

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Unidad Académica Profesional Tianguistenco

Licenciatura en Ingeniería de Plásticos

Unidad de Aprendizaje:

“Análisis Numérico y Ecuaciones Diferenciales”

“Unidad 1. Introducción a las ecuaciones diferenciales”

Elaborado por el:

Ing. Héctor Fernando Mariano Escamilla

Febrero de 2016

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



“2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México”



UTILIZACIÓN DEL MATERIAL:

El presente material tiene como función facilitar la exposición

gráfica correspondiente a la

“Unidad 1. Introducción a las ecuaciones diferenciales”

que se aborda en la Unidad de Aprendizaje de

“Análisis Numérico y Ecuaciones Diferenciales”

que corresponde al cuarto semestre de la

Licenciatura en Ingeniería de Plásticos.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



“2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México”



La presentación debe estar a la par de una explicación oral del docente, debido a que el refuerzo que pueda hacer mediante ejemplos y situaciones cotidianas brindará la oportunidad de que los estudiantes comprendan mejor:

La definición, la clasificación, los tipos de soluciones y algunos ejemplos de Ecuaciones Diferenciales (ED)

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Unidad 1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Objetivo: Identificar la clasificación que tienen las ecuaciones diferenciales y algunas posibles aplicaciones de las mismas por medio de ejercicios planteados en el salón de clase para la solución de problemas reales.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.1 Conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales.

1.1.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales por su tipo, orden y linealidad.

1.1.2 Tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales.

1.2 Verificación de soluciones a ecuaciones diferenciales.

1.2.1 Soluciones explícitas.

1.2.2 Soluciones implícitas.

Ejemplos 1

1.2.3 Problemas con valores iniciales (PVI).

1.3 Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.

Atribución-NonComercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.1 Conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Ecuación diferencial (ED):

Es aquella ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes.

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy$$

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Notación:

- Notación de Leibniz.

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$$

- Notación prima.

$$y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$$

- Notación de punto (Newton).

Regularmente se usa cuando la variable independiente es el tiempo.

$$\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$$

- Notación de subíndice (derivadas parciales).

$$u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"





Formas de EDO:

- Forma diferencial.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

- Forma general.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- Forma normal.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.1.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales por su tipo, orden y linealidad.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Clasificación por tipo:

- Ecuación diferencial ordinaria (EDO). Esta ecuación es la que tiene derivadas de una o varias variables dependientes respecto a una sola variable independiente.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

- Ecuación diferencial parcial (EDP). Este tipo de ecuación tiene derivadas parciales de una o varias variables dependientes respecto a dos o más variables independientes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Clasificación por orden:

El orden de una ED está dado por la mayor derivada que se encuentra en la ecuación.

Segundo orden

Primer orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Clasificación por linealidad:

Para una EDO de la siguiente forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$$

o

$$a_n(x) \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_{n-1}(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y - g(x) = 0$$

sea lineal se requiere cumplir las siguientes dos reglas.

- La variable dependiente y y todas sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada término que contiene y es igual a 1.
- Los coeficientes de a_0, a_1, \dots, a_n de $y, y', \dots, y^{(n)}$ dependen de la variable independiente x .

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"





Las siguientes EDO son lineales.

$$(y - x)dx + 4xdy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

Las siguiente EDO son no lineales.

$$(1 - y)y' + 2y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \sin(y) = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.1.2 Tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



- **Definición:** La función ϕ en un intervalo I , es solución si tiene n derivadas tal como el orden de la EDO, y sustituyendo a la función y sus derivadas en la EDO, está se reduce a una identidad

$$F \left(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x) \right) = 0$$

para toda x en I .

- **Intervalo de definición (I):**

También se conoce como, “intervalo de existencia”, “intervalo de validez”, “dominio de la solución”. Es el I en donde es válida la solución.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



“2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México”



- **Curva de solución:**

Es la gráfica de la función solución en el intervalo I .

- **Solución trivial:**

Es cuando se toma como solución a

$$y = 0$$

dentro del intervalo I dado.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



- **Familia de soluciones:**

Cuando tenemos una ED de primer orden de la forma

$$F(x, y, y') = 0$$

regularmente se obtiene un conjunto de soluciones de la siguiente forma

$$G(x, y, c) = 0$$

esto se conoce como “familia de soluciones uniparamétrica”.

Si solucionamos una ED de orden n ,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

la solución es del tipo

$$G(x, y, x_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

esta es una “familia de soluciones n-paramétrica”.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



“2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México”





- **Solución particular:**

Esta solución es la que carece de parámetros, esta se obtiene de una familia de soluciones y de tomar en cuenta valores iniciales.

- **Solución singular:**

Esta es un tipo de solución que no se obtiene de la familia de soluciones, esta no depende de los valores de los parámetros.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.2 Verificación de soluciones a ecuaciones diferenciales.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



También podemos clasificar a las soluciones como explícitas e implícitas.

- Soluciones explícitas.
- Soluciones implícitas.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.2.1 Soluciones explícitas.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Cuando obtenemos una solución del tipo

$$y = \phi(x)$$

sabemos que es una solución explícita.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.2.2 Soluciones implícitas.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"





Si en la solución no se puede despejar la variable dependiente, el resultado se escribe de la siguiente forma

$$G(x, y) = 0$$

la solución de la EDO es implícita.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.2.3 Problemas con valores iniciales (PVI).

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



En ocasiones nos piden resolver:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Sujeta a:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Donde estas últimas se conocen como condiciones iniciales (CI).

El usar las CI nos permite obtener una solución particular de la familia de soluciones.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Ejemplo 1:

Solucionar la siguiente ED:

$$y' = y; y(0) = 3$$

La familia de soluciones es:

$$y = ce^x; I = (-\infty, \infty)$$

De las CI sabemos que:

$$x = 0, \quad y = 3$$

Sustituimos estos valores en la familia solución, y obtenemos la solución particular

$$y = 3e^x$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Si tenemos una ecuación de segundo orden o mayor, lo que tenemos que hacer es derivar la solución las veces que sea necesaria para sustituir los valores iniciales.

Ejemplo 2:

Resolver:

$$x'' + 16x = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Solución:

$$c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(4x) = -2$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"





- Existencia. ¿La ED tiene soluciones? ¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto (x_0, y_0) ?
- Unicidad. ¿Cuándo podemos estar seguros de que hay precisamente una curva solución que pasa a través del punto (x_0, y_0) ?

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



1.3 *Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.*

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



Las ED nos sirven para modelar y solucionar situaciones reales.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



- Dinámica poblacional.

$$\frac{dP}{dt} \propto P$$

o

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Donde.

$P(t)$; denota la población al tiempo t ,

k ; es una constante de proporcionalidad.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



- Decaimiento radiactivo.

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

o

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

Donde.

$A(t)$; cantidad de sustancia en el tiempo t ,

k ; constante de proporcionalidad.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"





- Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton.

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m$$

o

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Donde.

$T(t)$; temperatura del cuerpo,

T_m ; temperatura del medio,

k ; constante de proporcionalidad.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



***Ejemplos, todos los ejemplos fueron tomados
de (Zill, 2015)***

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



- Clasifica las siguientes ED.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



- Demuestra que son solución de la ED.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}; \quad y = \frac{1}{16}x^4$$

$$y'' - 2y' + y = 0; \quad y = xe^x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad x^2 + y^2 = 25$$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



- Problemas con valores iniciales

En los problemas 1 y 2, $y = 1/(1 + c_1 e^{-x})$ es una familia uni-paramétrica de soluciones de la ED de primer orden $y' = y - y^2$. Encuentre una solución del PVI de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial y la condición inicial dada.

1. $y(0) = -\frac{1}{3}$

2. $y(-1) = 2$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"





En los problemas 7 a 10, $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ED de segundo orden $x'' + x = 0$. Determine una solución del PVI de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

7. $x(0) = -1, \quad x'(0) = 8$

8. $x(\pi/2) = 0, \quad x'(\pi/2) = 1$

9. $x(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad x'(\pi/6) = 0$

10. $x(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad x'(\pi/4) = 2\sqrt{2}$

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



- Zill, D. G. (2015). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. DF, México: Cengage Learning.

Atribución-No Comercial
-Licenciamiento Recíproco



"2016, Año del 60 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"

