Universidad Autónoma del Estado de México
UAEM
C.U. UAEM Valle de Teotihuacán

Licenciatura en Ingeniería en Computación

Sistemas de Coordenadas

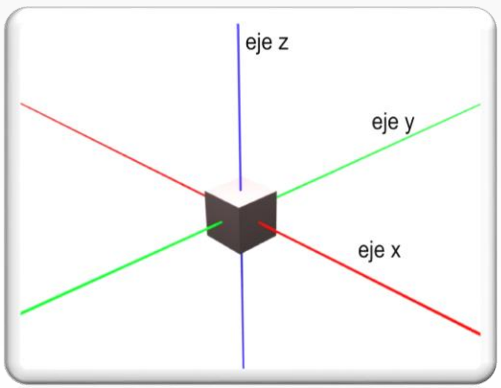
Unidad de Aprendizaje:
Fundamentos de Robótica

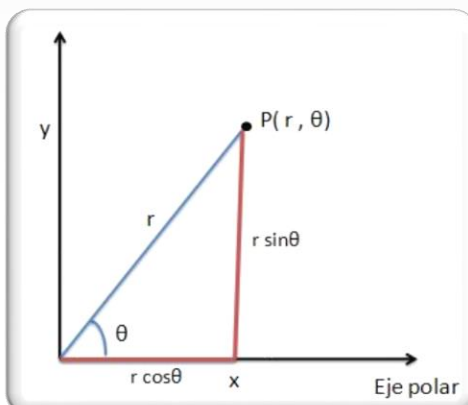
Unidad de competencia
V

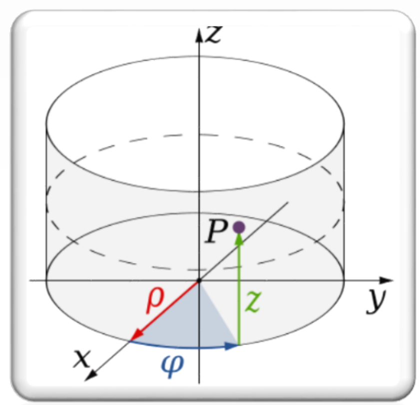
Elaborado por: M. en I. José Francisco Martínez Lendech

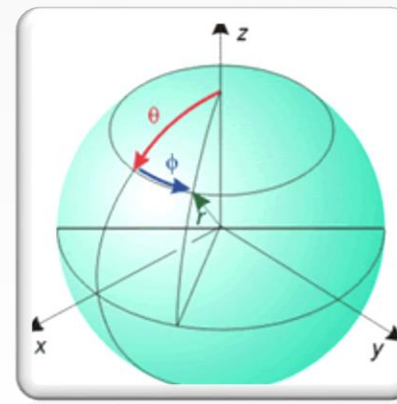
DEFINICIÓN

Un sistema de coordenadas es un conjunto de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio euclídeo.



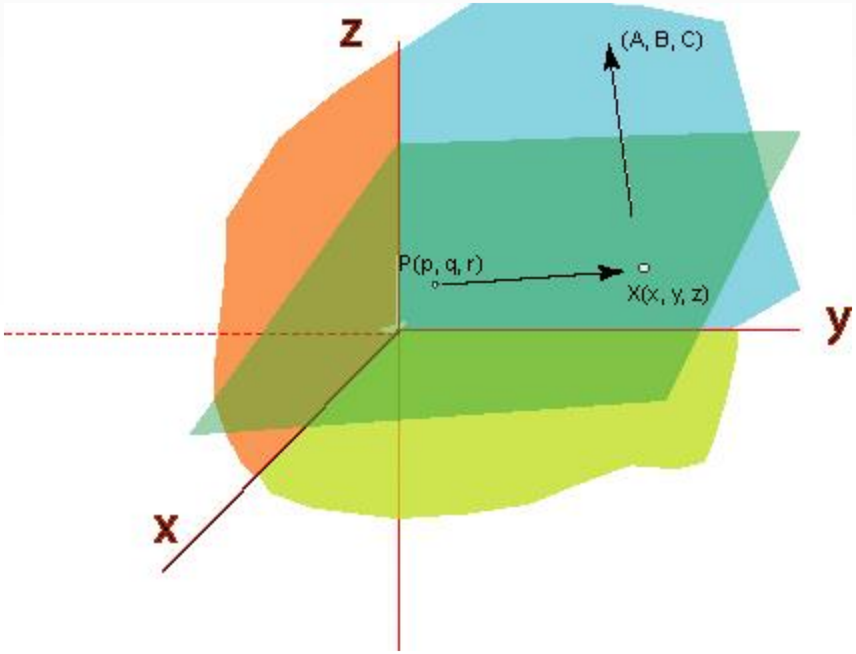






DEFINICIÓN

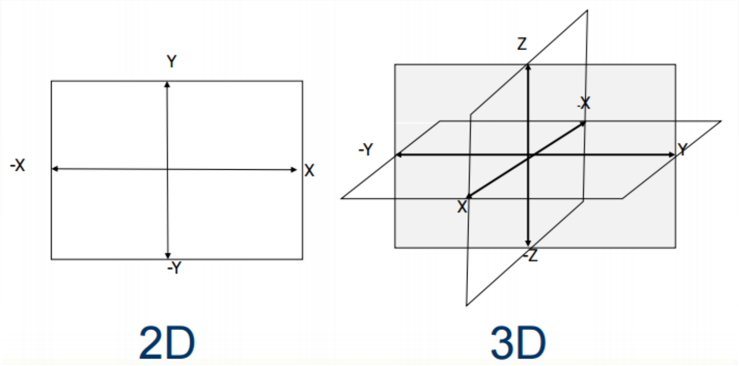
Un **espacio euclídeo** de dimensión finita es un espacio vectorial normado sobre los números reales de dimensión finita, en que la norma es la asociada al producto escalar ordinario. Es un espacio vectorial donde se satisfacen los axiomas de Euclides de la geometría.




TIPOS DE
SISTEMAS DE COORDENADAS
CARTESIANA
POLAR
CILÍNDRICA
ESFÉRICA

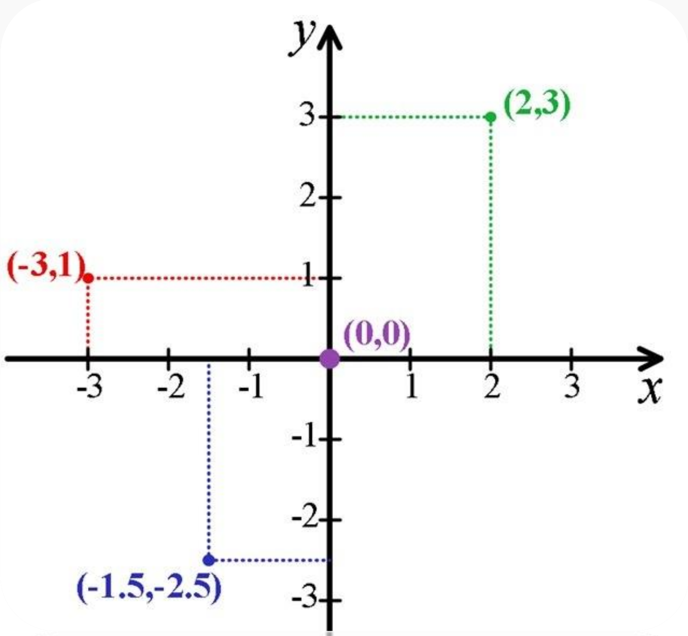
SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

UN <u>*SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS*</u> SE DEFINE POR DOS EJES ORTOGONALES EN UN SISTEMA BIDIMENSIONAL Y TRES EJES ORTOGONALES EN UN SISTEMA TRIDIMENSIONAL, QUE SE CORTAN EN EL ORIGEN 0.



El primero que expresó la posición de un punto en el plano o en el espacio fue ***Descartes****, por lo que se suele referir a ellas como coordenadas cartesianas.*

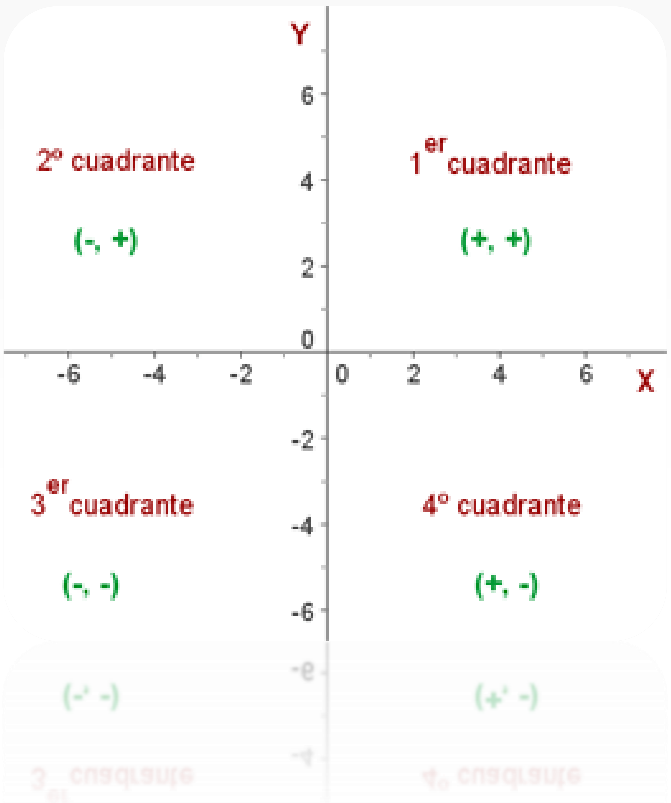
EN ESTE **<u>SISTEMA DE COORDENADAS</u>**, LA POSICIÓN DE UN PUNTO P EN EL PLANO QUEDA DETERMINADA MEDIANTE UNA PAREJA DE NÚMEROS REALES (X, Y) DE LOS CUALES EL PRIMERO, **X** , REPRESENTA LA DISTANCIA DEL PUNTO **P** AL EJE COORDENADO **Y**, EN TANTO QUE EL SEGUNDO, **Y** , REPRESENTA LA DISTANCIA DEL PUNTO **P** AL EJE **X.** ESTO SE REPRESENTA EN LA FORMA:



LA DISTANCIA DE UN PUNTO AL EJE Y SE LE LLAMA ABSCISA DEL PUNTO, LA DISTANCIA DE UN PUNTO AL EJE X SE LE LLAMA ORDENADA DEL PUNTO.

REPRESENTACIÓN EN LOS EJES DE COORDENADAS

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes iguales y a cada una de ellas se les llama cuadrante.

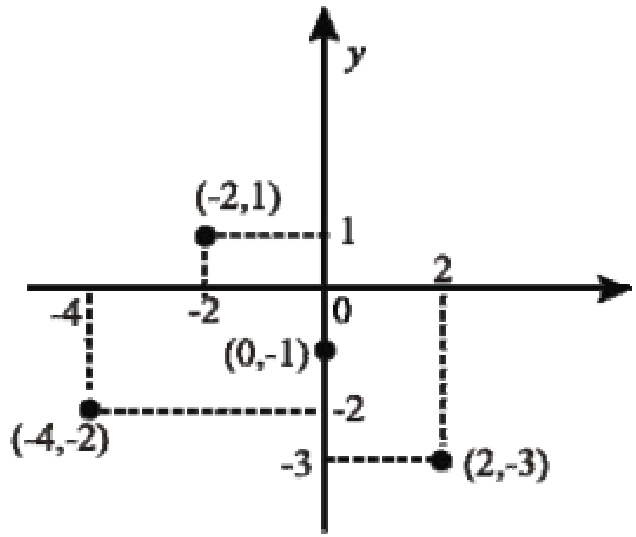


Signos

	Abscisa	Ordenada
1er cuadrante	+	+
2° cuadrante	−	+
3er cuadrante	−	−
4° cuadrante	+	−

EJEMPLO

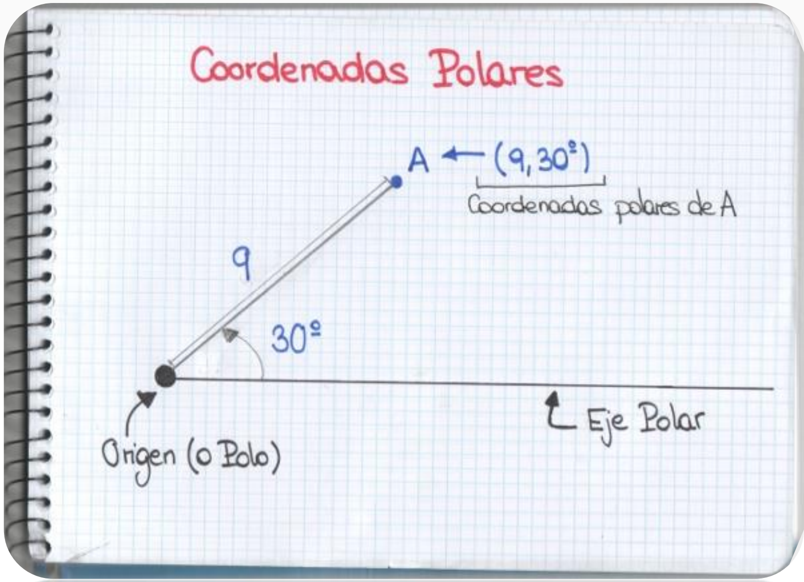
Ejemplo 1.- Represente en el plano cartesiano los puntos (-2,1); (-4,-2); (0,-1); (2,-3) y (5,0).
Solución:



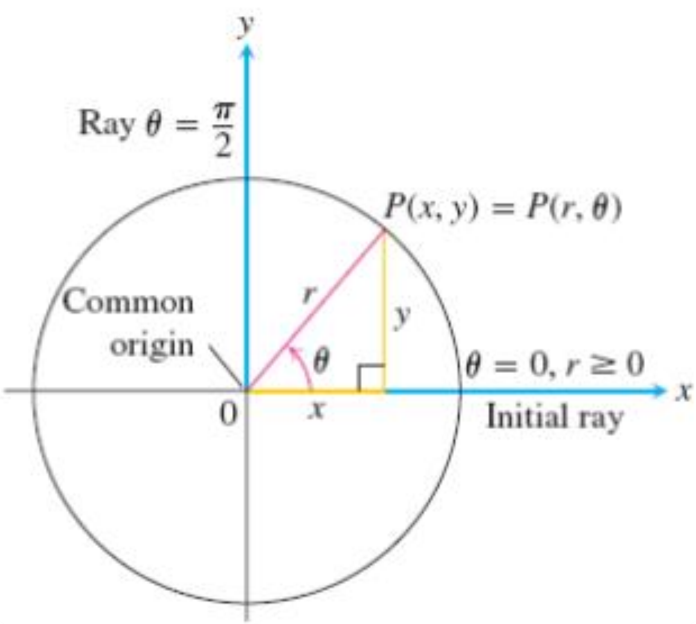
SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

PARA REPRESENTAR PUNTOS EN EL PLANO SE UTILIZA EN MUCHAS OCASIONES EL SISTEMA DE **COORDENADAS POLARES** EN ESTE SISTEMA SE NECESITAN UN *ÁNGULO* (Θ) Y UNA *DISTANCIA* (R).

*PARA MEDIR **Θ**, EN RADIANES, NECESITAMOS UNA SEMIRRECTA DIRIGIDA LLAMADA EJE POLAR Y PARA MEDIR **R**, UN PUNTO FIJO LLAMADO POLO.*



RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y CARTESIANAS.



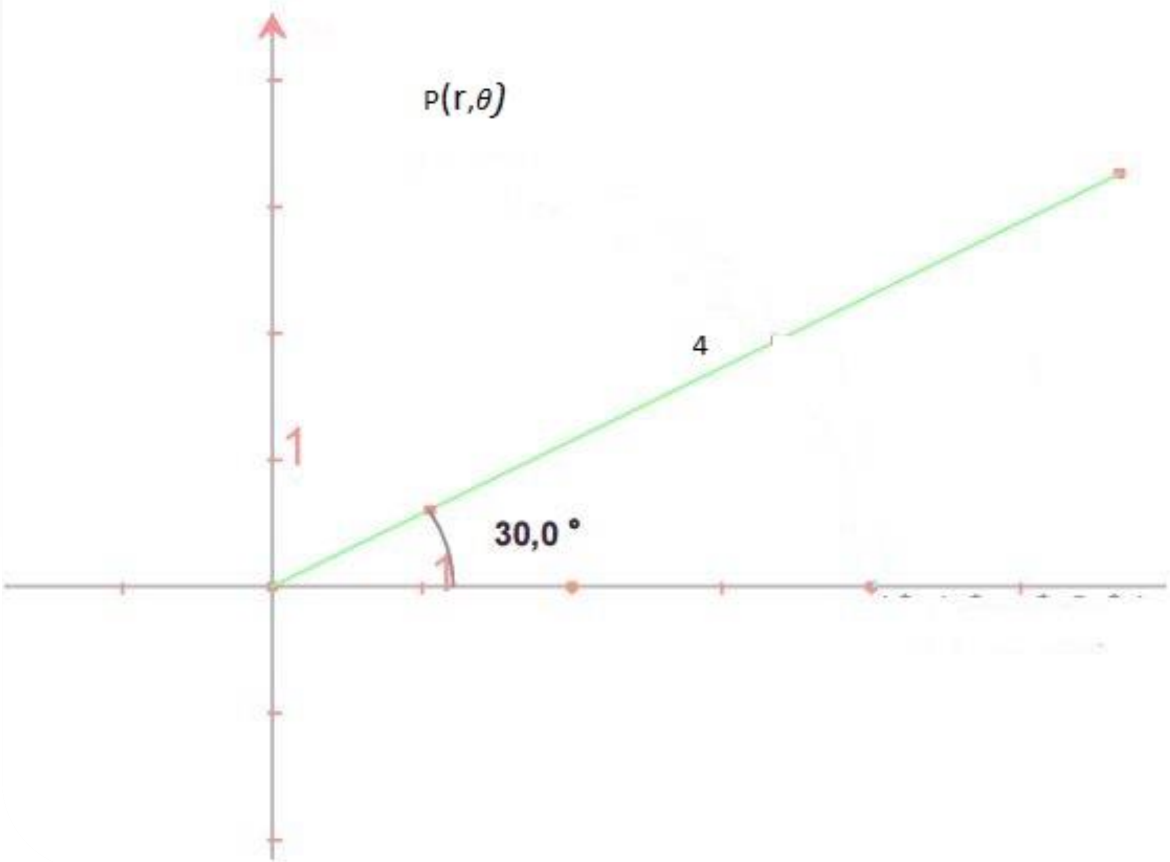
Sabemos que la relación entre coordenadas polares y cartesianas viene dada por las igualdades **x**=r= cos θ e **y** =r= sen θ. Recíprocamente, se verifica que r=$\sqrt{(x^2 + y^2)}$.

LA FÓRMULA PARA EL ÁNGULO POLAR ES LA SIGUIENTE:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$$

RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y CARTESIANAS.

Ejemplo: trazar el punto $P(4, \frac{\pi}{6})$



APLICACIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS FORMULA PARA EL ÁREA DE UN PLANO

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \qquad \phi(x,y) = 1$$

$$\mathrm{A} = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le x \le a, 0 \le y \le b \right\}$$

$$\iint_{\mathrm{A}} d\mathrm{A} = \iint_{\mathrm{A}} dxdy$$

$$\iint_{\mathrm{A}} d\mathrm{A} = \int_0^a dx \int_0^b dy = a \times b$$

APLICACIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS FORMULA PARA EL VOLUMEN DE UN CUBO

$$\phi : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R} \qquad \phi(x, y, z) = 1$$

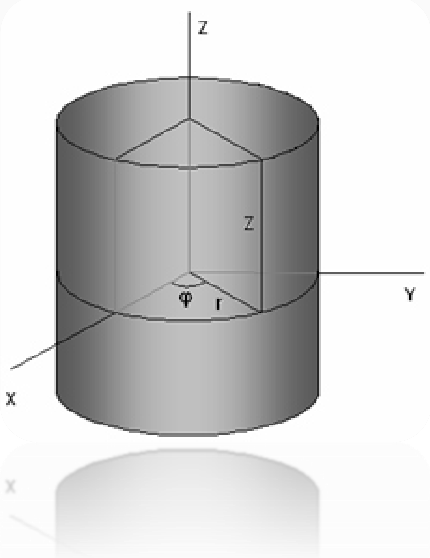
$$V = \{(x, y, z) | 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$$

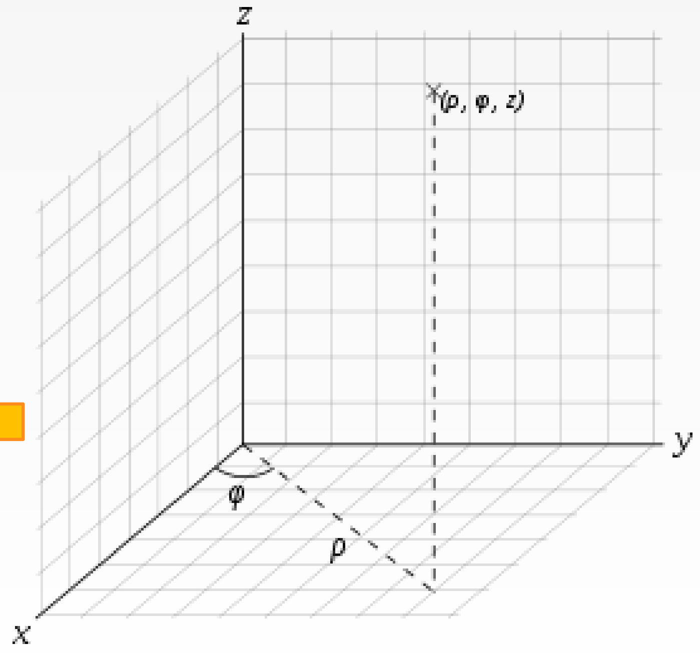
$$\iiint_V dV = \iiint_V dxdydz \qquad \iiint_V dV = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz = a \times b \times c$$

Es el volumen del cubo

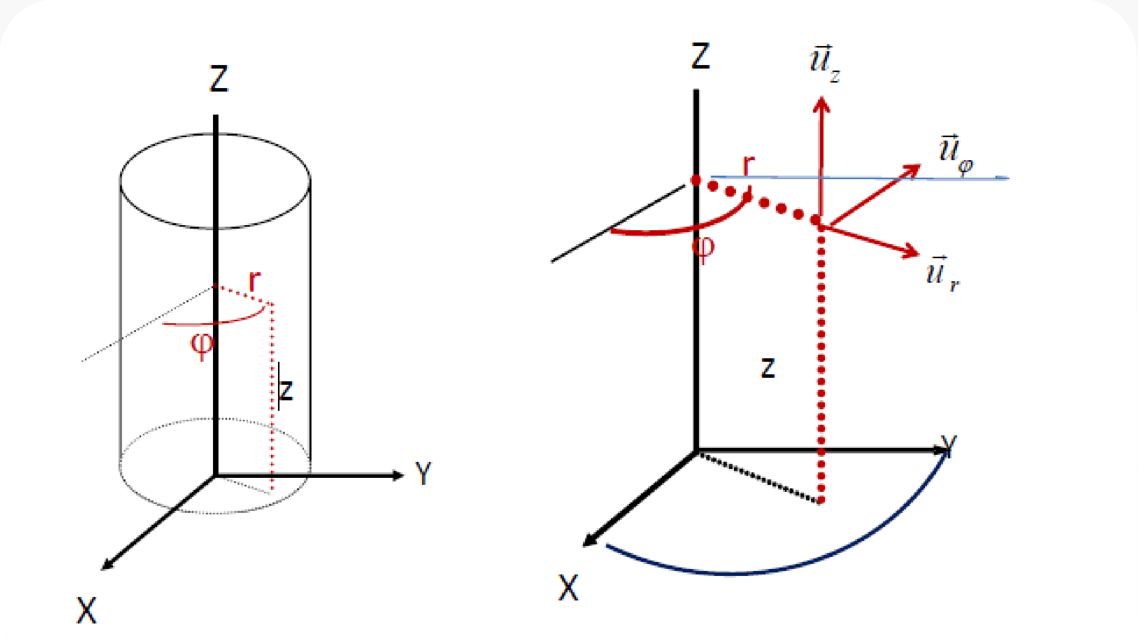
SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

La primera coordenada es la distancia (r) existente entre el origen y el punto, la segunda es el ángulo (ϕ)
que forman el eje y la recta que pasa por ambos puntos, y la tercera es la coordenada (z) que determina la altura del cilindro.





SE DEFINEN TRES VECTORES UNITARIOS, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\varphi$, $\vec{u}_z$ Y PERPENDICULARES ENTRE SÍ QUE FORMAN UNA BASE ORTONORMAL.



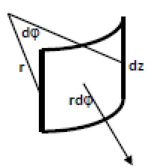
CONSIDERAMOS UN CILINDRO DE RADIO R Y ALTURA H, LA POSICIÓN DEL PUNTO P VIENE DADA POR:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = rsen\varphi \qquad z = z$$

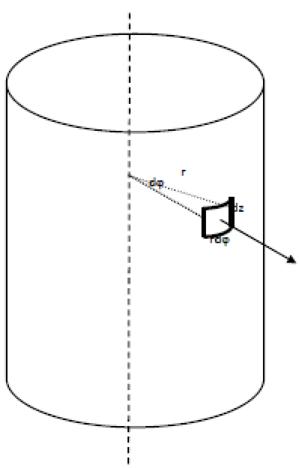
$$\vec{r} = r\cos\varphi\vec{i} + rsen\varphi\vec{j} + z\vec{k} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$$

$$\vec{u}_r = r\cos\varphi\vec{i} + rsen\varphi\vec{j}$$

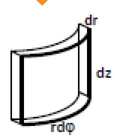
Un elemento diferencial de la superficie del cilindro se obtiene:



$$d\vec{A} = (rd\varphi \cdot dz)\vec{u}_r$$



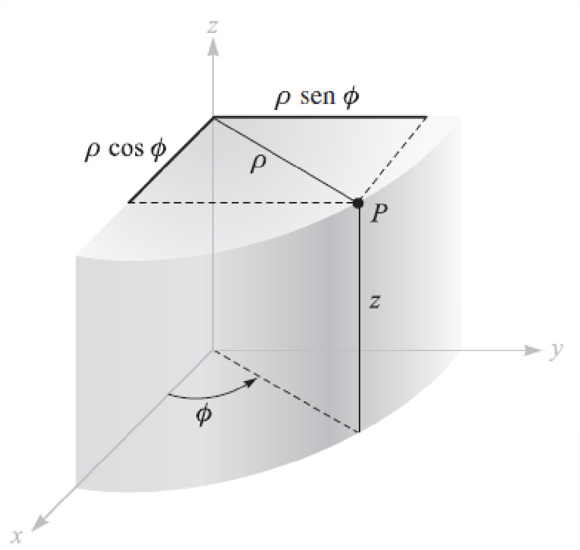
Un elemento diferencial de volumen se obtiene

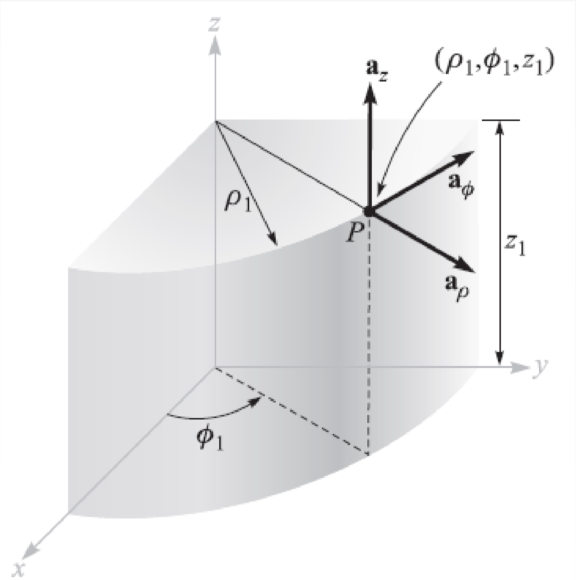


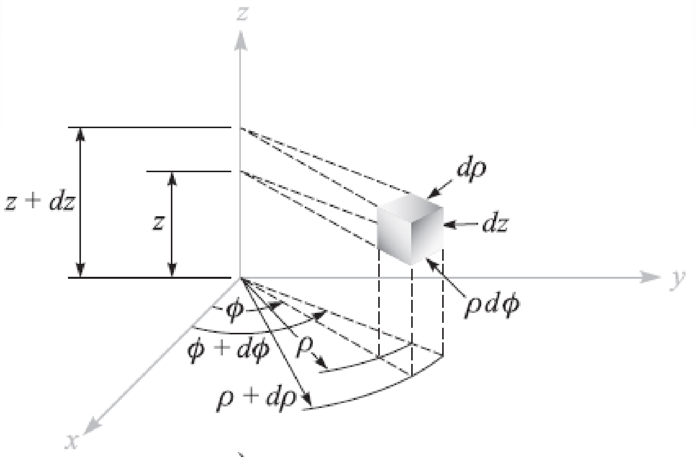
$$dV = (rd\varphi \cdot dz)dr$$

APLICACIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS CILINDRICAS

Calcular el área de un círculo de radio **r**





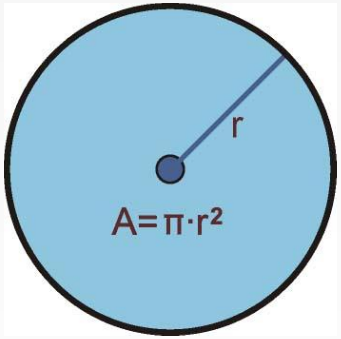


APLICACIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS CILINDRICAS

Deducción de la fórmula del área de un círculo.

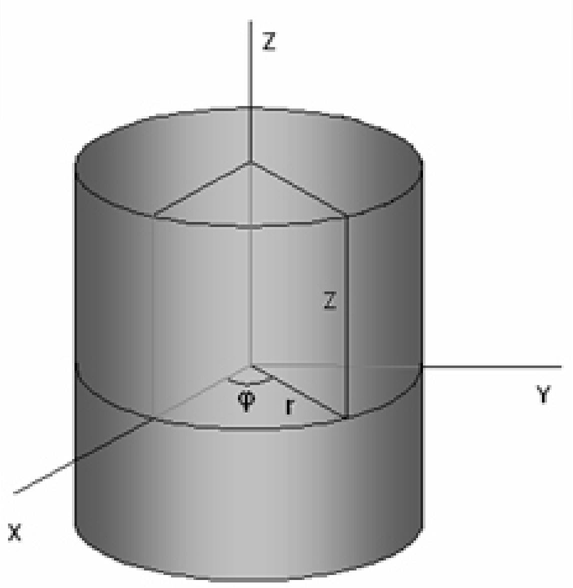
Area de un círculo con radio r

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho\, d\rho\, d\phi \rightarrow \boxed{\pi \cdot r^2}$$ unidades cuadradas



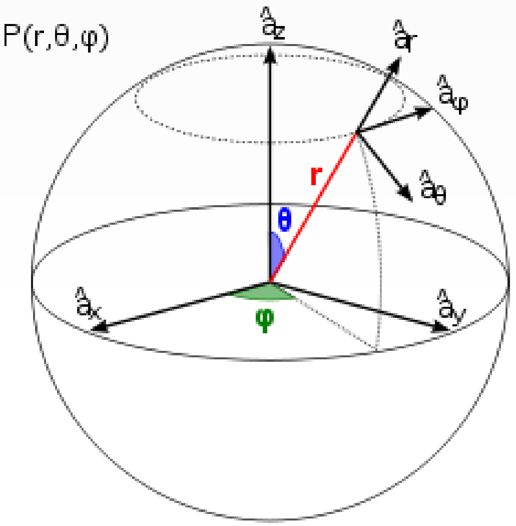
Volumen de un cilíndro de radio r y altura de 10 unidades

$$\int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \rightarrow 10\cdot\pi\cdot r^2$$ unidades cúbicas



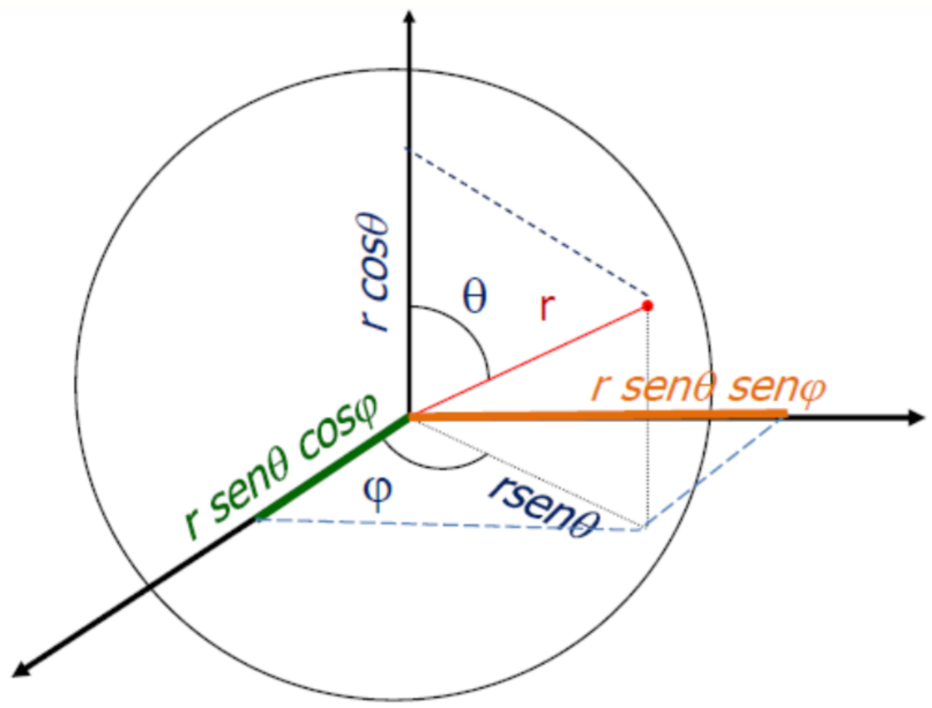
SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

un sistema de coordenadas esféricas se usa en espacios euclídeos tridimensionales. este sistema de coordenadas esféricas está formado por tres ejes mutuamente perpendiculares que se cortan en el origen.

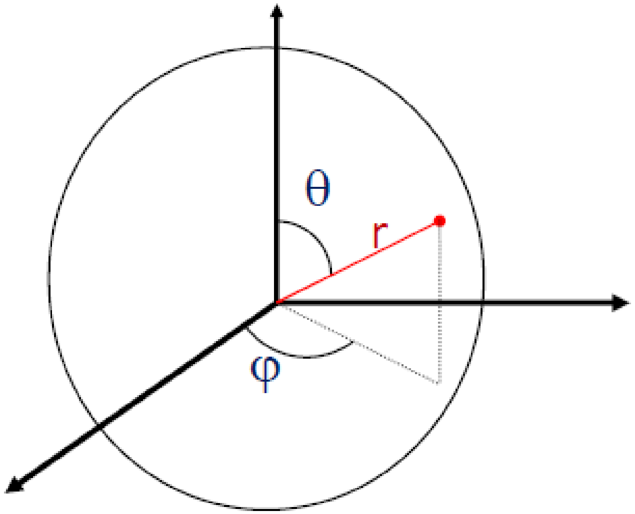


SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

La primera coordenada **(r)** es la distancia entre el origen y el punto, siendo las otras dos los ángulos que es necesario girar para alcanzar la posición del punto. Se definen tres vectores unitarios perpendiculares entre sí que forman una base ortonormal.



SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

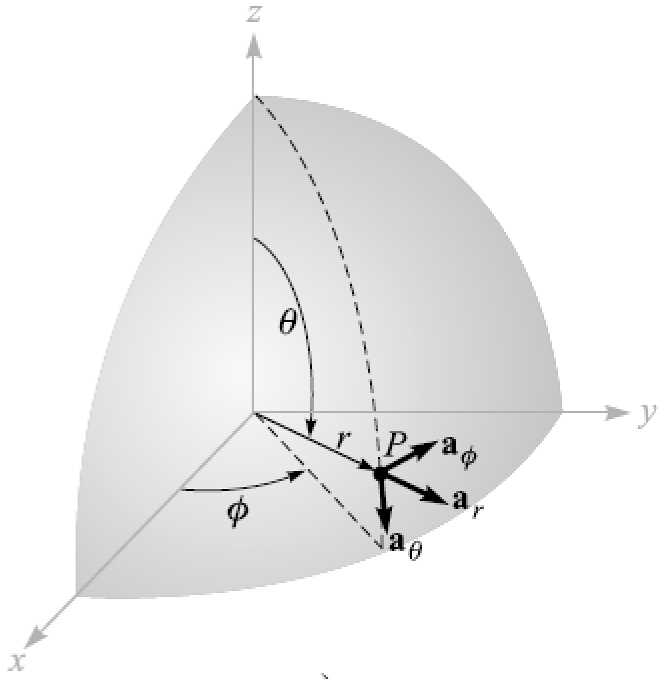


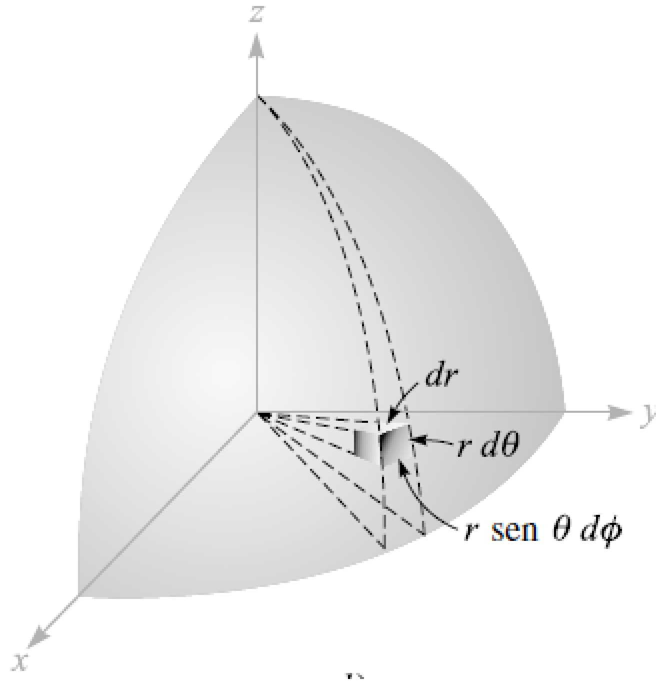
El radio r ($0 \leq r \leq R$) es la distancia desde el origen de coordenadas al punto, es el ángulo que forma r con la vertical ($0 \leq \theta \leq \pi$) y φ es el ángulo que forma la proyección de r sobre el plano XY con el eje X ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

APLICACIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS ESFERICAS

Determinar la formula del volumen de una esfera

$$v(S) = \iiint_S 1\, dxdydz$$





APLICACIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS ESFERICAS

Determinar la formula del volumen de una esfera

Solución: Para ello, se introduce el cambio a coordenadas esféricas: al aplicar el cambio de coordenadas a la ecuación de la superficie esférica, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, resulta $r = R$. Como no depende de θ ni ϕ estas dos variables no tienen restricciones y, por tanto,

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{array}\right\}$$

$$\iiint_S 1\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(\int_0^\pi r^2 \sin\theta\, d\theta \right) dr \right) d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \left[-\cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr \right) d\phi = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2\, dr \right) d\phi$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=R} d\phi = \frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\phi = \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}\, u.v.$$

fórmula de volumen de una esfera

CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS

cartesianas a polares

$x := 3 \qquad y := 4$

cartesianas

$(x \;\; y) \rightarrow (3 \;\; 4)$

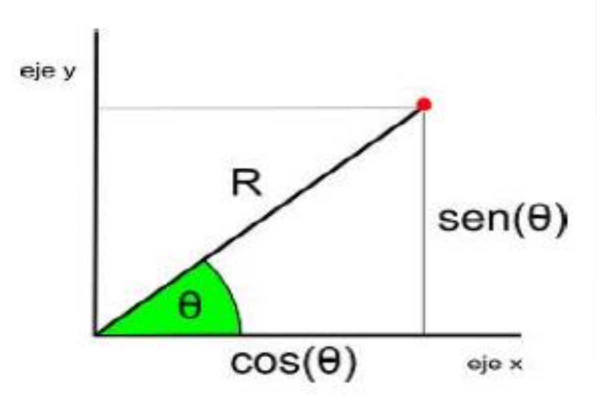
$R := \sqrt{x^2 + y^2} = 5$

$\theta := \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = 0.927$ radianes

$\theta := \frac{180}{\pi} \cdot \theta = 53.13 \quad ^\circ$

polares

$(R \;\; \theta) \rightarrow (5 \;\; 53.13010235415598)$



CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS

polares a cartesianas

$R := 5 \qquad \theta := 53.13 \ ^\circ$

polares

$(R \ \ \theta) \rightarrow (5 \ \ 53.13)$

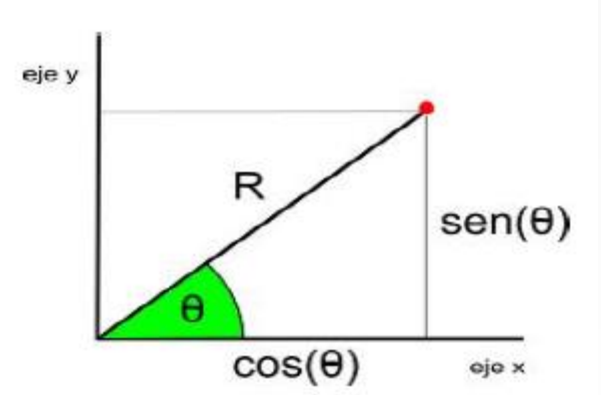
$\theta := \frac{\pi}{180} \cdot \theta$ radianes

$x := R \cdot \cos(\theta) \rightarrow 3.0000071456633127803 5$

$y := R \cdot \sin(\theta) \rightarrow 3.99999464074254264665$

cartesianas

$(x \ \ y) \rightarrow (3.0000071456633127803 5 \ \ 3.99999464074254264665)$



CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS

cartesianas a cilíndricas

$x := 2 \quad y := 3 \quad z := 2 \quad \pi := 3.1416$

cartesianas

$(x\ \ y\ \ z) \rightarrow (2\ \ 3\ \ 2)$

$\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$

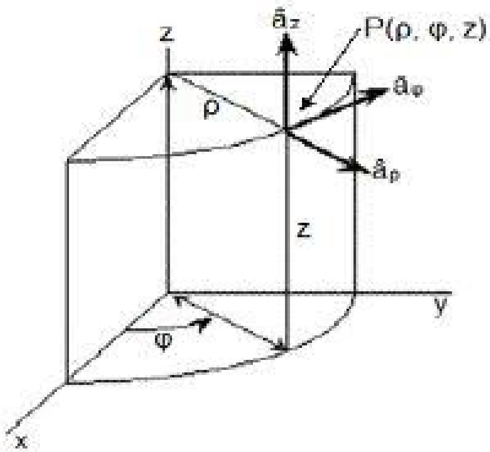
$\rho \rightarrow \sqrt{13}$

$\phi := \mathrm{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \mathrm{atan}\left(\frac{3}{2}\right)$

$\phi \rightarrow \mathrm{atan}\left(\frac{3}{2}\right)$ radianes

$\phi := \phi \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) \rightarrow 57.295645530939648587 \cdot \mathrm{atan}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31$

$z \rightarrow 2$



cilíndricas

$(\rho\ \ \phi\ \ z) \rightarrow \left(\sqrt{13}\ \ 56.309800797211366\ \ 2\right)$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS

cartesianas a esféricas

$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \sqrt{17}$

cartesianas

$(x \;\; y \;\; z) \rightarrow (2 \;\; 3 \;\; 2)$

$\phi := \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)$

$\phi \rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)$

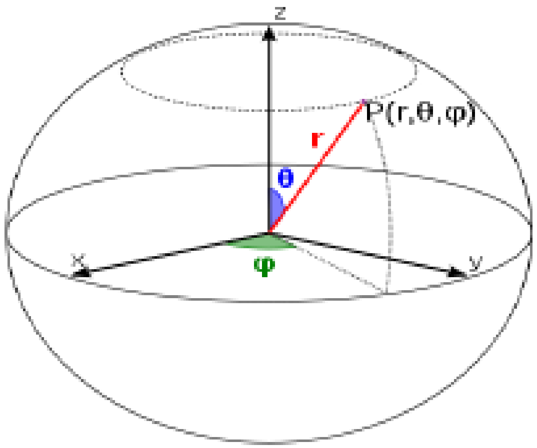
$\phi := \phi \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) \rightarrow 57.295645530939648587 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31$

$\theta := \operatorname{acos}\left(\frac{z}{r}\right) \rightarrow \operatorname{acos}\left(\frac{2 \cdot \sqrt{17}}{17}\right)$

$\theta := \theta \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) \rightarrow 57.295645530939648587 \cdot \operatorname{acos}\left(\frac{2 \cdot \sqrt{17}}{17}\right) = 60.983$

esféricas

$(r \;\; \theta \;\; \phi) \rightarrow (\sqrt{17} \;\; 60.982716771279385 \;\; 56.309800797211366)$



CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS

cilíndricas a cartesianas

$\rho := 5$ $\quad \phi := 53.13$ grados $\quad z := 3$

cilindricas

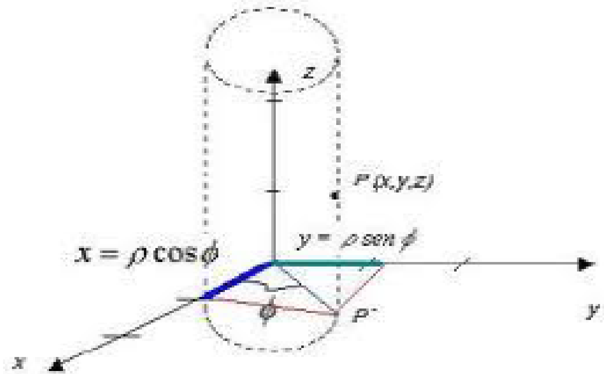
$(\rho \;\; \phi \;\; z) \rightarrow (5 \;\; 53.13 \;\; 3)$

$\phi := \phi \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \rightarrow 0.9272956$ radianes

$x := \rho \cdot \cos(\phi) \rightarrow 2.9999984720062300456$

$y := \rho \cdot \sin(\phi) \rightarrow 4.0000011459948714572$

$z := z \rightarrow 3$



cartesianas

$(x \;\; y \;\; z) \rightarrow (2.9999984720062300456 \;\; 4.0000011459948714572 \;\; 3)$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS

esféricas a cartesianas

$r := 5$ $\theta := 45$ grados $\phi := 30$ grados

esféricas

$(r\ \ \theta\ \ \phi) \rightarrow (5\ \ 45\ \ 30)$

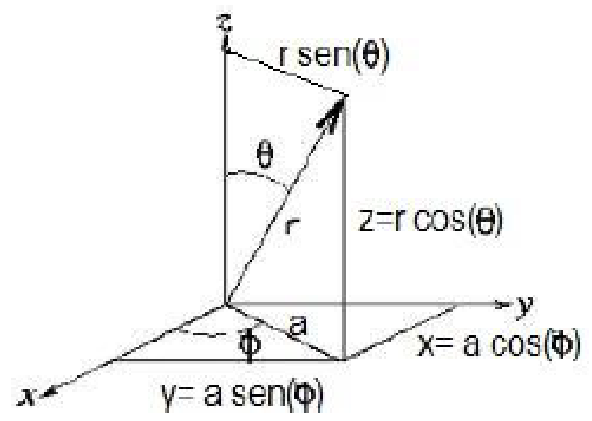
$\phi := \phi \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \rightarrow 0.5236$ radianes

$\theta := \theta \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \rightarrow 0.7854$ radianes

$x := (r \cdot \sin(\theta)\cos(\phi)) \rightarrow 3.0618656374345637761$

$y := (r \cdot \sin(\theta)\sin(\phi)) \rightarrow 1.7677739486035041695$

$z := r \cdot \cos(\theta) \rightarrow 3.5355274125561815312$



cartesianas

$(x\ \ y\ \ z) \rightarrow (3.0618656374345637761\ \ 1.7677739486035041695\ \ 3.5355274125561815312)$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS

esféricas a cilíndricas

$r := 5$ $\theta := 45$ grados $\phi := 30$ grados

esféricas

$(r\ \ \theta\ \ \phi) \rightarrow (5\ \ 45\ \ 30)$

$\phi := \phi \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \rightarrow 0.5236$ radianes

$\theta := \theta \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \rightarrow 0.7854$ radianes

$\rho := r \cdot \sin(\theta) = 3.536$

$z := r \cdot \cos(\theta) \rightarrow 3.5355274125561815312$

$\phi := \frac{180}{\pi}\phi \rightarrow 30.0$

cilíndricas

$(\rho\ \ \phi\ \ z) \rightarrow (3.5355403992973677\ \ 30.0\ \ 3.5355274125561815312)$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS

cilíndricas a esféricas

$\rho := 3.536 \quad \phi := 30$ grados $\quad z := 3.5355$

cilíndricas

$(\rho \ \ \phi \ \ z) \rightarrow (3.536 \ \ 30 \ \ 3.5355)$

$$\phi := \phi \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \rightarrow 0.5236$$

radianes

$$r := \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow 5.0003056156599068 42$$

$$\theta := \operatorname{atan}\left(\frac{\rho}{z}\right) \rightarrow 0.78546886975383192957$$

$$\theta := \left(\frac{180}{\pi}\right) \cdot \theta \rightarrow 45.003945937003357 3094$$

$$\phi := \frac{180}{\pi}\phi \rightarrow 30.0$$

esféricas

$(r \ \ \theta \ \ \phi) \rightarrow (5.0003056156599068 42 \ \ 45.003945937003357 3094 \ \ 30.0)$

FUENTES BIBLIOGRÁFICAS

- Barrientos, A (2007). Fundamentos de robótica. (2da edición). Madrid: Ed. Mc Graw Hill.
- Craig, J. (2006). Robótica. (3ra edición). México: Ed. Pearson Education.
- Hayt, W. (2006). Teoría Electromagnética. (7ma edición). México: Ed. Mc Graw Hil.