UAEM | Universidad Autónoma del Estado de México

Unidad de aprendizaje: Algebra Lineal.

Temas: Sistemas de ecuaciones lineales, teoría de matrices, determinantes.

Elaboró: Dr. en F. M. Israel Gutiérrez González.

Lic. en Ingeniería en Sistemas Inteligentes.

Centro Universitario Nezahualcóyotl.

Universidad Autónoma del Estado de México.

CU UAEM NEZAHUALCÓYOTL

Introducción.

El álgebra lineal es un curso fundamental en las distintas áreas de la ingeniería y una indispensable herramienta que tiene importantes aplicaciones en las ciencias computacionales. La cibernética cuya. Para el alumno de la ingeniería en Sistemas Computacionales será de suma importancia el reforzamiento de los conceptos del Álgebra Lineal mediante el desarrollo de códigos en lenguajes de programación.

Objetivos:

-El alumno comprenderá los conceptos del álgebra lineal tales como matrices y sus distintas operaciones, determinantes, espacios vectoriales, transformaciones lineales, vectores y valores propios. Se pondrá en ejercicio la comprensión de dichos conceptos mediante la implementación de códigos en algún lenguaje de programación que los mismos alumnos desarrollarán.

-El alumno será capaz de aplicar los distintos conocimientos que adquiera en la solución de problemas que se puedan plantear mediante los conceptos teóricos del álgebra lineal así como el uso de tales en la implementación de códigos en lenguajes de programación.

UAEM | Universidad Autónoma del Estado de México

EMPLEO DEL MATERIAL

El presente material esta hecho en base a los contenidos temáticos que se encuentran en programa por competencias de la unidad de aprendizaje de Álgebra Lineal. La presentación de cada tema contiene al inicio el título de este el marco teórico, así como algunos ejemplos que hacen más clara la explicación. Así mismo, mediante algunas animaciones y ocultando inicialmente la información, se le deja al estudiante que analice, conjeture, deduzca, extrapole e interprete.

CU UAEM NEZAHUALCÓYOTL

Métodos de Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales [1], [2]

METODO DE GAUSS-JORDAN.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= -11 \\ 5x - 4y - z &= 2 \end{aligned}$$

Podemos representarlo mediante una matriz “ampliada”.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{COLUMNA} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -11 \\ 5 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{FILA} \\ \\ \\ \end{array}$$

OPERACIONES ELEMENTALES EN RENGLONES.

1.- Reemplazo. **Sumar a cada elemento de una misma fila de la matriz ampliada el elemento correspondiente de otra fila multiplicado por una constante.**

2.- Escalamiento. **Multiplicar todos los elementos de una misma fila de la matriz ampliada por un mismo número diferente de cero.**

3.- Intercambio. **Intercambiar dos filas.**

Reglas básicas.

- **Se busca dejar a la matriz cuadrada como una matriz triangular es decir**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{array}\right)$$

Matriz triangular

- Después se busca que esa matriz triangular sea una matriz diagonal con valores unitarios.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Matriz diagonal

Definiciones.

- Entradas Principales. La entrada principal de una fila distinta de cero (con al menos un elemento distinto de cero) es el elemento diferente de cero que se encuentra mas hacia la izquierda.

- Forma Escalonada. Una matriz rectangular (no cuadrada) esta en forma escalonada si tiene las siguientes propiedades:

  1) Todas las filas distintas de cero están arriba de cualquier fila que contiene solo ceros (si existe).

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No cumple esta propiedad **Si cumple esta propiedad**

2) Cada entrada principal de una fila esta en una columna situada a la derecha de la entrada principal de la fila que se encuentra arriba de dicha entrada.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

No cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si cumple

3) Todas las entradas que se localicen en una columna situada debajo de una entrada principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

No cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si cumple

- Forma Escalonada Reducida. Diremos que una matriz se encuentra en forma escalonada reducida si cumple las siguientes condiciones:

1) La entrada principal de cada fila distinta de cero es “1” (los elementos de la diagonal son “1”)

2) Cada “1” de las entradas principales, es la única entrada distinta de cero en su columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Todos los elementos de la columna son cero a excepción de la entrada principal

Los elementos de la diagonal son “1”

El sistema de ecuaciones anterior tiene una solución por lo que se dice que el sistema es "determinado".

Un sistema de ecuaciones puede no tener soluciones (incompatible) o puede tener más de una solución (compatible), en ambos casos se dice que el sistema esta "indeterminado".

Ejemplo de sistema determinado:

$$\begin{aligned} y+z&=2 \\ 2x-y+5z&=1 \\ 2x-3y&=0 \end{aligned}$$

Ejemplo de sistemas indeterminados:

a) Sistema incompatible

$$\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 2x-y+3z&=3\\ 5x-y+7z&=5 \end{aligned}$$

Todos los elementos de un renglón de la matriz cuadrada son cero

b) Sistema compatible

$$\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 2x-y+3z&=3\\ 5x-y+7z&=8 \end{aligned}$$

Todos los elementos de un renglón de la matriz aumentada son cero

Por otra parte se dice que un sistema de ecuaciones lineales es "consistente" si tiene una solución o una infinidad de soluciones; un sistema es "inconsistente" cuando no tiene ni una solución.

Teorema sobre la existencia de las soluciones a los sistemas de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales es consistente si y solo si la columna del extremo derecho de una forma escalonada de la matriz aumentada, no tiene ninguna fila de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES [2], [3]

DEFINICIONES

Matriz. Una matriz es un ordenamiento, tabla o arreglo de elementos de algún conjunto (nosotros haremos uso únicamente del conjunto de los números). A los elementos que componen dicho arreglo también suele llamárseles "entradas". Las matrices se denotan generalmente con letras mayúsculas.

Tamaño de una matriz. Si "m" es el número de renglones o filas y "n" es el número de columnas de una matriz, el tamaño de una matriz se denotará como **mxn**. Si n=m, se dirá que la matriz es cuadrada.

Sea A una matriz de tamaño mxn, las entradas de la matriz se denotarán con letras minúsculas y con 2 subíndices a_{ij}; el primero (i) indica el renglón y el segundo (j) la columna a la que pertenece dicha entrada.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo a_{54} se refiere a la entrada ubicada en el renglón 5 y la columna 4.

Las entradas diagonales a_{ii} de la matriz (a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc) forman la **diagonal principal** de la matriz A.

Una **matriz cuadrada** es una matriz que tiene el mismo número de renglones y de columnas (nxn). Una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada cuyos elementos que no sean entradas diagonales son cero.

La **matriz identidad** I_N es una matriz cuadrada de tamaño NxN y cuyos elementos en la diagonal tienen el valor de 1.

Una **matriz renglón** es una matriz de tamaño 1xn

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Una **matriz columna** es una matriz de tamaño mx1

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Suma de matrices. Únicamente podremos sumar matrices del mismo tamaño. Consideremos dos matrices A y B de tamaño mxn

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

La suma es

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por un escalar. Si "c" es un escalar (una constante) y A es una matriz, entonces la matriz cA en donde cada elemento de A esta multiplicado por c.

Ejemplo.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 & 1/2 & -5 \\ -3/2 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 5/2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

y el escalar c=2. Calculemos el producto 2A.

TEOREMA.

Sean A, B y C matrices del mismo tamaño y r y s dos escalares. Se cumplen las siguientes propiedades:

$$1.- \quad A+B=B+A$$

$$2.- \quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$3.- \quad A+0=A$$

$$4.- \quad r(A+B)=rA+rB$$

$$5.- \quad (r+s)A=rA+sA$$

$$6.- \quad r(sA)=(rs)A$$

TAREA PAG 116 EJERCICIOS 1-4
(no hacer a aquellos en los que
haya productos entre matrices)

PRODUCTO DE MATRICES.

Nota preliminar. **Para poder multiplicar dos matrices A y B en la forma AxB, el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B.**

Sea A una matriz de tamaño mxn y B una matriz de tamaño nxp:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}_{nxp}$$

El resultado de multiplicar AXB será una matriz de tamaño mxp .El elemento c_{ij} de la matriz AXB se obtiene multiplicando el renglón i de la matriz A por la columna j de matriz B de tal forma que

$$AXB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}_{mxp}$$

En donde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

EJEMPLO. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -7 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & 8 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}_{4x3} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & -7 & 3 & 5 \\ 8 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3x4}$$

El elemento o entrada 11 y la entrada 32 del producto AXB es:

C_{11}= (1)(- 4)+(-2)(-2)+(5)(8)=- 4+4+30

C_{32}=(6)(2)+(1)(-7)+(8)(-1)=12-7-8=-3

CLASIFICACIÓN DE MATRICES

Consideremos la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Matriz Triangular Superior. Una matriz es triangular superior si es cuadrada y $a_{ij}=0$ para todo $i > j$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior. Una matriz es triangular inferior si es cuadrada y $a_{ij}=0$ para todo $i < j$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal. Es una matriz cuyos elementos fuera de la diagonal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Matriz Escalar. Es una matriz diagonal en donde todos los elementos de la diagonal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Potencia de una matriz. Definimos la potencia n-ésima de una matriz cuadrada A como el producto matricial de n matrices A.

$$A^n = AxAx....xA \qquad n \ \ veces$$

Matriz Idempotente. Una matriz A es idempotente si se cumple:

$$A^2 = A$$

Matriz Involutiva. Se dice que una matriz A es involutiva si se cumple:

$$A^2 = I$$

Matriz Nilpotente. Una matriz A es nilpotente si existe algún n tal que:

$$A^n = 0$$

Matriz Transpuesta o transpuesta de una matriz. **La transpuesta de una matriz A de tamaño nxm es aquella matriz mxn cuyas filas se forman a partir de las columnas correspondientes de A y se denota por A^T.**

Propiedades la matriz transpuesta

1) $\left(A^T\right)^T = A$

2) $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$

3) $\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T \qquad \lambda \in R$

4) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$

Matriz Simétrica. Una matriz simétrica es una matriz cuadrada A tal que cumple que $A=A^T$.

Matriz Antisimétrica. Una matriz antisimétrica es aquella matriz cuadrada A que cumple $A^T= - A$.

Matriz Compleja. Es una matriz cuyos elementos son números complejos.

Matriz Conjugada. Sea A una matriz compleja. La matriz conjugada de A es la matriz formada por los conjugados de los elementos de A y se denota por $\bar{A}$.

Matriz Transpuesta Conjugada. Sea A una matriz compleja. La transpuesta conjugada de A (la cual denotaremos como A*) es la matriz transpuesta de A y cuyos elementos están conjugados.

$$\overline{A^T} = A^*$$

Matriz Hermitiana o Hermítica. Una matriz cuadrada A se dice que es Hermitiana si su transpuesta conjugada es igual a la matriz, es decir si se cumple: A=A*.

Matriz Antihermitiana o Antihermítica. Una matriz A se dice que es antihermitiana si se cumple A*= - A.

DETERMINANTES [2], [3]

Determinante de un matriz 2x2. **El determinante de una matriz 2x2 es un escalar que se obtiene de restar el producto de los elementos de la matriz en forma "cruzada". Sea A la matriz 2x2 definida como:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

El determinante de A se define como:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de una matriz 3x3. Consideremos la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El determinante de A esta definido como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Los determinantes 2x2 anteriores se llaman determinantes menores y de denotan como M_{ij}.

El primer determinante menor M_{11} es el correspondiente al elemento a_{11} y se obtiene de eliminar el renglón 1 y la columna 1. El segundo determinante M_{12} es el correspondiente al elemento a_{12} y se obtiene de eliminar el renglón 1 y la columna 2 y así sucesivamente.

Podemos escribir el determinante de A como:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

donde:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Vemos que los determinantes M_{ij} van acompañados por un signo negativo si i+j es impar y signo positivo en caso contrario.

Así, podemos definir el determinante de la matriz A mediante la siguiente notación:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

El producto

$$C_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$$

se llama **"cofactor (1, j)"** correspondiente al renglón 1 columna j de la matriz A.

En general, el cofactor (i,j) correspondiente al renglón i y la columna j de la matriz A esta definido como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

El determinante de la matriz A puede calcularse no solo respecto al primer renglón, se puede tomar cualquier renglón como referencia. En términos de los cofactores (i,j), el determinante de A respecto al renglón k es:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$

Propiedades de los determinantes. Sea A una matriz cuadrada.

1.- Si a un renglón de A le sumamos un múltiplo de algún otro renglón con lo que obtenemos otra matriz A´, entonces se cumple que:

$$|A'| = |A|$$

2.- Si intercambiamos dos filas de la matriz A con lo que obtenemos otra matriz A´, entonces se cumple que:

$$|A'| = -|A|$$

3.- Si una fila de A se multiplica por una constante "c" con lo que obtenemos otra matriz A´, entonces se cumple que:

$$|A'| = c|A|$$

4.- Se cumple:

$$|A| = |A^T|$$

5.- Si A y B son dos matrices de tamaño nxn, entonces se cumple:

$$|AB| = |A|\,|B|$$

Definición. Recordemos la definición de los cofactores correspondientes a una matriz cuadrada A (los cofactores también son conocidos como "adjuntos").

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Podemos formar la matriz cuyos elementos o entradas sean los cofactores, es decir la matriz:

$$\left(C_{ij}\right)=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Es llamada “matriz de cofactores” o “adjunta” de la matriz A. También se denota como:

$$adj\ A=\left(C_{ij}\right)$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

Podemos calcular la inversa de la matriz A a partir de la siguiente fórmula:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(adj\ A\right)^{T}$$

Universidad Autónoma del Estado de México

UAEM

Referencias Bibliográficas.

[1] Cárdenas, Lluis, Raggi; *“Álgebra Superior”*; Editorial Trillas.

[2] Lay, David; *“Algebra Lineal y sus aplicaciones”*; Editorial Pearson.

[3] Anton, Howard; *“Introducción al álgebra lineal”*; Editorial Limusa.

CU UAEM NEZAHUALCÓYOTL