UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: “ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y DUALIDAD”

M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: ABRIL DE 2018

UNIDAD DE APRENDIZAJE:
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

UNIDAD DE COMPETENCIA 3:
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD: CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO DE VARIABLES BÁSICAS Y NO BÁSICAS, EN EL VECTOR RECURSOS, EL VECTOR TECNOLÓGICO, NUEVAS VARIABLES Y NUEVAS RESTRICCIONES.

ANÁLISIS DE DUALIDAD: RELACIÓN PRIMAL- DUAL, PRECIOS SOMBRA, MÉTODO SIMPLEX DUAL.

UTILIZAR SOFTWARE PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

OBTENER RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD E INTERPRETARLOS.

OBJETIVOS

OBJETIVOS

General:

Conocer y aplicar los conceptos de análisis de sensibilidad y dualidad, haciendo énfasis en la relación primal-dual.

Particular:

1. Cambios en los coeficientes de la función objetivo, de variables básicas y no básicas, en el vector recursos, el vector tecnológico.
2. Nuevas variables y nuevas restricciones.

IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Se relaciona con la cuantificación de los efectos en la solución optima por cambios en los parámetros del modelo matemático.

Cuando escribimos un modelo, damos por aceptado que los valores de los parámetros se conocen con certidumbre; pero en la realidad no siempre se cumple que los valores sean verídicos, ya que por ejemplo las variaciones en los costos de los materiales, en la mano de obra o en el precio de un producto, ocasionan cambios en los cocientes de la función objetivo. Así mismo, las demoras en los envíos de los proveedores, los deterioros no previstos y otros factores imponderables generarán cambios en la disponibilidad de los recursos.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Dado el modelo de programación lineal siguiente:

Max $z = 3x_1 + 2x_2$ (función objetivo)

Sujeto a (s.a:)

$2x_1 + x_2 \leq 100$ (restricción de acabado)

$x_1 + x_2 \leq 80$ (restricción de carpintería)

$x_1 \leq 40$ (restricción de demanda)

$x_1, x_2 \geq 0$ (restricción de signo)

MÉTODO GRÁFICO: SOLUCIÓN

Max $z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a (s.a:)

$2x_1 + x_2 \leq 100$

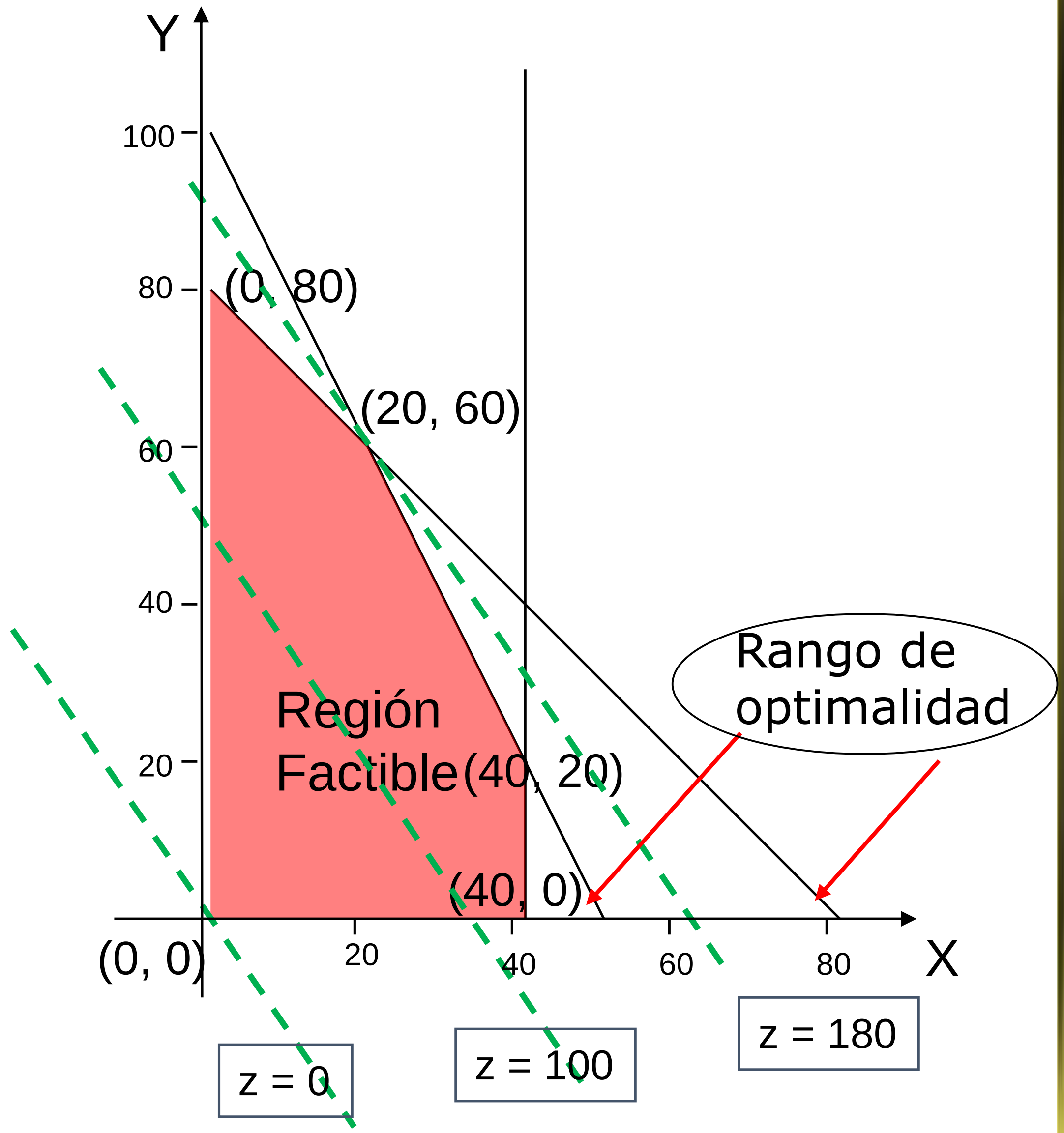
$x_1 + x_2 \leq 80$

$x_1 \leq 40$

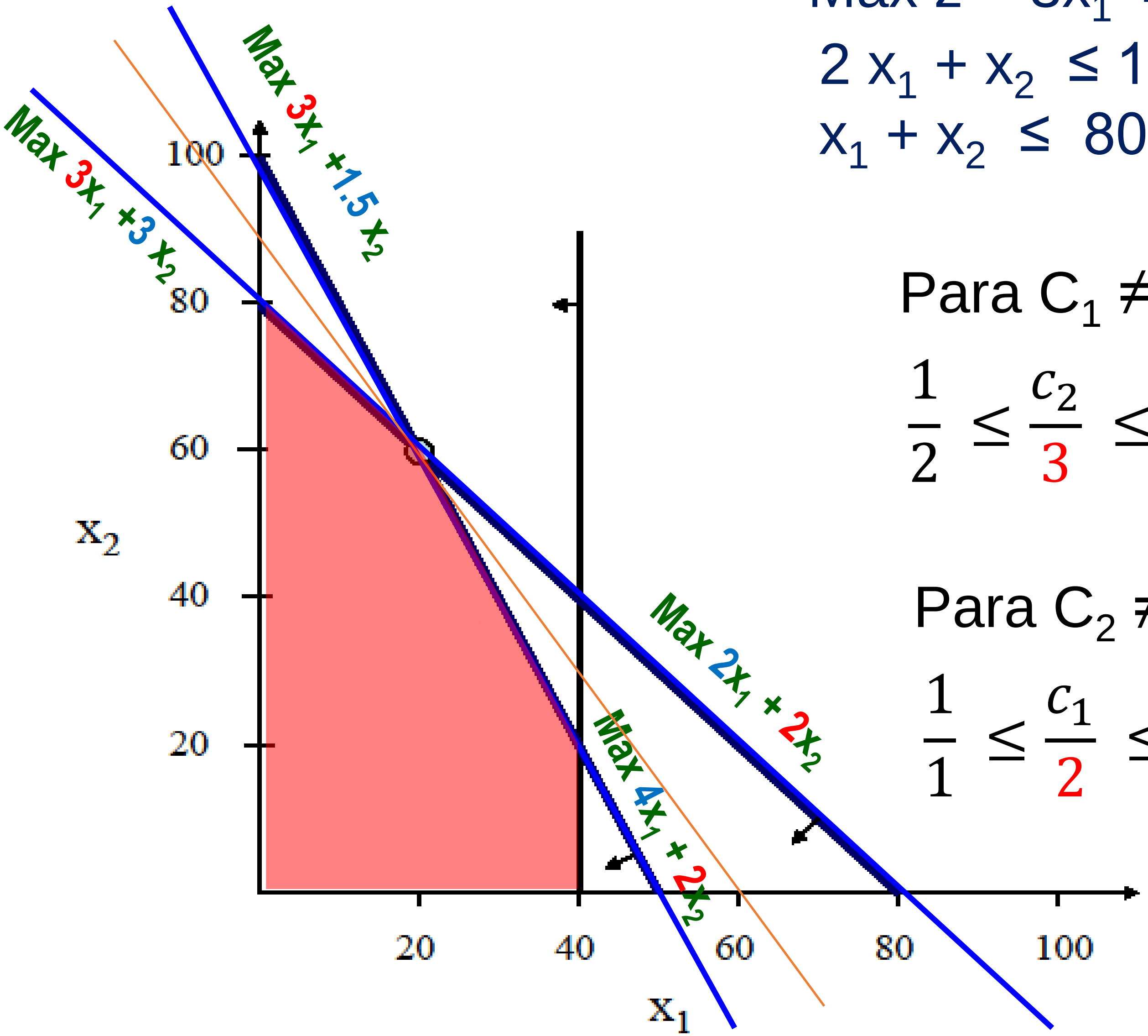
$x_1, x_2 \geq 0$

la solución óptima para el modelo de PL. Ocurre en el punto (x = 20, y = 60) con z = 180

La solución óptima se mantendrá mientras la pendiente de z quede entre las pendientes de las dos líneas que cruzan en el punto óptimo.



RANGO DE OPTIMALIDAD



Max $z = 3x_1 + 2x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 100$ (acabado)

$x_1 + x_2 \leq 80$ (carpintería)

Para $C_1 \neq 0$: $\frac{c_2}{c_1} \leq \frac{c_2}{3} \leq \frac{c_2}{c_1}$

$\frac{1}{2} \leq \frac{c_2}{3} \leq \frac{1}{1}$; $\frac{3}{2} \leq C_2 \leq 3$

Para $C_2 \neq 0$: $\frac{c_1}{c_2} \leq \frac{c_1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2}$

$\frac{1}{1} \leq \frac{c_1}{2} \leq \frac{2}{1}$; $2 \leq C_1 \leq 4$

RANGO DE OPTIMALIDAD: Ejercicio

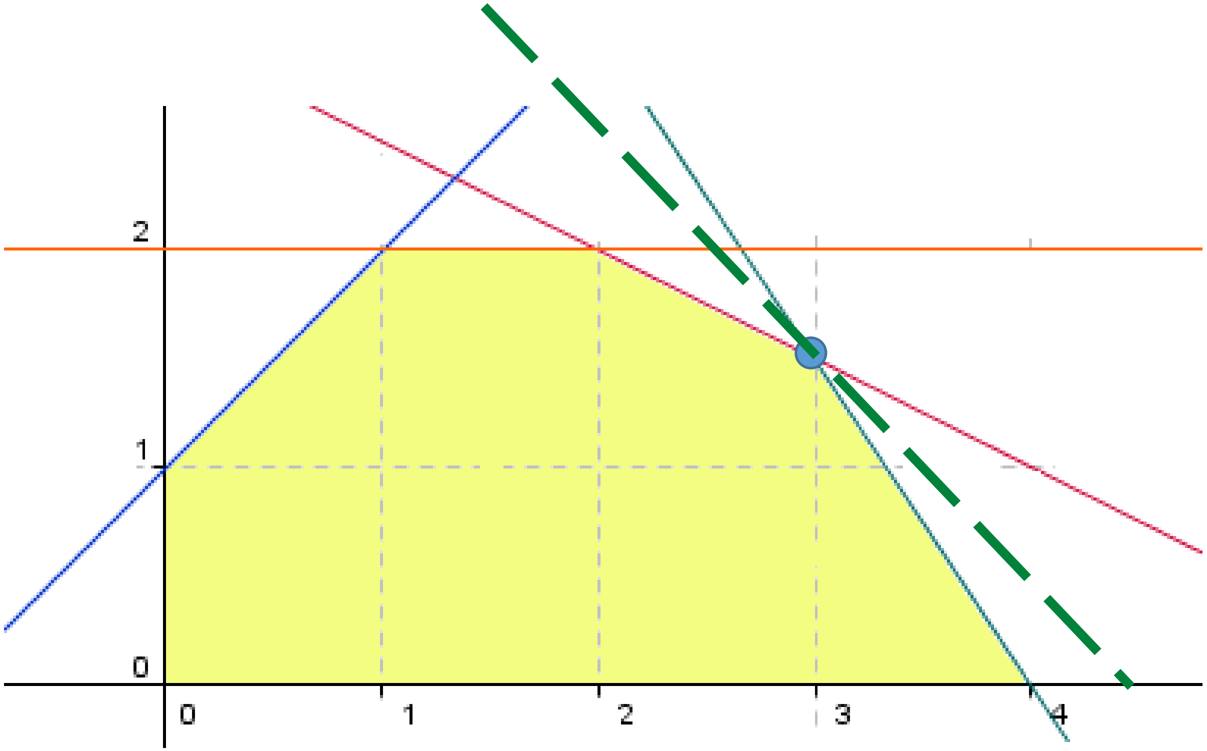
Max $z = 5x_1 + 4x_2$

$6x_1 + 4x_2 \leq 24$

$x_1 + 2x_2 \leq 6$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$2x_2 \leq 2$



Solución

$X_1 = 3$

$X_2 = 1.5$

Para $C_1 \neq 0$: $\frac{c_2}{c_1} \leq \frac{c_2}{5} \leq \frac{c_2}{c_1}$

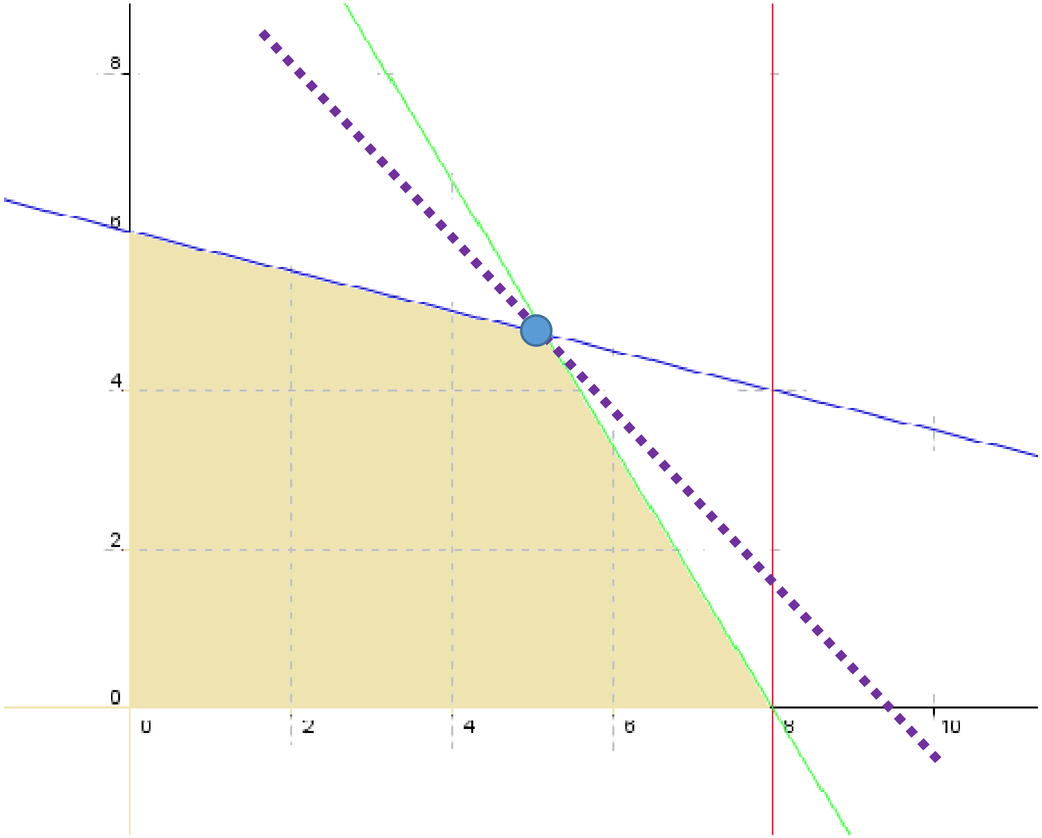
Para $C_2 \neq 0$: $\frac{c_1}{c_2} \leq \frac{c_1}{4} \leq \frac{c_1}{c_2}$

$$\frac{4}{6} \leq \frac{c_2}{5} \leq \frac{2}{1}; \quad \frac{20}{6} \leq C_2 \leq 10$$

RANGO DE OPTIMALIDAD: Ejercicio 2

$$\text{Max } z = 4x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 40$$
$$x_1 = 8$$



Solución

$X_1=$

$X_2=$

Para $C_1 \neq 0$: $\frac{c_2}{c_1} \leq \frac{c_2}{5} \leq \frac{c_2}{c_1}$

Para $C_2 \neq 0$: $\frac{c_1}{c_2} \leq \frac{c_1}{4} \leq \frac{c_1}{c_2}$

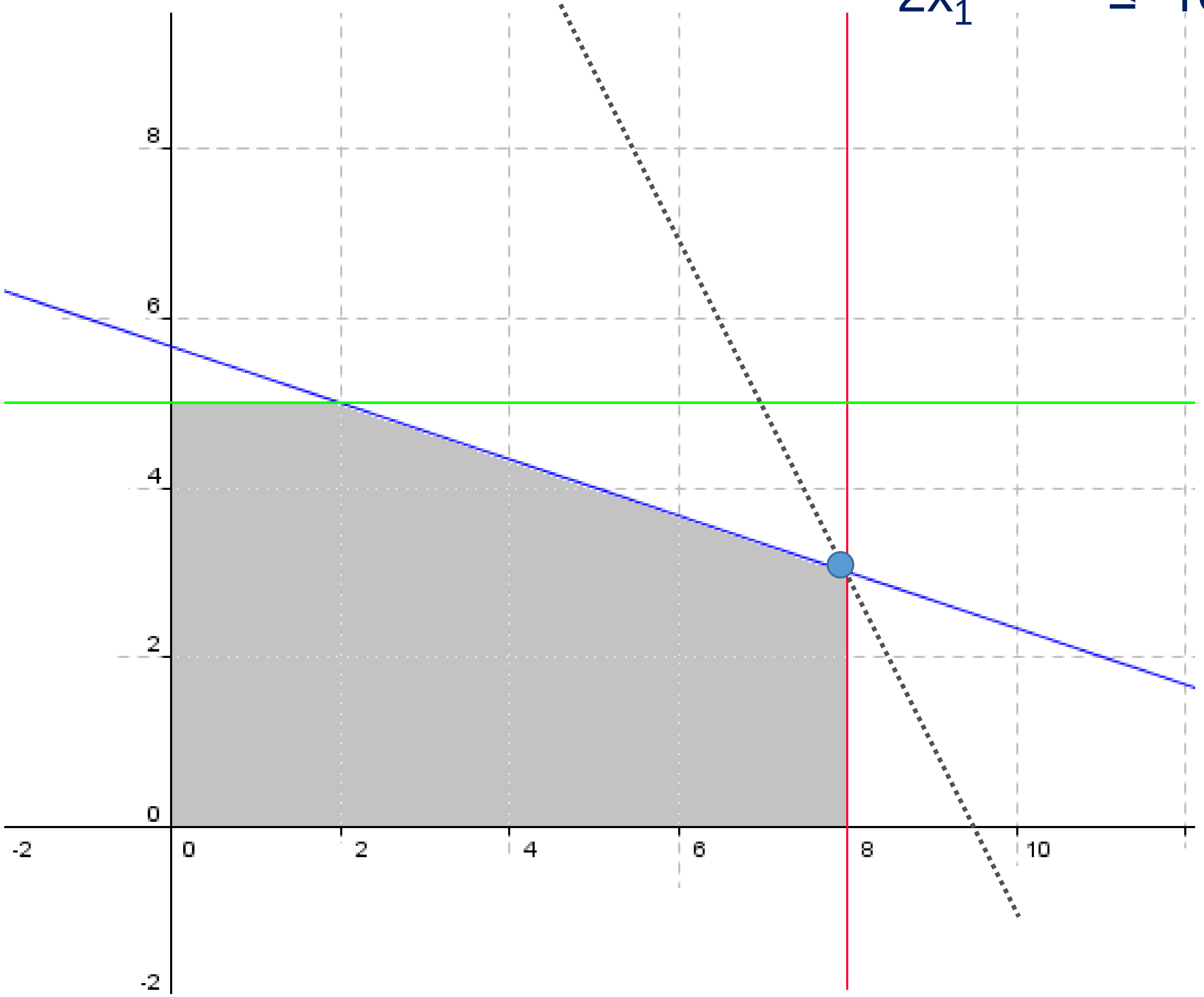
Ejercicio 3

$$\text{Max } z = 4x_1 + 2x_2$$

Sujeta a:

$$x_1 + 3x_2 \leq 17$$

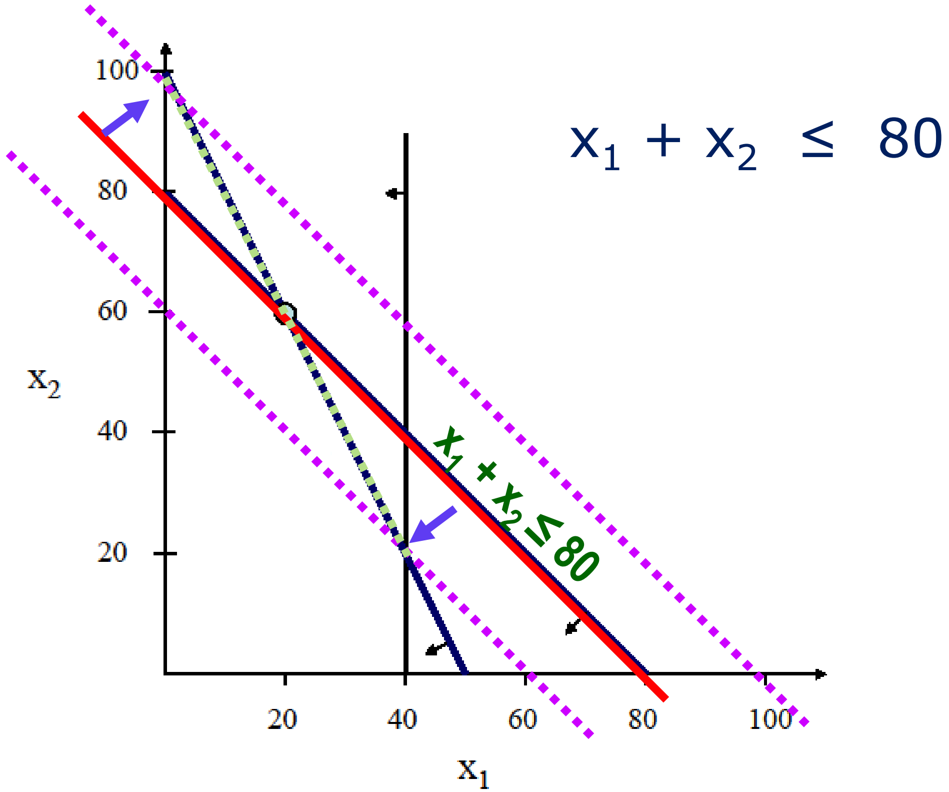
$$2x_1 \leq 16$$



SENSIBILIDAD DEL LADO DERECHO: GRAFICO

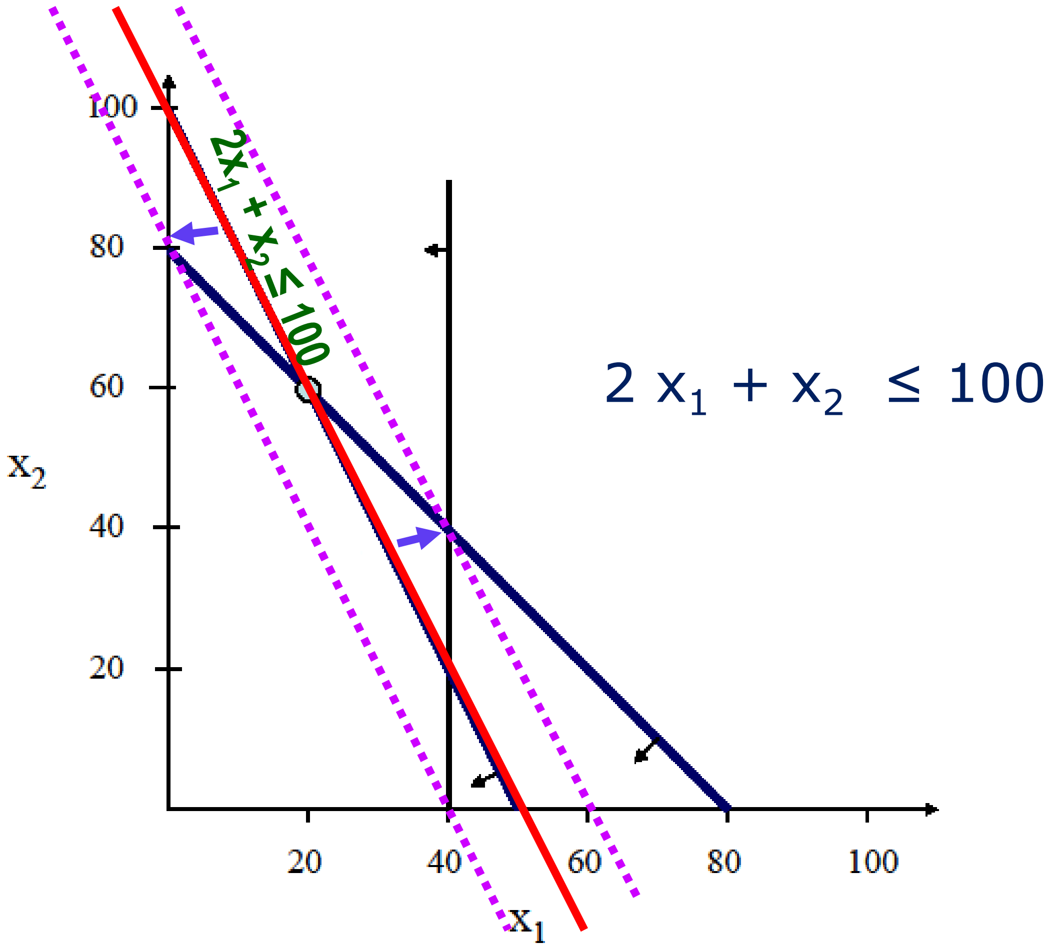
Cómo se calculan los límites superior e inferior para la cantidad máxima en que puede cambiar b_i antes de que la base óptima se vuelva no factible.

La solución óptima se deslizará a lo largo de la recta hasta los siguientes puntos extremos



SENSIBILIDAD DEL LADO DERECHO: GRAFICO

Cuando cambia la disponibilidad de un recurso, la solución óptima se deslizará a lo largo de la recta hasta los siguientes puntos extremos



SENSIBILIDAD CON LA TABLA SIMPLEX (final)

Se calcula el intervalo de optimalidad para C_1, los beneficios netos. Utilizando C_1 (en lugar de 3) la función objetivo es: Max $z = C_1x_1 + 2x_2$. La solución actual seguirá siendo optima mientras el valor de C_1 dé como resultado $C_j - Z_j \leq 0$

	Cj	C_1	2	0	0	0	
CB	Var. bás.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	LD
2	X_2	0	1	-1	2	0	60
0	S_3	0	0	-1	1	1	20
C_1	X_1	1	0	1	-1	0	20
	Z	C_1	2	$C_1 - 2$	$-C_1 + 4$	0	180
	Cj - Zj	0	0	$-C_1 + 2$	$C_1 - 4$	0	

Donde: $-C_1 + 2 \leq 0$ y $C_1 - 4 \leq 0$

Por lo que $2 \leq C_1$ y $C_1 \leq 4$, **$2 \leq C_1 \leq 4$.**

SENSIBILIDAD CON LA TABLA SIMPLEX

Procediendo de igual forma se obtiene de C_2:

	Cj	3	C_2	0	0	0	
CB	Var. bás.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	LD
c_2	X_2	0	1	-1	2	0	60
0	S_3	0	0	-1	1	1	20
3	X_1	1	0	1	-1	0	20
	Z	3	C_2	$-C_2 +3$	$2C_2-3$	0	180
	Cj - Zj	0	0	$C_2 - 3$	$-2C_2+3$	0	

Donde: $C_2 - 3 \leq 0$ y $-2C_2 + 3 \leq 0$

Por lo que $C_2 \leq 3$ y $3/2 \leq C_2$, $3/2 \leq C_1 \leq 3$.

(comparar con solución gráfica).

SENSIBILIDAD CON LA TABLA SIMPLEX

Suponga que se reduce los beneficios netos de la actividad x_1 de 3 a 2. El intervalo de optimalidad indica que la solución actual (x_1 = 20, x_2= 60, s_3= 20) sigue siendo óptima. Para verificar esto, se vuelve a calcular la tabla simplex final después de reducir a 2 el valor de C_1.

	Cj	2	2	0	0	0	
CB	Var. bás.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	LD
2	X_2	0	1	-1	2	0	60
0	S_3	0	0	-1	1	1	20
2	X_1	1	0	1	-1	0	20
	Z	2	2	0	2	0	160
	Cj - Zj	0	0	0	-2	0	

SENSIBILIDAD CON LA TABLA SIMPLEX: No básicas

El cambio en el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica ocasiona que cambie solamente el elemento Cj – Zj de la tabla simplex final.

	Cj	3	2	C_{S1}	0	0	
CB	Var. bás.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	LD
2	X_2	0	1	-1	2	0	60
0	S_3	0	0	-1	1	1	20
3	X_1	1	0	1	-1	0	20
	Z	3	2	1	1	0	180
	Cj - Zj	0	0	$C_{S1} - 1$	-1	0	

Entonces $C_{s1} – 1 \leq 0$; $C_{S1} \leq 1$

Esto es, mientras el coeficiente de S_1 en la función objetivo sea menor o igual a 1, la solución seguirá siendo óptima.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD CAMBIOS EN C_J. RESUMEN

1. Reemplazar el valor numérico del coeficiente de la función objetivo para X_k con C_k en todos los casos en los que aparezca en la tabla simplex final.
2. Volver a calcular Cj – Zj
3. Haciendo Cj – Zj ≤ 0 resolver cada desigualdad a fin de obtener los límites superior e inferior. Cuando existe más de un límite del mismo signo, el más cercano a cero es el que se considera.
4. El cambio en la función objetivo se logra calculando nuevamente el valor con el nuevo coeficiente.

SENSIBILIDAD DEL LADO DERECHO: TABLA SIMPLEX

Se calculan los límites superior e inferior para la cantidad máxima en que puede cambiar b_i antes de que la base óptima se vuelva no factible. Se logra mediante la siguiente fórmula

$$\begin{bmatrix} Solución \\ óptima \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Cambio\ en \\ b_i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Columna \\ s_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nueva \\ Solución \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} + \Delta b_i \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 - \Delta b_i \\ 20 - \Delta b_i \\ 20 + \Delta b_i \end{bmatrix}$$

La cuestión es determinar la magnitud de Δb_i.

SENSIBILIDAD DEL LADO DERECHO: TABLA SIMPLEX

Para b_1, se reproduce la tabla simplex final del problema analizado.

	Cj	3	2	0	0	0	
CB	Var. bás.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	LD
2	X_2	0	1	-1	2	0	60
0	S_3	0	0	-1	1	1	20
3	X_1	1	0	1	-1	0	20
	Z	3	2	1	1	0	180
	Cj - Zj	0	0	-1	-1	0	

Se debe hacer que las variables básicas sigan siendo no negativas, así que:

$$\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} + \Delta b_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 - \Delta b_1 \\ 20 - \Delta b_1 \\ 20 + \Delta b_1 \end{bmatrix}, \quad con \quad \begin{array}{c} 60 - \Delta b_1 \geq 0 \\ 20 - \Delta b_1 \geq 0 \\ 20 + \Delta b_1 \geq 0 \end{array}$$

SENSIBILIDAD DEL LADO DERECHO: TABLA SIMPLEX

Despejando Δb_i en las desigualdades anteriores, se obtiene:

$$\Delta b_1 \leq 60$$

$$\Delta b_1 \leq 20$$

$$\Delta b_1 \geq -20$$

Cuando existen 2 extremos del mismo signo se escoge el más cercano a cero. Así que: $-20 \leq \Delta b_1 \leq 20$

El lado derecho inicial era de 100. Por lo que:

100 – 20 = 80 y 100 + 20 = 120

$$80 \leq b_1 \leq 120$$

SENSIBILIDAD DEL LADO DERECHO: TABLA SIMPLEX

El cambio en el valor de la función objetivo que corresponde a un cambio de una unidad en b_1 está dado por el valor de Zj en esa columna (el precio sombra).

Por ejemplo: Supóngase que disminuye en 20

$$\begin{array}{c} 2 \\ Nueva\ solución = \\ 3 \end{array} \underset{180}{\begin{bmatrix}60\\20\\20\end{bmatrix}} - 20\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \underset{160}{\begin{bmatrix}80\\40\\0\end{bmatrix}}$$

SENSIBILIDAD DEL LADO DERECHO: TABLA SIMPLEX

En seguida se reproduce la tabla simplex final del problema analizado

	Cj	3	2	0	0	0	
CB	Var. bás.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	LD
2	X_2	0	1	-1	2	0	60
0	S_3	0	0	-1	1	1	20
3	X_1	1	0	1	-1	0	20
	Z	3	2	1	1	0	180
	Cj - Zj	0	0	-1	-1	0	

Se debe hacer que las variables básicas sigan siendo no negativas, así que:

$$\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} + \Delta b_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 + 2\Delta b_2 \\ 20 + \Delta b_2 \\ 20 - \Delta b_2 \end{bmatrix}, \quad con \begin{array}{r} 60 + 2\Delta b_2 \geq 0 \\ 20 + \Delta b_2 \geq 0 \\ 20 - \Delta b_2 \geq 0 \end{array}$$

SENSIBILIDAD DEL LADO DERECHO: TABLA SIMPLEX

Despejando Δb_i en las desigualdades anteriores, se obtiene:

$$2\Delta b_2 \geq -60; \quad \Delta b_2 \geq -30$$

$$\Delta b_2 \geq -20$$

$$20 \geq \Delta b_2$$

Cuando existen 2 extremos del mismo signo se escoge el más cercano a cero. Así que: $-20 \leq \Delta b_2 \leq 20$

El lado derecho inicial era de 80. Por lo que:

$80 - 20 = 60$ y $80 + 20 = 100$

$$60 \leq b_2 \leq 100$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: "ANÁLISIS DE DUALIDAD"

M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: ABRIL DE 2018

ANALISIS DE DUALIDAD

1. Objetivos
2. Concepto
3. Relación Primal-Dual
4. Reglas para obtener el Dual
5. Ejemplos
6. Ejercicios

- General: Conocer y aplicar los conceptos de análisis de dualidad
- Particular: Conocer el análisis de dualidad.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

El dual es un problema de PL que se obtiene matemáticamente de un modelo primal de PL dado. Los problemas primal y dual están relacionados a tal grado que la solución de uno de ellos conduce en forma automática a la solución del otro.

PRIMAL

maximizar o minimizar $$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeto a $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

i = 1, 2, ..., m

j = 1, 2, ..., n

$$x_j \geq 0$$

CONSTRUCCIÓN DEL DUAL

1. Si es problema de minimización el dual será de maximización y viceversa.

2. En el dual habrá tantas variables como restricciones en el primal.

3. En el dual habrá tantas restricciones como variables en el primal.

4. Los coeficientes de la función objetivo del dual vendrán dados por los coeficientes del lado derecho de las restricciones del primal.

5. Los coeficientes del lado derecho del dual vendrán dados por los coeficientes de la función objetivo del primal.

6. Los coeficientes que acompañaran a las variable en una restricción del dual corresponderán a aquellos coeficientes que acompañan a la variable primal correspondiente a la restricción dual (los coeficientes serán el resultado de transponer la matriz A de coeficientes).

7. Para saber si las restricciones y las variables duales son de **≤, =, o ≥,** se recurre a la tabla de relaciones primal-dual.

RELACIÓN ENTRE PRIMAL Y DUAL

	Variables primales								
	X_1	X_2	..	X_j	..	X_n			
Segundo miembro de restricciones duales	C_1	C_2	..	C_j	..	C_n			
Coeficientes del primer miembro de las restricciones duales	a_{11}	a_{12}	..	a_{1j}	..	a_{1n}	b_1	←	y_1
	a_{21}	a_{22}	..	a_{2j}	..	a_{2n}	b_2	←	y_2
	..	..	..	..	..	..	..		
	..	..	..	..	..	..	..		
	a_{m1}	a_{m2}	..	a_{mj}	..	a_{mn}	b_m	←	y_m

Variables duales = restricciones primales

j-ésima restricción dual

Función objetivo del dual

RELACIONES PRIMAL - DUAL

PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN	PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN
RESTRICCIONES	VARIABLES
$\leq$	≥ 0
$=$	Irrestricta
$\geq$	≤ 0
VARIABLES	RESTRICCIONES
≥ 0	$\geq$
Irrestricta	$=$
≤ 0	$\leq$

PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN	PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN
RESTRICCIONES	VARIABLES
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestricta
$\leq$	≤ 0
VARIABLES	RESTRICCIONES
≥ 0	$\leq$
Irrestricta	$=$
≤ 0	$\geq$

EJEMPLO DE DUAL

PRIMAL

Maximizar $Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$

sujeto a

$$
\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 + X_3 &\leq 10 \\
2X_1 - X_2 + 3X_3 &= 8 \\
X_1,\ X_2,\ X_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

DUAL

Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$

sujeto a

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\
2y_1 - y_2 &\geq 12 \\
y_1 + 3y_2 &\geq 4
\end{aligned}
$$

$y_1 \geq 0,\quad y_2$ Irrestricto

PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN	PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN
RESTRICCIONES	VARIABLES
$\leq$	≥ 0
$=$	Irrestricta
$\geq$	≤ 0
VARIABLES	RESTRICCIONES
≥ 0	$\geq$
Irrestricta	$=$
≤ 0	$\leq$

EJEMPLO

Primal

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0,$$

Dual

$$\text{Min} \quad W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

sujeto a

$$y_1 + \quad + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0$$

A la izquierda se muestra el problema primal en forma algebraica y a la derecha el problema dual en forma algebraica.

EJEMPLO

Primal

Max $Z = 3X_1 - 2X_2 + 5X_3$

sujeto a

$3X_1 + 2X_2 + 7X_3 \geq 8$

$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 = 9$

$6X_1 + 7X_2 + 9X_3 \leq 7$

$5X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 6$

$X_1 \geq 0$,

$X_2 \leq 0$,

X_3 irrestricta

Dual

Min $W = 8y_1 + 9y_2 + 7y_3 + 6y_4$

sujeto a

$3y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 5y_4 \geq 3$

$2y_1 - 3y_2 + 7y_3 + 5y_4 \leq -2$

$7y_1 + 4y_2 + 9y_3 + 6y_4 = 5$

$y_1 \leq 0$,

$y_3 \geq 0$,

y_2 y y_4 irrestricta

EJEMPLO

Ejemplo:

Primo:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Sujeto a;

$$2X_1 + X_2 \leq 16$$
$$X_1 + 3X_2 \geq 20$$
$$X_1 + X_2 = 10$$
$$X's \geq 0$$

Dual:

$$\text{Max } Z = 16W_1 + 20W_2 + 10W_3$$

Sujeto a;

$$2W_1 + W_2 + W_3 \leq 2$$
$$W_1 + 3W_2 + W_3 \leq 3$$

$W_1 \leq 0$, $W_2 \geq 0$, W_3 no restringida

EJEMPLO

Minimizar $z = \$2Q_X + \$3Q_Y$ (función objetivo)

Sujeto a

$1Q_X + 2Q_Y \geq 14$ (restricción de proteína)

$1Q_X + 1Q_Y \geq 10$ (restricción de minerales)

$1Q_X + 0.5Q_Y \geq 6$ (restricción de vitaminas)

$Q_X, Q_Y \geq 0$ (restricción de no negatividad)

Maximizar $w = 14V_P + 10V_M + 6V_V$

Sujeto a

$1V_P + 1V_M + 1V_V \leq \$2$

$2V_P + 1V_M + 0.5V_V \leq \$3$

$V_P, V_M, V_V \geq 0$

EJEMPLO

Comparando solución del Primal con el Dual

Problema Dual

	15:39:33		Monday	October	01	2007		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	Y1	0	4.0000	0	2.0000	at bound	2.0000	M
2	Y2	1.5000	12.0000	18.0000	0	basic	6.0000	18.0000
3	Y3	1.0000	10.0000	10.0000	0	basic	12.0000	24.0000
	Objective	Function	(Min.) =	36.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	3.0000	>=	3.0000	0	2.0000	0	7.5000
2	C2	5.0000	>=	5.0000	0	6.0000	2.0000	M

	15:27:28		Monday	October	01	2007		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2.0000	3.0000	6.0000	0	basic	0	7.5000
2	X2	6.0000	5.0000	30.0000	0	basic	2.0000	M
	Objective	Function	(Max.) =	36.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	2.0000	<=	4.0000	2.0000	0	2.0000	M
2	C2	12.0000	<=	12.0000	0	1.5000	6.0000	18.0000
3	C3	18.0000	<=	18.0000	0	1.0000	12.0000	24.0000

Problema primal

BIBLIOGRAFÍA

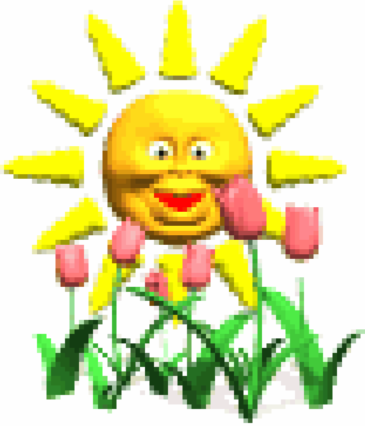
1.- Bronson. **“INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”.** Edit. McGraw-Hill.

2. - Hillier, Frederick y otros. **“INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”** 7ª Ed**.** Edit. McGraw-Hill.

3. Mckeown, D. **“MODELOS CUANTITATIVOS PARA LA ADMINISTRACIÓN”** Iberoamericana.

4.- Taha, Handy. “**INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”** 7ª Ed. Edit. Pearson Educación.

5.- Winston Wayne L. “**INVESTIGACION DE OPERACIONES. APLICACIONES Y ALGORITMOS**”. *4ª ed.* Edit. Mc Graw-Hill



FIN DE LA PRESENTACION