

Solitones singulares y regulares en la ecuación no lineal de Kadomtsev-Petviashvili

ERICK FLORES-ROMERO Y MÁXIMO AGÜERO*

Resumen. Se parte de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili para ondas superficiales con dispersión negativa (KP) y mediante transformaciones infinitesimales del método de Lie se llega a la ecuación tipo Boussinesq (TBq) $u_{tt} - u_{xxx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0$. Se usan las soluciones solitónicas unidimensionales de la ecuación TBq para obtener soluciones solitónicas bidimensionales de la ecuación KP. Se analizan y discuten algunas propiedades peculiares de estas soluciones.

Palabras clave: solitones, ondas no lineales, solitones singulares.

Singular and Regular Solitons in Kadomtsev-Petviashvili's Non Linear Equations

Abstract. The Kadomtsev-Petviashvili equation for shallow water waves with negative dispersion (KP) can be reduced to the Boussinesq type (TBq) equation $u_{tt} - u_{xxx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0$ by means of infinitesimal transformations of Lie's method. We use the one-dimensional soliton-solutions of the TBq equation in order to obtain two-dimensional soliton-solutions of the KP equation. We analyze some remarkable properties of these solutions.

Key words: solitons, non linear waves, singular solitons.

Recepción: 8 de noviembre de 2000

Aceptación: 14 de mayo de 2001

Introducción

Estudios de ondas no lineales en sistemas dispersivos han mostrado que las siguientes dos ecuaciones de evolución no lineales son genéricas en la descripción de la propagación de una onda unidimensional en campos lejanos: la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) para sistemas de ondas largas con no linealidad débil, y la ecuación no lineal de Schrödinger para sistemas de ondas que tienen, en una aproximación lineal, ondas planas con oscilaciones de alta frecuencia. Ambas ecuaciones tienen la notable propiedad de resolverse exactamente como problemas de valor inicial aplicando la transformada inversa de dispersión (IST). El método analítico muestra que ondas solitarias estables, llamadas solitones, juegan un papel importante en la solución de estas ecuaciones. En particular, es bien conocido que ellas tienen soluciones especiales

que describen múltiples colisiones de solitones (solución N -solitónica), lo cual es una característica de las ecuaciones de evolución no lineales resueltas por IST.

Los efectos multidimensionales relacionados a ambas ecuaciones han sido estudiados por muchos investigadores. Una versión bidimensional de la ecuación KdV fue propuesta por vez primera por Kadomtsev y Petviashvili (1970) para describir ondas no lineales variando lentamente en un medio dispersivo. Ellos consideraron la cuestión de la estabilidad de solitones unidimensionales con respecto a perturbaciones transversales. La ecuación, que deberemos llamar ecuación de Kadomtsev-Petviashvili, puede ser escrita como (Tajiri *et al.*, 1982):

* Universidad Autónoma del Estado de México, Facultad de Ciencias, Instituto Literario 100, Toluca 50000, Estado de México. Teléfono: (724) 65554 y 65556. Correo electrónico: mag@coatepec.uaemex.mx.

Se agradecen los comentarios a este trabajo durante la realización del Taller de Fenómenos No Lineales que se realizó en la Facultad de Ciencias de la UAEM. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto UAEM 1240/2000 y por el proyecto de investigación CONACYT 33471-E.

$$\hat{u}_\alpha + \hat{u}_{\alpha\alpha} + (\hat{u}^2)_{\alpha\alpha} + \hat{u}_{\alpha\alpha\alpha} = 0 \quad (1)$$

donde α es un parámetro que depende de las propiedades dispersivas del sistema. Cuando $\alpha = +1$ se le refiere usualmente como dispersión negativa, y cuando $\alpha = -1$ como dispersión positiva (Satsuma y Ablowitz, 1979). La ecuación (1) con $\alpha = +3$ surge en el estudio de ondas dispersivas no lineales débiles en plasmas y también en la modulación de ondas de agua largas no lineales débiles que viajan casi en una dimensión (esto es, casi en un plano vertical). Satsuma y Ablowitz (1979) mostraron que esta ecuación KP tiene N soluciones solitónicas lineales que describen la interacción oblicua de solitones. La ecuación (1) con $\alpha = -3$ surge en acústica y admite soluciones solitónicas inestables, mientras que para $\alpha = +3$ las soluciones son estables.

También se ha mostrado que la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili pertenece a la clase de ecuaciones de evolución no lineales donde la IST es aplicable. No obstante que la dispersión inversa no ha sido todavía completamente hecha, los N -solitones pueden ser obtenidos de las ecuaciones integrales del esquema IST o directamente por la aplicación del método de Hirota a las ecuaciones. Estas soluciones son cuasi-unidimensionales, ellas describen las colisiones múltiples de N -solitones, cada una de las cuales puede ser propagada en diferentes direcciones.

Es de gran interés encontrar esencialmente soluciones bidimensionales de esta ecuación. Ya que se han encontrado soluciones racionales tomando el límite de onda larga de soluciones N -solitónicas, soluciones tipo *lump* (chipote) permanente no singular.

Recientemente, Chow *et al.* (1998) han derivado la ecuación unificada de Kadomtsev-Petviashvili para superficies y ondas interfaciales propagándose en un canal rotando con topografía variable y paredes de lado. Esta nueva ecuación incluye a la mayoría de las ecuaciones del tipo Kadomtsev-Petviashvili que existen en la literatura como casos especiales.

I. Método de solución

Una de las áreas de mayor interés en el estudio de la propagación de ondas no lineales es el desarrollo de técnicas para encontrar soluciones especiales a las ecuaciones fundamentales. Para aquellas ecuaciones que admiten soluciones solitónicas Hirota ha hecho contribuciones muy significativas. Se debe señalar que estos métodos directos trabajan virtualmente para ecuaciones donde la IST es conocida y algunas veces para ecuaciones donde la IST no está todavía disponible. En la práctica, estos métodos directos a menudo

han motivado una búsqueda por la IST y algunas veces han sugerido como aplicar la IST.

Las ideas básicas de método directo de Hirota son las siguientes:

a) Introducir una transformación dependiente de las variables (esto puede requerir algo de ingenio, aunque existen algunas formas estándar).

La transformación debe reducir la ecuación de evolución a una ecuación llamada bilineal, cuadrática en las variables dependientes. Hirota ha desarrollado un nuevo cálculo diferencial y es conveniente usarlo en esta etapa.

b) Introducir una expansión perturbativa formal en esta ecuación bilineal. En el caso de soluciones solitónicas esta expansión debe ser truncada, hasta N por ejemplo, donde N es el número de solitones.

c) Usar inducción matemática para probar que la forma solitónica sugerida es en verdad correcta.

Para resolver la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (1) con $\alpha = +1$, en este trabajo denotada por KP, se puede proceder de la siguiente manera:

(i) Reducir la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili por medio de una transformación a una ecuación tipo Boussinesq. Esto conduce de un problema en (2+1) dimensiones a otro en (1+1) dimensiones del espacio-tiempo.

(ii) Aplicar el método directo de Hirota a la ecuación tipo Boussinesq para encontrar sus soluciones solitónicas.

(iii) Invertir la transformación hallada en (i) y sustituir en ésta las soluciones encontradas en (ii) para obtener así las soluciones de la ecuación KP.

En esta sección se realizan los incisos (i) y (ii) y en la siguiente se obtienen las soluciones de KP.

1. Reducción de KP a Boussinesq

La ecuación de Kadomtsev-Petviashvili con dispersión negativa se puede reducir a la ecuación tipo Boussinesq

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0 \quad (2)$$

de la siguiente manera (Tajiri y Nishitani, 1982):

Consideremos una transformación infinitesimal unoparamétrica (ϵ) de Lie en el espacio $(\xi, \eta, \tau, \omega)$

$$\xi^* = \xi + \epsilon X(\xi, \eta, \tau, \omega) + O(\epsilon^2),$$

$$\eta^* = \eta + \epsilon Y(\xi, \eta, \tau, \omega) + O(\epsilon^2),$$

$$\tau^* = \tau + \epsilon T(\xi, \eta, \tau, \omega) + O(\epsilon^2),$$

$$\omega^* = \omega + \epsilon W(\xi, \eta, \tau, \omega) + O(\epsilon^2), \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{\xi^*}^* &= \omega_{\xi} + \varepsilon[W_{\xi}] + O(\varepsilon^2), \\
 \omega_{\xi^* \tau^*}^* &= \omega_{\xi} + \varepsilon[W_{\xi \tau}] + O(\varepsilon^2), \\
 \omega_{\xi^* \xi^*}^* &= \omega_{\xi \xi} + \varepsilon[W_{\xi \xi}] + O(\varepsilon^2), \\
 \omega_{\eta^* \eta^*}^* &= \omega_{\eta \eta} + \varepsilon[W_{\eta \eta}] + O(\varepsilon^2), \\
 \omega_{\xi^* \xi^* \xi^* \xi^*}^* &= \omega_{\xi \xi \xi \xi} + \varepsilon[W_{\xi \xi \xi \xi}] + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

donde las derivadas especiales $[W_{\xi}]$, $[W_{\xi \tau}]$, $[W_{\xi \xi}]$, $[W_{\eta \eta}]$, $[W_{\xi \xi \xi \xi}]$ en la ecuación (4) se pueden definir de la ecuación (3) (Bluman y Cole, 1974). Suponiendo que la ecuación KP permanezca invariante bajo las transformaciones (4) y (3), se obtiene la siguiente relación, a primer orden de ε .

$$[W_{\xi}] + [W_{\eta \eta}] + 4[W_{\xi}] \omega_{\xi} + 2W_{\xi \xi} \omega_{\xi} + 2[W_{\xi \xi}] \omega + [W_{\xi \xi \xi \xi}] = 0$$

la solución de esta relación nos da los elementos infinitesimales (X, Y, T, W) que dejan invariante la ecuación KP. En este caso los infinitesimales son:

$$\begin{aligned}
 X &= A'(\tau) \xi - \frac{1}{2} A''(\tau) \tau^2 + B'(\tau) \tau + C(\tau), \\
 Y &= 2A'(\tau) \eta - 2B(\tau), \quad T = 3A(\tau), \\
 W &= -2A'(\tau) \eta + \frac{1}{2} A''(\tau) \tau - \frac{1}{4} A'''(\tau) \tau^2 + \frac{1}{2} B''(\tau) \tau + \frac{1}{2} C'(\tau)
 \end{aligned}$$

donde $A(\tau)$, $B(\tau)$ y $C(\tau)$ son funciones arbitrarias de τ , y $A'(\tau) = \frac{dA(\tau)}{d\tau}$, ..., $A'' = \frac{d^2 A(\tau)}{d\tau^2}$, ..., $C'(\tau) = \frac{dC(\tau)}{d\tau}$. De aquí, la forma y las variables de similitud están dadas al resolver las ecuaciones características

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\tau}{T} = \frac{d\eta}{W}$$

En el caso en que $A(\tau) \neq 0$ se obtiene la transformación

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\eta}{A^{2/3}(\tau)} + \frac{2}{3} \frac{B(\tau)}{A^{5/3}} d\tau, \\
 x &= \frac{\xi}{A^{1/3}} + \frac{A'}{6A^{4/3}} \eta^2 - \frac{B}{3A^{1/3}} \eta - \frac{2}{9} \int \frac{B^2}{A^{7/3}} d\tau - \frac{1}{3} \int \frac{C(\tau)}{A^{4/3}} d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= \frac{A'}{6A} \dot{\eta} + \frac{1}{6} \frac{1}{3} \left(\frac{A'}{A}\right)^2 \frac{A'}{2A} \eta^2 + \frac{1}{6} \frac{B'}{A} \frac{2A'B}{3A^2} \eta + \frac{C}{6A} \\
 &+ \frac{B^2}{18A^2} - \frac{1}{2A^{2/3}} + \frac{1}{A^{2/3}} u(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

de donde, al sustituir en la ecuación KP, se obtiene que $u(x, t)$ satisface la ecuación tipo Boussinesq (2). Enseguida se dan las soluciones de la ecuación (2).

2. Soluciones solitónicas de la ecuación tipo Boussinesq

La solución de la ecuación tipo Boussinesq (2) se encuentra en el método de Hirota, considerando:

$$u = 6 (\ln f_N)_{xx} \tag{6}$$

donde

$$f_N = \prod_{i=1}^N \exp\left(\sum_{i=1}^N i \phi_i + \sum_{1 \leq i < j} i_j A_{ij}\right) \tag{7}$$

con N el número de solitones,

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= p_i(x + \varepsilon_i v_i t) + \phi_i^0, \varepsilon_i = \pm 1, \\
 e^{A_{ij}} &= \frac{(\varepsilon_i v_i - \varepsilon_j v_j)^2 - 3(p_i - p_j)^2}{(\varepsilon_i v_i - \varepsilon_j v_j)^2 - 3(p_i + p_j)^2}
 \end{aligned}$$

Solución 1-solitónica. Tomando $N = 1$ en (7) se obtiene la solución 1-solitónica de (2); al hacer esto f_N se escribe como

$$f_1 = 1 + \exp[\phi]$$

con $\phi = p(x + \varepsilon v t) + \phi^0$ y $\varepsilon = \pm 1$. Escribiendo tenemos $e^{\phi^0} = \alpha$, tenemos

$$f_1 = 1 + \alpha e^{\theta} \tag{8}$$

donde $\theta = x + \varepsilon v t$. Sustituyendo f_1 en (6) se tienen las soluciones solitónicas

$$\text{Regular } u(x, t) = \frac{3}{2} p^2 \text{Sch}^2 \left[\frac{p}{2}(x + \varepsilon v t) + \ln \alpha \right] \text{ si } \alpha > 0$$

$$\text{Singular } u(x, t) = -\frac{3}{2} p^2 \text{Sch}^2 \left[\frac{p}{2}(x + \varepsilon v t) + \ln |\alpha| \right] \text{ si } \alpha < 0 \tag{9}$$

donde se cumple la relación $v^2 = 1 - p^2$. Esta relación entre los parámetros nos muestra que los solitones de mayor amplitud son más lentos que los de menor amplitud, en franca contraposición a las soluciones solitónicas comunes; como por ejemplo las de la ecuación de Korteweg y de Vries cuyo comportamiento es que el solitón de mayor amplitud es más rápido que el de menor amplitud.

Solución 2-solitónica. La solución 2-solitónica de (2) se encuentra tomando $N = 2$ en (7); haciendo esto encontramos

$$f_2 = 1 + e^{\phi_1} + e^{\phi_2} + e^{\phi_1 + \phi_2 + A_{12}} \quad (10)$$

$\phi_j = p_j(x + \hat{a}_j v_j t) + \phi_j^0, \hat{a}_j = \pm 1$. Lo cual nos da, tomando $e^{\phi_j^0} = 1$:

$$u(x,t) = \frac{4p_1^2 \text{Sech}^2 \frac{\phi_1}{2} + 4p_2^2 \text{Sech}^2 \frac{\phi_2}{2}}{4 + (\alpha - 1) \left(1 + \text{Tanh} \frac{\phi_1}{2} \right) \left(1 + \text{Tanh} \frac{\phi_2}{2} \right)} + \frac{(\alpha - 1) \text{Sech}^2 \frac{\phi_1}{2} \text{Sech}^2 \frac{\phi_2}{2} D(p_1, p_2)}{4 + (\alpha - 1) \left(1 + \text{Tanh} \frac{\phi_1}{2} \right) \left(1 + \text{Tanh} \frac{\phi_2}{2} \right)} \quad (11)$$

donde

$$\phi_j = p_j(x + \hat{a}_j v_j t), \hat{a}_j = \pm 1$$

$$D(p_1, p_2) = 2p_1 p_2 + p_2^2(1 + e^{\phi_1}) + p_1^2(1 + e^{\phi_2})$$

$$\alpha = \frac{(\hat{a}_1 v_1 - \hat{a}_2 v_2)^2 - 3(p_1 - p_2)^2}{(\hat{a}_1 v_1 - \hat{a}_2 v_2)^2 - 3(p_1 + p_2)^2}$$

II. Soluciones solitónicas de la ecuación KP

Como se dijo antes, al resolver la ecuación (2) y aplicar la transformación (5) se obtienen las soluciones para la ecuación (1).

Ya que las funciones $A(\tau)$, $B(\tau)$ y $C(\tau)$ dadas en (5) son arbitrarias, podemos elegir éstas de modo que la transformación tome una forma sencilla. Aquí se analizan dos casos.

1. $A(\tau)$, $B(\tau)$ y $C(\tau)$ constantes

Para este caso elegimos $A(\tau) = a$, $B(\tau) = b$ y $C(\tau) = c$; a , b y c son constantes arbitrarias, entonces la transformación

toma la forma

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{a^{2/3}} \hat{t} + \frac{2b}{3a} \hat{\delta}, \\ x &= \frac{1}{a^{1/3}} \hat{x} - \frac{b}{3a^{4/3}} \hat{t} - \left(\frac{2b^2}{9a^{7/3}} + \frac{1}{3} \frac{c}{a^{4/3}} \right) \hat{\delta} \\ \hat{u} &= \frac{c}{6a} + \frac{b^2}{18a^2} - \frac{1}{2a^{2/3}} + \frac{1}{a^{2/3}} u(x,t) \end{aligned} \quad (12)$$

que será la que se usará en este apartado.

Solución 1-solitónica. Utilizando la solución 1-solitónica de la ecuación de Boussinesq, ecuación (9), y la transformación anterior (12), encontramos las soluciones 1-solitónicas de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili, ecuación (1):

Solución regular:

$$\hat{u}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{\delta}) = M + 6P^2 \text{Sech}^2 [P(\hat{t} + Q\hat{x} + V\hat{\delta}) + \ln|\alpha|] \quad \text{si } \alpha > 0$$

Solución singular:

$$\hat{u}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{\delta}) = M - 6P^2 \text{Csch}^2 [P(\hat{t} + Q\hat{x} + V\hat{\delta}) + \ln|\alpha|] \quad \text{si } \alpha > 0$$

donde

$$M = \frac{c}{6a} + \frac{b^2}{18a^2} - \frac{1}{2a^{2/3}} = -\frac{1}{2}(4P^2 + Q^2 + V)$$

$$P = \frac{P}{2a^{1/3}}$$

$$V = \frac{2b}{3a} Q - \frac{c}{3a}$$

$$Q = \frac{\varepsilon v}{a^{1/3}} - \frac{b}{3a} \quad (13)$$

dado que a , b y c son constantes arbitrarias, éstas se pueden designar de forma tal que los valores de P , Q y V puedan ser elegidos a conveniencia, sin importar cuales sean los valores de ε , v , p ; con la única restricción de que p debe ser diferente de cero, ya que en ese caso ω sería constante. En las figuras 1 y 2, se puede ver la forma de estas soluciones para valores dados de los coeficientes P , Q , V y cierto valor de τ . Por conveniencia y sin pérdida de generalidad la constante M fue restada de la función, es decir se graficó $\omega - M$.

De las gráficas se deduce que los solitones se encuentran sobre la recta , y se mueven en dirección perpendicular a la recta con velocidad $v_{\xi} = -V/(1 + Q^2)$, $v_{\eta} = Qv_{\xi}$, sin cambiar de manera apreciable su forma.

Si en (8) se toma el límite de onda larga , se puede obtener una aproximación de la solución 1-solitónica de la ecuación (2) y, por lo tanto, de la ecuación (1); al hacer esto tal aproximación queda como

$$\hat{u}(\xi, \eta, \delta) = M - \frac{3K^2 \hat{a}^2 p^2}{(1 + \hat{a} + \hat{a}pK\xi)^2} \quad (14)$$

donde

$$\theta = \xi + Q\eta + V\tau$$

$$K = \frac{1}{a^{1/3}}$$

y P, Q y V estan definidas por (13).

Las gráficas de esta aproximación son solitones singulares, cuya singularidad se encuentra en la recta $1 + \alpha + \alpha pK\theta = 0$ y se comportan de manera semejante al solitón mostrado en la figura 2.

Solución 2-solitónica. Esta solución se encuentra usando la solución 2-solitónica de la ecuación de Boussinesq, ecuación (11) y la transformación (12), hecho esto podemos escribir esta solución como:

$$\hat{u}(\xi, \eta, \delta) = \frac{M + 24 \frac{4P_1^2 \text{Sech}^2[\phi_1] + 4P_2^2 \text{Sech}^2[\phi_2] + (\alpha - 1) \text{Sech}^2[\phi_1] \text{Sech}^2[\phi_2] D(P_1, P_2)}{[4 + (\alpha - 1)(1 + \text{Tanh}[\phi_1])(1 + \text{Tanh}[\phi_2])]^2}}{\quad} \quad (15)$$

donde

$$\phi_i = P_i(\xi + Q_i\eta + V_i\delta) = P_i\hat{\xi}_i$$

$$P_i = \frac{p_i}{2a^{p_i}}$$

$$Q_i = \frac{\epsilon_i p_i}{a^{p_i}} - \frac{b}{3a}$$

$$V_i = \frac{2b}{3a} Q_i - \frac{c}{3a}$$

$$D(P_1, P_2) = 2P_1P_2 + P_2^2(1 + e^{2a}) + P_1^2(1 + e^{2a})$$

FIGURA 1. SOLUCIÓN SOLITÓNICA REGULAR DE LA ECUACIÓN KP VISTA EN DOS DIMENSIONES A UN TIEMPO FIJO.

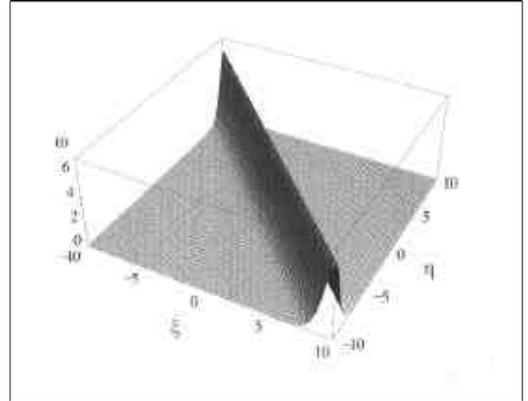
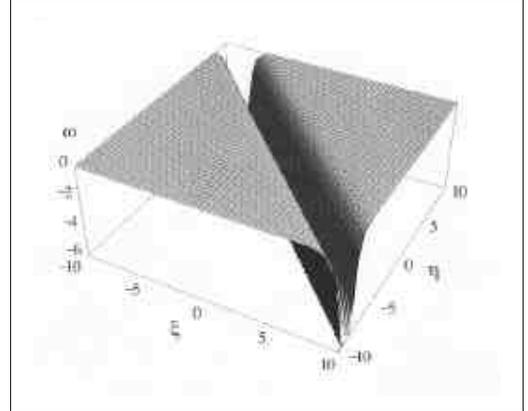


FIGURA 2. SOLITÓN SINGULAR BIDIMENSIONAL, SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN KP, A UN TIEMPO FIJO.



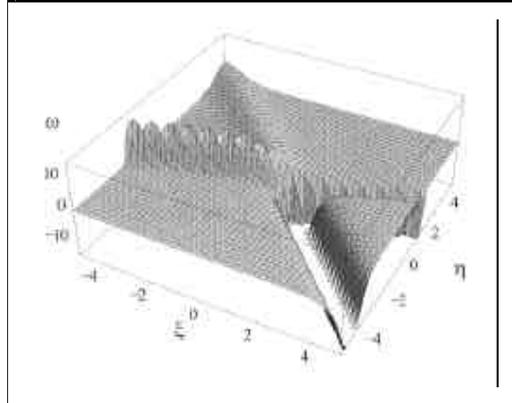
$$\alpha = \frac{(\epsilon_1 v_1 - \epsilon_2 v_2)^2 - 3(p_1 - p_2)^2}{(\epsilon_1 v_1 - \epsilon_2 v_2)^2 - 3(p_1 + p_2)^2} = \frac{(Q_1 - Q_2)^2 - 12(P_1 - P_2)^2}{(Q_1 - Q_2)^2 - 12(P_1 + P_2)^2}$$

$$\epsilon_i = \pm 1$$

$$M = \frac{c}{6a} + \frac{b^2}{18a^2} - \frac{1}{2a^{2/3}} = -\frac{1}{2}(4P_i^2 + Q_i^2 + V_i)$$

En este caso los valores de los coeficientes ya no son independientes, pero se pueden elegir 3 o 4 de ellos arbitrariamente y encontrar los valores de los restantes en función de los primeros. En la figura 3 se muestra la solución para

FIGURA 3. INTERACCIÓN ENTRE DOS SOLITONES BIDIMENSIONALES, DESPUÉS DE LA INTERACCIÓN CAMBIAN SU FORMA DE SINGULAR A REGULAR Y VICEVERSA, COMO CONSECUENCIA DE QUE $\alpha < 0$.



algunos valores de los coeficientes; se eligieron P_1, Q_1, P_2 y se obtuvieron Q_2, V_2 , y la constante α en función de los valores anteriores, como antes, se graficó $\omega - M$. En la gráfica se observa que los solitones se encuentran, cada uno, sobre las rectas, e interaccionan en la intersección de éstas cambiando algunas veces de amplitud y/o forma. La posición de las rectas cambia en el tiempo τ , por lo que los solitones se **mueven con velocidades de** $v_\xi = -V/(1 + Q^2)$, $v_\eta = Q v_\xi$, perpendicularmente a las rectas. Al tomar el límite de onda larga en (10) pero ahora con $e^{\phi_0} = 1$ se llega a la siguiente aproximación para la solución 2-solitónica de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili

$$\dot{u}(i, \tau) = M - 3 \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2B_{12}}{\theta_1 \theta_2 + B_{12}} \quad (16)$$

donde

$$\theta_i = \xi + Q\eta + V_i \tau$$

$$B_{12} = \frac{12a^{3\alpha}}{(\epsilon_{i,p_1} - \epsilon_{i,p_2})^2} = \frac{12}{(\epsilon_{i,p_1} - \epsilon_{i,p_2})^2 K^2}$$

M, K, Q_i y V_i dados anteriormente.

Esta aproximación da solitones singulares en los cuales la singularidad se encuentra en los puntos donde el denominador del segundo término en el lado derecho de (16) se anula.

2. $A(\tau), B(\tau)$ y $C(\tau)$ dependientes de τ

Hasta ahora se han encontrado soluciones de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili considerando la transformación (12); sin embargo, como se dijo antes, las funciones $A(\tau), B(\tau)$ y $C(\tau)$ dependen de manera arbitraria de τ , así que utilizaremos esto para encontrar otras soluciones.

Si se eligen las funciones como

$$A(\tau) = a (\tau - \tau_0)^3$$

$$B(\tau) = b (\tau - \tau_0)^2$$

$$C(\tau) = c (\tau - \tau_0)$$

donde a, b y τ_0 son constantes arbitrarias y c se relaciona con ellas como $c = \frac{9a^{3\alpha} - b^2}{3\alpha}$, entonces la transformación (5) toma ahora la forma

$$t = \left(\eta - \frac{b}{3a} \right) \frac{1}{a^{2/3} (\tau - \tau_0)^2}$$

$$x = \left((\tau - \tau_0) \xi + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{b}{3a} \right)^2 + \frac{1}{2a^{2/3}} \right) \frac{1}{a^{1/3} (\tau - \tau_0)^2}$$

$$w = \frac{1}{2(\tau - \tau_0)} \xi + \frac{1}{a^{2/3} (\tau - \tau_0)^2} u(x, t) \quad (17)$$

Solución 1-solitónica. Al utilizar la transformación anterior en las soluciones dadas por (9) obtenemos

$$\omega(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2t} \xi + \frac{3P^2}{2t^2} \text{Scsch}^2 \left[\frac{P}{2t} \left(\xi + \frac{1}{2t} (\eta + Q)^2 + \frac{P^2}{2t} \right) + \ln|\alpha| \right]$$

si $(\alpha > 0)$

$$\omega(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2t} \xi - \frac{3P^2}{2t^2} \text{Csch}^2 \left[\frac{P}{2t} \left(\xi + \frac{1}{2t} (\eta + Q)^2 + \frac{P^2}{2t} \right) + \ln|\alpha| \right]$$

si $(\alpha < 0)$

donde

$$P = \frac{p}{a^{1/3}}$$

$$t = \tau - \tau_0$$

Q es igual que en (13).

En las figuras 4 y 5 se muestran los solitones correspondientes a cada una de las soluciones para algunos valores de los parámetros relevantes. Como se observa, estos solitones singulares o regulares son de forma parabólica sobre un plano no horizontal dado por el valor $t = \tau - \tau_0$; el valor de esta diferencia también es importante porque de él dependen la semianchura de la parábola y la amplitud del solitón; la primera dependencia es lineal, lo que significa que la semianchura aumenta conforme transcurre el tiempo τ , cuando la diferencia es pequeña la semianchura de la parábola también lo es, y cuando la diferencia es muy grande la parábola se aproxima a una recta (semianchura muy grande). De manera simultánea la amplitud del solitón decrece por el factor de escala t^{-2} .

Solución 2-solitónica. Esta solución tiene la forma

$$\omega(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2t} \xi + \frac{4P_1^2 \text{Sech}^2[\Phi_1] + 4P_2^2 \text{Sech}^2[\Phi_2] + (\alpha 1) \text{Sech}^2[\Phi_1] \text{Sech}^2[\Phi_2] D(P_1, P_2)}{t^2 [4 - (\alpha 1)(1 + \text{Tanh}[\Phi_1])(1 + \text{Tanh}[\Phi_2])]^2}$$

donde

$$\Phi_i = \frac{P_i}{2t} \left(\xi + \frac{1}{2t} (\eta + Q_i)^2 + \frac{P_i^2}{2t} \right)$$

$$P_i = \frac{p_i}{a^{p_i}}$$

$$t = \tau - \tau_0$$

$$Q_i = \frac{\varepsilon_i p_i}{a^{p_i}} - \frac{b}{3a}$$

$$D(P_1, P_2) = 2P_1 P_2 + P_2^2 (1 + e^{2\alpha 1}) + P_1^2 (1 + e^{2\alpha 2})$$

$$\alpha = \frac{(\varepsilon_1 p_1 - \varepsilon_2 p_2)^2 - 3(p_1 - p_2)^2}{(\varepsilon_1 p_1 - \varepsilon_2 p_2)^2 - 3(p_1 + p_2)^2}, \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

La gráfica de esta solución (figura 6), muestra la interacción entre dos solitones (con posibles combinaciones regular-regular, regular-singular, singular-singular) extendidos de forma parabólica sobre un plano no horizontal $\left(\frac{1}{2t} \xi = 0\right)$ y

FIGURA 4. SOLUCIÓN 1-SOLITÓNICA, SOLITÓN REGULAR CON FORMA PARABÓLICA SOBRE UN PLANO INCLINADO, LA FORMA DEL SOLITÓN Y LA INCLINACIÓN DEL PLANO SE DEBEN AL VALOR DE LA DIFERENCIA $t = \tau - \tau_0$, (τ_0 ES EL TIEMPO INICIAL).

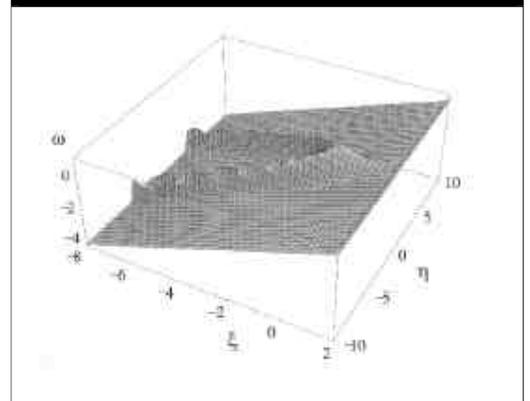
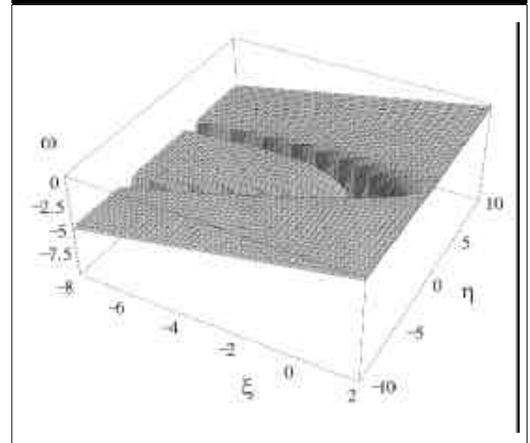
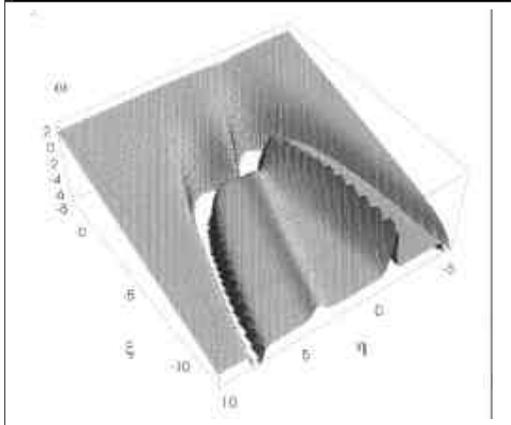


FIGURA 5. SOLITÓN SINGULAR CON FORMA DE PARÁBOLA, LA SEMIANCHURA (EL LADO RECTO) t , PARA TIEMPOS SUFICIENTEMENTE GRANDES ÉSTE SE APROXIMA AL SOLITÓN REPRESENTADO EN LA FIGURA 2.



no estático en el tiempo. El valor de la diferencia $t = \tau - \tau_0$, es de suma importancia para la evolución de los solitones, ya que la semianchura de cada parábola crece linealmente en el tiempo de manera que si el tiempo tiende a infinito cada parábola tiende a una recta. La amplitud de cada solitón depende también del tiempo (t^{-2}) por lo que ésta decrece a medida que transcurre el tiempo.

FIGURA 6. INTERACCIÓN ENTRE DOS SOLITONES BIDIMENSIONALES MOVIÉNDOSE HACIA LA DERECHA, LA FORMA DE LAS PARÁBOLAS Y LA AMPLITUD CAMBIAN EN EL TIEMPO, DESPUÉS DE LA INTERACCIÓN LOS SOLITONES SE TRANSFORMAN DE SINGULARES A REGULARES (VISTA DESDE ARRIBA).



Conclusiones

Hemos encontrado soluciones solitónicas bidimensionales de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili. En dependencia de los valores paramétricos del sistema, estas soluciones presentan comportamientos regulares y se muestran, además como soluciones singulares con propiedades de interacción tipo partícula. La interacción entre solitones regulares y singulares es también del tipo elástico, o puede también ser reinterpretado como transformación de unos en otros, como es común en esta clase de interacciones solitónicas. En los casos de analogía con los resultados obtenidos por Satsuma y Ablowitz (1979), se observa una analogía muy clara. ☺

REFERENCIAS



Ablowitz, M. and H. Segur (1981). *Solitons and Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, PA.

Agüero, M. (2000). "A Note on Singular Solitons of the Boussinesq Like Equation" (en revisión).

Agüero, M.; A. Espinosa y J. Martínez (1997). "Creación y aniquilación de solitones en la ecuación no-lineal de la cuerda", *Revista Mexicana de Física*, 43: 3, pp. 361-373.

Bluman, G. and J. D. Cole (1974). *Similarity Methods for Differential Equations*. Springer, Berlín.

Chow, K. W.; W. C. Lai; C. K. Shek and K. Tso (1998). "Positon-like Solutions of Nonlinear Evolution Equations in (2+1) Dimensions", *Chaos, Soliton and Fractals*, 9: 11. pp. 901-1912.

Hietarinta, J. (1990). "One-Dromion Solutions for Generic Classes of Equations", *Physics Letters A*, 179: 2, 3, September, pp. 113-118.

Kadomtsev, B. B. and V. I. Petviashvili. (1970). "On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media", *Soviet Physics Doklady*, 15, pp. 539-541.

Manakov, S. V.; V. E. Zakharov; L. A. Bordag; A. R. Its and V. B. Matveev (1997). "Two-Dimensional Solitons of the Kadomtsev-Petviashvili Equation and their Interaction", *Physics Letters*, 63A: 3, November, pp. 205-206.

Nakamura, A. (1981). "Decay Mode Solution of the Two-Dimensional KdV Equation and the Generalized Bäcklund Transformation", *Journal of Mathematical Physics*, 22, November, pp. 2456-2462.

Satsuma, J. and M. J. Ablowitz (1979). "Two-Dimensional Lumps in nonlinear Dispersive Systems", *Journal of Mathematical Physics*, 20: 7, July. pp. 1496-1503.

Tajiri, M.; T. Nishitani and S. Kawamoto. (1982). "Similarity Solutions of the Kadomtsev-Petviashvili Equation", *Journal of the Physical Society of Japan*, 51: 7, July. pp. 2350-2356.

Tajiri, M. and T. Nishitani. (1982). "Two-Soliton Resonant Interactions in One Spatial Dimension: Solutions of Boussinesq Type Equation", *Journal of the Physical Society of Japan*, 51: 11, November. pp. 3720-3723.