Espacio del divulgador

Recepción: 13 de enero de 2005
Aceptación: 17 de mayo de 2005

* Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México.
Correo electrónico: eca@uaemex.mx
** Estudiantes de la licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México.
Correo electrónico: caro1601@hotmail.com, jwinee_17@yahoo.com.mx y luisela_mar@hotmail.com

Agradecemos las sugerencias de los revisores anónimos que contribuyeron a mejorar sustancialmente el artículo.

La regla de L'Hôpital y una controversia a su alrededor

Enrique Castañeda Alvarado*, Marcela Carolina Gómez Dévora**,
Isi Yanet González Martínez**, Martha Isela González Vara**

Resumen. Este artículo gira en torno a la controversia surgida por un resultado sobre cálculo diferencial, publicado en el libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* por el Marqués de L'Hôpital. El resultado permite encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero. La investigación proporciona algunos datos que pueden servir para conocer quién es el autor real de dicho resultado, conocido ahora como Regla de L'Hôpital, pues Johann Bernoulli demandaba el crédito del que decía era su trabajo y por el cual L'Hôpital había pagado ciertos honorarios. Incluimos también la interpretación geométrica que sugiere la veracidad de la regla y otras variantes que se desprenden de ella.
Palabras clave: Regla de L'Hôpital, Johann Bernoulli, límites, derechos de autor.

The L'Hôpital Rule and the Controversy Around it

Abstract. This paper revolves around a controversy that arose from a result of differential calculus, published in *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* by Marqués de L'Hôpital. This result allows us to find a rational map limit whose numerator and denominator extends to zero. The present paper provides some data that can be useful in determining the real author of the above-mentioned result attributed to L'Hôpital. Johann Bernoulli demanded the credit for what was, according to him, his piece of work, for which L'Hôpital had paid some honoraria. We have included the geometric interpretation, which suggests the authenticity of the rule and other variables emerging from it.
Key words: L'Hôpital rule, Johann Bernoulli, limits, copyright.

Introducción

A lo largo del tiempo la humanidad ha luchado por encontrar el por qué de las cosas. Muchos temas han sido motivo de investigación y, sin duda alguna, la matemática no es la excepción.

El cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales: cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar durante muchos siglos. Hubo que esperar hasta el siglo XVII para tener la madurez social, científica y matemática que permitiera construir el cálculo que utilizamos en nuestros días. A pesar de que algunas veces su ejercicio se torna difícil, pocos saben que a través de los años, esta eficaz rama de las matemáticas encierra grandes historias que narran cómo surgió, quiénes se encargaron de su establecimiento y de qué manera ha evolucionado con el tiempo.

Este trabajo gira en torno a la regla de L'Hôpital, la cual permite calcular el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero, así como la controversia generada entre dos grandes matemáticos, el suizo Johann Bernoulli y el francés marqués de L'Hôpital. Tal controversia se debe a la autenticidad del autor de la que hasta hoy conocemos como la regla de L'Hôpital.

1. Johann Bernoulli (1667-1748)

Fue el décimo hijo de la familia de Nikolaus Bernoulli, nació en Basilea. Su padre deseaba que Johann fuera comerciante para secundarlo en sus negocios. Pero, en desacuerdo, Johann siguió los pasos de su hermano mayor Jakob y optó por la medicina y las humanidades. En 1690, publicó una tesis doctoral sobre la efervescencia y la fermentación. Ese mismo año, en Ginebra, impartió clases sobre ecuaciones diferenciales, poco después conoció a científicos como Malebranche, Cassini, La Hire y Varignon en un viaje que realizó a París. En 1691, durante su estancia en esa capital conoció al marqués de L'Hôpital, quien le pagaba ciertos emolumentos por sus servicios profesionales. Tiempo después, Bernoulli regresó a su ciudad natal para estudiar medicina, y en 1694 recibió el título de doctor en medicina con una tesis sobre la contracción muscular.

Al parecer, Johann no se sentía muy satisfecho con sus trabajos en medicina, estimulado aparentemente por su hermano Jacob decidió dedicarse a las ciencias, en particular a la física, la astronomía y las matemáticas. En 1695, obtuvo un puesto de profesor de matemáticas y física en la Universidad de Groningen. Mientras tanto, mantenía constante comunicación con L'Hôpital. Uno de sus alumnos en esta institución fue un joven llamado Leonard Euler.

Profesor altamente reconocido a pesar de su carácter receloso y desabrido, estaba animado de un afán por las matemáticas tan vivo como su empeño en iniciar y mantener controversias. De su espíritu celoso no se salvó ni su propio hijo Daniel, a quien reprochó su falta de respeto por haber ganado un premio de la Academia de Ciencias que él mismo ansiaba. En aquella época su renombre se basaba sobre todo en sus contribuciones en el campo de las matemáticas. Durante el periodo 1691-1692, Johann Bernoulli escribió varios textos sobre el cálculo diferencial e integral, pero su publicación ocurrió hasta 1922 (Collette, 1986: 150).

2. Guillaume Francois Antoine L'Hôpital (1661-1704)

Nació en 1661 en París; llevó el título de marqués de Saint-Mesme, conde de Autremont, señor de Ouques.

Como todo personaje de su época, con títulos de nobleza por añadidura, fue obligado a realizar una carrera militar. Gracias a ello fue nombrado capitán de caballería durante algunos años. Su retiro se debió a una miopía considerable; esto lo llevó a interesarse en las matemáticas, de las cuales se hizo un ferviente aficionado muy respetable.

Desde pequeño dirigió su atención hacia la geometría, y se comenta que a los 15 años resolvió problemas difíciles propuestos por Pascal sobre la cicloide. L'Hôpital estuvo particularmente interesado por el nuevo cálculo, presentado al mundo por Leibniz y Newton, a tal grado que escribió el primer libro de cálculo, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, en 1696, el cual estuvo influido por las lecturas que realizaba de sus profesores: Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli y Leibniz (Collette, 1986: 151).

3. Un vistazo al *Análisis de los infinitamente pequeños* de L'Hôpital

El *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* de L'Hôpital fue el primer libro publicado de cálculo. Consta de diez secciones, cada una de ellas enfocada a diferentes variantes del cálculo, y son los siguientes (L'Hôpital, 1998: 23; Collette, 1986: 153):

I. Donde se dan las reglas del cálculo de las diferencias.

II. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las tangentes de todos los tipos de líneas curvas.

III. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y menores, a lo que se reducen los problemas de máximos y mínimos.

IV. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno.

V. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las evolutas.

VI. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las cáusticas por reflexión.

VII. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las cáusticas por refracción.

VIII. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de las líneas curvas que tocan una infinidad de líneas de posición dada, rectas o curvas.

IX. Solución de algunos problemas que dependen de los métodos anteriores.

X. Manera novedosa de hacer uso del cálculo de las diferencias en las curvas geométricas, de donde se deduce el método de los señores Descartes y Hudde.

En la sección IX se encuentra una regla de diferenciación para las formas indeterminadas, este resultado dio origen a la controversia que pretendía sacar a la luz la autenticidad de la obra y el autor real.

4. Regla de L'Hôpital

En la sección IX, §163 del *Análisis de los infinitamente pequeños*, se propone el siguiente problema (L'Hôpital, 1998: 259):

Sea AMD una línea curva ($AP = x, PM = y, AB =$ a) tal que el valor de la ordenada y esté expresado por una fracción, en la cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando $x =$ a; es decir, cuando el punto P caiga sobre el punto dado B, como se muestra en la figura 1. Se pregunta: ¿cuál debe ser entonces el valor de la ordenada BD?

La solución a este problema es lo que se conoce como la regla de L'Hôpital, que en términos prácticos podríamos leer de la siguiente manera:

> Para hallar el valor de una expresión racional en x que para un valor de abscisa dado x toma la forma $\frac{0}{0}$, se determina el cociente de las diferencias del numerador y del denominador, para este valor de la abscisa (Solaeche, 1993: 101).

En la actualidad la regla de L'Hôpital se enuncia del modo siguiente (Spivak, 1992: 282):

Supongamos que f y g son funciones derivables tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \text{ y } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Supongamos también que existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ y } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El símbolo $\lim_{x\to a}$, léase como límite cuando x tiende a a.

Aplicando una forma alterna de la definición de derivada, para el caso especial en que f(a)=g(a)=0, f y g' son funciones continuas y g'(a)$\neq$0, la siguiente 'justificación' da una idea del por qué la regla es cierta:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Esta justificación no es del todo correcta, pues para ello el denominador del término central de estas igualdades debe ser no cero para todo x distinto de a. Para una demostración más rigurosa de la regla de L'Hôpital, véase Spivak (1992: 283).

El ejemplo que el marqués utilizó para ilustrar su regla fue hallar el límite de la función (L'Hôpital, 1998: 260):

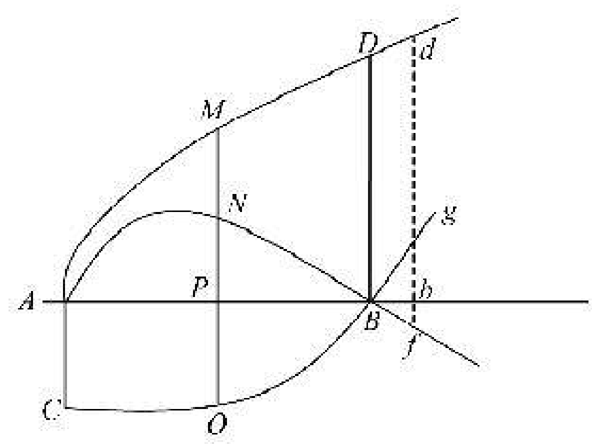

Figura 1. Problema planteado por L'Hôpital en su *análisis de los infinitamente pequeños*.

$$Y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

Cuando x tiende a a y donde a>0 [1]. La solución a dicho ejemplo es la siguiente:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}} - \frac{a^2}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{-\frac{3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}} = \frac{16}{9}a$$

5. Interpretación geométrica de la regla de L'Hôpital

En las figuras 2 y 3, se sugieren de manera visual las razones por las cuales la regla de L'Hôpital podría ser verdadera.

En la figura 2 se muestran dos funciones diferenciables, f y g, cada una de las cuales tiende a 0 cuando $x \to$ a.

Con una ampliación en el punto (a, 0), las gráficas empezarían a verse casi lineales. Pero si las funciones fueran en realidad lineales, entonces su razón sería:

$$\frac{m(x-a)}{n(x-a)} = \frac{m}{n}$$

lo cual implica la razón entre sus derivadas (ver figura 3). Esto sugiere que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1. En ese tiempo comúnmente se escribía aa en lugar de a².

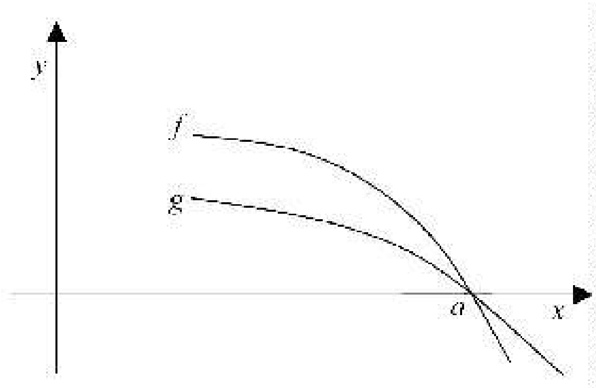

Figura 2. Dos funciones diferenciables que se acercan a cero cuando la variable independiente se acerca a a.

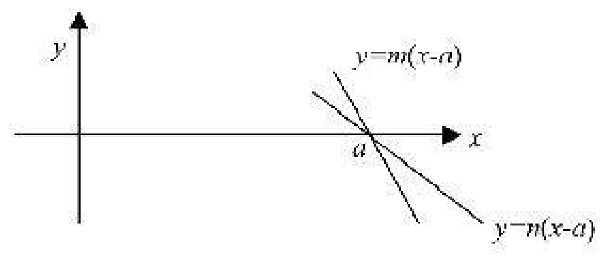

Figura 3. Una ampliación en el punto $x=a$ de la figura 2.

6. Otras formas indeterminadas

En los cursos tradicionales de cálculo diferencial se le pide al estudiante evaluar límites, los cuales mediante alguna manipulación algebraica pueden calcularse; en otros casos puede aplicarse algún argumento geométrico, como por ejemplo para calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, donde no es claro cuál sería el valor de este límite, pues el numerador y el denominador tienden a cero y obtendríamos la forma $\frac{0}{0}$ la cual no está definida. A este tipo de formas se les denomina formas indeterminadas, pues cualquier tipo de definición que quiera dárseles conduce a contradicciones.

Hay otras situaciones (Spivak, 1992: 295-296) en las que el límite no es evidente, por ejemplo, cuando buscamos una asíntota horizontal no es evidente cómo evaluar este tipo de límites, porque el numerador y el denominador se hacen grandes cuando $x\to\infty$ (léase x tiende a infinito). En este caso, si el numerador tiende más rápidamente a ∞, entonces el límite será ∞; si el denominador tiende más rápidamente a ∞, entonces la respuesta será 0. O tal vez tanto el numerador como el denominador tiendan a infinito con la misma rapidez, en cuyo caso la respuesta será un número finito; esta forma indeterminada es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y en este caso podemos aplicar de la misma forma la regla de L'Hôpital.

Consideremos ahora la situación en que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces no es claro cuál sería el valor de $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$; aquí tenemos una 'lucha' entre f y g: si f tiende más rápidamente a cero que g a ∞, entonces la respuesta es 0; si g tiende más rápido a ∞ que f a 0 entonces el valor del límite será ∞. O quizá suceda que tanto f como g tienden a 0 y a ∞ respectivamente con la misma rapidez, en cuyo caso la respuesta será un número finito; esta forma indeterminada es del tipo $0\cdot\infty$, y para aplicar la regla de L'Hôpital basta con rescribir el producto fg como un cociente $fg=\frac{f}{1/g}$ o $fg=\frac{g}{1/f}$, lo cual nos ayuda a convertir el límite en una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, de tal forma que podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

Por otro lado, si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces la expresión $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ tiene una forma indeterminada del tipo $\infty-\infty$, en el que una vez más existe una 'competencia' entre f y g; es decir, dependiendo de cuál de las funciones tiende más rápido a ∞ podríamos tener como respuesta ∞ o $-\infty$, o quizá un 'término medio'. La única forma de averiguarlo sería realizando una manipulación algebraica como una racionalización o factorizando un factor común, de tal modo que obtengamos alguna de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Finalmente si consideramos el $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ dependiendo de cómo sean los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, podríamos tener alguna de las formas indeterminadas 0^0, ∞^0 o 1^∞. En cada uno de estos casos podemos recurrir a la función logaritmo natural y la función exponencial, y escribir $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$, que nos conduce al producto indeterminado $g(x)\ln f(x)$, que es del tipo $0\cdot\infty$.

7. La regla de L'Hôpital en la vida real

Como ya comentamos en la sección anterior, las aplicaciones directas de la regla de L'Hôpital son en el cálculo de límites. En este apartado se muestran dos aplicaciones prácticas donde la regla de L'Hôpital se ha utilizado.

En electrónica, si tenemos un circuito eléctrico con una resistencia de R ohms, una inductancia de L henrys y una fuerza electromotriz de E volts, donde R, L, E son positivas y ohms, henrys, volts son las unidades correspondientes. Se sabe que la corriente i en amperes que fluye en el circuito después de t segundos está modelada matemáticamente como $i=\frac{E}{R}(1-e^{-Rt/L})$, donde e es el número de Euler cuyo valor es aproximadamente 2.718281. Si consideramos a R, L, E constantes, por medio de la regla de L'Hôpital puede concluirse que a medida que la resistencia tiende a cero la corriente se acerca al valor $\frac{Et}{L}$.

Para ejemplificar otra situación de la vida real, supongamos que invertimos una cantidad inicial, digamos A_0 de dinero en un banco con una tasa de interés i, la cual reinvertimos n veces al año. Sabemos que el valor de la inversión después de cierto tiempo t en años puede modelarse matemáticamente como $A = A_0(1+\frac{i}{n})^{nt}$. Si el número de veces que reinvertimos dicha cantidad es muy grande, entonces podemos aplicar la regla de L'Hôpital para demostrar que la cantidad de dinero que recibiremos después de t años es $A = A_0e^{it}$, donde aquí nuevamente e es el número de Euler.

8. Una controversia por los derechos de autor

En 1696, de manera inesperada, el marqués de L'Hôpital publica el primer libro de cálculo: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Se sabe que esta obra estuvo influida por las clases que el marqués recibía de otros matemáticos, principalmente Johann Bernoulli y Leibniz. La influencia que ellos aportaron a dicho texto es clara, incluso en la introducción L'Hôpital reconoce que parte del trabajo se lo debe a ellos y hace hincapié en haberse servido libremente de sus descubrimientos (L'Hôpital, 1998: 7, 21 y Solaeche, 1993: 100).

Poco tiempo después, Bernoulli recibe un ejemplar del libro, cuyo remitente era el mismo autor. Como muestra de agradecimiento, Johann Bernoulli envía una carta al marqués de L'Hôpital, en la cual agradece la mención que éste hizo sobre su trabajo y además lo felicita, ya que tanto la redacción de la obra como la presentación de las proposiciones le parecen perfectas; por último, como una atención hacia su condiscípulo, promete devolver la mención en su próxima publicación.

A pesar de que Bernoulli percibe que un resultado suyo es presentado en el *Análisis de los infinitamente pequeños*, en su carta no menciona ningún tipo de reclamo al marqués. Sin embargo, en 1698, envía una carta a Leibniz donde narra su sentimiento de fraude y la amargura que sufre al darse cuenta de la forma descarada en que L'Hôpital haya plagiado sus notas. De la misma manera, en 1704, poco tiempo después de la muerte de L'Hôpital, Brook Taylor recibe una misiva similar. Es hasta entonces cuando Bernoulli, al considerarse libre, realiza algunas declaraciones públicas acerca de los numerosos resultados obtenidos y en particular de la regla de L'Hôpital (Solaeche, 1993: 101).

Debido a lo anterior, algunos matemáticos interesados en esta clase de controversias se dedicaron a indagar sobre la paternidad de la regla anteponiendo la reputación impecable del marqués y la grandeza matemática de Bernoulli.

Durante mucho tiempo no se logró nada para esclarecer la penumbra que cubría la autoría verdadera de la regla en cuestión y, sin duda alguna, para Bernoulli el tiempo no estaba de su lado, pues para 1748, año en que murió, las dudas seguían en pie. Es hasta el siglo XX, en 1922, cuando aparece un tratado escrito por Johann Bernoulli, con fecha entre 1691-1692, cuyo tema principal era el cálculo diferencial, así como uno más sobre cálculo integral. Con esto inician las comparaciones entre el libro de L'Hôpital y los manuscritos de Bernoulli. Los cotejos reflejan a la ciencia matemática que la semejanza entre dichos escritos no es producto de la casualidad, pues presentan una secuencia peculiar y una intersección imposible de pasar inadvertida ante los ojos del mundo matemático. Aquí el panorama empieza a cambiar; sin embargo, en 1955 el hallazgo de mayor importancia para este dilema fue una carta remitida por L'Hôpital, donde proponía a Bernoulli la exclusividad de sus resultados a cambio de algunas monedas, dicho documento fechado el 17 de marzo de 1694 dice así:

> Con placer le daré una pensión de 300 libras, la cual comienza desde el primero de enero del presente año, y le mandaré 200 libras por la primera parte del año, por los artículos que usted ha mandado, y serán otras 150 libras por la otra parte del año, y así en el futuro. Prometo incrementar esta pensión pronto, dado que sé que es mesurada, y lo haré tan pronto como mis asuntos sean un poco menos confusos [...] No soy tan irrazonable como para pretender de usted todo su tiempo, sino sólo le solicitaré que de vez en cuando me dedique algunas horas de su tiempo para trabajar en lo que le pregunte, y también que me comunique sus descubrimientos, pidiéndole a la vez que no muestre ninguno de ellos a otros. Le suplico incluso que no envíe aquí copias de los escritos que ha dejado conmigo ni al señor de Varignon ni a otros; pues no me agradará que sean publicados. Envíeme su respuesta a todo esto y créame,
>
> Monsieur tout a vous
>
> LE M. DE L'HÔPITAL.
>
> (L'Hôpital, 1998: 5)

Aún no se sabe si Bernoulli accedió a la propuesta, pero se supone que pudo haber aceptado, información deducida a partir de más correspondencia hallada y considerando que en esa época Bernoulli era un joven de 24 años y sin empleo, en 1694 estaba recién casado y aún no tenía trabajo, lo que probablemente lo orilló a vender su trabajo.

Una de las tantas cartas halladas de Bernoulli dirigidas a L'Hôpital, con fecha del 22 de julio de 1694 (Solaeche, 1993: 103), contiene la regla de L'Hôpital para la forma $\frac{0}{0}$ y por alguna justa razón la redacción es similar a la que se aprecia en el *Análisis de los infinitamente pequeños*, incluso los ejemplos propuestos por el marqués en su obra difieren muy poco de los contenidos en la carta.

La última misiva de la que haremos mención está firmada por L'Hôpital (Solaeche, 1993: 103), donde comenta a Bernoulli que está trabajando en un escrito sobre las secciones cónicas y uno más acerca de cálculo diferencial; alude también su intención a otorgarle el crédito por sus contribuciones. Mientras tanto y hasta el día de su muerte, L'Hôpital no se ocupó de hacer justicia por quien en realidad elaboró los resultados publicados en su obra.

Con estas condiciones, logró adjudicarse el resultado de la regla de L'Hôpital a Johann Bernoulli; a pesar de ello, hasta nuestros días este maravilloso resultado sigue conociéndose como la regla de L'Hôpital, y muchos consideramos que sería más justo mencionarla como *regla de Bernoulli-L'Hôpital*.

Bibliografía

Collette, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas II*. Siglo XXI, México.

L'Hôpital, G. F. A. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. Colección Mathema, Servicios Editoriales. Facultad de Ciencias, UNAM, México.

Solaeche-Galera, M. C. (1993). "La controversia L'Hopital-Bernoulli", *Divulgaciones Matemáticas*. 1 (1), 99-104.

Spivak, M. (1992). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Reverté, México.