UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Unidad Académica Profesional Tianguistenco

Licenciatura en Ingeniería de Plásticos

Unidad de Aprendizaje:

"Análisis Numérico y Ecuaciones Diferenciales"

"Unidad 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden"

Elaborado por el:

Ing. Héctor Fernando Mariano Escamilla

Febrero de 2016

UTILIZACIÓN DEL MATERIAL:

El presente material tiene como función facilitar la exposición gráfica correspondiente a la "Unidad 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden" que se aborda en la Unidad de Aprendizaje de "Análisis Numérico y Ecuaciones Diferenciales" que corresponde al cuarto semestre de la Licenciatura en Ingeniería de Plásticos.

La presentación debe estar a la par de una explicación oral del docente, debido a que el refuerzo que pueda hacer mediante ejemplos y situaciones cotidianas brindará la oportunidad de que los estudiantes comprendan mejor:

Los métodos de solución de EDO de primer orden, así como problemas de aplicación.

Unidad 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden.

Objetivo: Aplicar los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden para resolver de problemas reales bajo situaciones controladas por medio de problemarios y ejercicios planteados en el aula.

2.1 Métodos de Solución

Existen varios métodos de solución para las ED de primer orden, en esta sección analizaremos algunos.

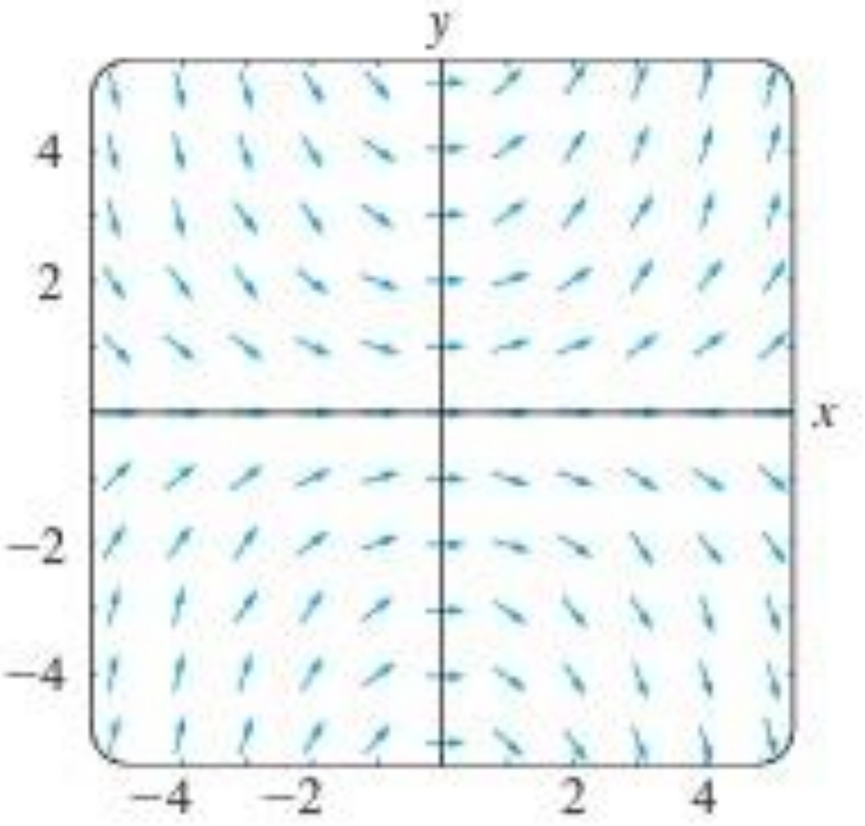
2.1.1 Campos de dirección

Un campo de dirección o campo de pendientes es aquel formado por rectas tangentes a las curvas de solución de una ED de primer orden.

Teniendo la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Llamada función pendiente o función razón. Si a $f(x, y)$ le asignamos un punto el resultado nos da la recta pendiente en ese punto. Ahora si realizamos este procedimiento de forma periódica en un intervalo I, se obtienen rectas tangentes en cada uno de los puntos evaluados.

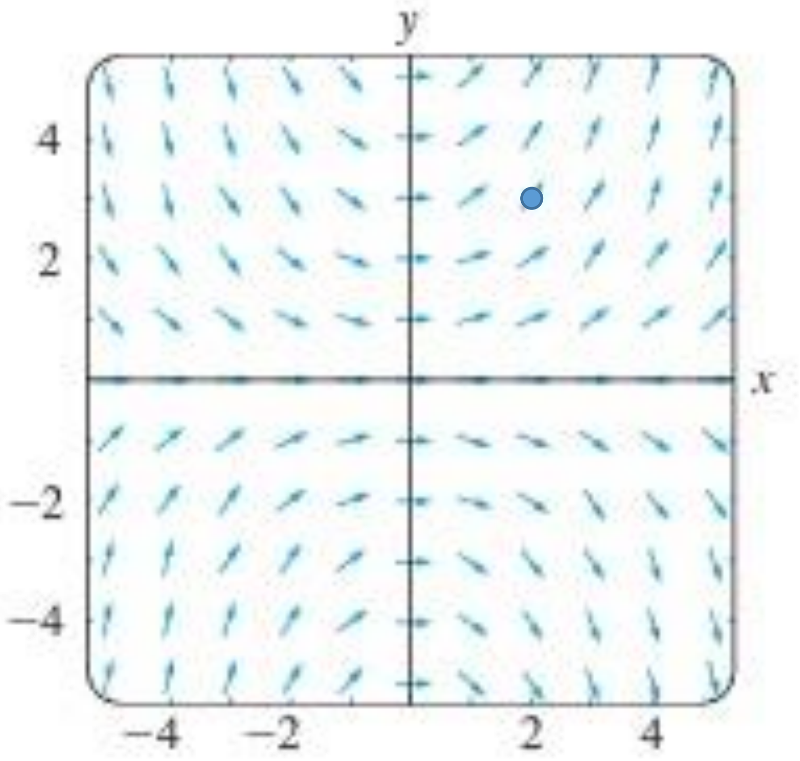


(Zill, 2015)

Este campo de direcciones es el resultado de evaluar la ED siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy$$

Si la evaluamos en el punto $P(2,3)$ tenemos.



Se encuentra el punto y su pendiente, posteriormente se traza la curva solución.

2.1.2 Separación de variables

El método de separación de variables es el más sencillo de todos.

Procedimiento.

1) Teniendo una ED del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Si $f(x,y)$ se puede factorizar entonces tenemos:

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

Por lo tanto.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

2) Se acomoda la ecuación de tal manera que los términos de y estén en el lado izquierdo de la igualdad, y los términos de x al lado derecho.

$$\frac{dy}{h(y)}\ g(x)dx \qquad \text{o} \qquad p(y)dy = g(x)dx$$

3) Se integra la igualdad.

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$

Obteniendo como resultado.

$$H(y) = G(x) + c$$

4) se busca acomodar la solución como una solución explicita.

$$y = f(x, c)$$

Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$$

$$(1 + x)dy - ydx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(4) = -3$$

2.1.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Si tenemos una ED de primer orden de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Se dice que es una ED lineal en la variable y

Método de solución.

1) Se identifica la ecuación del tipo.

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

2) Todos los términos de la ecuación se dividen entre $a_1(x)$, y se obtiene una ecuación del siguiente tipo.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

3) es necesario obtener el factor integrante $\mu(x)$, el cual se obtiene de la siguiente manera.

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

4) Se multiplica la ecuación del paso 2 por el factor integrante.

$$\mu(x)\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)\right]$$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)f(x)$$

De la ecuación anterior tenemos que:

$$\mu(x)P(x)$$

Es la derivada de $\mu(x)$, entonces tenemos que $\frac{d\mu}{dx}$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+y(x)\frac{d\mu}{dx}=\mu(x)f(x)$$

Del lado izquierdo de la igualdad tenemos el resultado de la derivada de un producto.

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)]=\mu(x)\frac{dy}{dx}+y(x)\frac{d\mu}{dx}$$

Entonces escribimos la ecuación de la siguiente forma, integramos y resolvemos para y.

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] = \mu(x)f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)]dx = \int \mu(x)f(x)dx$$

Esto da como resultado:

$$y = f(x,c)$$

Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$$

$$\frac{dy}{dx} + y = x, \quad y(0) = 4$$

2.1.4 Ecuaciones diferenciales exactas

Estas ED son de la forma.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Y para poder dar solución usando este método se requiere de realizar la siguiente comprobación.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

Si esta igualdad se cumple se procede a resolver siguiendo este procedimiento, tomando cualquiera de las siguientes igualdades.

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)] = M(x,y) \quad o \quad \frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)] = N(x,y)$$

Para la explicación de este método usaremos la primera igualdad.

Integramos con respecto a x la igualdad $\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)] = M(x,y)$ y obtenemos la siguiente expresión.

$$f(x,y) = \int M(x.y)dx + g(y) \quad 1$$

Siendo $g(y)$ la constante de integración.

Ahora derivamos parcialmente con respecto de y para obtener una expresión como la que se muestra a continuación.

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x.y)dx\right] + g'(y)$$

Ya teniendo esta derivada, realizamos la siguiente igualdad,

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)] = N(x,y)$$

se despeja $g'(y)$,

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x.y)dx\right]$$

y se integra para encontrar el valor de $g(y)$, para sustituirlo en la ecuación 1

$$\int \left(g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x.y)dx \right] \right) dx$$

El resultado de este procedimiento se expresa de la siguiente manera:

$$G(x,y) = 0$$

Los siguientes ejemplos fueron tomados de (Zill, 2015)

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$$

$$[e^{2y} - y\,cos(xy)]dy + [2xe^{2y} - x\,cos(xy) + 2y]dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - cos(x)\,sin(x)}{y(1 - x^2)}, \quad y(0) = 0$$

Zill, D. G. (2015). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. DF, México: Cengage Learning.