

# Agujeros en el segundo producto simétrico de subcontinuos del continuo Figura 8

David Maya Escudero\*, José Guadalupe Anaya Ortega\* y Fernando Orozco Zitli\*

Recepción: 11 de diciembre de 2009

Aceptación: 29 de abril de 2010

\* Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, México.  
Correo electrónico: dmayae\_19@hotmail.com, jgao@uaemex.mx y forozco@uaemex.mx

**Resumen.** El hiperespacio llamado  $n$ -ésimo Producto Simétrico de un Continuo fue introducido por K. Borsuk y S. Ulam en el año 1931. Se sabe que los únicos continuos localmente conexos, cuyo modelo geométrico de su Segundo Producto Simétrico se puede encajar en el espacio Euclidiano de tres dimensiones, son los subcontinuos del continuo figura 8. En este artículo estudiamos la cantidad de agujeros que tiene el segundo producto simétrico de dichos continuos y cuántos más se producen si le quitamos alguno de sus puntos.

**Palabras clave:** continuo, segundo producto simétrico, grado de multicoherencia, componentes conexas.

**Making Holes in the Second Symetric Product of Subcontinua of the Continuum Figure 8**

**Abstract.** The Hyperspace called the  $n$ -th Symmetric Product of a Continuum was introduced by K. Borsuk and S. Ulam in 1931. It is known that the only locally connected continua, whose geometric model of their Second Symmetric Product can be embedded in the Euclidean space of three dimensions, are the subcontinua of the continuum, Figure 8. In this paper, we study the number of holes in the second symmetric product of those continua and the number of holes that are produced after we remove some of its points.

**Key words:** continuum, second symmetric product, multicoherence grade, connected component.

## Introducción

Una propiedad que se ha estudiado de manera importante, en la teoría de continuos, es el grado de multicoherencia de un espacio. Intuitivamente, el grado de multicoherencia de un espacio es el número de agujeros que tiene éste. Diremos que un espacio es unicoherente si su grado de multicoherencia es cero. Esta propiedad ha sido estudiada por diversos autores, sólo por mencionar algunos de ellos: Eilenberg (1936), Whyburn (1942), Bennet (1971), Mäckowiak (1978), Nadler (1978), Illanes (1985), Owens (1986), García-Máynez e Illanes (1989), Charatonik, J. J. (1989), Youcheng (1996), Castañeda (1998), Charatonik, J. J., Charatonik, W. J. e Illanes (1998), Macías (2001) y Oliveros y Puga (2001).

Recientemente, una herramienta para establecer diferencia entre espacios topológicos es descubrir qué tanto cambia el grado de multicoherencia del espacio al quitarle un punto, ver Illanes (2002), Anaya (2007), Anaya (2011), Anaya y Orozco-Zitli (2011).

Existen continuos cuyo segundo producto simétrico puede ser encajado en el espacio Euclidiano de tres dimensiones. En este trabajo establecemos una clasificación de los conjuntos de a los más dos puntos de estos continuos que alteran el grado de multicoherencia de su segundo producto simétrico.

## 1. Preliminares

Un continuo  $X$  es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado. Diremos que  $A$  es un *subcontinuo* de  $X$ , si es un subconjunto de  $X$  que por sí mismo es un continuo. El hiperespacio  $F_n(X)$  es conocido como el  $n$ -ésimo producto simétrico de un continuo  $X$  y está definido como  $\{A \subseteq X: A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$ , para cada  $n$  número entero positivo, al cual se le dota con la métrica de Hausdorff (Illanes, 2004).

Sean  $Y$  un espacio topológico y  $C \subseteq Y$ , denotaremos por  $b_0(C)$  al número de componentes conexas que tiene  $C$  en  $Y$ . Para un espacio métrico conexo  $X$ , definimos el *grado de multicoherencia* por  $r(X) = \sup \{b_0(C) : C \subseteq (A \cap B), A, B \text{ son cerrados}\}$ .

y conexos en  $X$  tales que  $X = A \cup B$   $-1$ , si es finito, en caso contrario, escribimos  $r(X) = \infty$ . Cuando  $r(X) = 0$  diremos que  $X$  es *unicoherente*. Sea  $p \in X$ , diremos que  $p$  *agujera al espacio*  $X$ , si el grado de multicoherencia de  $X$  es menor que el grado de multicoherencia de  $X \setminus \{p\}$ , es decir,  $r(X) < r(X \setminus \{p\})$ .

Consideremos  $Z$  y  $Y$  espacios topológicos. Diremos que  $Y$  es un *retracto por deformación* de  $Z$ , si  $Y \subseteq Z$  y existe una función continua  $G: Z \times [0, 1] \rightarrow Z$ , tal que  $G(x, 0) = x$ , para cada  $x \in Z$ ;  $G(Z, 1) = Y$  y  $G(y, 1) = y$ , para cada  $y \in Y$ . Diremos que  $Z$  es *contraíble*, si existe un punto  $x_0 \in Z$ , tal que  $\{x_0\}$  es un retracto por deformación de  $Z$ .

El continuo Figura 8 está definido como la unión de dos circunferencias que se intersectan en un solo punto. Los *subcontinuos* del continuo Figura 8 son:

- a) el arco, espacio homeomorfo al intervalo  $[0, 1]$ ,
- b) la curva cerrada simple, espacio homeomorfo a la circunferencia de radio 1,
- c) la paleta, unión de una curva cerrada simple con un arco que se intersectan en un solo punto, el cual es punto final del arco,
- d) la medalla, unión de una curva cerrada simple y un arco que se intersectan en un solo punto, el cual no es punto final del arco,
- e) el tríodo, unión de tres arcos que se intersectan en un punto, el cual es punto final de cada arco,
- f) el 4-odo, unión de cuatro arcos que se intersectan en un punto, el cual es punto final de cada arco, y
- g) el mismo continuo Figura 8;

A los puntos de intersección mencionados en los incisos c), d), e), f) y g), los llamaremos *puntos vértice*. Véase la figura 1.

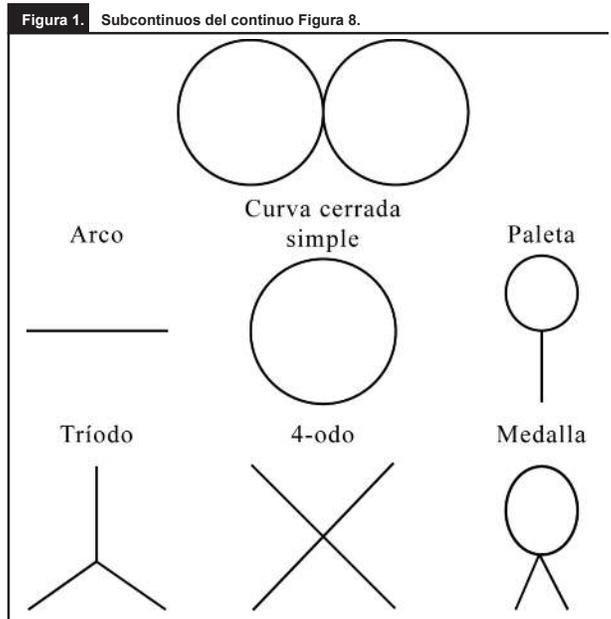


Figura 1. Subcontinuos del continuo Figura 8.

Se sabe que los únicos continuos localmente conexos para los cuales su segundo producto simétrico se puede encajar en el espacio euclidiano de tres dimensiones, es decir, que se pueden dibujar en tres dimensiones, son todos los subcontinuos del continuo Figura 8 (Castañeda, 2002), este resultado justifica que el desarrollo de este artículo será geométrico.

Sean  $Y$  un conjunto y  $Z, W \subseteq Y$ , denotaremos por  $\langle W, Z \rangle$  al conjunto  $\{\{w, z\} : w \in W \text{ y } z \in Z\}$ . Si  $X$  es un continuo, se puede probar fácilmente que: Si  $W$  y  $Z$  son subcontinuos de  $X$ , entonces  $\langle W, Z \rangle$  es un subcontinuo de  $F_2(X)$  tal que  $\langle W, Z \rangle \setminus \{\{x, y\}\}$  es conexo, para todo  $\{x, y\} \in \langle W, Z \rangle$ .

Acerca del grado de multicoherencia del segundo producto simétrico de un continuo, se tiene el siguiente teorema y su prueba se puede consultar en Macías (1999):

**Teorema 1.** Si  $X$  es un continuo entonces  $r(F_2(X)) \leq 1$ .

Un resultado que nos será de gran utilidad, que puede consultarse en Eilenberg (1936); y que a continuación se enuncia, es:

**Teorema 2.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos conexos. Si  $Y$  es un retracto por deformación de  $X$ , entonces  $r(X) = r(Y)$ .

## 2. Clasificación

En esta sección, presentamos el teorema principal de este artículo.

**Teorema principal.** Sean  $W$  un subcontinuo del continuo Figura 8 y  $\{x, y\} \in F_2(W)$ . Entonces  $\{x, y\}$  agujera a  $F_2(W)$  si y sólo si,  $x$  y  $y$  no son puntos finales de  $W$ , con  $x \neq y$ , o  $x$  es un punto vértice, con  $x = y$ .

*Demostración*

La demostración de este teorema la haremos por casos.

Sean  $W$  un subcontinuo del continuo Figura 8 y  $a \in W$ . Definimos al conjunto:

$$\mathcal{M}(a) = \{A \in F_2(W) : a \in A\}$$

a) Supongamos que  $W = [0, 1]$ . Se sabe que el  $F_2(W)$  es homeomorfo a  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$  (Illanes, 2004).

Los conjuntos  $\mathcal{M}(0)$ ,  $\mathcal{M}(1)$  y  $F_1(W)$  son homeomorfos a los conjuntos  $\{(0, c) \in \Delta : c \in [0, 1]\}$ ,  $\{(1, d) \in \Delta : d \in [0, 1]\}$  y  $\{(e, e) \in \Delta : e \in [0, 1]\}$ , respectivamente, los cuales corresponden a los lados de  $\Delta$ .

Sabemos que  $F_2(W)$  es unicoherente. Ahora veremos que elementos de  $F_2(W)$  lo agujeran.

Sea  $A_0 \in F_2(W)$ , tal que  $A_0 \in \mathcal{M}(0) \cup \mathcal{M}(1) \cup F_1(W)$ .

Es fácil probar que  $F_2(W) \setminus \{A_0\}$  es contraíble. Por el Teorema 2 y dado que los puntos tienen grado de multicoherencia igual a cero,  $F_2(W) \setminus \{A_0\}$  es unicoherente, es decir,  $A_0$  no agujera a  $F_2(W)$ .

Por otro lado, si  $A_1 \in F_2(W)$ , tal que  $A_1 = \{a_1, b_1\}$ , con  $b_1 < a_1$  y  $0, 1 \notin A_1$ . Definimos los conjuntos  $\mathcal{F} = F_2([0, a_1]) \setminus \{A_1\}$  y  $\mathcal{G} = \langle W, [a_1, 1] \rangle \setminus \{A_1\}$ , representados geoméricamente en la figura 2.

Notemos que,  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son subconjuntos conexos y cerrados de  $F_2(W) \setminus \{A_1\}$  y son tales que  $F_2(W) \setminus \{A_1\} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ .

Por otro lado, tenemos que  $b_0(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 2$ , véase la figura 2. Así  $r(F_2(W) \setminus \{A_1\}) \geq 1$ . Por lo tanto  $A_1$  agujera a  $F_2(W)$ . Con esto terminamos el caso a).

b) Supongamos que  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$ . En Illanes (2004) se demuestra que  $F_2(W)$  es homeomorfo a una banda de Möbius, donde  $F_1(W)$  está representado en la orilla de la banda.

Es fácil probar que  $F_2(W)$  es la unión de dos conjuntos conexos y cerrados, cuya intersección tiene dos componentes, entonces  $1 \leq r(F_2(W))$ . Así, por el Teorema 1, tenemos que  $r(F_2(W)) = 1$ .

Consideramos  $A = \{x, y\}$ , donde  $x$  y  $y$  son elementos distintos de  $W$ . Entonces los puntos  $x$  y  $y$  determinan dos arcos en la circunferencia, en el caso en que  $x$  y  $y$  no sean antípodas elegimos el arco de menor longitud y  $m(A)$  denotará a su punto medio; en otro caso,  $m(A)$  representará el punto medio del arco que une a  $x$  con  $y$  en dirección contraria de las manecillas del reloj. Ahora, para cada  $a$  y  $b$  elementos de  $W$  que no son antípodas, definimos el arco  $ab$  como el arco menor que determinan  $a$  y  $b$  en  $W$ , convenimos que  $ab = ba$ . Definimos al conjunto  $\mathcal{H}(a, b) = \{A \in F_2(W) : m(A) \in ab\}$ . Si  $a \in W$ , denotamos por  $-a \in W^1$  a su punto antípoda. Consideremos al conjunto  $\mathcal{L}(a) = \{A \in F_2(W) : m(A) = a\}$ , así  $\mathcal{L}(a) = (a) \cup \mathcal{L}(-a)$  se representa como un arco sobre la banda de Möbius que une a  $\{a\}$  con  $\{-a\}$ , véase la figura 3.

Ahora veremos cuáles elementos de  $F_2(W)$  lo agujeran. Tendremos dos casos; los elementos que constan de un punto y los que constan de dos distintos de la circunferencia.

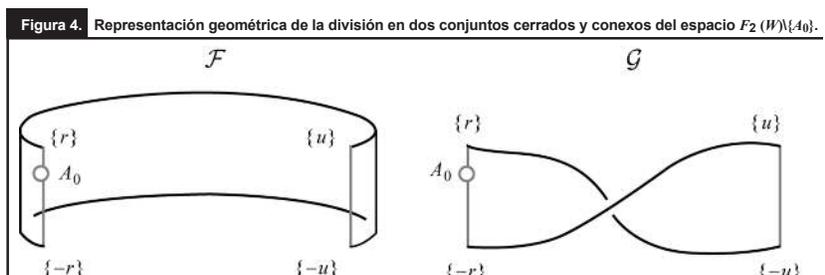
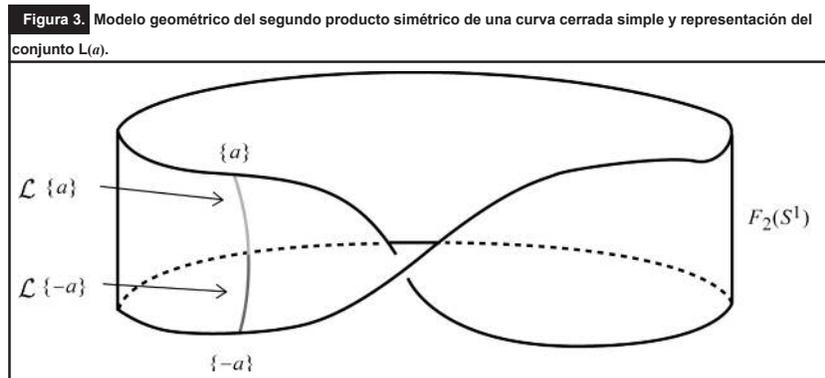
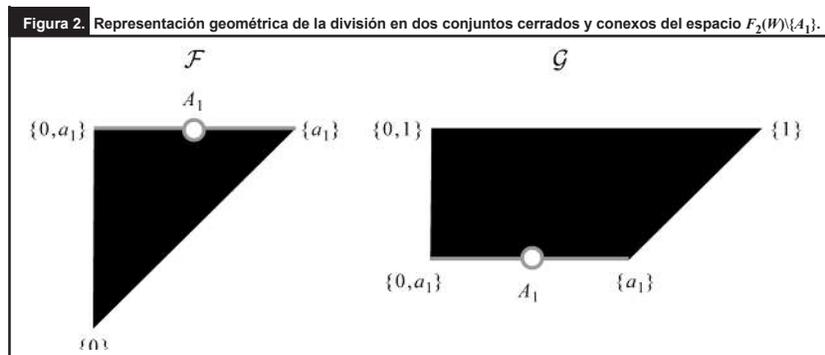
Consideremos  $A_0 \in F_2(W)$ , donde  $A_0 = \{a_0, b_0\}$  con  $a_0 \neq b_0$ . Sean  $m(A_0) = r$  y  $u \notin W$ , tal que  $u \notin \{r, -r\}$ ; así, definimos los conjuntos:  $\mathcal{F} = (\mathcal{H}(r, u) \cup \mathcal{H}(-r, -u)) \setminus \{A_0\}$  y  $\mathcal{G} = (\mathcal{H}(-$

$r, u) \cup \mathcal{H}(r, -u)) \setminus \{A_0\}$ , que geoméricamente están representados en la figura 4.

Los conjuntos  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son conexos y cerrados en  $F_2(W) \setminus \{A_0\}$ , además que  $F_2(W) \setminus \{A_0\} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ . Dado que  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = (\mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(-r) \cup \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u)) \setminus \{A_0\}$ , tenemos que  $b_0(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 3$  (véase la figura 4). Así,  $A_0$  agujera a  $F_2(W)$ , ya que  $r(F_2(W) \setminus \{A_0\}) \geq 2$ .

Sea  $A_1 \in F_1(W)$ . Tenemos que  $A_1$  está representado por un punto que pertenece a la frontera como variedad de la banda de Möbius, por lo que existe un espacio  $Y_0 \subseteq F_2(W) \setminus \{A_1\}$ , tal que  $Y_0$  es un retracto por deformación de  $F_2(W) \setminus \{A_1\}$ , tal que  $Y_0$  es homeomorfo a  $F_2(W)$ , véase la figura 5. De lo anterior y del Teorema 2, concluimos que  $r(F_2(W) \setminus \{A_1\}) = r(F_2(W))$ , es decir,  $A_1$  no agujera a  $F_2(W)$ .

Con esto terminamos el caso b).

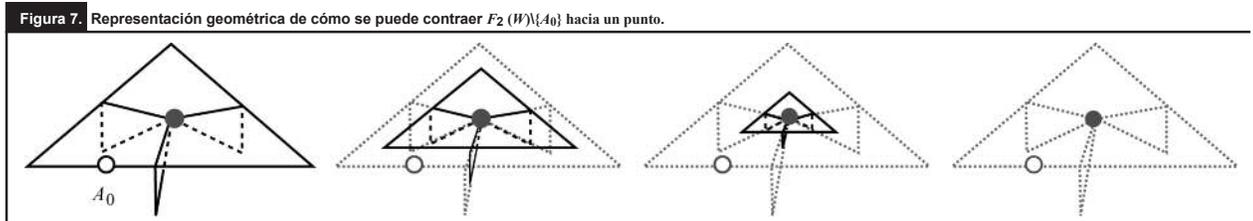
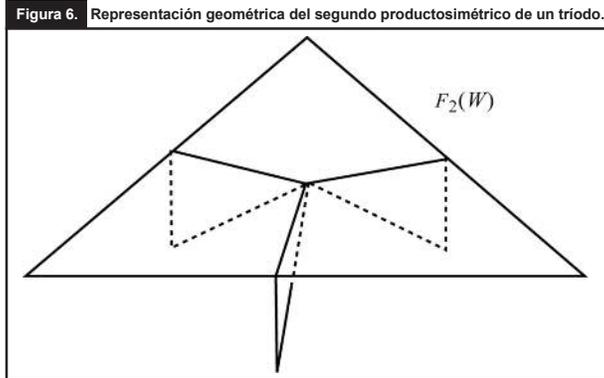
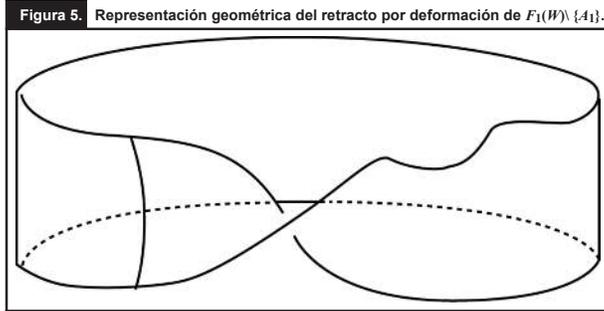


c) Supongamos que  $W$  es un tríodo. Sean  $I_1, I_2$  y  $I_3$  los arcos tales que  $W$  es la unión de ellos y cuya intersección es un punto  $v$ , el cual es punto final de cada uno de ellos. Observemos que el  $F_2(W)$  es contraíble y por lo tanto uncoherente; así,  $r(F_2(W))=0$ , véase la figura 6.

Consideremos los siguientes arcos  $J_1 = I_1 \cup I_2, J_2 = I_2 \cup I_3, J_3 = I_3 \cup I_1$ , y  $e_1, e_2, e_3$  los puntos finales, distintos a  $v$ , de los arcos  $I_1, I_2$  y  $I_3$ , respectivamente. Si  $c, d \in W$ , denotaremos por  $cd$  al único arco, contenido en  $W$ , que tiene por puntos finales a  $c$  y  $d$ .

Ahora, veremos cuáles elementos de  $F_2(W)$  lo agujeran, para esto tomaremos en cuenta los siguientes casos:

- (1)  $A_0 \in \mathcal{M}(e_1) \cup \mathcal{M}(e_2) \cup \mathcal{M}(e_3) \cup F_1(W)$ ,
- (2)  $A_1 = \{a_1, b_1\} \subset I_k$  tal que  $v, e_k \notin A_1$  y  $a_1 \neq b_1$ , para algún  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,
- (3)  $A_2 = \{a_2, b_2\}$  con  $e_k, e_i \notin A_2$  tales que  $a_2 \in I_k$  y  $b_2 \in I_i$  para algunos  $k, i \in \{1, 2, 3\}$  y  $k \neq i$ , y
- (4)  $A_3 = \{v\}$ .



Para el caso (1), se tiene que  $F_2(W) \setminus \{A_0\}$  es contraíble, por lo tanto  $A_0$  no agujera a  $F_2(W)$ , véase la figura 7.

Para el caso (2), supongamos, sin perder generalidad, que  $k = 1$  y que  $b_1 \in e_1 a_1$ . Sean  $\mathcal{F}_1 = F_2(e_1 a_1) \setminus \{A_1\}$  y  $\mathcal{G}_1 = (F_2(J_2 \cup a_1 v) \cup (J_2 \cup a_1 v, e_1 a_1)) \setminus \{A_1\}$ . Entonces  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{G}_1$  subconjuntos conexos y cerrados de  $F_2(W) \setminus \{A_1\}$ , tales que  $F_2(W) \setminus \{A_1\} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{G}_1$ . Dado que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}_1 = \langle \{a_1\}, e_1 a_1 \rangle \setminus \{A_1\}$  no es conexo, tenemos que  $b_0(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}_1) = 2$ , esto implica que  $r(F_2(W) \setminus \{A_1\}) \geq 1$ . Por lo tanto,  $A_1$  agujera a  $F_2(W)$ .

En el caso (3), sin pérdida de generalidad, supondremos que  $k = 1$  e  $i = 2$ . Consideramos a los conjuntos  $\mathcal{F}_2 = (F_2(e_1 a_2) \cup F_2(e_2 b_2) \cup F_2(a_2 e_3 \cup b_2 e_3)) \setminus \{A_2\}$  y  $\mathcal{G}_2 = \langle e_1 a_2, e_2 b_2 \rangle \cup \langle e_1 a_2, a_2 e_3 \cup b_2 e_3 \rangle \cup \langle e_2 b_2, a_2 e_3 \cup b_2 e_3 \rangle \setminus \{A_2\}$ . Tenemos que  $\mathcal{F}_2$  y  $\mathcal{G}_2$  son subconjuntos conexos y cerrados de  $F_2(W) \setminus \{A_2\}$ , tales que  $F_2(W) \setminus \{A_2\} = \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{G}_2$ . Como  $\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{G}_2 = (\langle \{a_2\}, W \rangle \cup \langle \{b_2\}, W \rangle) \setminus \{A_2\}$  se tiene que  $b_0(\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{G}_2) = 2$ , esto implica que  $r(F_2(W) \setminus \{A_2\}) \geq 1$ , por lo tanto,  $A_2$  agujera a  $F_2(W)$ .

Para el caso (4), consideremos a los siguientes conjuntos  $\mathcal{F}_3 = (F_2(J_2)) \setminus \{A_3\}$  y  $\mathcal{G}_3 = (F_2(I_1) \cup \langle I_1, J_2 \rangle) \setminus \{A_3\}$ . Así,  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{G}_3$  son subconjuntos conexos y cerrados de  $F_2(W) \setminus \{A_3\}$ ; además, se tiene que  $F_2(W) \setminus \{A_3\} = \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{G}_3$  y  $\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{G}_3 = \langle \{v\}, J_2 \rangle \setminus \{A_3\}$  (véase la figura 8), entonces  $b_0(\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{G}_3) = 2$  lo que implica que  $r(F_2(W) \setminus \{A_3\}) \geq 2$ . De manera que  $A_3$  agujera a  $F_2(W)$ .

Con esto terminamos el caso c).

d) Supongamos que  $W$  es una paleta. Denotaremos por  $S^1, I, v$  y  $\ell$ , a la curva cerrada simple, al arco, el punto vértice y el punto final del arco distinto de  $v$ , respectivamente.

Es fácil probar, que el  $F_2(W)$  es homeomorfo al espacio de la figura 9.

Con un argumento análogo al dado en el caso b), tenemos que  $r(F_2(W)) = 1$ .

Utilizaremos  $\mathcal{L}(a)$  y  $\mathcal{H}(a, b)$  como se definieron en el caso b). Si  $a, b \in S^1$ , son tales que  $a$  y  $b$  no son puntos antípodos, definimos a los siguientes conjuntos  $\mathcal{N}(a, b) = \{ \{c, d\} \in \langle I, S^1 \rangle : \{d, v\} \in \mathcal{H}(a, b) \}$  y  $\mathcal{O}(a) = \{ \{a, c\} \in F_2(W) : c \in I \}$ .

En seguida, veremos cuáles elementos  $A$  de  $F_2(W)$  lo agujeran, para ello, consideremos los siguientes tres casos:

- 1)  $A_1 \in (F_1(W) \setminus \{ \{v\} \}) \cup \langle \ell, W \rangle$ ,
- 2)  $A_2 = \{v\}$  y
- 3)  $A \in (F_2(W) \setminus ((F_1(W) \setminus \{ \{v\} \}) \cup \langle \ell, W \rangle))$ .

Para el caso (1),  $A_1$  no agujera a  $F_2(W)$  y la prueba es similar a la hecha en el caso de los conjuntos de un solo punto en el inciso b).

Sean  $r, u \in S^1$  tales que  $v \in ru$ , donde  $u \neq r$  y  $u \notin \{v, -v\}$ , definimos a los siguientes subconjuntos de  $F_2(W)$ :  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{H}(r, u) \cup \mathcal{H}(-r, -u) \cup \mathcal{N}(r, u) \cup \mathcal{N}(-r, -u) \cup F_2(I)$  y  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{H}(r, -u) \cup \mathcal{H}(-r, u) \cup \mathcal{N}(r, -u) \cup \mathcal{N}(-r, u)$ , véase la figura 10.

Tenemos que los conjuntos  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{G}_0$  son conexos y cerrados en  $F_2(W)$ , y satisfacen que  $F_2(W) = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{G}_0$ .

En el caso (2), consideremos a  $r = v$ . Definimos a  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \setminus \{A_2\}$  y  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 \setminus \{A_2\}$ . Se tiene que  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{G}_1$  son subconjuntos conexos y cerrados de  $F_2(W) \setminus \{A_2\}$ , que satisfacen que  $F_2(W) \setminus \{A_2\} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{G}_1$ ,  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}_1 = (\mathcal{L}(v) \cup \mathcal{L}(-v) \cup \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u) \cup \mathcal{O}(t) \cup \mathcal{O}(v)) \setminus \{A_2\}$  donde  $\{v, t\} \in \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u)$ , y  $b_0(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}_1) = 3$ . Esto implica que  $r(F_2(W) \setminus \{A_2\}) \geq 2$  y, por tanto  $A_2$  agujera a  $F_2(W)$ .

Para el caso (3), se tienen los siguientes tres subcasos:

- 3.1)  $A_3 \in F_2(S^1)$ ,
- 3.2)  $A_4 \in \langle S^1, I \rangle$  y
- 3.3)  $A_5 \in F_2(I)$ .

Para el subcaso 3.1, consideramos a  $r = m(A_3)$  y los conjuntos  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_0 \setminus \{A_3\}$  y  $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_0 \setminus \{A_3\}$ . Tenemos que  $\mathcal{F}_2$  y  $\mathcal{G}_2$  son subconjuntos cerrados y conexos de  $F_2(W) \setminus \{A_3\}$  tales que  $F_2(W) \setminus \{A_3\} = \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{G}_2$  y  $\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{G}_2 = (\mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(-r) \cup \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u) \cup \mathcal{O}(t_0) \cup \mathcal{O}(t_1)) \setminus \{A_3\}$ , donde  $t_0, t_1 \in S^1$  y satisfacen que  $\{v, t_0\} \in \mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(-r)$  y  $\{v, t_1\} \in \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u)$ . Así que  $b_0(\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{G}_2) \geq 3$  y  $r(F_2(W) \setminus \{A_3\}) \geq 2$  por lo que. Por lo tanto  $A_3$  agujera a  $F_2(W)$ .

En el subcaso 3.2, consideremos  $A_4 = \{a_4, b_4\}$ ,  $r = m(\{a_4, v\})$ ,  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_0 \setminus \{A_4\}$  y  $\mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_0 \setminus \{A_4\}$ . Así,  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{G}_3$  son subconjuntos cerrados y conexos de  $F_2(W) \setminus \{A_4\}$  que cumplen que  $F_2(W) \setminus \{A_4\} = \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{G}_3$  y  $\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{G}_3 = (\mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(-r) \cup \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u) \cup \mathcal{O}(t_2) \cup \mathcal{O}(t_3)) \setminus \{A_4\}$ , donde  $t_2, t_3 \in S^1$  satisfacen que  $\{v, t_2\} \in \mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(-r)$  y  $\{v, t_3\} \in \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u)$ . De aquí que  $b_0(\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{G}_3) = 3$  y  $r(F_2(W) \setminus \{A_4\}) \geq 2$ . Entonces  $A_4$  agujera a  $F_2(W)$ .

Para el caso 3.3, consideramos  $A_5 = \{a_5, b_5\}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $b_5 \in va_5$ . Sean  $u \in S^1$ , tal que  $u \notin \{v, -v\}$ ,  $\mathcal{F}_4 = (\mathcal{H}(v, u) \cup \mathcal{H}(-v, -u) \cup \mathcal{N}(v, u) \cup \mathcal{N}(-v, -u) \cup \langle I, a_5 \ell \rangle) \setminus \{A_5\}$  y  $\mathcal{G}_4 = (\mathcal{H}(v, -u) \cup \mathcal{H}(-v, u) \cup \mathcal{N}(v, -u) \cup \mathcal{N}(-v, u) \cup F_2(va_5)) \setminus \{A_5\}$ , véase la figura 11. Los conjuntos  $\mathcal{F}_4$  y  $\mathcal{G}_4$  son conexos y cerrados en  $F_2(W) \setminus \{A_5\}$ , además  $F_2(W) \setminus \{A_5\} = \mathcal{F}_4 \cup \mathcal{G}_4$ . Sea  $t_4 \in S^1$ , tal que  $\{v, t_4\} \in \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u)$ . Notemos que  $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4 = (\mathcal{L}(v) \cup \mathcal{L}(-v) \cup \mathcal{L}(u) \cup \mathcal{L}(-u) \cup \langle \{v\}, va_5 \rangle \cup \mathcal{O}(t_4) \cup \langle \{a_5\}, va_5 \rangle) \setminus \{A_5\}$ . De

esta manera  $b_0(\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4) = 3$  y  $r(F_2(W) \setminus \{A_5\}) \geq 2$ . Entonces  $A_5$  agujera a  $F_2(W)$ . Con esto terminamos el caso d).

e) Si  $W$  es una medalla, un 4-odo o el continuo Figura 8, entonces  $\{x, y\}$  agujera a  $F_2(W)$  si y sólo si,  $x$  y  $y$  no son puntos finales de  $W$ , con  $x \neq y$ , o  $x$  es un punto vértice, con  $x = y$ . La prueba, de estos casos, se puede realizar siguiendo argumentos similares a los utilizados en los incisos anteriores.

Con esto terminamos el caso e) y con ello la demostración del teorema.

Figura 8. Representación geométrica de la división en dos conjuntos cerrados y conexos de  $F_2(W) \setminus \{A_3\}$ , y la intersección de éstos.

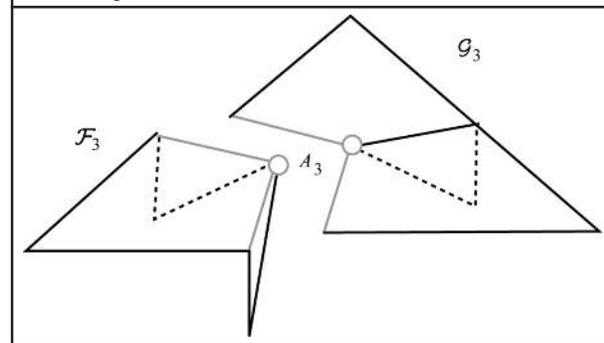


Figura 9. Modelo geométrico del segundo producto simétrico de la paleta.

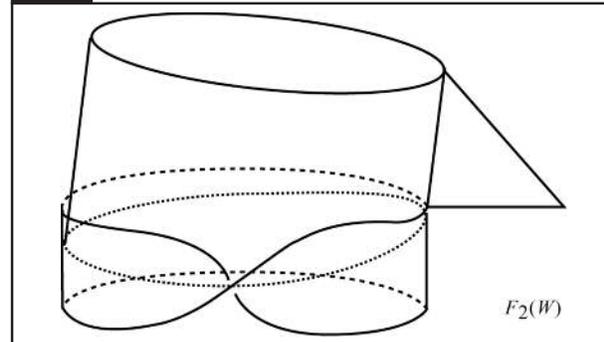
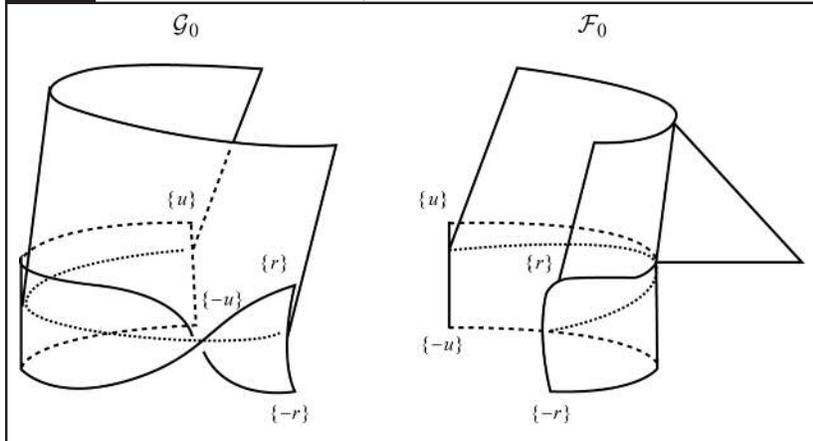


Figura 10. Representación geométrica de los  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{G}_0$ .

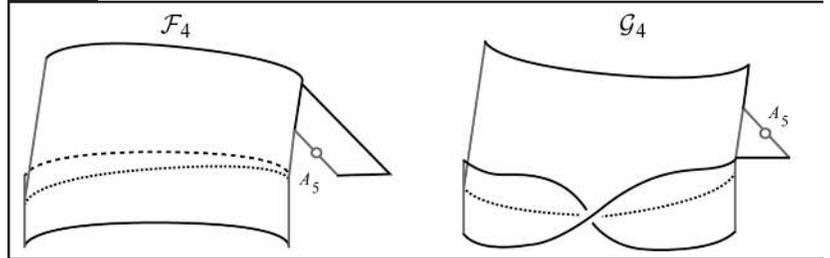


#### 4. Conclusión

Logramos la clasificación de los elementos que agujeran al segundo producto simétrico de los continuos localmente conexos, cuyo segundo producto simétrico puede ser encajado en el espacio euclidiano de tres dimensiones.

o b i e

Figura 11. Representación geométrica de los conjuntos  $\mathcal{F}_4$  y  $\mathcal{G}_4$ .



#### Bibliografía

- Anaya, J. G. (2007). "Making Holes in Hyperspaces", *Topology Appl.* 154.
- Anaya, J. G. y F. Orozco-Zitli (2011). "Making Holes in the Hyperspaces of a Peano Continuum", *Topology Proc.* 37.
- Anaya, J. G. y F. Orozco-Zitli (2011). "Making Holes in the Second Symmetric Products", por aparacer en *Topology Proc.*
- Borsuk, K. y S. Ulam (1931). "On Symmetric Products of Topological Spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37.
- Bennett, D. E. (1971). "Aposyndetic Properties of Unicoherent Continua", *Pacific J. Math.* 37.
- Castañeda, E. (1998). "A Unicoherent Continuum Whose Second Symmetric Product is Not Unicoherent", *Topology Proc.*, Vol. 23.
- Castañeda, E. (2002). "Embedding Symmetric Products in Euclidean Spaces". Illanes, A.; S. Macías y W. Lewis (ed.). *Continuum Theory* (Denton, TX, 1999), Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, 230, Marcel Dekker.
- Charatonik, J. J. (1989). "Monotone Mappings and Unicoherence at Subcontinua", *Topology Appl.* 33.
- Charatonik, J. J.; W. J. Charatonik y A. Illanes (1998). "Remarks in Unicoherent at Subcontinua", *Tsukuba J. Math.* Vol. 22 Núm. 3.
- Eilenberg, S. (1936). "Sur les Espaces Multicoherents I", *Fund. Math.* 27.
- García-Máynez, A. y A. Illanes, A. (1989). "A Survey on Unicoherence and Related Properties", *An. Inst. Mat. UNAM*, 29.
- Illanes, A. (1985). "Multicoherence of symmetric product", *An. Inst. Mat. UNAM*, 25.
- Illanes, A. (2002). "The Hyperspace  $C_2(X)$  for a Finite Graph is Unique", *Glasnik Mat. Ser. III* 37 (57).
- Illanes, A. (2004). *Hiperespacios de Continuos*, Serie de Aportaciones Matemáticas No.28, Sociedad Matemática Mexicana.
- Macías, S. (1999). "On Symmetric Products of Continua", *Topology Appl.*, 92.
- Macías, S. (2001). "On the Hyperspaces of a Continuum X", *Topology Appl.* 109.
- Mackowiak, T. (1978). "Some Kinds of the Unicoherence", *Comment. Math. Prace Mat.* 20.
- Nadler, Jr. S. B. (1978). *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, V. 49, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Oliveros, D. y Puga, I. (2001). "Local Connectedness and Unicoherence at Subcontinua", *Glasnik Mat. Ser. III* 36 (56).
- Owens, M. A. (1986). "Unicoherence at Subcontinua", *Topology Appl.* 22.
- Whyburn, G. T. (1942). "Analytic Topology", *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Youcheng, Z. (1996). "On Unicoherence at Subcontinua", *Tsukuba J. Math.* 20.

REVISTA

# Valor

universitario UAEM

MARGARITA HERNÁNDEZ  
Oro en Centroamérica y el Caribe

**UN FORO ABIERTO PARA TI**

# 1

un año informando con responsabilidad social

¡APOYANOS CON TU PARTICIPACIÓN!

Secretaría de Difusión Cultural Instituto Literario 215, Col. 5 de mayo, Toluca, Edo. Méx.  
Dirección General de Comunicación Universitaria, Ignacio Rayón 510, Col. Cuauhtemoc, Toluca, Edo. Méx. [revistauniversitaria@uaemex.mx](mailto:revistauniversitaria@uaemex.mx)