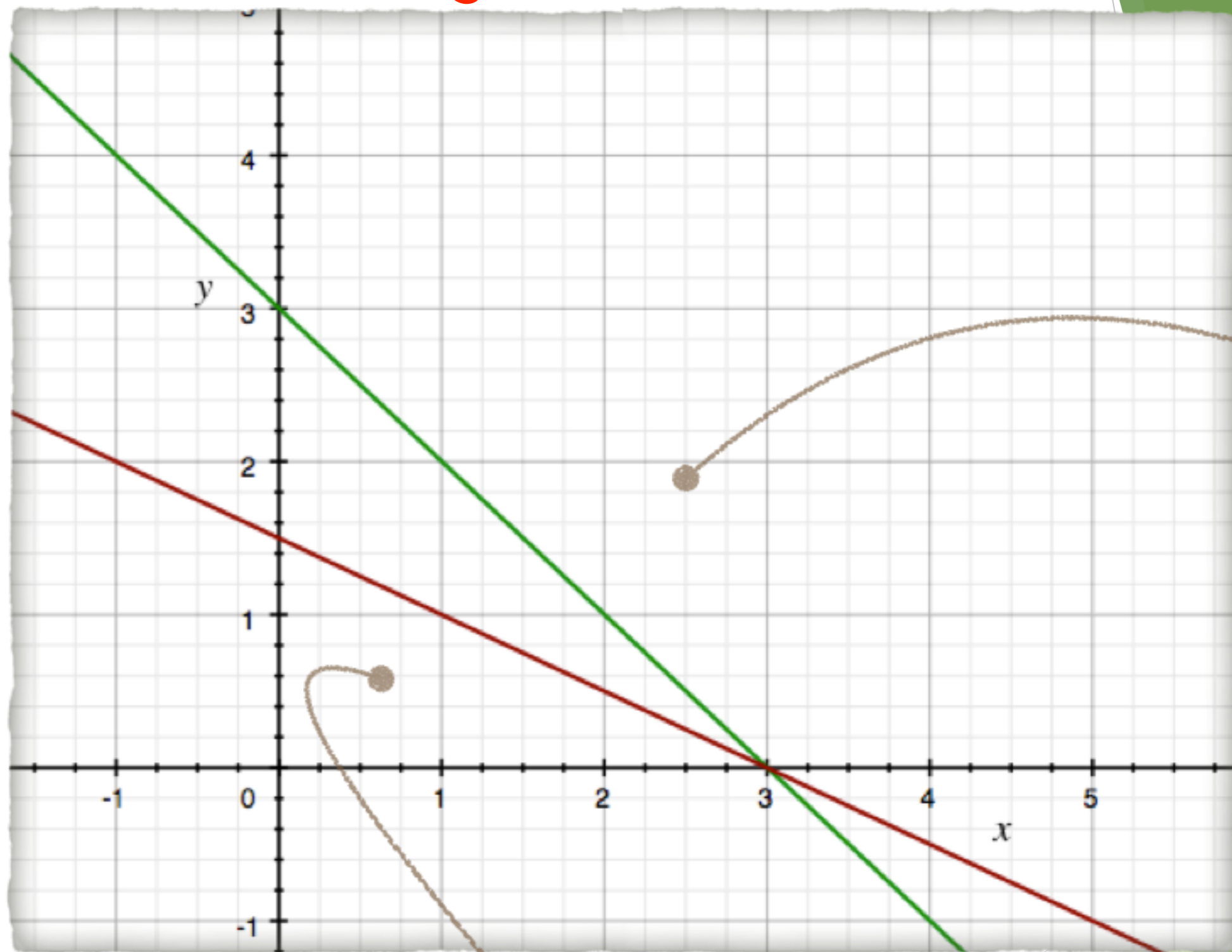
Casos Especiales

- El sistema de desigualdades podría no tener solución
- Otra posibilidad es que el conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades puede ser ilimitado

Sin Solución



Región ilimitada



$$x+y < 3$$

$$x+2y > 3$$

Ejemplo

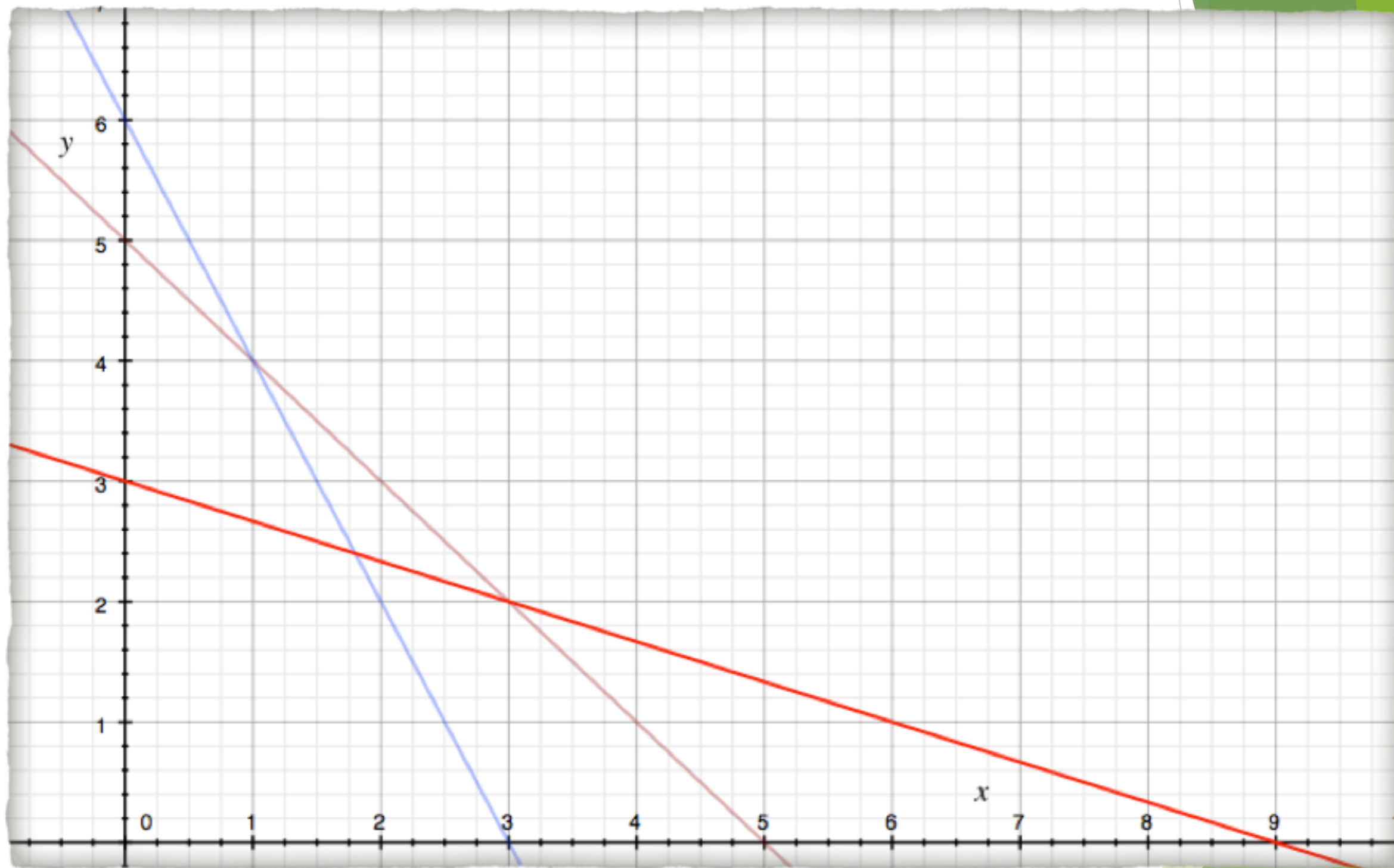
- La porción líquida de una dieta es para proporcionar al menos 300 calorías, 36 unidades de vitamina A, y 90 unidades de vitamina C al día. Una taza de bebida dietética X proporciona 60 calorías, 12 unidades de vitamina A, y 10 unidades de vitamina C. Una taza de bebida dietética Y proporciona 60 calorías, 6 unidades de vitamina A, y 30 unidades de vitamina C. Establecer un sistema lineal de desigualdades que describa los requisitos mínimos diarios de calorías y vitaminas.

Solución

- dejamos que:
- x = número de tazas de bebida dietética
 X
- y = número de tazas de bebida dietética
 Y .

Solución

- Entonces, para cumplir con los requisitos mínimos diarios, las siguientes desigualdades deben ser satisfechas.
- Para calorías: $60x + 60y \leq 300$
- Para la vitamina A: $12x + 6y \leq 36$
- Para la vitamina C: $10x + 30y < 90$
- $x \geq 0$, $y \geq 0$





PROGRAMACION LINEAL DE 2 VARIABLES

PROGRAMACION LINEAL DE 2 VARIABLES

- Un problema de programación lineal de dos dimensiones consta de una función objetivo lineal y un sistema de desigualdades lineales llamados restricciones.
- La función objetivo proporciona la cantidad que se desea maximizar (o minimizar), y las limitaciones de determinar el conjunto de soluciones factibles.

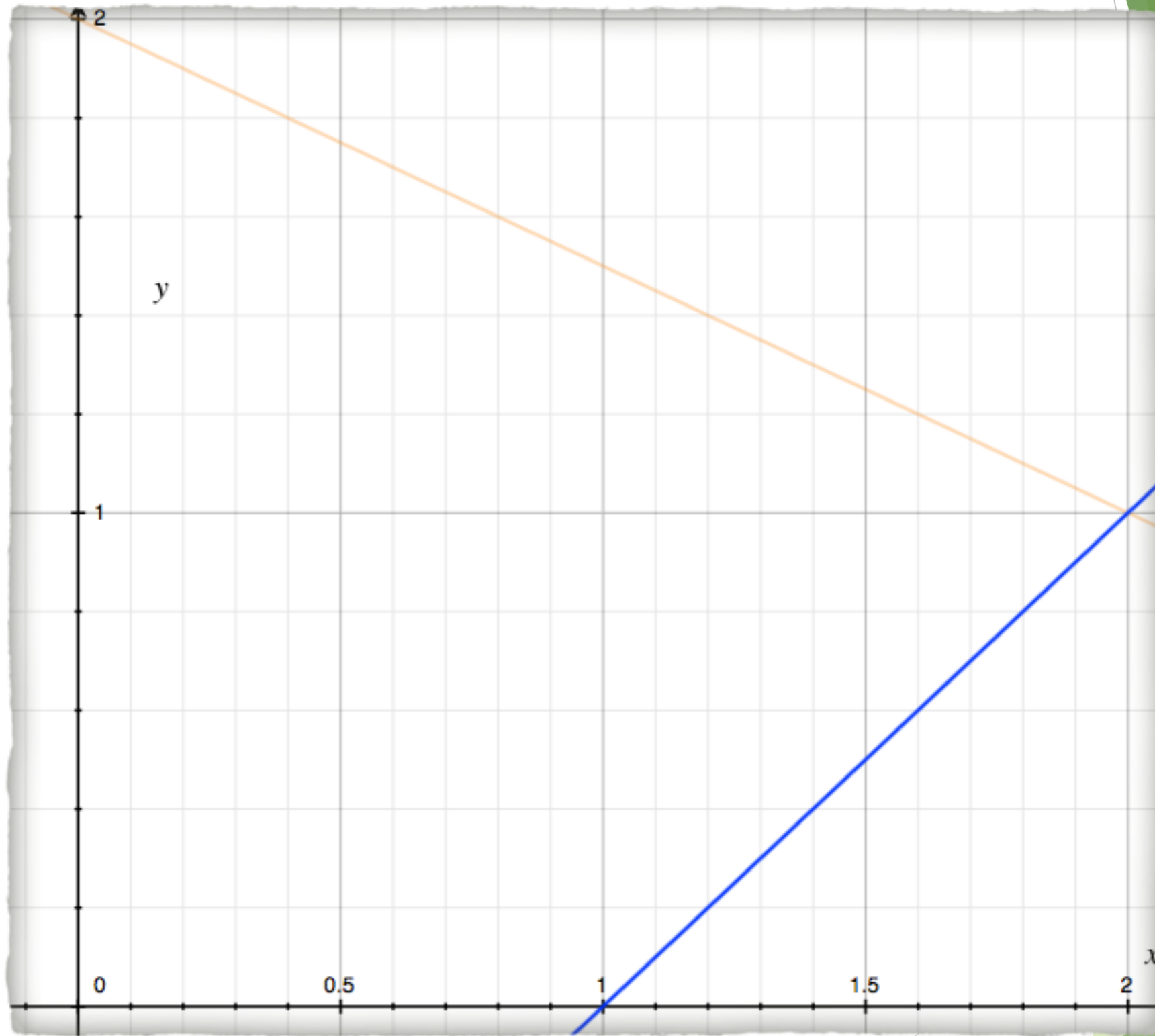
Teorema (solución optima)

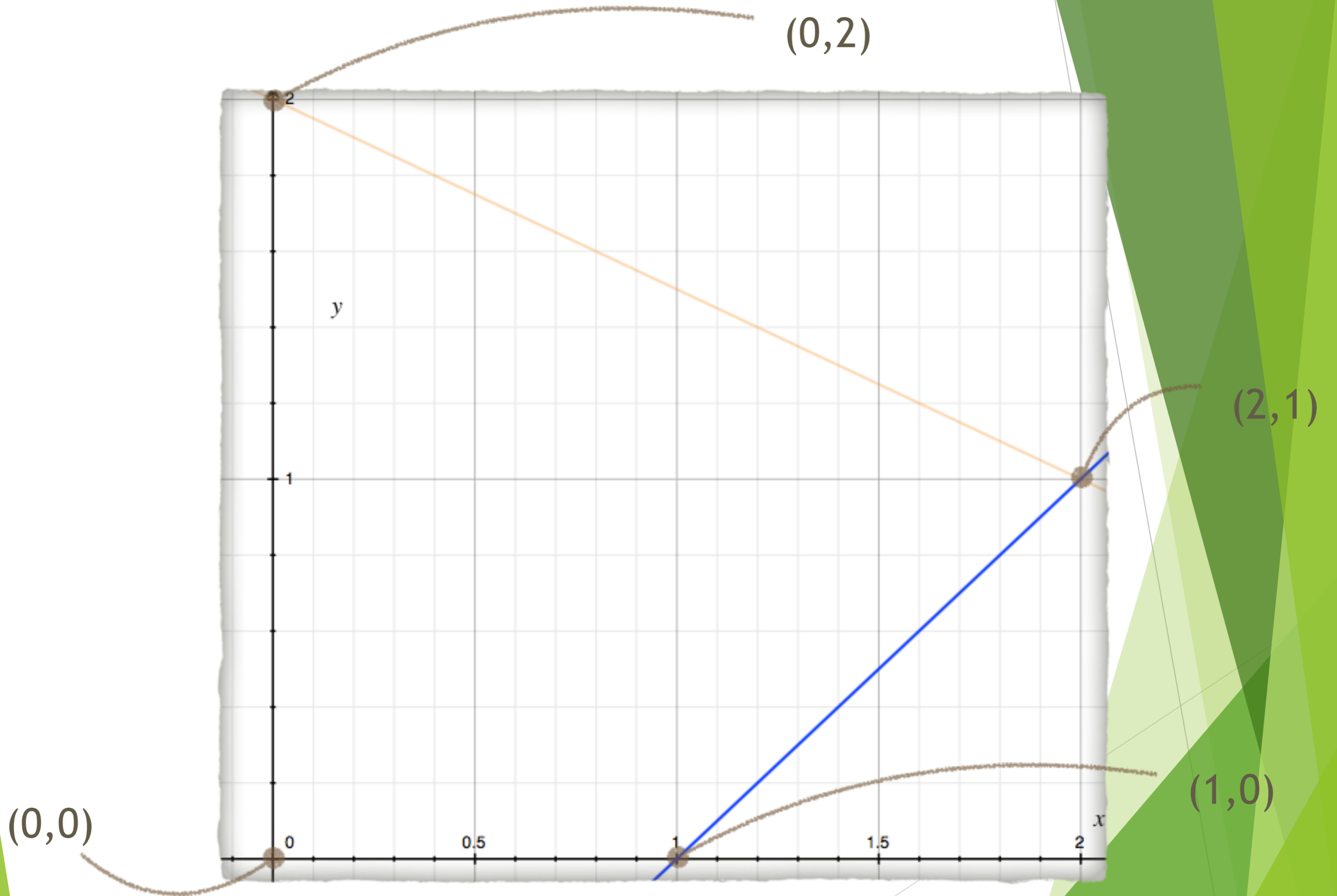
- Si un problema de programación lineal tiene una solución, tiene que ocurrir en un vértice del conjunto de soluciones factibles.
- Si el problema tiene más de una solución, entonces al menos uno de ellos debe ocurrir en un vértice del conjunto de soluciones factibles. En cualquier caso, el valor de la función objetivo es único.

Resolución de un problema de programación lineal

Ejemplo

- Encuentre el valor máximo de
- $z = 3x + 2y$ función objetivo
- sujeto a las siguientes restricciones.
- $x \geq 0$, $y \geq 0$
- $x + 2y \leq 4$
- $x - y \leq 1$



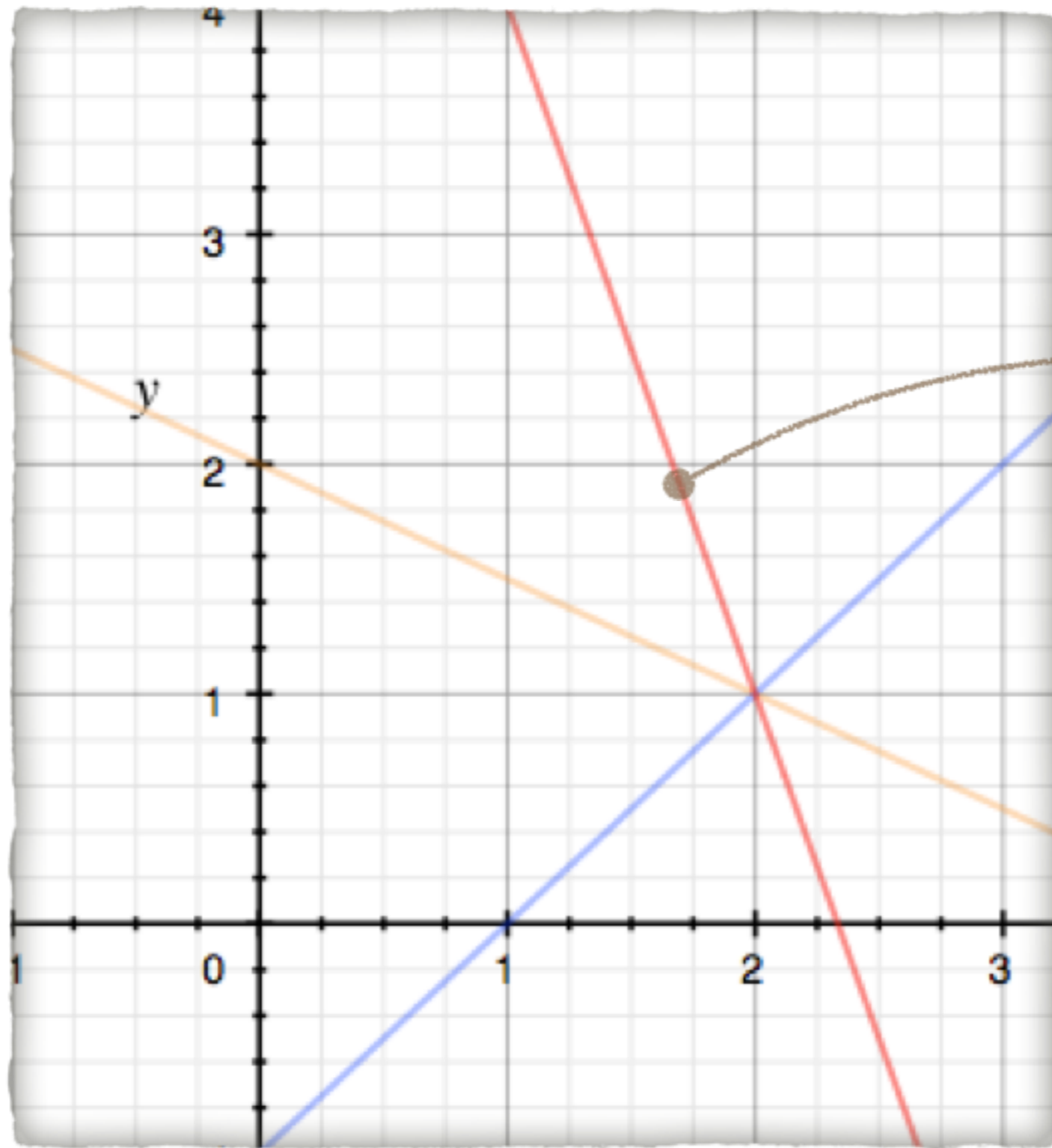


Ejemplo (cont)

- $(0,0): z=3(0)+2(0)=0$
- $(1,0): z=3(1)+2(0)=3$
- $(2,1): z=3(2)+2(1)=8$
- $(0,2): z=3(0)+2(2)=4$

¿Por que?

- Para ver por qué el valor máximo de la función objetivo en el Ejemplo 1 debe ocurrir en un vértice, que no hacer la función objetivo en la forma:
- $y = -3/2x + z/2$



$y = -3/2x + z/2$

Método Gráfico de resolver un problema de programación lineal (resumen)

Método Gráfico de resolver un problema de programación lineal (resumen)

- Para resolver un problema de programación lineal que implica dos variables por el método gráfico, siga estos pasos.
- Dibujar la región correspondiente al sistema de restricciones. (Los puntos dentro o sobre el límite de la región se llaman soluciones factibles.)

Método Gráfico de resolver un problema de programación lineal (resumen)

- Encontrar los vértices de la región.
- Prueba de la función objetivo en cada uno de los vértices y seleccione los valores de las variables que optimizan la función objetivo. Para una región acotada, existirán tanto un valor mínimo y uno máximo. (Para una región sin límites, si existe una solución óptima, entonces se producirá en un vértice.)

Gracias !!!!!

Bibliografía

- ▶ Toma de decisiones por medio de **investigación de operaciones** / Robert J. Thierauf y Richard A. Grosse ; tr. José Meza Nieto. México : Limusa, 2012.
- ▶ Métodos cuantitativos para administración / Frederick S. Hillier, Mark S. Hillier ; casos desarrollados por Karl Schmedders, Molly Stephens ; traducción, Ma. Guadalupe Cevallos A., M. Elizabeth Treviño R. y Adolfo Deras Quiñones. 2a ed. en español. México, D.F. : McGraw-Hill Interamericana, c2008.
- ▶ Métodos cuantitativos para los negocios / Barry Render, Ralph M. Stair, Michael E. Hanna. 9a ed. Méx. : Pearson Educación, 2006.
- ▶ Introducción a la **investigación de operaciones** /8a ed. Hillier, Frederick S. Lieberman, Gerald J. Murrieta Murrieta, Jesús Elmer, tr. México : McGraw-Hill, 2006.