



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO**

**UNIDAD ACADÉMICA PROFESIONAL HUEHUETOCA**

**MEDICIÓN DEL VALOR EN RIESGO DELTA-NORMAL EN PORTAFOLIOS DE BONOS DE RENTA FIJA EN EL PERIODO 2017-2019**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**LICENCIADO EN ACTUARÍA**

PRESENTA:

**SANDRA REYES LÓPEZ**

ASESOR:

**DR. EN E. HÉCTOR ALONSO OLIVARES AGUAYO**

REVISORES:

**DR. EN ED. JOEL MARTÍNEZ BELLO**

**ACT. MIGUEL ÁNGEL ÁVILA HERNÁNDEZ**

HUEHUETOCA, EDO. DE MÉXICO. NOVIEMBRE DE 2019



A mi madre, con todo el amor que mi corazón puede dar y más

## **Agradecimientos**

Principalmente estoy muy agradecida con Dios y con mi familia, sobre todo con mi madre y con mi hermana. Mamá, gracias por darme todo en la vida. Sin ti absolutamente nada hubiera sido posible. El poder seguir compartiendo y disfrutando tantos momentos contigo es una de las mayores muestras del amor de Dios hacia mí. Gracias Andi por llenar de alegría mi vida, por estar siempre a mi lado en las buenas y en las malas, por darme los más increíbles masajes después de pasar horas trabajando en esta tesis. Chicas, ustedes son uno de mis principales incentivos de superación, las amo.

Agradecimientos especiales a mi Faficko, que con su existencia ha llenado de luz mi vida. Fran, mi gratitud hacia ti es infinita. No existe nada comparable a ti y a lo que me has regalado todos estos años. Te amo.

Gracias a mis tías, Yola y Vicky, por su apoyo siempre incondicional. Me siento muy afortunada por tenerlas en mi vida.

También agradezco mi abuelita, Alicia Sánchez, por darme las más grandes lecciones de vida. Abue, estoy segura de que nunca nada te hubiera hecho no confiar en mí. Ahora sé que la eternidad te reunió con mi abuelito para continuar regalándonos su sabiduría y amor. Siempre te llevo conmigo.

Finalmente agradezco a mis profesores y amigos, quienes contribuyeron de manera significativa en mi formación. Gracias a todos por su ayuda y valiosa amistad.

## **Resumen**

En la presente investigación se analiza el comportamiento de los instrumentos financieros del mercado de dinero (CETES a 28, 91 y 182 días, así como Bonos M a 3 y 5 años) durante el periodo 2017-2019. Se realiza un análisis de sensibilidad en los precios de los bonos y del Valor en Riesgo para los meses de junio y julio de 2019. La evidencia empírica muestra que el inversionista tiene mejores resultados en los portafolios de bonos con y sin cupones que de manera individual. Lo anterior demuestra que invertir en instrumentos de bajo riesgo es mejor que hacerlo en activos riesgosos dadas las condiciones actuales que se tienen en México.

## **Abstract**

In the present investigation, the behavior of the money market financial instruments (CETES at 28, 91 and 182 days, as well as M bonds at 3 and 5 years) during the 2017-2019 period is analyzed. A sensitivity analysis is carried out on the prices of the bonds and the Value at Risk for the months of June and July 2019. Empirical evidence shows that the investor has better results in the bond portfolios with and without coupons than individually . This demonstrates that investing in low risk instruments is better than doing it in risky assets given the current conditions they have in Mexico.

# Índice

Índice de tablas.....	4
Índice de gráficas.....	6
Índice de imágenes.....	8
Índice de anexos.....	9
Introducción.....	10
Capítulo 1. Valor del dinero en el tiempo.....	14
1.1 Interés simple.....	14
1.1.1 Valor Futuro del interés simple.....	16
1.1.2 Valor Presente del interés simple.....	17
1.2 Interés compuesto.....	17
1.2.1 Valor Futuro del interés compuesto.....	19
1.2.2 Valor Presente del interés compuesto.....	22
1.3 Interés compuesto con tasa nominal.....	22
1.3.1 Valor Futuro del interés compuesto con tasa nominal.....	22
1.3.2 Valor Presente del interés compuesto con tasa nominal.....	25
1.4 Fuerza de interés.....	25
1.4.1 Valor Futuro de la fuerza de interés.....	26
1.4.2 Valor Presente de la fuerza de interés.....	27
1.5 Anualidades.....	28
1.5.1 Anualidad vencida.....	29
1.5.1.1 Valor Presente de una anualidad vencida.....	30
1.5.1.2 Valor Futuro de una anualidad vencida.....	32
1.5.2 Anualidad anticipada.....	34
1.5.2.1 Valor Presente de una anualidad anticipada.....	34
1.5.2.2 Valor Futuro de una anualidad anticipada.....	36
1.6 Tasa Spot.....	38
1.7 Tasa Forward.....	39



Capítulo 3. Aplicación.....	69
3.1 Selección de activos.....	69
3.2 Portafolio de CETES.....	70
3.2.1 Precio.....	70
3.2.2 Tasas de interés.....	72
3.2.3 Rendimientos.....	73
3.2.4 Rentabilidad esperada de los activos.....	73
3.2.5 Duración y Convexidad.....	74
3.2.6 Valor en Riesgo de los activos.....	78
3.2.7 Valor en Riesgo del portafolio.....	79
3.2.8 Rentabilidad esperada del portafolio.....	86
3.2.9 Comparación: datos reales contra resultados obtenidos.....	86
3.3 Portafolio de Bonos M.....	87
3.3.1 Precio.....	87
3.3.2 Tasas de interés.....	88
3.3.3 Rendimientos.....	89
3.3.4 Rentabilidad esperada de los activos.....	90
3.3.5 Duración y Convexidad.....	91
3.3.6 Valor en Riesgo de los activos.....	95
3.3.7 Valor en Riesgo del portafolio.....	96
3.3.8 Rentabilidad esperada del portafolio.....	101
3.3.9 Comparación: datos reales contra resultados obtenidos.....	102
Conclusiones.....	104
Referencias de consulta.....	106

## Índice de tablas

Tabla 1.1: Valor Futuro del interés simple.....	16
Tabla 1.2: Valor Futuro del interés compuesto.....	20
Tabla 1.3: Resumen de tasas de interés compuesto.....	28
Tabla 3.1: Elementos del portafolio de CETES.....	70
Tabla 3.2: Elementos del portafolio de Bonos M.....	70
Tabla 3.3: Duración y Convexidad de CETES.....	74
Tabla 3.4: Valor en Riesgo de los CETES.....	79
Tabla 3.5: Valor en Riesgo no diversificado del portafolio de CETES.....	80
Tabla 3.6: Valor en Riesgo diversificado del portafolio de CETES.....	80
Tabla 3.7: Matriz 1. Volatilidad de los rendimientos de los CETES.....	81
Tabla 3.8: Matriz 2. Correlaciones de rendimientos de tasas de interés de los CETES.....	81
Tabla 3.9: Matriz 3 de CETES.....	82
Tabla 3.10: Matriz 4 de CETES.....	82
Tabla 3.11: Bono total (CETES).....	83
Tabla 3.12: Matriz W de CETES.....	83
Tabla 3.13: Matriz W transpuesta de CETES.....	83
Tabla 3.14: Matriz 5 de CETES.....	84
Tabla 3.15: Matriz 6 de CETES.....	84
Tabla 3.16: Volatilidad del portafolio de CETES.....	85
Tabla 3.17: Valor en Riesgo del portafolio de CETES.....	85
Tabla 3.18: Rentabilidad esperada del portafolio de CETES.....	86
Tabla 3.19: Resultados de CETES de junio y julio 2019.....	86

Tabla 3.20: Duración y Convexidad de Bonos M.....	91
Tabla 3.21: Valor en Riesgo de los Bonos M.....	95
Tabla 3.22: Valor en Riesgo no diversificado del portafolio de Bonos M.....	96
Tabla 3.23: Valor en Riesgo diversificado del portafolio de Bonos M.....	97
Tabla 3.24: Matriz 1. Volatilidad de los rendimientos de los Bonos M.....	97
Tabla 3.25: Matriz 2. Correlaciones de rendimientos de tasas de interés de los Bonos M.....	97
Tabla 3.26: Matriz 3 de Bonos M.....	98
Tabla 3.27: Matriz 4 de CETES.....	98
Tabla 3.28: Bono total (Bonos M).....	99
Tabla 3.29: Matriz W de Bonos M.....	99
Tabla 3.30: Matriz W transpuesta de Bonos M.....	99
Tabla 3.31: Matriz 5 de Bonos M.....	100
Tabla 3.32: Matriz 6 de Bonos M.....	100
Tabla 3.33: Volatilidad del portafolio de Bonos M.....	100
Tabla 3.34: Valor en Riesgo del portafolio de Bonos M.....	101
Tabla 3.35: Rentabilidad esperada del portafolio de Bonos M.....	102
Tabla 3.36: Resultados de Bonos M de junio y julio 2019.....	102

## Índice de gráficas

Gráfica 1.1: Representación del modelo de interés simple.....	15
Gráfica 1.2: Representación del modelo de interés compuesto.....	19
Gráfica 1.3: Representación del interés simple e interés compuesto.....	21
Gráfica 1.4: Representación de la fuerza de interés.....	27
Gráfica 1.5: Representación del interés simple, interés compuesto y fuerza de interés.....	28
Gráfica 2.1: Supuesto de normalidad 1.....	59
Gráfica 2.2: Duración Modificada de un bono con cupón.....	63
Gráfica 2.3: Convexidad de un bono con cupón.....	64
Gráfica 2.4: Distribución normal 2.....	66
Gráfica 3.1: Comportamiento del precio de los CETES a 28 días.....	71
Gráfica 3.2: Comportamiento del precio de los CETES a 91 días.....	71
Gráfica 3.3: Comportamiento del precio de los CETES a 182 días.....	71
Gráfica 3.4: Comportamiento de las tasas de interés de los CETES.....	72
Gráfica 3.5: Comportamiento de los rendimientos de las tasas de interés de los CETES...	73
Gráfica 3.6: Rentabilidad esperada mensual de los CETES.....	74
Gráfica 3.7: Comportamiento del precio de los CETES a 28 días ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento.....	75
Gráfica 3.8: Comportamiento del precio de los CETES a 28 días ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento.....	76
Gráfica 3.9: Comportamiento del precio de los CETES a 91 días ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento.....	76
Gráfica 3.10: Comportamiento del precio de los CETES a 91 días ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento.....	77

Gráfica 3.11: Comportamiento del precio de los CETES a 182 días ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento.....	77
Gráfica 3.12: Comportamiento del precio de los CETES a 182 días ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento.....	78
Gráfica 3.13: Comportamiento del precio de los Bonos M a 3 años.....	87
Gráfica 3.14: Comportamiento del precio de los Bonos M a 5 años.....	88
Gráfica 3.15: Comportamiento de las tasas de interés de los Bonos M.....	89
Gráfica 3.16: Comportamiento de los rendimientos de las tasas de interés de los Bonos M.....	90
Gráfica 3.17: Rentabilidad esperada mensual de los Bonos M.....	90
Gráfica 3.18: Comportamiento del precio de los Bonos M a 3 años ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento.....	92
Gráfica 3.19: Comportamiento del precio de los Bonos M a 3 años ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento.....	93
Gráfica 3.20: Comportamiento del precio de los Bonos M a 5 años ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento.....	93
Gráfica 3.21: Comportamiento del precio de los Bonos M a 5 años ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento.....	94

## Índice de imágenes

Imagen 1.1: Línea del tiempo del modelo de interés simple.....	15
Imagen 1.2: Línea del tiempo del modelo de interés compuesto.....	18
Imagen 1.3: Primer año de una tasa nominal.....	23
Imagen 1.4: Segundo año de una tasa nominal.....	24
Imagen 1.5: Tercer año de una tasa nominal.....	24
Imagen 1.6: Línea del tiempo de una anualidad vencida.....	29
Imagen 1.7: Valor Presente de una anualidad vencida.....	30
Imagen 1.8: Valor Futuro de una anualidad vencida.....	32
Imagen 1.9: Línea del tiempo de una anualidad anticipada.....	34
Imagen 1.10: Valor Presente de una anualidad anticipada.....	35
Imagen 1.11: Valor Futuro de una anualidad anticipada.....	37
Imagen 1.12: Línea de tiempo de una tasa forward.....	40
Imagen 1.13: Representación de la interpolación lineal.....	42
Imagen 2.1: Flujo de efectivo de un bono cupón cero.....	46
Imagen 2.2: Flujo de efectivo de un bono perpetuo.....	47
Imagen 2.3: Flujo de efectivo de un bono con cupón.....	48
Imagen 2.4: Pagos de un bono con cupón.....	60

## Índice de anexos

Anexo 2.1: Precio del CETE a partir de su tasa de descuento.....	108
Anexo 2.2: Obtención de la ecuación de la Duración de un bono cuponado.....	110
Anexo 2.3: Obtención de la ecuación de la Convexidad de un bono cuponado.....	112
Anexo 3.1: Información histórica de CETES (enero 2017-mayo 2019) .....	114
Anexo 3.2: Información histórica de Bonos M (enero 2017-mayo 2019) .....	115
Anexo 3.3: Resultados del cálculo del precio de los CETES.....	116
Anexo 3.4: Resultados del cálculo de la Duración y la Convexidad de los CETES.....	117
Anexo 3.5: Precio de los CETES a 28 días ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento.....	118
Anexo 3.6: Precio de los CETES a 91 días ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento.....	119
Anexo 3.7: Precio de los CETES a 182 días ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento.....	120
Anexo 3.8: Rendimientos de las tasas de interés de los CETES.....	121
Anexo 3.9: Metodología del Valor en Riesgo Delta-Normal.....	122
Anexo 3.10: Resultados del cálculo del precio de los Bonos M.....	123
Anexo 3.11: Resultados del cálculo de la Duración y la Convexidad de los Bonos M.....	124
Anexo 3.12: Precio de los Bonos M a 3 años ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento.....	125
Anexo 3.13: Precio de los Bonos M a 5 años ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento.....	126
Anexo 3.14: Rendimientos de las tasas de interés de los Bonos M.....	127
Ejercicios.....	128

## Introducción

En la actualidad, existe una infinidad de instrumentos que permiten a los inversionistas comprar o vender activos bajo ciertas condiciones, entre ellos se encuentran los que representan deuda. Esta puede ser por parte de un gobierno o empresa, y es utilizada principalmente para capitalizarse por medio de “bonos”.

Un “bono” es un instrumento de deuda que, además de ser objeto de estudio en esta investigación, representa un acuerdo en el que el emisor tiene que devolverle al inversor una cantidad prestada más intereses dentro de un plazo determinado en donde la única incertidumbre son los cambios en las tasas de interés.

Resulta imprescindible hacer los cálculos necesarios para conocer los posibles escenarios que podrían generarse ante cambios en la tasa de interés, ya que, incluso si el inversionista no desea conservar el bono hasta el final del plazo, cualquier cambio podría generar ganancias o pérdidas dependiendo si el bono se encuentra bajo par o sobre par.

Por la simplicidad del cálculo y la fácil interpretación de los resultados, el Valor en Riesgo (VaR, por sus siglas en inglés) se ha convertido en una medida comúnmente utilizada por diferentes instituciones con el fin de conocer la cantidad máxima de dinero que puede llegar a perderse al realizar una inversión, lo que lo ha hecho objeto de diversas investigaciones en las cuales se pretende encontrar el enfoque más apropiado para determinarlo. Sin embargo, la información que se tiene respecto a las metodologías para activos de renta fija es escasa, lo que representa un gran hueco en los estudios financieros. Desafortunadamente, los cálculos para estos activos siempre han sido muy marginados a pesar de la gran importancia que tienen, lo que hace que se obtenga muy poco provecho de la información que pueden proporcionar.

Debido a lo anterior, la presente investigación tiene como objetivo general perfilar a los bonos de renta fija como las opciones más atractivas y confiables para los inversionistas ante la incertidumbre que domina los mercados actualmente.

Además, tiene los siguientes objetivos específicos:

- Analizar el impacto de las tasas de interés en el valor que tiene el dinero a lo largo del tiempo.
- Comprender la función y la aplicación de los principales métodos de valuación de las tasas cuando éstas son desconocidas en periodos específicos.
- Conocer las características principales de los instrumentos más destacados del mercado de dinero en México.
- Mostrar la forma de valuación de activos de renta fija.
- Obtener el rendimiento, así como el Valor en Riesgo de portafolios de inversión compuestos por bonos.

Asimismo, el presente trabajo se centra en responder a la pregunta ¿Resulta viable invertir en portafolios diversificados con bonos de renta fija, de acuerdo a su rendimiento esperado y Valor en Riesgo?

La pregunta se plantea principalmente debido a que muchas personas tienen el deseo de invertir en el mercado, sin embargo, la mayoría de ellas no cuenta con herramientas suficientes que le permitan analizar y tomar decisiones sobre qué instrumentos elegir y qué porcentaje de su presupuesto asignar a cada uno de ellos. Otro factor importante a considerar son las condiciones actuales del mercado en México, pues la mayoría de los inversionistas no quiere correr riesgos grandes ni exponerse a los cambios drásticos que hay en él, pues es bien sabido que en momentos de incertidumbre o en periodos de recesión, las acciones pueden disminuir su valor rápidamente.

Regularmente, la aversión al riesgo aumenta cuando aumenta la edad del inversionista, ya que es más difícil el poder recuperarse de las posibles pérdidas al tener un menor periodo de tiempo productivo, o simplemente le es necesario contar con un flujo de ingresos predecible para poder cubrir sus gastos futuros. La renta fija suele tener variaciones mucho más pequeñas que la renta variable, además de que, si una empresa llegara a caer en quiebra, los tenedores de los bonos tendrían prioridad de pago frente a los accionistas después de la venta de los activos.

Ya sea para poder cumplir objetivos de rendimiento, contar con un flujo de ingresos predecible o simplemente con el fin de ahorrar, resulta necesario construir un portafolio en

el que se diversifique el monto de la inversión en cada bono y, lo más importante, conocer la cantidad máxima de dinero que está en riesgo al llevar a cabo la inversión en un horizonte de tiempo y nivel de confianza determinado.

Debido a lo anterior, se tiene la hipótesis que en el corto plazo el VaR del portafolio diversificado en bonos de renta fija es menor que la suma de cada VaR sin la diversificación de bonos, por lo que invertir en portafolios de bonos; resulta una decisión adecuada para el inversionista.

La presente tesis se divide en tres capítulos; en el capítulo uno se analiza el valor del dinero en el tiempo explicando conceptualmente diversas tasas de interés, así como las fórmulas correspondientes a su cálculo. Además, se analizan algunos tipos de anualidades y se desarrolla el Valor Presente y Futuro de cada una. Asimismo, se presentan los principales métodos para llevar a cabo la valuación de las tasas de interés cuando éstas son desconocidas en periodos específicos.

En el capítulo dos, se habla de cómo funciona el mercado de dinero en México dando a conocer los instrumentos más relevantes que se negocian en él, así como sus características principales. También se muestra la forma de valuación del precio del bono y de algunas medidas de sensibilidad de éste.

Posteriormente, en el capítulo tres, se construye un portafolio compuesto por CETES y otro por Bonos M. Además, se obtiene el rendimiento de cada uno, así como su Valor en Riesgo a los niveles de confianza de 95% y 99%. Finalmente, se muestran algunos ejemplos que ayudan a tener un mejor entendimiento de los temas antes mencionados.

A lo largo de la presente investigación se hace un esfuerzo por brindar una aportación a la medición de riesgos en activos de renta fija, contribuyendo así a cubrir parte del gran vacío que actualmente tienen los estudios financieros en cuanto a la conformación y medición de riesgos en portafolios de dichos activos.

Además, se pretende obtener de esta investigación una clase de guía para llevar a cabo una adecuada medición de riesgos y con ello resulte bastante sencillo y comprensible el proceso de toma de decisiones, asimismo, se aspira a que el trabajo brinde a los inversionistas la

posibilidad de convertir las dudas e incertidumbres en oportunidades y así evitar desastres financieros y graves consecuencias.

Sin embargo, es importante mencionar que la investigación tiene como principal limitación que el modelo asume el supuesto de normalidad en las series financieras, por lo que para futuros trabajos se recomienda romper dicho supuesto a través de la construcción de los portafolios de inversión mediante la metodología de Cópulas.

# Capítulo 1. Valor del dinero en el tiempo

“La tasa de interés es la valoración del costo que implica la posesión de dinero producto de un crédito” (Banxico, 2019).

Esto es, básicamente, el precio que tiene el dinero proveniente de un préstamo. Es decir, si un individuo o una institución requiere una cantidad de dinero y solicita un préstamo, el interés será el costo que tenga que pagar por el servicio que se le ha dado. Lo anterior se debe a que existe cierto nivel de riesgo de que el dinero prestado no sea devuelto.

Regularmente, cuanto más corto es el plazo al que se adquirió el préstamo, más bajo será el interés que habrá de pagarse, pues el riesgo que corre el inversionista (tanto de impago de la contraparte, como de necesitar su dinero para cualquier otra cosa) es más pequeño al riesgo que correría en caso de invertir a largo plazo.

En cualquier caso, es importante conocer la tasa de interés, ya que con ella es posible conocer el costo de algún crédito, pero también es posible calcular el nivel de rentabilidad que se tendría al momento de ahorrar o realizar alguna inversión.

En los siguientes apartados se muestran algunos tipos de interés con los que se fija el precio del dinero, detallando algunos modelos y sus aplicaciones.

## 1.1 Interés simple

Se habla de un interés simple cuando se calcula la cantidad de interés como un porcentaje únicamente del capital inicial. En este caso, el interés obtenido en cada periodo es siempre el mismo debido a que los intereses generados a lo largo de un periodo no se reinvierten.

De acuerdo con Banxico, es aquel interés que no se acumula al capital inicial y, por lo tanto, no es tratado como tal. Este interés es calculado mediante la multiplicación de dicho capital por la tasa de interés pactada, sin considerar el almacenamiento de los intereses ni reinversiones futuras.

La ecuación para calcular el interés simple sobre el capital inicial es:

$$I = k i t \tag{1.1}$$

Donde:

$I$  : Interés sobre el capital inicial.

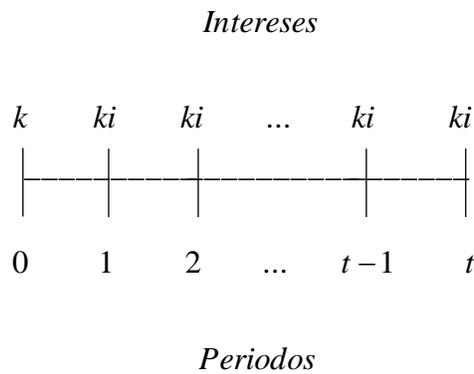
$k$  : Capital inicial.

$i$  : Tasa de interés.

$t$  : Tiempo del periodo de inversión.

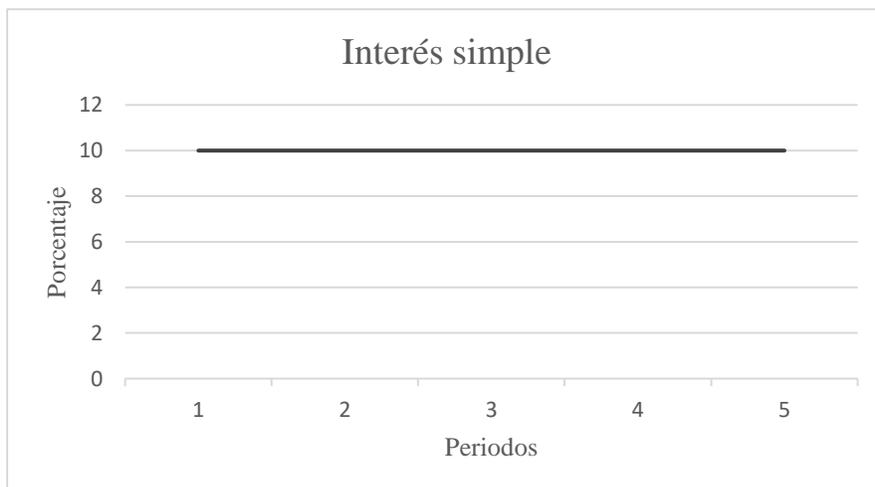
A continuación, se muestra una línea del tiempo, así como una representación gráfica del porcentaje que se conseguirá en cada periodo cuando el inversionista se encuentra bajo este tipo de interés:

**Imagen 1.1: Línea del tiempo del modelo de interés simple**



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 1.1: Representación del modelo de interés simple**



Fuente: Elaboración propia.

Con lo anterior puede observarse que con una tasa de interés simple siempre se consigue el mismo interés durante todo el tiempo que dura el préstamo. En el caso de la representación gráfica, se tomó como ejemplo una tasa del 10%.

Para visualizar un caso práctico de la aplicación del modelo, consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.1.

### 1.1.1 Valor Futuro del interés simple

El Valor Futuro indica el monto que ha de pagarse o recibirse al final del periodo, según sea el caso. Para calcularlo hay que partir de la ecuación del interés simple y sumar el capital inicial.

En la Tabla 1.1 se muestra el desarrollo de la ecuación para calcular el Valor Futuro para  $t$  periodos.

**Tabla 1.1: Valor Futuro del interés simple**

Periodo	Capital	Interés	Desarrollo	Monto
1	$k$	$k + ki$	$k + ki$ $k(1+i)$	$k(1+i)$
2	$k(1+i)$	$k(1+i) + ki$	$k(1+i) + ki$ $k + ki + ki$ $k + 2ki$ $k(1+2i)$	$k(1+2i)$
3	$k(1+2i)$	$k(1+2i) + ki$	$k(1+2i) + ki$ $k + 2ki + ki$ $k + 3ki$ $k(1+3i)$	$k(1+3i)$
· · ·	...	...	...	$k[1+(t-1)i]$
$t$	$k[1+(t-1)i]$	$k[1+(t-1)i] + ki$	$k[1+(t-1)i] + ki$ $k + [1+it-i] + ki$ $k + kit - ki + ki$ $k(1+it)$	$k(1+it)$

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente se obtiene la ecuación que calcula el monto que representa el Valor Futuro del capital inicial más la tasa de interés para  $t$  periodos:

$$M = k(1 + it) \quad (1.2)$$

Donde  $M$  representa dicho monto.

Consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.2, para visualizar un caso práctico de la aplicación de dicha ecuación.

### **1.1.2 Valor Presente del interés simple**

Al calcular el Valor Presente de una cantidad, se está calculando el capital que se necesita al día de hoy para llegar a una cantidad específica en el futuro, la cual ha de recibirse o pagarse en un periodo determinado.

Para obtener esta ecuación, basta con despejar el capital de la ecuación (1.2).

$$M = k(1 + it)$$
$$k = \frac{M}{(1 + it)} \quad (1.3)$$

Consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.3, para una comprensión de la aplicación de dicha ecuación.

## **1.2 Interés compuesto**

El interés compuesto consiste en calcular el interés periódicamente y convertirlo en principal. La noción que se debe tener del interés compuesto es que conforme pasan los periodos, el interés se convierte en principal. (Govinden, 2005).

A diferencia del interés simple en el que el capital genera un interés que permanece constante durante toda la duración del préstamo, el interés compuesto es llamado así porque los intereses que se generan en cada periodo se suman al capital inicial y son tratados como tal, es decir; a partir de esa suma, se forma un nuevo capital, el cual genera nuevos intereses en

cada uno de los periodos. Al resultado final de dichas sumas se le conoce como monto compuesto.

Entonces, este interés será la diferencia entre dicho monto y el capital inicial.

Expresado matemáticamente:

$$I = A - k \tag{1.4}$$

Donde:

$I$  : Interés compuesto.

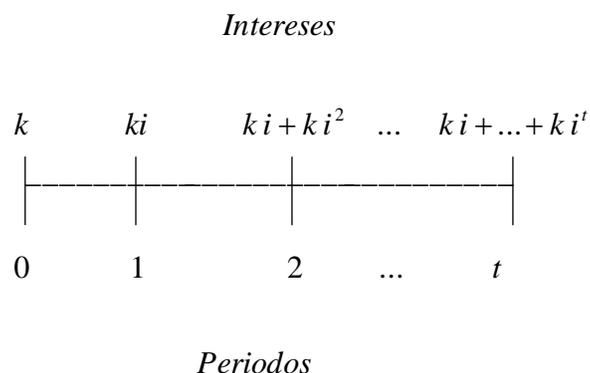
$A$  : Monto compuesto.

$k$  : Capital inicial.

Cabe mencionar que normalmente se utiliza una tasa efectiva, es decir; la tasa que calcula el interés en un único pago por periodo y que, debido al crecimiento del capital en cada uno de los periodos, el interés calculado sobre éste también crece.

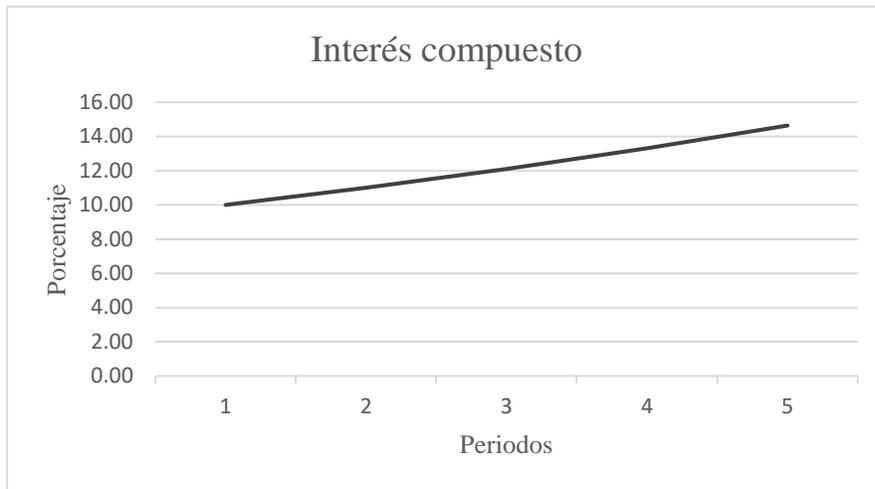
La línea del tiempo y la gráfica que se presentan a continuación, representan el porcentaje que se conseguirá en cada periodo cuando el agente se encuentra bajo un interés compuesto:

**Imagen 1.2: Línea del tiempo del modelo de interés compuesto**



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 1.2: Representación del modelo de interés compuesto**



Fuente: Elaboración propia.

Con la línea del tiempo y la gráfica anterior puede observarse que, bajo una tasa de interés compuesto, el interés generado es más grande en cada periodo, por lo que el inversionista obtiene ganancias más grandes. En el caso de la representación gráfica, nuevamente se tomó como ejemplo una tasa del 10%.

### **1.2.1 Valor Futuro del interés compuesto**

El Valor Futuro del interés compuesto, al igual que en el interés simple, indica el monto que ha de pagarse o recibirse al final del periodo, según sea el caso. Sin embargo, hay que tener presente que en el interés compuesto, la tasa se va capitalizando, es decir; agrega al capital inicial el interés que se ha producido en cada periodo.

La ecuación con la cual se calcula dicho monto para  $t$  periodos se desarrolla en la Tabla 1.2.

**Tabla 1.2: Valor Futuro del interés compuesto**

Periodo	Capital	Interés	Desarrollo	Monto
1	$k$	$k + ki$	$k + ki$ $k(1+i)$	$k(1+i)$
2	$k(1+i)$	$k(1+i) + k(1+i)i$	$k(1+i) + k(1+i)i$ $k + ki + ki + ki^2$ $k(1+2i+i^2)$ $k(1+i)(1+i)$ $k(1+i)^2$	$k(1+i)^2$
3	$k(1+i)^2$	$k(1+i)^2 + k(1+i)^2 i$	$k(1+i)^2 + k(1+i)^2 i$ $k + 2ki + ki^2 + ki + 2ki^2 + ki^3$ $k(1+3i+3i^2+i^3)$ $k(1+i)^2(1+i)$ $k(1+i)^3$	$k(1+i)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮	$k(1+i)^{t-1}$
$t$	$k(1+i)^{t-1}$	$k(1+i)^{t-1} + k(1+i)^{t-1}i$	$k(1+i)^{t-1} + k(1+i)^{t-1}i$ $k(1+i)^{t-1}(1+i)$ $k(1+i)^t$	$k(1+i)^t$

Fuente: Elaboración propia.

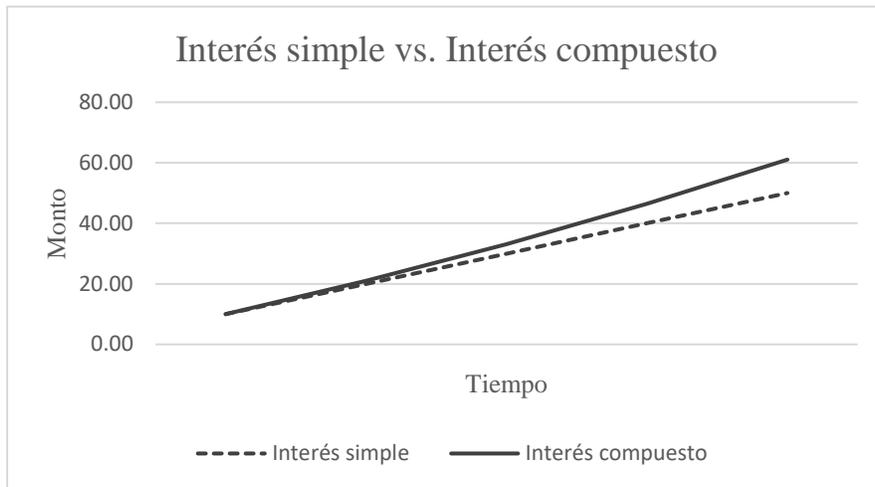
Puede observarse que la ecuación para calcular el interés compuesto del primer periodo es igual a la del mismo periodo bajo interés simple.

$$M = k(1+i)$$

Sin embargo, después del primer periodo, el interés generado por el interés compuesto es cada vez más grande que el generado por el interés simple, por lo que el monto futuro también será mayor.

A continuación, se muestra una gráfica de la comparación de la evolución de los montos obtenidos por medio de los dos tipos de intereses mencionados anteriormente.

**Gráfica 1.3: Representación del interés simple e interés compuesto**



Fuente: Elaboración propia.

Con la gráfica anterior puede observarse lo explicado anteriormente; en el primer periodo se obtiene el mismo monto para ambos tipos de interés. A partir de ahí, el monto generado por el compuesto será mayor que el generado por el simple.

De acuerdo con lo obtenido en la Tabla 1.2, la ecuación de monto para el periodo  $t$  bajo un interés compuesto es la siguiente:

$$M = k(1+i)^t \quad (1.5)$$

Donde:

$M$  : Monto.

$k$  : Capital inicial.

$i$  : Tasa de interés.

$t$  : Tiempo del periodo de inversión.

Para visualizar un caso práctico en el que se aplique la ecuación anterior, consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.4.

### **1.2.2 Valor Presente del interés compuesto**

El Valor Presente del interés, independientemente de si es simple o compuesto, indica el capital que se necesita al día de hoy para llegar a una cantidad específica llamada monto, la cual ha de recibirse o pagarse en un periodo determinado.

Para calcular el Valor Presente de una cantidad con tasa de interés compuesto, es necesario despejar el capital de la ecuación (1.5).

$$\begin{aligned}M &= k(1+i)^t \\k &= \frac{M}{(1+i)^t}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.5, para visualizar una aplicación de la ecuación anterior.

### **1.3 Interés compuesto con tasa nominal**

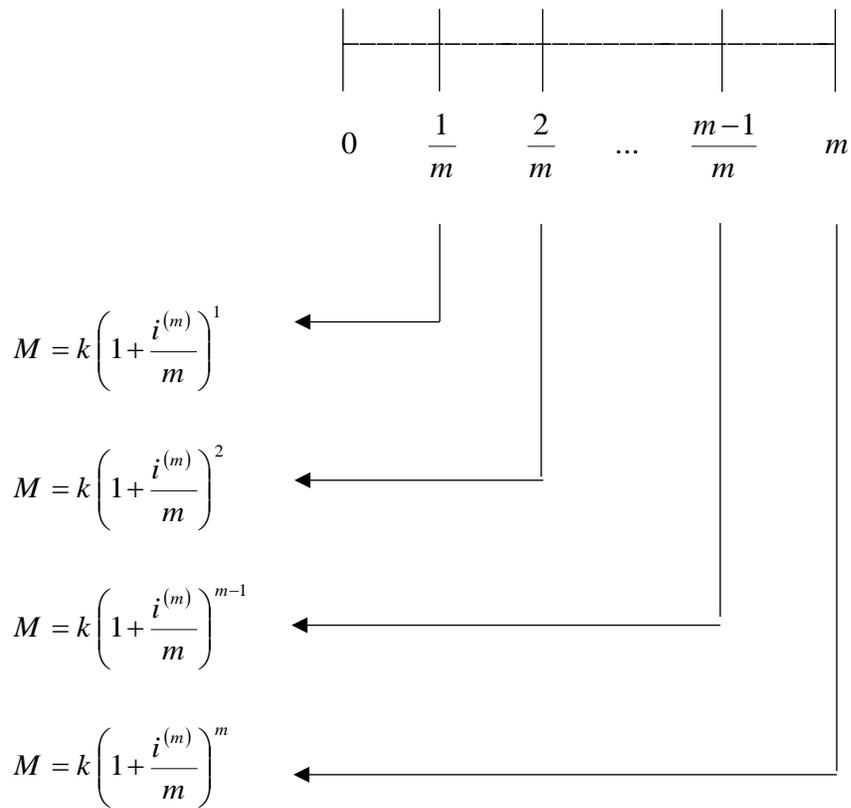
Se conoce como tasa nominal al interés que se capitaliza más de una vez al año, es decir; a un capital se le agrega más de una vez el interés que se ha producido, denotando así un crecimiento en el monto de dinero. Aunque los diversos tipos de tasas se pactan para un cierto periodo de tiempo, una tasa nominal (a diferencia de una tasa efectiva que calcula el interés en un único pago por periodo) contempla varios pagos de intereses en dicho periodo.

#### **1.3.1 Valor Futuro del interés compuesto con tasa nominal**

Para obtener la ecuación de este monto, se parte de las siguientes líneas del tiempo en las cuales se considera que la tasa de interés se capitaliza más de una vez al año:

**Imagen 1.3: Primer año de una tasa nominal**

*Periodos*



Fuente: Elaboración propia.

Donde:

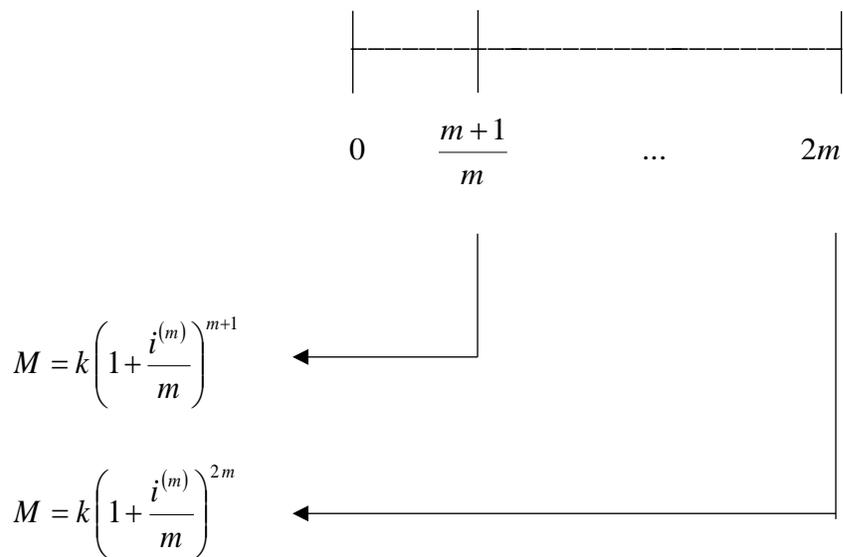
$m$  : Frecuencia de capitalización.

$i^{(m)}$  : Tasa nominal capitalizable.

$i = \frac{i^{(m)}}{m}$  : Tasa efectiva por periodo.

**Imagen 1.4: Segundo año de una tasa nominal**

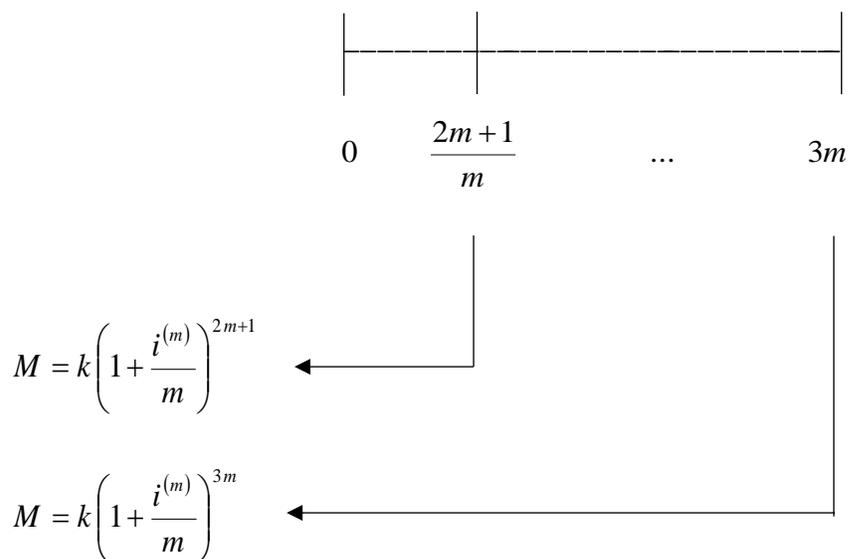
*Periodos*



Fuente: Elaboración propia.

**Imagen 1.5: Tercer año de una tasa nominal**

*Periodos*



Fuente: Elaboración propia.

Debido a lo anterior, se concluye que la ecuación del Valor Futuro del interés compuesto con tasa nominal es la siguiente:

$$M = k \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^{mt} \quad (1.7)$$

### 1.3.2 Valor Presente del interés compuesto con tasa nominal

Al igual que en los cálculos anteriores del Valor Presente, para obtener la ecuación de este valor con tasa nominal únicamente es necesario despejar el capital de la ecuación (1.7).

$$M = k \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^{mt}$$

$$k = \frac{M}{\left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^{mt}} \quad (1.8)$$

## 1.4 Fuerza de interés

La diferencia entre una tasa efectiva y una tasa nominal es que la tasa efectiva calcula el interés en un único pago por periodo, es decir; es cobrada únicamente por periodo estipulado, mientras que la tasa nominal contempla varios pagos de intereses dentro de dicho periodo.

La relación existente entre ambas tasas es la siguiente:

$$(1 + i) = \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m$$

Donde:

$i$  : Tasa efectiva anual.

$i^{(m)}$  : Tasa nominal convertible “ $m$ ” veces al año.

Sin embargo, cuando el valor de  $m$  es muy grande, significa que se tiene una tasa nominal capitalizable de manera continua. A esto se le conoce como *fuerza de interés* o *tasa instantánea*. Calcularla sirve para medir la intensidad con la que el interés opera en cada momento del tiempo.

### 1.4.1 Valor Futuro de la fuerza de interés

Al calcular el Valor Futuro, se espera obtener el monto que ha de pagarse o recibirse en un año cuando se han capitalizando nuevos intereses a lo largo de ese año. Para obtener la ecuación con la cual se calcula, es necesario obtener el límite de la ecuación (1.7) cuando  $m \rightarrow \infty$ .

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} M = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ k \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^{mt} \right] = k \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^{mt}$$

Recordando que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\Rightarrow k \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^{mt} = k e^{i^{(\infty)}t}$$

Haciendo  $i^{(\infty)} = \delta$ , se obtiene la ecuación del Valor Futuro del modelo de fuerza de interés:

$$M = k e^{\delta t} \tag{1.9}$$

Donde:

$M$  : Monto.

$k$  : Capital inicial.

$\delta$  : Tasa de interés continuamente capitalizable.

$t$  : Tiempo.

Con base en la ecuación anterior, puede decirse que cuando la capitalización es más frecuente, el monto es más grande.

### 1.4.2 Valor Presente de la fuerza de interés

Para el caso del Valor Presente, el cual indica el capital que se necesita al día de hoy para llegar a una cantidad específica en el futuro (monto), únicamente se despeja el capital de la ecuación (1.9), es decir:

$$M = k e^{\delta t}$$

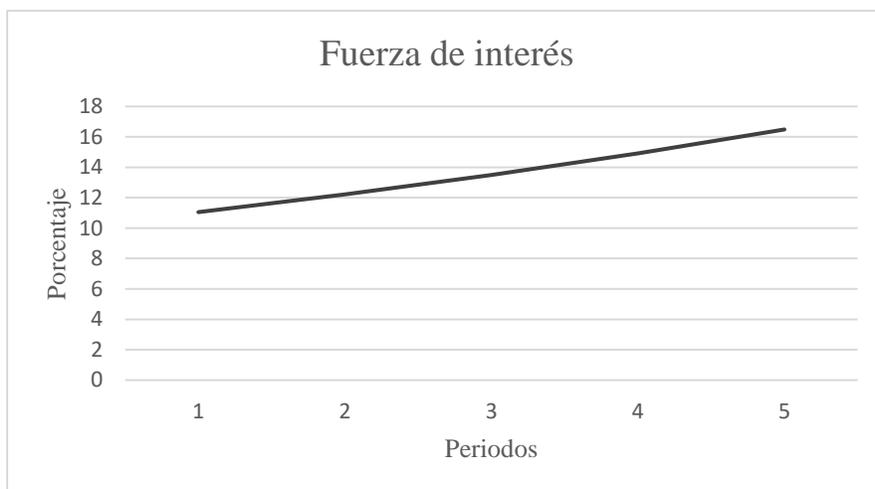
$$k = \frac{M}{e^{\delta t}}$$

$$k = M e^{-\delta t} \quad (1.10)$$

La Gráfica 1.4, muestra una representación del porcentaje que se conseguirá en cada periodo bajo el modelo de fuerza de interés.

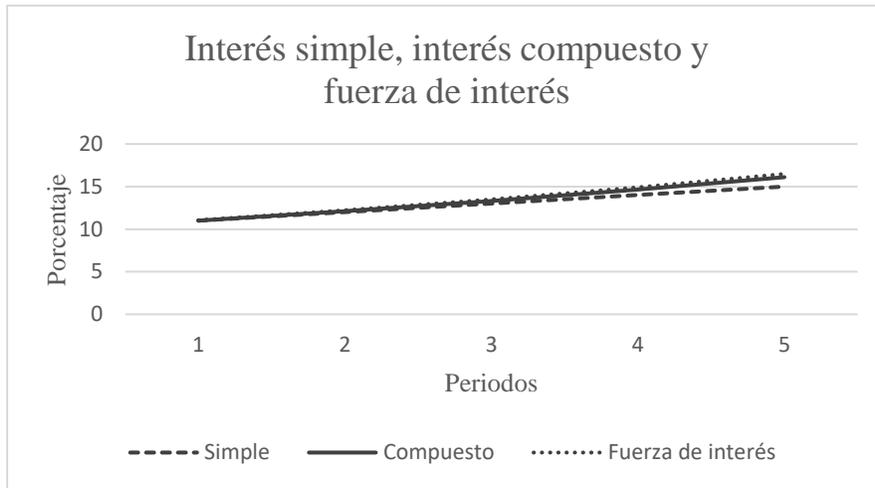
Posteriormente, la Gráfica 1.5, muestra la comparación de la evolución de los montos obtenidos por medio de los tres modelos de interés descritos anteriormente.

**Gráfica 1.4: Representación de la fuerza de interés**



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 1.5: Representación del interés simple, interés compuesto y fuerza de interés**



Fuente: Elaboración propia.

Con lo anterior puede observarse que el modelo de fuerza de interés crece más rápido que los modelos de interés simple e interés compuesto; es decir, entre más grande sea el periodo, mayor será el crecimiento del modelo de fuerza de interés respecto a los otros dos modelos.

La Tabla 1.3 muestra el resumen de los valores obtenidos para las tasas vistas en el interés compuesto.

**Tabla 1.3: Resumen de tasas de interés compuesto**

Tasa	Valor Futuro (Monto)	Valor Presente (Capital)
Efectiva	$k(1+i)^t$	$\frac{M}{(1+i)^t}$
Nominal	$k\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$	$\frac{M}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}}$
Instantánea	$k e^{\delta t}$	$M e^{-\delta t}$

Fuente: Elaboración propia.

## 1.5 Anualidades

Una anualidad es una serie de pagos de un mismo monto, los cuales son realizados en periodos iguales de tiempo durante un plazo determinado. (Vidaurri, 2012).

En otras palabras, una anualidad es una especie de acuerdo entre dos personas o instituciones en el que una de las partes se compromete a realizar una serie de pagos periódicos durante un tiempo determinado.

Los diferentes modelos de anualidades forman parte de las aplicaciones más importantes de las matemáticas financieras, pues la mayoría de las operaciones de crédito se pactan estableciendo uno de esos modelos en los cuales los pagos no son estrictamente anuales, sino pueden ser semanales, quincenales, mensuales, etc. A ese intervalo de tiempo entre cada pago se le llama periodo y al tiempo durante el cual se llevan a cabo los pagos se le conoce como plazo o vigencia.

### Tipos de anualidades

Entre los tipos de anualidades comunes se encuentran las siguientes:

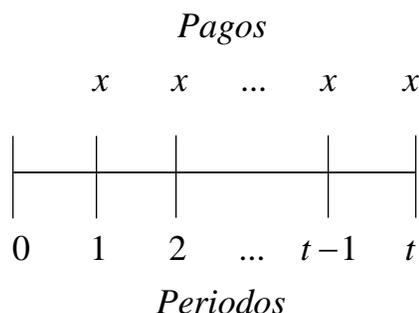
- Ciertas u ordinarias. En estas los pagos se realizan de forma segura. Se dividen en:
  - a. Vencidas
  - b. Anticipadas
  - c. Perpetuas

#### 1.5.1 Anualidad vencida

Una anualidad vencida es aquella en la que los pagos se hacen al final de cada periodo, tal es el caso del pago de una tarjeta de crédito, ya que primero transcurre el tiempo y luego se realiza el pago.

A continuación, se muestra la línea de tiempo de una anualidad vencida.

**Imagen 1.6: Línea del tiempo de una anualidad vencida**



Fuente: Elaboración propia.

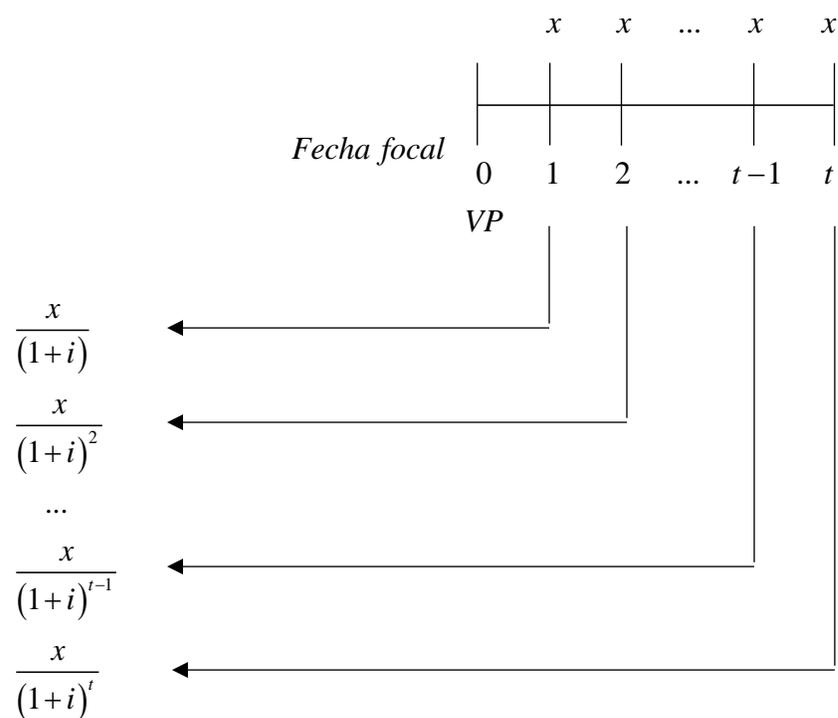
El número cero indica el tiempo presente o el inicio del plazo de la anualidad, los números restantes (1, 2, ..., t) indican el final de cada periodo en los que habrá un flujo de dinero. Por último, las  $x$  representan la cantidad que debe cubrirse como pago de la anualidad.

Cabe mencionar que el interés generado por una anualidad es interés compuesto. A la suma de éste con los pagos realizados en cada periodo se le conoce como “monto de la anualidad”.

### 1.5.1.1 Valor Presente de una anualidad vencida

El conjunto de pagos periódicos puede llevarse hacia el momento cero de la anualidad, es decir, el Valor Presente. La ecuación con la cual se calcula este valor se obtiene tomando como fecha focal el inicio del plazo. Dicha fecha representa el punto temporal donde convergen todos los pagos.

**Imagen 1.7: Valor Presente de una anualidad vencida**



Fuente: Elaboración propia.

Cada pago  $x$  se descuenta durante el periodo respectivo, es decir, el primer pago se descuenta durante un periodo, el segundo durante dos periodos y así sucesivamente.

La ecuación del Valor Presente de la anualidad es igual a la suma del Valor Presente de cada pago descontado, quedando expresado de la siguiente manera:

$$VP = \frac{x}{(1+i)} + \frac{x}{(1+i)^2} + \dots + \frac{x}{(1+i)^{t-1}} + \frac{x}{(1+i)^t}$$

$$VP = x(1+i)^{-1} + x(1+i)^{-2} + \dots + x(1+i)^{-(t-1)} + x(1+i)^{-t}$$

Factorizando x:

$$VP = x \left[ (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(t-1)} + (1+i)^{-t} \right]$$

La suma que se encuentra dentro del corchete constituye una sucesión geométrica decreciente, cuya fórmula general es:

$$S_t = \frac{a_1(1-r^t)}{1-r}$$

Donde:

$$a_1 = (1+i)^{-1}$$

$$r = (1+i)^{-1}$$

Sustituyendo  $a_1$  y  $r$  en  $S_t$ :

$$S_t = \frac{(1+i)^{-1} \left[ 1 - \left( (1+i)^{-1} \right)^t \right]}{1 - (1+i)^{-1}}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^{-1} \left[ 1 - (1+i)^{-t} \right]}{1 - \frac{1}{(1+i)}}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^{-1} \left[ 1 - (1+i)^{-t} \right]}{\frac{(1+i) - 1}{(1+i)}}$$

$$S_t = \frac{(1+i)(1+i)^{-1} \left[ 1 - (1+i)^{-t} \right]}{(1+i) - 1}$$

$$S_t = \frac{1 - (1+i)^{-t}}{1+i-1}$$

$$S_t = \frac{1 - (1+i)^{-t}}{i}$$

Entonces, al reemplazar la suma de la sucesión geométrica en la ecuación del Valor Presente de la anualidad vencida, se tiene que:

$$VP = x \left[ \frac{1 - (1+i)^{-t}}{i} \right] \quad (1.11)$$

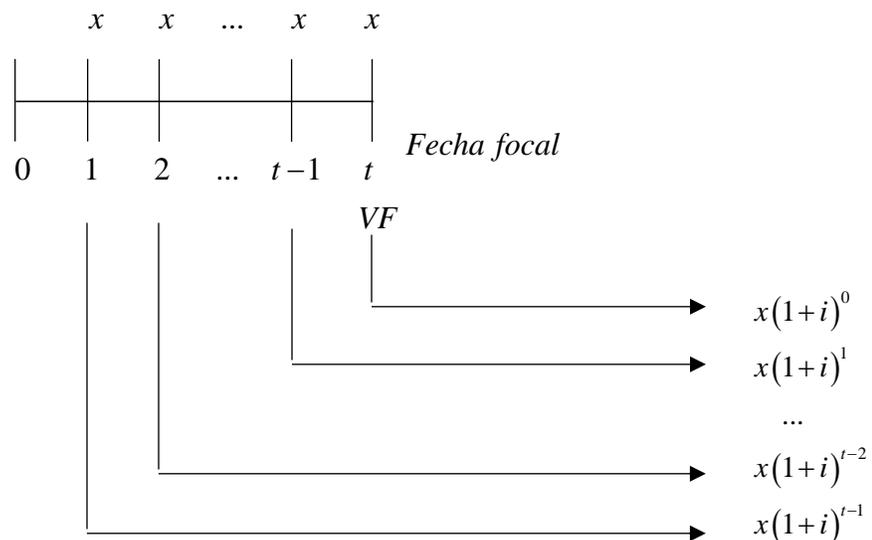
Donde la letra  $i$  representa la tasa de interés compuesta por periodo.

Consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.6, para visualizar un caso práctico de la aplicación de dicha ecuación.

### 1.5.1.2 Valor Futuro de una anualidad vencida

El Valor Futuro de una anualidad es el resultado de llevar el conjunto de pagos hasta el final del último periodo. La ecuación con la cual se calcula este valor se obtiene tomando como fecha focal el final del plazo.

**Imagen 1.8: Valor Futuro de una anualidad vencida**



Fuente: Elaboración propia.

Cada pago  $x$  se capitaliza durante  $t$  periodos, es decir, el primer pago se capitaliza durante  $t-1$ , el segundo durante  $t-2$  y así sucesivamente.

La ecuación del Valor Futuro de la anualidad es igual a la suma del Valor Futuro de cada pago, quedando expresado de la siguiente manera:

$$VF = x(1+i)^{t-1} + x(1+i)^{t-2} + \dots + x(1+i)^1 + x(1+i)^0$$

Factorizando  $x$ :

$$VF = x \left[ (1+i)^0 + (1+i)^1 + \dots + (1+i)^{t-2} + (1+i)^{t-1} \right]$$

$$VF = x \left[ 1 + (1+i)^1 + \dots + (1+i)^{t-2} + (1+i)^{t-1} \right]$$

La suma que se encuentra dentro del corchete constituye una sucesión geométrica creciente, cuya fórmula general es:

$$S_t = \frac{a_1(r^t - 1)}{r - 1}$$

Donde:

$$a_1 = 1$$

$$r = (1+i)$$

Sustituyendo  $a_1$  y  $r$  en  $S_t$ :

$$S_t = \frac{1 \left[ (1+i)^t - 1 \right]}{(1+i) - 1}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^t - 1}{1+i - 1}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Entonces, reemplazando la suma de la sucesión geométrica en la ecuación del Valor Futuro de la anualidad vencida, se tiene que:

$$VF = x \left[ \frac{(1+i)^t - 1}{i} \right] \quad (1.12)$$

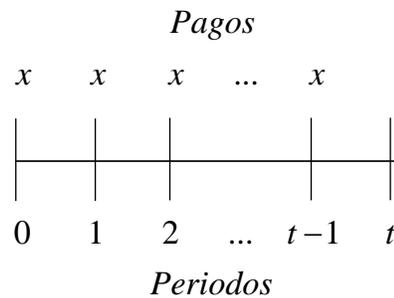
Para visualizar un caso práctico en el que se aplique la ecuación anterior, consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.7.

### 1.5.2 Anualidad anticipada

A diferencia de las anualidades vencidas, las anualidades anticipadas tienen la característica de que los pagos se hacen al inicio de cada periodo. Tal es el caso de las rentas de departamentos, en las que primero se realiza el pago y después pueden habitarse.

A continuación, se presenta la línea de tiempo de una anualidad anticipada:

**Imagen 1.9: Línea del tiempo de una anualidad anticipada**



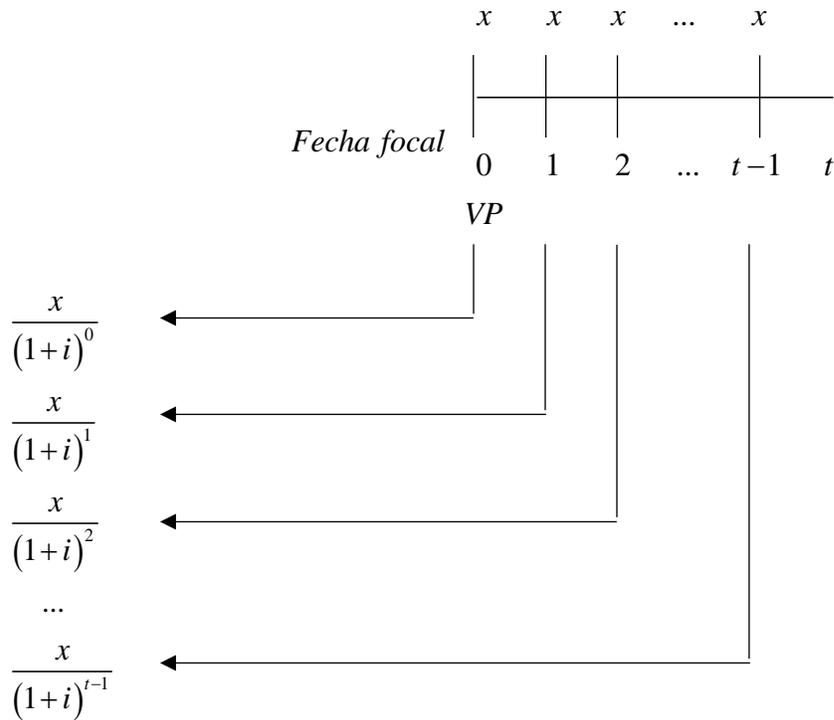
Fuente: Elaboración propia.

El número cero indica el tiempo presente o el inicio del plazo de la anualidad, que es donde deberá realizarse el primer pago. En los periodos que van del 1 hasta  $t - 1$  deberá pagarse la cantidad pactada para cubrir el periodo que le sucede. Las  $x$  representan esa cantidad.

#### 1.5.2.1 Valor Presente de una anualidad anticipada

A continuación, se muestra una línea de tiempo con la cual se deduce la ecuación para calcular el Valor Presente de una anualidad anticipada. Para esto, se toma como fecha focal el inicio del plazo:

**Imagen 1.10: Valor Presente de una anualidad anticipada**



Fuente: Elaboración propia.

Donde las  $x$  representan la cantidad establecida que deberá cubrirse en cada periodo, mientras que la  $i$  representa la tasa de interés.

Entonces:

$$VP = \frac{x}{(1+i)^0} + \frac{x}{(1+i)^1} + \frac{x}{(1+i)^2} + \dots + \frac{x}{(1+i)^{t-1}}$$

$$VP = x(1+i)^0 + x(1+i)^{-1} + x(1+i)^{-2} + \dots + x(1+i)^{-(t-1)}$$

Factorizando x:

$$VP = x \left[ 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(t-1)} \right]$$

La suma que se encuentra dentro del corchete constituye, nuevamente, una sucesión geométrica creciente. Pero, para este caso:

$$a_1 = (1+i)^{-(t-1)}$$

$$r = (1+i)$$

Sustituyendo  $a_1$  y  $r$  en la ecuación vista anteriormente para el cálculo de  $S_t$ , se tiene que:

$$S_t = \frac{a_1(r^t - 1)}{r - 1}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^{-(t-1)} [(1+i)^t - 1]}{(1+i) - 1}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^{-(t-1)+t} - (1+i)^{-(t-1)}}{(1+i) - 1}$$

$$S_t = \frac{1+i - (1+i)^{-(t-1)}}{i}$$

$$S_t = 1 + \frac{1 - (1+i)^{-(t-1)}}{i}$$

Al reemplazar la suma de la sucesión geométrica anterior en la ecuación del Valor Presente de la anualidad anticipada, se tiene que:

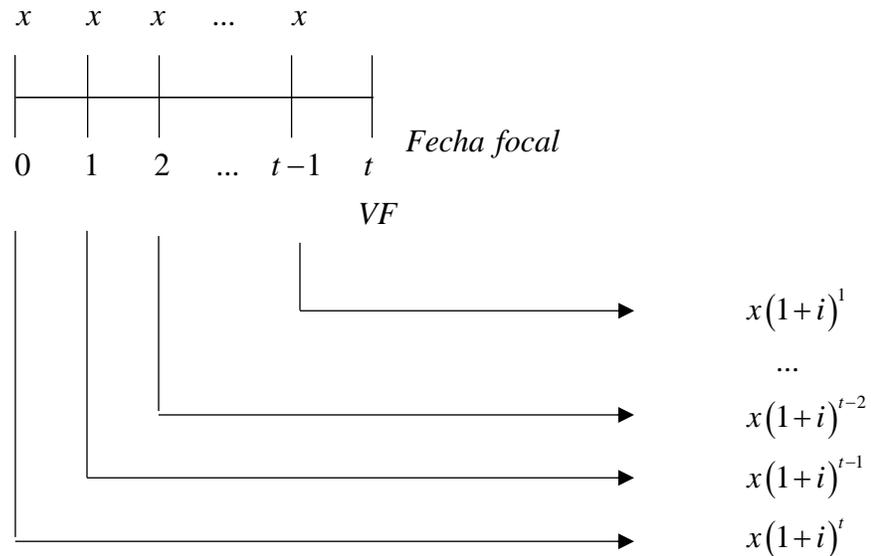
$$VP = x \left[ 1 + \frac{1 - (1+i)^{-(t-1)}}{i} \right] \quad (1.13)$$

Consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.8, para visualizar un caso práctico de la aplicación de la ecuación anterior.

### 1.5.2.2 Valor Futuro de una anualidad anticipada

La ecuación de este valor, como los anteriores, se deduce a partir de una línea de tiempo en la que el final del plazo se toma como fecha focal:

**Imagen 1.11: Valor Futuro de una anualidad anticipada**



Fuente: Elaboración propia.

Cada pago  $x$  generará intereses durante  $t$  números de periodos, es decir, el primero generará durante  $t$  periodos, el segundo durante  $t-1$  y así sucesivamente.

El Valor Futuro de esta anualidad se expresa de una manera similar que en una vencida, pues también es igual a la suma del Valor Futuro de cada pago.

$$VF = x(1+i)^t + x(1+i)^{t-1} + x(1+i)^{t-2} + \dots + x(1+i)^1$$

Entonces, factorizando  $x$ :

$$VF = x \left[ (1+i)^t + (1+i)^{t-1} + (1+i)^{t-2} + \dots + (1+i)^1 \right]$$

Una vez más, la suma que se encuentra dentro del corchete corresponde a una sucesión geométrica creciente donde:

$$a_1 = (1+i)$$

$$r = (1+i)$$

Sustituyendo  $a_1$  y  $r$  en la ecuación de  $S_t$ :

$$S_t = \frac{a_1(r^t - 1)}{r - 1}$$

$$S_t = \frac{(1+i)[(1+i)^t - 1]}{(1+i) - 1}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^{t+1} - (1+i)}{(1+i) - 1}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^{t+1} - 1 - i}{i}$$

$$S_t = \frac{(1+i)^{t+1} - 1}{i} - 1$$

Reemplazando la suma de la sucesión geométrica anterior en la ecuación del Valor Futuro de la anualidad anticipada, se tiene que:

$$VF = x \left[ \frac{(1+i)^{t+1} - 1}{i} - 1 \right] \quad (1.14)$$

Para visualizar un caso práctico de la aplicación de la ecuación anterior, consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.9.

## 1.6 Tasa Spot

Una tasa Spot, o cupón cero, a  $T$  años puede definirse como la tasa de interés con la cual se efectúa una inversión para un periodo de tiempo que inicia hoy ( $t$ ).

Esta tasa es la especificada en un contrato spot, el cual indica el dinero que será prestado de un inversionista a otro de forma inmediata.

El nombre de “tasa cupón cero” se refiere a que es la tasa que debería pagarse por un bono cupón cero para un plazo  $T$ ; es decir, la tasa que se toma desde hoy ( $t$ ) hasta el vencimiento del bono ( $T$ ).

En general, la tasa spot  $S_t$  del año  $t$  es la solución a la ecuación:

$$P_t = \frac{M_t}{(1 + S_t)^t}$$

Donde:

$P_t$  : Precio actual del bono.

$M_t$  : Valor al vencimiento.

$t$  : Años.

$S_t$  : Tasa Spot.

Sin embargo, cuando el plazo es mayor a un año, la tasa spot se calcula con la siguiente ecuación:

$$P_2 = \frac{C_1}{(1 + S_1)^1} + \frac{M_2}{(1 + S_2)^2}$$

En donde  $C_1$  es un cupón con una tasa  $S_1$ , y  $S_2$  es desconocida.

Para visualizar un caso práctico de tasa Spot, consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.10.

## 1.7 Tasa Forward

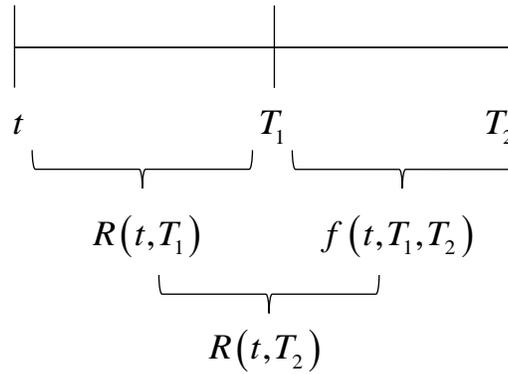
La idea de tasas Forward surge a partir de la estructura de plazos existente entre dos tasas spot con diferentes temporalidades ( $T_1$  y  $T_2$  años, con  $T_2 > T_1$ ).

La tasa Forward es la tasa de interés que está implícita entre las tasas Spot actuales para periodos futuros de tiempo. (Osorio, 2015).

Por lo que, en una curva de tasas (formada por la relación entre el plazo y la tasa correspondiente), las tasas Forward muestran las expectativas de los inversionistas sobre el comportamiento que tendrán las tasas de interés en el futuro.

La ecuación con la cual se calcula la tasa Forward surge a partir de una línea de tiempo:

**Imagen 1.12: Línea de tiempo de una tasa Forward**



Fuente: Elaboración propia.

$$\Rightarrow 1 + R(t, T_2)(T_2 - t) = [1 + R(t, T_1)(T_1 - t)][1 + f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)]$$

$$\Rightarrow \frac{1 + R(t, T_2)(T_2 - t)}{1 + R(t, T_1)(T_1 - t)} = 1 + f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + R(t, T_2)(T_2 - t)}{1 + R(t, T_1)(T_1 - t)} - 1 = f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{1 + R(t, T_2)(T_2 - t)}{1 + R(t, T_1)(T_1 - t)} - 1 \right] \left( \frac{1}{T_2 - T_1} \right) = f(t, T_1, T_2)$$

Reacomodando los términos, la ecuación para el cálculo de las tasas Forward es:

$$f(t, T_1, T_2) = \left[ \frac{1 + R(t, T_2)(T_2 - t)}{1 + R(t, T_1)(T_1 - t)} - 1 \right] \left( \frac{1}{T_2 - T_1} \right) \quad (1.15)$$

Donde:

$f(t, T_1, T_2)$ : Tasa Forward.

$R(t, T_2)$ : Tasa de rendimiento de  $T_2$ .

$T_2 - t$ : Plazo de  $T_2$  sobre 360.

$R(t, T_1)$ : Tasa de rendimiento de  $T_1$ .

$T_1 - t$ : Plazo de  $T_1$  sobre 360.

$T_2 - T_1$ : Diferencia de los plazos.

Es conveniente realizar el cálculo anterior cuando se invierte en mercados de renta fija, pues sirve para conocer la tasa de interés para periodos de tiempo en el futuro. Por ejemplo, si se tiene una tasa de interés para un plazo de tres años, aplicando la ecuación (1.15) se podría conocer la tasa para el próximo año, es decir, un periodo.

Es de suma importancia conocer las tasas para todos los periodos posibles, ya que con ellas se lleva a cabo la valuación de los activos.

Para visualizar un caso práctico de tasa Forward aplicando dicha ecuación anterior, consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.11.

## 1.8 Interpolación lineal

La interpolación lineal es un método que utiliza líneas rectas para obtener nuevos puntos a partir de un conjunto que se desea graficar. Básicamente, es usado cuando se desea conectar dos puntos dados en  $x_i$ , es decir;  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ , cuya función interpolante es una línea recta entre ambos.

Para cualquier punto que se encuentre entre los dos valores de  $x_0$  y  $x_1$ , debe seguirse la ecuación de la línea:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Despejando  $y$  se tiene que:

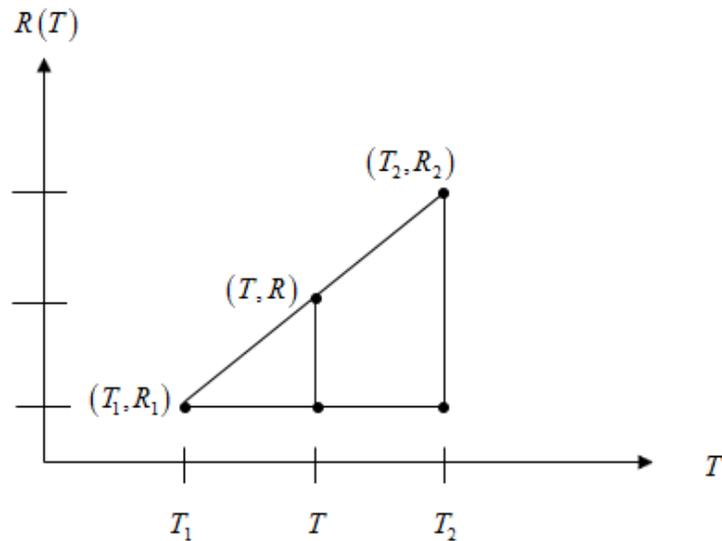
$$\frac{y - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$y - x_0 = \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) (y_1 - y_0)$$

$$y = \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) (y_1 - y_0) + x_0$$

Debido a esto, puede calcularse el valor de  $R$  (tasa de interés) asociado a cualquier plazo  $T$  donde  $T_1 < T < T_2$ .

**Imagen 1.13: Representación de la interpolación lineal**



Fuente: Elaboración propia.

$$\Rightarrow \frac{R - R_1}{T - T_1} = \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1}$$

$$\Rightarrow R - R_1 = \left( \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1} \right) (T - T_1)$$

Entonces, la ecuación para calcular las tasas de interés por medio de una interpolación lineal es:

$$R = \left( \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1} \right) (T - T_1) + R_1 \quad (1.16)$$

Lo anterior se ocupa para determinar el valor de las tasas de interés correspondientes a plazos diferentes que los de otras tasas conocidas.

Para visualizar un caso práctico de interpolación lineal aplicando la ecuación anterior, consulte el apartado de anexos, ejemplo 1.12.

Durante este capítulo se desarrollaron diversas herramientas y conceptos que son base para sustentar los siguientes capítulos del presente trabajo. Inicialmente, se explicaron diversos modelos de tasas de interés para analizar el efecto que éstos tienen en el valor del dinero después de cierto tiempo. Posteriormente, se analizaron algunos tipos de anualidades desarrollando el Valor Presente y Futuro de cada una y dando a conocer sus funciones principales. Finalmente, se presentaron los principales métodos de valuación de tasas cuando éstas son desconocidas en periodos específicos a lo largo del plazo.

En el capítulo siguiente, se analizará el funcionamiento del mercado de dinero en México con la intención de dar a conocer los instrumentos más destacados que se negocian en él y cómo es que funcionan cada uno de ellos.

## Capítulo 2. Mercado de dinero

También conocido como mercado monetario o mercado de deuda, en el mercado de dinero se negocia precisamente eso; el dinero, mediante una serie de títulos que representan deudas por parte del gobierno o de alguna empresa privada. Algunos de esos títulos son los bonos, certificados, pagarés, entre otros, cuya principal característica es el nivel de seguridad que se tiene al momento de recuperar la cantidad que ha sido invertida en ellos, además de que cada uno cuenta con diversos plazos.

Otras características de esos instrumentos que resultan esenciales son:

- a) Fecha de vencimiento. Es la fecha en la que el emisor debe pagar al tenedor del instrumento el valor del principal, así como realizar el último pago del interés acordado inicialmente.
- b) Principal. Es la cantidad que recibirá el tenedor en la fecha de vencimiento. También es conocido como Valor Nominal y, por lo general, esta cantidad es de \$1,000 o algún múltiplo.
- c) Tasa de interés. Es el rédito causado por una operación.

El fin de este mercado es, básicamente, reunir a los inversionistas que desean poner a trabajar su capital con los que necesitan ese dinero para financiar sus proyectos. La negociación entre ambas partes se lleva a cabo por medio de activos de renta fija y renta variable.

En la renta variable, cuando los inversionistas adquieren los títulos (que en este caso son acciones), se convierten en parte de la empresa que los emite y sus rendimientos dependen de las ganancias o pérdidas que ésta tenga. También existen bonos de tasa variable, mejor conocidos como bonos con cupón flotante. Algunos de ellos son los BONDES, BREM, BPA y UDIBONOS (todos gubernamentales).

En cuanto a la renta fija, el inversionista conoce el flujo de dinero que recibirá durante cierto plazo. Esa cantidad se fija desde el inicio y es respetada hasta el vencimiento, independientemente de cómo se encuentre la situación económica del emisor.

Una inversión en renta fija suele ser considerada mejor que una inversión en renta variable debido a los pagos constantes de intereses que recibe el tenedor del instrumento.

En los siguientes apartados se muestran los diversos tipos de bonos, tanto del tipo del bono cupón cero como cuponados; su valuación, sus medidas de sensibilidad y su Valor en Riesgo.

## **2.1 Bonos en México**

De acuerdo con Banxico, dicho mercado comenzó a operar en México en 1978 cuando el Gobierno Federal puso en circulación los primeros Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

En 1977 se emitieron los PETROBONOS, cuyo rendimiento estaba basado en el precio del petróleo. Sin embargo, antes de que se emitieran los CETES, la principal fuente de financiamiento para las personas eran los créditos bancarios.

Para 1980 se crearon las primeras casas de bolsa, las cuales ofrecían a los intermediarios formas novedosas de financiamiento, que estaban encarriladas al mercado de deuda.

A partir de 1988, comenzaron a comercializarse de forma oficial los títulos de deuda privada.

Durante 1990 hubo una mayor participación en este mercado. Se crearon los PAGAFES (pagarés, cuyo rendimiento estaba enlazado al tipo de cambio peso-dólar), los TESO BONOS (que después sustituyeron a los PAGAFES), los AJUSTABONOS (los cuales pagaban un rendimiento basado en la inflación), los UDIBONOS (que después reemplazaron a los AJUSTABONOS) y los BONDES (éstos pagaban una tasa que se sometía a revisión cada 28 y 91 días).

En enero de 2000, el Gobierno Federal emitió los primeros bonos a tasa fija con un plazo de 3 años. Hoy en día existen a 3, 5, 10, 20, 30 y hasta de 100 años.

### **2.1.1 Tipos**

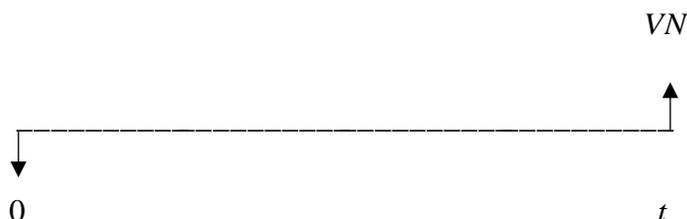
Actualmente el mercado de dinero es bastante amplio, pues cuenta con un sin fin de instrumentos financieros. Los tipos más sobresalientes son los bonos cupón cero y los bonos cuponados. Todos tienen la misma idea, sin embargo, cuentan con ligeras variaciones al momento de llevar a cabo su valuación. A continuación, se hablará de las características principales de algunos de ellos, de acuerdo con Banxico.

### 2.1.1.1 Bonos cupón cero

Los bonos cupón cero se caracterizan por no pagar intereses a través del tiempo. El tenedor únicamente recibe el pago del Valor Nominal ( $VN$ ) al vencimiento del plazo.

El precio de este tipo de bonos es igual al Valor Presente del nominal en la fecha de vencimiento, como a continuación se muestra en la representación gráfica del flujo de efectivo:

**Imagen 2.1: Flujo de efectivo de un bono cupón cero**



Fuente: Elaboración propia.

Donde:

$VN$ : Valor Nominal.

$t$ : Plazo de inversión del bono.

#### 2.1.1.1.1 CETES

Los bonos cupón cero se denominan Certificados de la Tesorería, comúnmente conocidos como CETES. Son ofrecidos por el Gobierno Federal de México a través de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) y del Banco de México (Banxico), y, como se mencionó anteriormente, fueron emitidos en 1978. Desde entonces se han posicionado como uno de los instrumentos fundamentales en el desarrollo del mercado de dinero. Se crearon con el fin de que los agentes pudieran realizar inversiones productivas y al mismo tiempo darle al gobierno la oportunidad de adquirir liquidez para hacer frente a sus obligaciones, obteniendo así una estabilidad económica.

Descripción:

a) Valor Nominal:

\$10 (Diez pesos)

b) Plazo:

Generalmente son préstamos de corto plazo, ya que se emiten a 28, 91, 182 y 364 días.

c) Pago de intereses:

La tasa de interés está implícita en la relación existente entre el precio del bono, el Valor Nominal y el vencimiento.

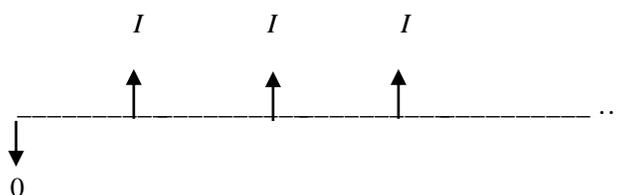
d) Emisión:

Colocación primaria. El Banco de México (Banxico) realiza subastas todos los martes mediante las cuales los CETES salen al mercado, y los días viernes lanza la convocatoria sobre los plazos y los montos que se van a emitir a la semana siguiente. Diversos inversionistas, como casas de bolsa, ingresan el precio al que están dispuestos a adquirirlos y Banxico los entrega al que le cobre un monto más pequeño. Colocación secundaria. Actualmente pueden realizarse operaciones de compra-venta en directo, las cuales pueden realizarse cotizando su precio o su tasa de rendimiento, siendo esta última la más común.

### 2.1.1.2 Bonos Perpetuos

Estos bonos son emitidos sin fecha de vencimiento específica. Debido a eso, prometen realizar la serie de pagos de intereses de forma indefinida, por lo que no tienen obligación alguna de pagar el principal. También se le suelen llamar “bonos perpetuos” a aquellos que tienen un vencimiento muy largo, por ejemplo 100 años, en los que el inversionista se concentra únicamente en cobrar los cupones:

Imagen 2.2: Flujo de efectivo de un bono perpetuo



Fuente: Elaboración propia.

Donde:

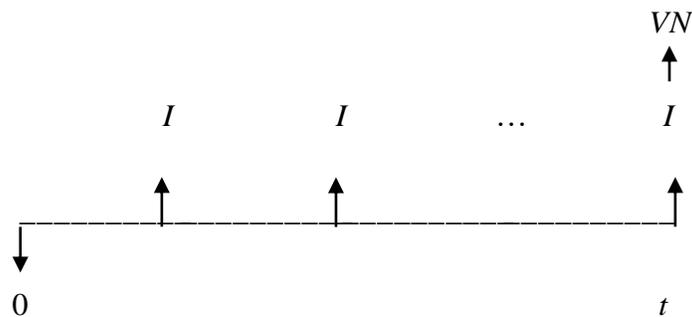
$I$  : Cupón (pago de intereses).

Este tipo de bonos buscan recompensar la temporalidad con un gran incremento en el capital del inversionista debido a las elevadas tasas de interés que manejan. Cabe mencionar que la valuación de un bono perpetuo es mucho más sencilla que la valuación de un bono con fecha de vencimiento específica, ya que su Valor Presente es igual al pago de interés periódico dividido por la tasa de rendimiento.

### 2.1.1.3 Bonos con cupón

Un cupón representa el interés que debe ser pagado en diferentes plazos al tenedor del bono. Estos pagos son claramente pactados desde el inicio, los cuales suelen ser semestrales o anuales, y deben ser cubiertos por el emisor desde la fecha de emisión hasta el vencimiento del bono. Es por esa razón que, durante la vida del bono, el tenedor tendrá ingresos constantes como pago de los intereses correspondientes. Además, al llegar al vencimiento, el tenedor podrá recuperar la cantidad invertida:

Imagen 2.3: Flujo de efectivo de un bono con cupón



Fuente: Elaboración propia.

Donde:

$I$  : Cupón (pago de intereses).

$VN$ : Valor Nominal.

$t$  : Plazo.

A diferencia de los bonos anteriores, la valuación del precio de un bono con cupones es igual a calcular el Valor Presente de sus flujos de efectivo.

Su emisión es muy similar a la de los CETES:

- a) Colocación primaria. Se hace a través de subastas, igualmente organizadas por Banxico, en las que los agentes ingresan el precio más grande al que están dispuestos a adquirirlos, así como el monto de su inversión. La convocatoria sobre los plazos y los montos que se van a emitir a la semana siguiente es lanzada los viernes (o el último día hábil de la semana).
- b) Colocación secundaria. Pueden realizarse operaciones en reporto y en directo. Las operaciones en reporto son como un préstamo asegurado; es un acuerdo de venta y recompra, es decir, quien vende los títulos lo hace con la obligación de recomprarlos en una fecha futura específica. Las operaciones en directo son aquellas en las que el agente indica el monto que va a invertir y selecciona la fecha de vencimiento.

#### **2.1.1.3.1 Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija (Bonos M)**

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con tasa de interés fija, o “Bonos M”, son la creación más reciente de la SHCP. Su emisión y colocación es a plazos mayores a un año, pagando intereses cada seis meses. La tasa de interés es determinada al momento de la emisión. Ésta es siempre la misma sin importar qué tan larga sea la vida del bono.

Descripción:

- a) Nombre:  
Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija
- b) Valor Nominal:  
\$100 (Cien pesos)
- c) Plazo:  
Actualmente, estos bonos se emiten a 3, 5, 10, 20 y 30 años. Sin embargo, debido a que en este caso el pago de intereses es cada 6 meses, es posible que se emitan a cualquier otro plazo con la única condición de que éste sea un múltiplo de 182 días.
- d) Periodo de interés:  
El tenedor del bono recibe el pago de los intereses correspondientes cada 6 meses, es decir, 182 días.

e) Tasa de interés:

El Gobierno Federal es quien fija la tasa de interés, la cual es dada a conocer a los inversionistas en la convocatoria de la subasta mencionada anteriormente.

f) Pago de intereses:

Para calcular los intereses, deben considerarse los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos. Cabe mencionar que los años se toman de 360 días cada uno.

### **2.1.1.3.2 Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (BONDES)**

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal, mejor conocidos como BONDES D o simplemente BONDES, son instrumentos de deuda emitidos por la SHCP y colocados por Banxico. Estos bonos también realizan una serie de pagos como intereses durante toda su vida y al final paga el Valor Nominal. Sin embargo, a lo largo de diversos plazos, tienen que revisarse sus tasas de interés. Esto es conocido como un bono con tasa flotante.

A diferencia de los CETES, los BONDES se negocian con base en el precio y no en la tasa, pero también tienen como propósito fortificar la estructura de la deuda del Gobierno Federal.

Descripción:

a) Nombre:

Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal

b) Valor Nominal:

\$100 (Cien pesos)

c) Plazo:

Son emitidos a plazos de 1 a 5 años, pero también pueden emitirse a otro plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 28 días. Actualmente los más utilizados son los de 1 y 2 años.

d) Periodo de interés:

El tenedor del bono recibe el pago de los intereses correspondientes cada 28 días.

e) Tasa de interés:

La tasa de interés es revisada diariamente y se determina con base en las operaciones de compra-venta de las instituciones de crédito y casas de bolsa. Es por esa razón que su tasa es variable.

f) Pago de intereses:

Para calcular los intereses, deben considerarse los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos. Cabe mencionar que los años se toman de 360 días cada uno.

### **2.1.1.3.3 Bonos de Regulación Monetaria (BREMS)**

Los Bonos de Regulación Monetaria fueron creados en el 2001 con el fin de regular la liquidez en el mercado monetario y así poder administrar la política monetaria de una manera más sencilla.

Sin embargo, estos bonos estuvieron únicamente 5 años en el mercado, ya que en el 2006 el Gobierno Federal junto con Banxico decidieron sustituirlos por los BONDES D con el objetivo de llevar a cabo una reestructuración en la deuda del gobierno.

Las características de los BREMS son las mismas que las de los BONDES.

Descripción:

a) Nombre:

Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México (BREMS)

b) Valor Nominal:

\$100 (Cien pesos).

c) Plazo:

Fueron emitidos a plazos de 1 y 3 años, pero también podían emitirse a otro plazo siempre y cuando éste fuera múltiplo de 28 días.

d) Periodo de interés:

El tenedor del bono recibía el pago de los intereses correspondientes cada 28 días.

e) Tasa de interés:

Al igual que los BONDES, los BREMS pertenecían a los bonos de tasa variable, pues la tasa de interés era revisada diariamente y se determinaba con base en las operaciones de compra-venta de las instituciones de crédito y casas de bolsa.

f) Pago de intereses:

Para calcular los intereses, se consideraban los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos. Cabe mencionar que los años se tomaban de 360 días cada uno.

#### **2.1.1.3.4 Bonos IPAB (Bonos de Protección al Ahorro; BPAs)**

Los Bonos de Protección al Ahorro también son conocidos como Bonos IPAB debido a que quien los emite es el Instituto de Protección al Ahorro Bancario (IPAB). Su colocación se lleva a cabo por medio de Banxico con el fin de hacer frente a sus obligaciones financieras.

Descripción:

a) Nombre:

Bonos de Protección al Ahorro (BPAs)

b) Valor Nominal:

\$100 (Cien pesos)

c) Plazo:

Son emitidos a plazos de 3 y 5 años, pero también pueden emitirse a otro plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 28 días.

d) Periodo de interés:

El plazo es igual al de los CETES a 28 días.

e) Tasa de interés:

La tasa de interés es equivalente a la tasa de CETES a 28 días.

f) Pago de intereses:

Para calcular los intereses, deben considerarse los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos. Cabe mencionar que los años se toman de 360 días cada uno.

#### **2.1.1.3.5 UDIBONOS**

Los UDIBONOS son Bonos de Desarrollo denominados en Unidades de Inversión (UDI's). Fueron creados por el Gobierno Federal en 1996 con el fin de proteger al inversionista ante los cambios inesperados en la tasa de inflación.

Estos son colocados a mediano y largo plazo. En la fecha de emisión se estipula una tasa de interés real fija. En función de ésta, los pagos serán cada 6 meses.

Así, ante un incremento en la inflación, se mantiene constante el valor real de la inversión del agente y se obtienen rendimientos reales.

Debido a lo anterior, son considerados como otra forma de moneda.

Descripción:

a) Nombre:

Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión (UDIBONOS).

b) Valor Nominal:

100 UDIS (Cien Unidades de Inversión).

c) Plazo:

Se han emitido a plazos de 3, 5, 10, 20 y 30 años. Sin embargo, es posible que se emitan a cualquier otro plazo con la única condición de que éste sea un múltiplo de 182 días.

d) Periodo de interés:

El plazo es igual al de los CETES a 182 días.

e) Tasa de interés:

El Gobierno Federal es quien fija la tasa de interés, la cual es dada a conocer a los inversionistas en la convocatoria de la subasta mencionada anteriormente. Regularmente, paga la tasa de CETES a 182 días más un plus como protección al tenedor.

f) Pago de intereses:

Para calcular los intereses, deben considerarse los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos. Cabe mencionar que los años se toman de 360 días cada uno.

## 2.2 Valuación

A continuación, se explica la forma de valuación de los precios, así como de algunas medidas de sensibilidad de los bonos cupón cero y los bonos con cupón ante variaciones en las tasas de interés. También se muestra cómo valorar la pérdida máxima esperada al invertir en cada uno de ellos, es decir, cómo calcular el Valor en Riesgo.

### 2.2.1 Bonos cupón cero

#### *CETES*

Los CETES son uno de los instrumentos más populares y quizá es el más importante en el mercado de deuda en México, pues son los de más fácil y mayor negociación en dicho mercado. Además, muchos otros instrumentos se calculan con base en las tasas de interés de estos bonos.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el agente que desea ser el tenedor del instrumento debe entregar una cantidad de dinero específica al emisor, es decir, el precio del bono. Entonces, el emisor únicamente se compromete a pagar la cantidad prestada más un interés al final del plazo, que es el Valor Nominal.

#### 2.2.1.1 Precio

Existen dos metodologías para calcular el precio de un CETE. La primera, y la más popular, es hacerlo a partir de su tasa de rendimiento. La segunda es a partir de su tasa de descuento.

Las ecuaciones para calcularlo son:

- a) A partir de la tasa de rendimiento:

$$P = \frac{VN}{\left[1 + i \left(\frac{t}{360}\right)\right]} \quad (2.1)$$

Donde:

$P$ : Precio del CETE.

$VN$ : Valor Nominal.

$i$  : Tasa de rendimiento.

$t$  : Plazo en días del CETE.

b) A partir de la tasa de descuento:

Si  $d$  es la tasa de descuento de un CETE, entonces:

$$d = \frac{i}{\left[1 + i\left(\frac{t}{360}\right)\right]}$$

Despejando  $i$  se tiene que:

$$i = \frac{d}{\left[1 - d\left(\frac{t}{360}\right)\right]}$$

Posteriormente, sustituyendo el valor de  $i$  en la ecuación (2.1) y reacomodando términos, se obtiene la ecuación para calcular el precio a partir de la tasa de descuento:

$$P = VN \left(1 - \frac{d t}{360}\right) \quad (2.2)$$

Donde:

$P$  : Precio del CETE.

$VN$  : Valor Nominal.

$d$  : Tasa de descuento.

$t$  : Plazo en días del CETE.

Consulte el anexo 2.1 para observar el proceso completo de despeje y sustitución de  $i$  para encontrar la ecuación anterior.

Cabe mencionar que el precio calculado mediante la ecuación (2.1) puede variar ligeramente con respecto al calculado con la ecuación (2.2), esto depende del número de decimales con los que se trabajen. En el ejemplo 2.1, incluido en el apartado de anexos, se trabajó con todos los decimales, por lo que el precio en ambos casos es el mismo.

### 2.2.1.2 Medidas de sensibilidad

Si bien existen diversas medidas para conocer la sensibilidad que tienen los precios de los bonos cupón cero (CETES) ante las variaciones que presentan las tasas de interés, la Duración y la Convexidad son las medidas más adecuadas para estimar el cambio que pueden tener esos precios.

#### 2.2.1.2.1 Duración de Macaulay

Existen dos tipos de duración más utilizados en el mercado de deuda. La primera, y de la que se hablará en este apartado, es la *Duración de Macaulay* o mejor conocida únicamente como Duración. El concepto fue desarrollado por Frederick Macaulay en 1938 y, como se mencionó anteriormente, fue creado con la finalidad de medir el cambio que tendrá el precio del bono al presentarse movimientos en las tasas de interés.

La ecuación para calcular la Duración de los CETES es la siguiente:

$$D = \frac{t}{360} \quad (2.3)$$

Donde:

$D$ : Duración.

$t$ : Plazo del CETE.

Consulte el apartado de anexos, ejemplo 2.2, para visualizar un caso práctico de la aplicación de esta ecuación.

#### 2.2.1.2.2 Duración Modificada

El segundo tipo de duración más utilizado en el mercado de deuda es la *Duración Modificada*, también llamada “Duración de Hicks” debido a que fue creada en 1939 por John Hicks. A diferencia de la Duración de Macaulay, que se mide en años, la Duración Modificada representa el cambio porcentual que se producirá en el precio del bono cuando existe una variación de un 1% en la tasa de interés, con lo que puede tenerse una aproximación de cuál será el precio del bono ante dicho cambio y, con ello, poder tomar mejores decisiones de compra-venta de estos instrumentos.

La ecuación para calcular la Duración Modificada de los CETES es la siguiente:

$$D^* = \frac{\frac{t}{360}}{1 + i \left( \frac{t}{360} \right)} \quad (2.4)$$

Donde:

$D^*$ : Duración Modificada.

$t$ : Plazo del CETE.

$i$ : Tasa de interés.

Para visualizar un caso práctico en el que se aplique la ecuación anterior, consulte el apartado de anexos, ejemplo 2.3.

### 2.2.1.2.3 Convexidad

La Duración y Duración Modificada resultan ser cálculos bastante exactos cuando se desea conocer qué tanto están expuestos los precios de los bonos ante cambios en las tasas de interés; cuando éstos son pequeños. Pues a medida que se hacen más grandes, estos cálculos van perdiendo exactitud hasta hacerse inadecuados.

A partir del deseo de obtener con exactitud los cambios que tendrá el precio del bono ante cambios grandes en la tasa de interés, surge el concepto de *Convexidad*, en el cual se obtiene la curvatura en relación con el precio-rendimiento del bono.

Ecuación para calcular la Convexidad:

$$C = \left\{ \frac{\frac{2}{\left[ 1 + i \left( \frac{t}{360} \right) \right]^2}}{\left( \frac{360}{t} \right)^2} \right\} \left( \frac{1}{2} \right) (x) \quad (2.5)$$

Donde:

$C$  : Convexidad.

$t$  : Plazo del CETE.

$i$  : Tasa de interés.

$x$  : Cambio porcentual.

Consulte el apartado de anexos, ejemplo 2.4, para una comprensión de la aplicación de dicha ecuación.

### **2.2.1.3 Valor en Riesgo**

De acuerdo con Jorion (2007), el Valor en Riesgo (comúnmente conocido como VaR, por sus siglas en inglés) permite conocer, con cierto nivel de confianza, la pérdida máxima posible que puede sufrir una inversión en un horizonte de tiempo específico.

Esta herramienta resulta de gran importancia en la gestión de riesgos ya que, por medio de ella, el inversionista puede evitar incurrir en riesgos más grandes que los que podría afrontar.

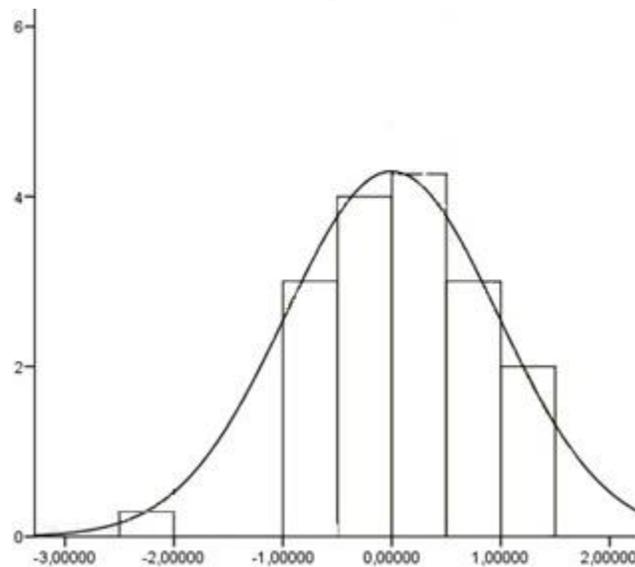
Existen tres principales metodologías para calcular el VaR.; simulación histórica, Montecarlo y delta-normal como se puede apreciar en Olivares et al. (2017). La idea principal de cada una se presenta a continuación:

- a) Simulación histórica. Simula los posibles resultados futuros a partir de la información histórica.
- b) Montecarlo. Genera números aleatorios para obtener un valor posible.
- c) Delta-normal. Supone que los datos se distribuyen de manera normal.

El supuesto de normalidad puede ser utilizado cuando los rendimientos esperados de cierto activo tienden a ser cero. Debido a la alta frecuencia de los precios de los bonos, al calcular los rendimientos se observa dicha tendencia.

En la Gráfica 2.1 puede observarse la normalidad en los datos.

Gráfica 2.1: Supuesto de normalidad 1



Fuente: Elaboración propia.

Por esta razón, para calcular el VaR de estos bonos se utiliza el modelo delta-normal, cuya ecuación es:

$$VaR = -\Phi P D^* i \sigma \sqrt{t} \quad (2.6)$$

Donde:

$\Phi$  : Nivel de confianza.

$P$  : Precio del bono.

$D^*$  : Duración Modificada.

$i$  : Tasa de interés.

$\sigma$  : Volatilidad de los rendimientos.

$t$  : Horizonte temporal.

Cabe mencionar que, de acuerdo con la propuesta del Comité de Basilea, el nivel de confianza ideal para realizar el cálculo es del 99%. Para RiskMetrics (J.P. Morgan, 1994), basta con un 95%.

Consulte el apartado de anexos, ejemplo 2.5, para una mejor comprensión de la aplicación de la ecuación anterior.

## 2.2.2 Bonos con cupón

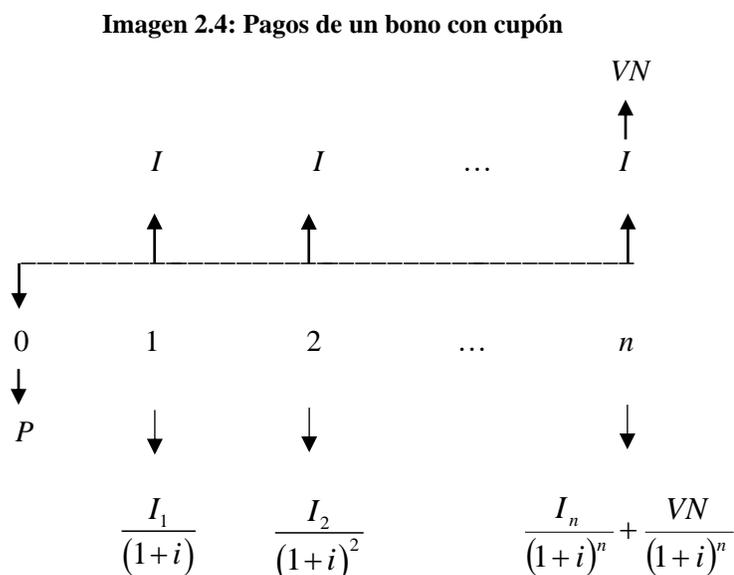
La creación de estos bonos ha sido un punto clave en la historia del mercado de dinero, pues además de permitir que el gobierno y las grandes empresas tengan una fuente de financiamiento para sus proyectos, los bonos cuponados le dan a su tenedor el derecho a recibir un flujo de dinero conocido durante toda la vida del instrumento.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el inversionista que desea adquirir un bono con cupón debe entregar una cantidad de dinero específica al emisor, es decir, el precio del bono. Entonces, el emisor se compromete a realizar una serie de pagos como intereses desde la fecha de emisión, durante y hasta la fecha de vencimiento del instrumento, además, al final del plazo debe pagar la cantidad que se le fue prestada más el interés correspondiente. Esta cantidad es conocida como el Valor Nominal del bono.

### 2.2.2.1 Precio

Para calcular el precio de un bono con cupón es necesario calcular el Valor Presente de la serie de pagos que se van a recibir en el futuro, descontados al momento actual a una tasa de interés que resulta apropiada para el riesgo que va a tomarse al hacerse la adquisición del instrumento.

A continuación, se presenta la línea de tiempo de la serie de pagos:



Fuente: Elaboración propia.

Donde:

$P$ : Precio del bono.

$I$ : Cupón (pago de intereses).

$i$ : Tasa de interés.

$VN$ : Valor Nominal.

$n$ : Plazos al vencimiento.

Entonces, el Valor Presente queda expresado de la siguiente manera:

$$VP = \frac{I_1}{(1+i)} + \frac{I_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{I_n}{(1+i)^n} + \frac{VN}{(1+i)^n}$$

$$VP = \frac{I_1}{(1+i)} + \frac{I_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{I_n + VN}{(1+i)^n}$$

Por lo tanto, la ecuación para calcular el precio de un bono con cupones es:

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{I_t}{(1+i)^t} + \frac{VN}{(1+i)^n} \quad (2.7)$$

Donde  $t$  es el número del periodo correspondiente.

Para visualizar un caso práctico de la aplicación de la ecuación anterior, consulte el apartado de anexos, ejemplo 2.6.

### 2.2.2.2 Medidas de sensibilidad

Al igual que en el caso de los bonos cupón cero, para los bonos con cupón existe una variedad de medidas para conocer la sensibilidad que tienen los precios de éstos ante las variaciones en las tasas de interés. Sin embargo, la Duración y la Convexidad siguen siendo las medidas que más se aproximan al cambio que pueden tener dichos precios.

Debido a que sus ecuaciones son más complejas que las de los bonos cupón cero, en los siguientes apartados se pondrá énfasis en la obtención de dichas medidas de sensibilidad.

### 2.2.2.2.1 Duración de Macaulay

Tanto para los bonos cupón cero como para los bonos cuponados, la Duración de Macaulay o simplemente Duración, es uno de los conceptos más importantes, pues en ambos casos mide la sensibilidad que tiene el precio del instrumento ante los cambios en la tasa de interés. Este cálculo fue el primero en aproximar esa sensibilidad, sin embargo, es importante destacar que los cambios deben ser pequeños, de lo contrario el cálculo perdería exactitud.

Su obtención se lleva a cabo de una manera muy sencilla, pues únicamente tiene que calcularse la primera derivada del precio del bono con respecto a la tasa de interés, es decir:

$$\frac{dP}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{I_t}{(1+i)^t} + \frac{VN}{(1+i)^n} \right]$$

Finalmente, se tiene que la Duración de un bono cuponado es:

$$D = \frac{1}{P} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{(t)I}{(1+i)^t} + \frac{nVN}{(1+i)^n} \right] \quad (2.8)$$

Donde:

$P$ : Precio del bono.

$I$ : Cupón (pago de intereses).

$t$ : Número del periodo correspondiente.

$i$ : Tasa de interés.

$VN$ : Valor Nominal.

$n$ : Plazos al vencimiento.

Cabe mencionar que el resultado obtenido del cálculo indica el tiempo (en años) que el bono está expuesto a cambios en la tasa de interés, asimismo, el resultado debe ser menor que la vigencia; es decir, si un bono vence en tres años, la Duración debe ser menor que tres.

El anexo 2.2 contiene el proceso para encontrar la ecuación (2.8). Además, consulte el ejemplo 2.7 para visualizar un caso práctico de su aplicación.

### 2.2.2.2.2 Duración Modificada

La Duración Modificada es otra medida importante en cuanto a la sensibilidad de los bonos, pues brinda una aproximación adecuada del cambio porcentual que se producirá en el precio del bono cuando existe una variación de un 1% en la tasa de interés, a diferencia de la Duración de Macaulay cuyo resultado es medido en años (Sevilla, 2019).

Para los bonos con cupón, la Duración Modificada se refiere a la Duración dividida entre

$\left[1 + i \left(\frac{t}{360}\right)\right]$ . Expresado matemáticamente se tiene lo siguiente:

$$D^* = \frac{D}{1 + i \left(\frac{t}{360}\right)} \quad (2.9)$$

Donde:

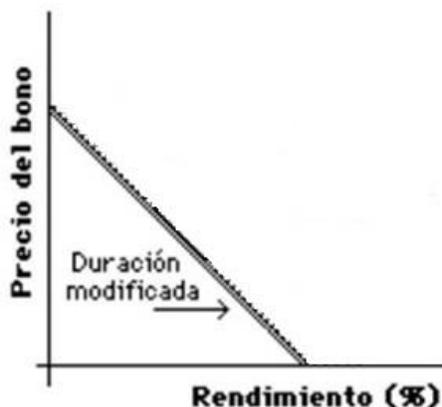
$D$ : Duración del bono.

$i$ : Tasa de interés.

$t$ : Plazo en el que será recibido el pago del cupón.

Debido a eso, el resultado del cálculo será siempre menor que el valor obtenido en la Duración de Macaulay y estará expresado en términos porcentuales.

Gráfica 2.2: Duración Modificada de un bono con cupón



Fuente: BBVA. (11 de junio de 2019). *Renta Fija III: Gestión de riesgos*.

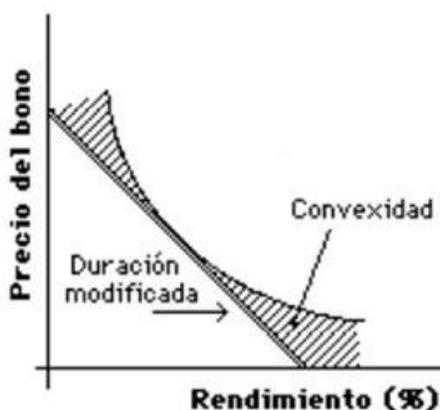
Para visualizar un caso práctico de la aplicación de la ecuación anterior, consulte el apartado de anexos, ejemplo 2.8.

### 2.2.2.2.3 Convexidad

Debido a que la Duración Modificada asume que la relación existente entre los cambios en la tasa de interés y el precio de un bono es lineal, calcularla resulta ser adecuada únicamente cuando esos cambios son pequeños. Sin embargo, ante variaciones más grandes es necesario realizar otro tipo de cálculo en el que se obtenga la curvatura que guarda la relación entre el precio y el rendimiento del bono.

Una aproximación bastante exacta para esos casos es la Convexidad.

Gráfica 2.3: Convexidad de un bono con cupón



Fuente: BBVA. (11 de junio de 2019). *Renta Fija III: Gestión de riesgos*.

Para obtener la ecuación de esta medida de sensibilidad, tiene que calcularse la segunda derivada del precio del bono con respecto a la tasa de interés.

Recordando que la primera derivada es la ecuación de la Duración, ésta a su vez, se deriva con respecto a la tasa de interés, es decir:

$$\frac{dD}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left\{ \frac{1}{P} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{(t)I}{(1+i)^t} + \frac{nVN}{(1+i)^n} \right] \right\}$$

Finalmente se obtiene la ecuación de la Convexidad de un bono cuponado:

$$C = \frac{1}{P^2} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{(t^2)I}{(1+i)^{t+1}} + \frac{n^2 VN}{(1+i)^{n+1}} \right] \quad (2.10)$$

Donde:

$P$ : Precio del bono.

$I$  : Cupón (pago de intereses).

$t$  : Número del periodo correspondiente.

$i$  : Tasa de interés.

$VN$  : Valor Nominal.

$n$  : Plazos al vencimiento.

Cabe mencionar que el resultado obtenido de este cálculo es siempre positivo y, al igual que la Duración Modificada, está expresado en términos porcentuales.

El anexo 2.3 contiene el proceso para encontrar la ecuación (2.10). Además, consulte el ejemplo 2.9 para visualizar un caso práctico de su aplicación.

### **2.2.2.3 Valor en Riesgo**

El Valor en Riesgo (VaR) es una idea proveniente de la administración de riesgo de las instituciones financieras desarrollada a partir de la necesidad de cuantificar, con cierto nivel de confianza, la cantidad máxima que podría perder un portafolio en un horizonte de tiempo definido (Jorion, 2007).

Por la simplicidad del cálculo y la fácil interpretación de los resultados, el VaR se ha convertido en una medida comúnmente utilizada por diferentes instituciones con el fin de conocer la cantidad máxima de dinero que puede llegar a perder el agente al realizar una inversión, lo que lo ha hecho objeto de diversas investigaciones en las cuales se pretende encontrar el enfoque más apropiado para determinarlo.

A diferencia de la información obtenida respecto al cálculo del VaR para portafolios de renta variable, la información para los de renta fija es escasa a pesar de que estos activos resultan fundamentales en la creación de portafolios de inversión bien diversificados. Desafortunadamente, dicha escasez muestra el gran vacío que tienen los estudios financieros, pues, debido a las características particulares de estos instrumentos, las metodologías para el cálculo del VaR son diferentes (Caldeira & Moura, 2013).

Concorde con Caldeira, tres son los métodos más comunes para realizar estos cálculos.

En 1994, J.P. Morgan lanzó al mercado la metodología RiskMetrics<sup>TM</sup>, la cual está basada en la teoría de portafolio de Markowitz (1952), y con ello introdujo lo que se conoce como

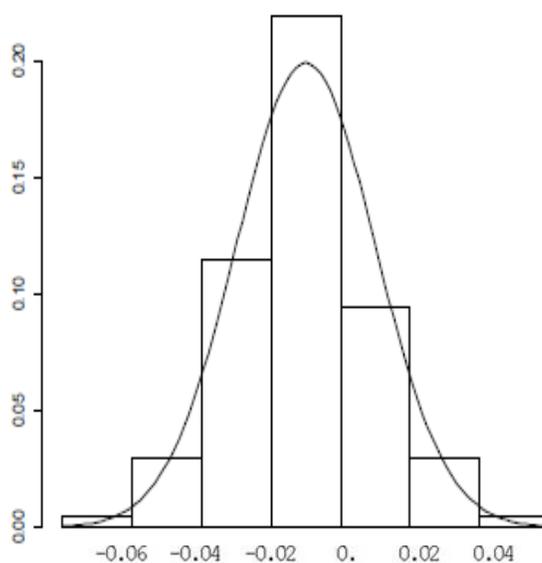
“Valor en Riesgo Delta-Normal”. En el cálculo de esta metodología se supone que los rendimientos de los activos se distribuyen de manera normal y utiliza la matriz de varianza-covarianza de los activos, un horizonte de tiempo y un nivel de significancia asociado a la distribución normal.

Para 1996, J.P. Morgan Bank mostró un segundo método. Esta vez no hizo supuestos sobre la distribución de los datos (rendimientos), sino que generó diversos escenarios basados en los datos históricos sobre los valores que podrían tomar en un periodo, e integró la distribución de los factores de riesgo subyacente en ese periodo. A este método se le llamó “Simulación Histórica”.

Posteriormente, en el 2003, Paul Glasserman desarrolló una simulación llamada “Monte Carlo”. A diferencia de los métodos anteriores, éste se creó con el fin de valorar derivados, pero su uso se extendió a tal punto de poder hacer un cálculo del VaR. Glasserman no realizó hipótesis sobre las distribuciones ni tomó en cuenta el comportamiento pasado, sino que generó números aleatorios a partir de un proceso estocástico para crear escenarios futuros de los datos.

Al igual que en el caso de los bonos sin cupón, la alta frecuencia de los precios de los bonos cuponados hace que los rendimientos tiendan a ser cero, por lo que se utilizará el modelo Delta-Normal.

**Gráfica 2.4: Distribución normal 2**



Fuente: Elaboración propia.

Es por eso que la ecuación para calcular el VaR de estos bonos es:

$$VaR = -\Phi P D^* i \sigma \sqrt{t} \quad (2.11)$$

Donde:

$\Phi$  : Nivel de confianza.

$P$  : Precio del bono.

$D^*$  : Duración Modificada.

$i$  : Tasa de interés.

$\sigma$  : Volatilidad de los rendimientos.

$t$  : Horizonte temporal.

Debido a que el resultado del cálculo está expresado en términos monetarios y representa una pérdida, se espera que éste sea una cantidad pequeña o una que el inversionista pueda afrontar.

Es importante resaltar que, de acuerdo con la propuesta del Comité de Basilea, el nivel de confianza ideal para realizar el cálculo es del 99%. Para RiskMetrics (J.P. Morgan, 1994), es suficiente con un 95%.

Para visualizar un caso práctico de la aplicación de la ecuación (2.11), consulte el apartado de anexos, ejemplo 2.10.

Durante este capítulo, se analizó el funcionamiento del mercado de dinero en México dando a conocer los instrumentos más relevantes que se negocian en él, así como el manejo de cada uno de ellos. Principalmente, se habló de los instrumentos gubernamentales, en especial de los de renta fija, siendo los bonos los más representativos y objeto de estudio de esta investigación. Posteriormente, se desarrollaron diversas herramientas y conceptos necesarios para su valuación; entre los más importantes se encuentra la relación entre el precio y la tasa de interés, así como las medidas de sensibilidad para obtener el Valor en Riesgo de dichos instrumentos, lo cual representa una base para sustentar el siguiente capítulo del presente trabajo.

En el capítulo siguiente, se construirán dos portafolios de bonos de renta fija; uno con bonos cupón cero (CETES) y otro con bonos con cupón (Bonos M). Se analizarán los rendimientos

generados en cada uno, así como el comportamiento de la sensibilidad de los bonos que los conforman ante variaciones en la tasa de interés. Con ello se obtendrá el Valor en Riesgo de los portafolios y se analizará si es adecuado invertir en ellos.

## **Capítulo 3. Aplicación**

En este capítulo se construirán los portafolios conformados por instrumentos de renta fija con diferentes temporalidades; uno con bonos cupón cero (CETES) y otro con bonos cuponados con tasa de interés fija (Bonos M), y se obtendrá la Duración y Convexidad de cada uno de ellos. Posteriormente, se obtendrá el Valor en Riesgo de los portafolios con diferentes niveles de confianza. Las tres herramientas (Duración, Convexidad y VaR) fueron mostradas y explicadas en el capítulo anterior.

Este trabajo es una herramienta bastante útil para aquellos inversionistas que no quieren estar expuestos a grandes riesgos, y resulta fundamental para los que tienen un menor periodo de tiempo productivo, pues a medida que aumenta la edad del inversionista, aumenta la dificultad de poder recuperarse de las pérdidas que podrían generarse si invirtiera en otro tipo de instrumentos.

### **3.1 Selección de activos**

Con el fin de que el inversionista tuviera una rápida disponibilidad del dinero en caso de ser necesario, se seleccionaron aquellos bonos de renta fija cuya temporalidad fuera de corto plazo. Posteriormente, debido a las fechas de emisión, se obtuvo la información histórica a 30 días de los CETES y a 28 días para los Bonos M desde enero de 2017 hasta mayo de 2019. Dicha información se muestra en los anexos 3.1 y 3.2, los cuales incluyen las fechas de emisión y las tasas correspondientes.

Cabe mencionar que, debido a que son instrumentos de renta fija, los rendimientos que generan se establecen a partir de dichas tasas que se pactan justo al momento de la emisión, y serán fijas hasta la fecha de vencimiento del bono; es decir, durante todo el plazo no presentarán algún cambio.

Sin embargo, los instrumentos quedan expuestos a variaciones cuando se negocian en el mercado secundario, ya que, dependiendo de la oferta y la demanda, se les asigna una tasa de interés de mercado, la cual determinará el precio y los rendimientos generados por las operaciones de compra-venta.

Así, dependiendo de las condiciones de mercado y de los cambios en la tasa de interés, el inversionista obtendrá mayores o menores ganancias.

Las siguientes tablas muestran los instrumentos que comprenden la estructura de cada portafolio. Cabe mencionar que, a pesar de que el Valor Nominal de los CETES es de \$10, la inversión debe ser de \$100 como mínimo.

**Tabla 3.1: Elementos del portafolio de CETES**

<b>Portafolio de CETES</b>	<b>Valor Nominal</b>
28 días	\$100
91 días	\$100
182 días	\$100

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 3.2: Elementos del portafolio de Bonos M**

<b>Portafolio de Bonos M</b>	<b>Valor Nominal</b>
3 años	\$100
5 años	\$100

Fuente: Elaboración propia.

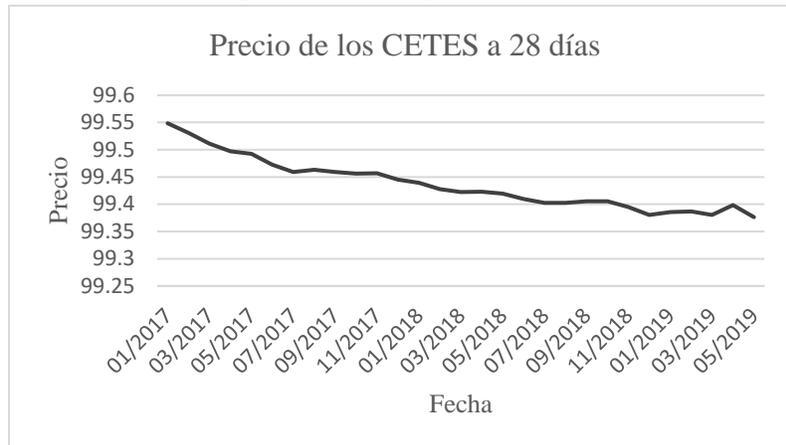
## **3.2 Portafolio de CETES**

### **3.2.1 Precio**

Para llevar a cabo la construcción del portafolio de CETES, en primera instancia se calculó el Valor Presente del nominal cada uno de los bonos, es decir; el precio, pues son bonos cupón cero. Para ello, se utilizó la ecuación (2.1) debido a que la información con que se cuenta son las tasas de interés. El anexo 3.3 contiene los resultados obtenidos.

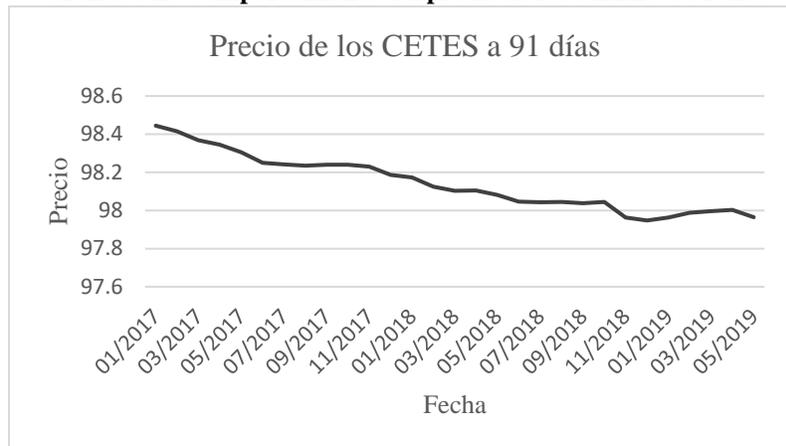
Las Gráficas 3.1, 3.2 y 3.3 muestran el comportamiento que tuvieron los precios calculados durante el periodo definido.

**Gráfica 3.1: Comportamiento del precio de los CETES a 28 días**



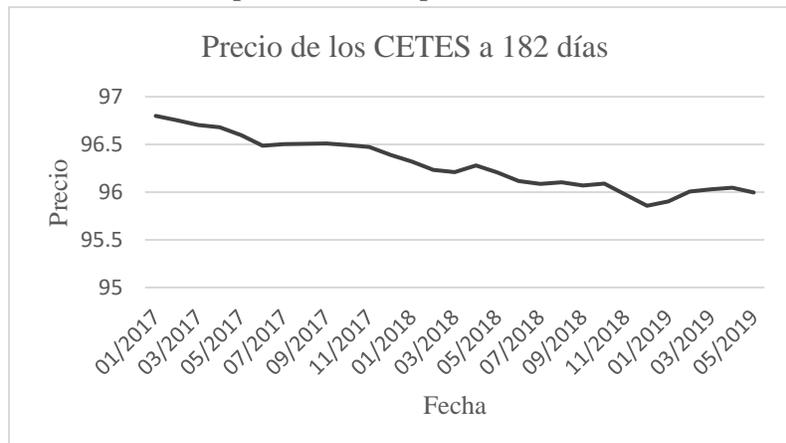
Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

**Gráfica 3.2: Comportamiento del precio de los CETES a 91 días**



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

**Gráfica 3.3: Comportamiento del precio de los CETES a 182 días**



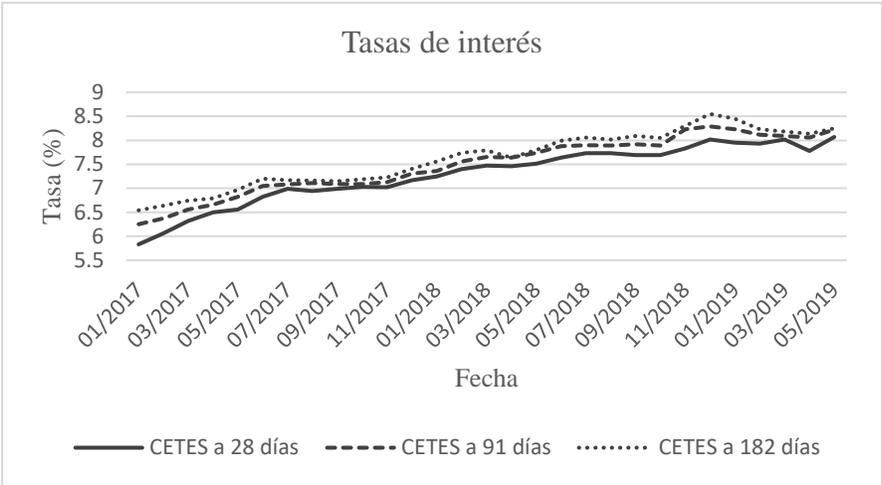
Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

En general, el precio de los CETES oscila entre \$95.85 y \$99.54, lo que significa que se compran bajo par, es decir; el precio es menor que el Valor Nominal. Además, el precio promedio es de \$97.95. En las gráficas anteriores puede observarse que en los tres bonos se presenta una tendencia bajista, es decir, el precio ha ido disminuyendo desde el 2017. A finales del 2018 y principios del 2019, las tasas de interés descendieron y con ello los precios aumentaron; sin embargo, para mayo de 2019, los precios nuevamente disminuyeron.

**3.2.2 Tasas de interés**

A continuación, se muestra el comportamiento de las tasas de interés para los tres bonos.

**Gráfica 3.4: Comportamiento de las tasas de interés de los CETES**



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

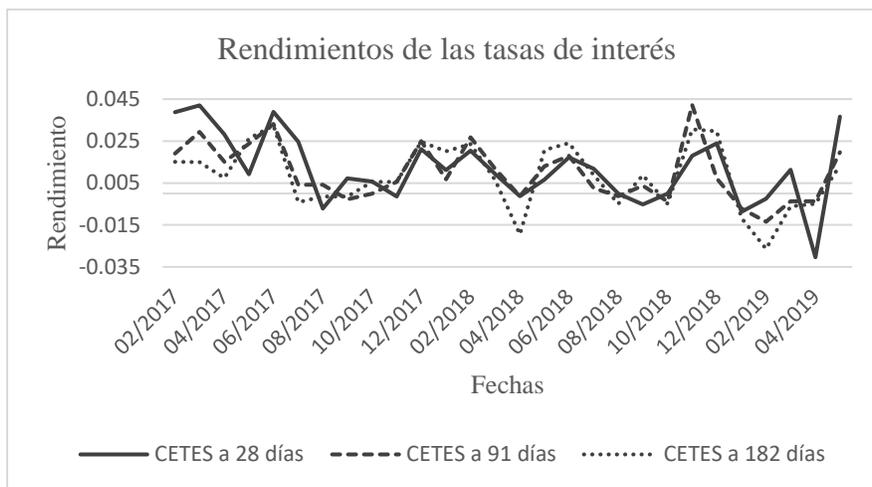
Es importante destacar que para que el inversionista que desea comprar un bono obtenga mayores ganancias, debe esperar a que las tasas de interés se incrementen y con ello los precios descendan. Por otra parte, si un inversionista ya cuenta con el bono y desea venderlo, debe esperar a que las tasas descendan para que los precios se incrementen. Consulte en Ejercicios el ejemplo 3.1 en el apartado de anexos para una mejor comprensión.

La gráfica anterior muestra que la tasa de interés ha ido aumentando desde el 2017, lo que representa una oportunidad para los inversionistas de llevar a cabo la adquisición de estos instrumentos. Además, es posible ver la relación inversa existente entre el precio del bono y la tasa, es decir; a medida que la tasa de interés sube, el precio baja y viceversa.

### 3.2.3 Rendimientos

La Gráfica 3.5 muestra los rendimientos obtenidos de las tasas de interés para los tres bonos, los cuales se utilizan posteriormente para realizar el cálculo del VaR de los activos.

**Gráfica 3.5: Comportamiento de los rendimientos de las tasas de interés de los CETES**



Fuente: Elaboración propia.

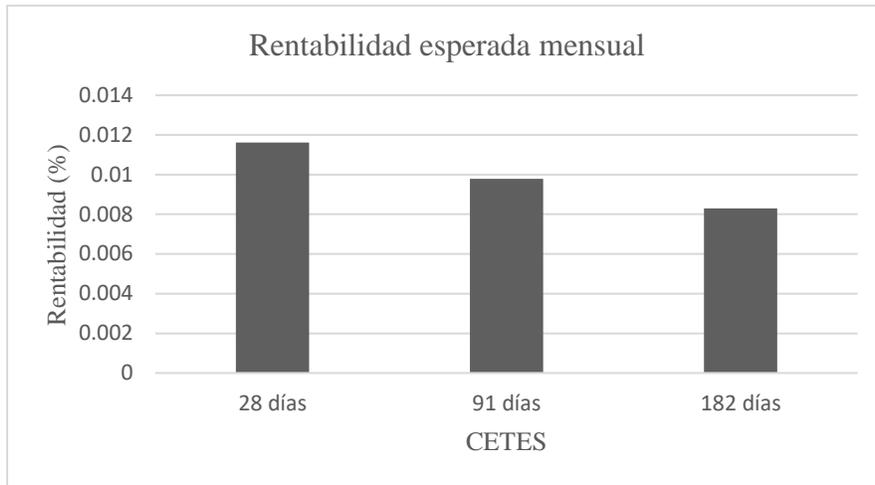
Como se observa en la gráfica, la mayoría de los rendimientos fueron positivos para los tres activos durante el periodo seleccionado, es decir; la tasa de interés fue en aumento mes con mes y solo en pocas ocasiones presentó una disminución en su porcentaje.

Los casos más notorios de una disminución en la tasa son en los primeros meses del 2019. Debido a que en ese periodo las tasas de interés disminuyeron en mayor medida sus porcentajes, se obtuvieron rendimientos negativos más grandes. Sin embargo, para mayo de ese mismo año, las tasas nuevamente aumentaron y con ello los rendimientos también aumentaron.

### 3.2.4 Rentabilidad esperada de los activos

Con base en la información anterior se calculó el rendimiento que se espera obtener al mes por cada activo, es decir; se obtuvo el promedio de los rendimientos de cada uno.

**Gráfica 3.6: Rentabilidad esperada mensual de los CETES**



Fuente: Elaboración propia.

Es posible observar que se espera un rendimiento mayor para los CETES a 28 días, seguido de los CETES a 91 días y, por último, los CETES a 182 días. La diferencia entre los rendimientos esperados se debe a que, a pesar de que los tres activos presentaron pocos rendimientos negativos durante el periodo seleccionado, los CETES a 28 días fueron los que tuvieron una cantidad menor de rendimientos negativos que los otros dos activos.

### 3.2.5 Duración y Convexidad

Para la realización de estos cálculos, se utilizaron las fórmulas (2.3), (2.4) y (2.5). Los resultados obtenidos se muestran en el anexo 3.4. Los últimos, es decir; los resultados más recientes, se presentan en la siguiente tabla con el fin de analizar la sensibilidad actual de los tres activos.

**Tabla 3.3: Duración y Convexidad de CETES**

Medida de sensibilidad	CETES a 28 días	CETES a 91 días	CETES a 182 días
Duración de Macaulay	0.077777778	0.252777778	0.505555556
Duración Modificada	0.077292638	0.247632389	0.485313921
Convexidad	5.97415E-05	0.000613218	0.002355296

Fuente: Elaboración propia.

Con base en la información anterior, puede decirse que la Duración de Macaulay (que se mide en años) arroja que los CETES están expuestos a cambios en la tasa de interés durante

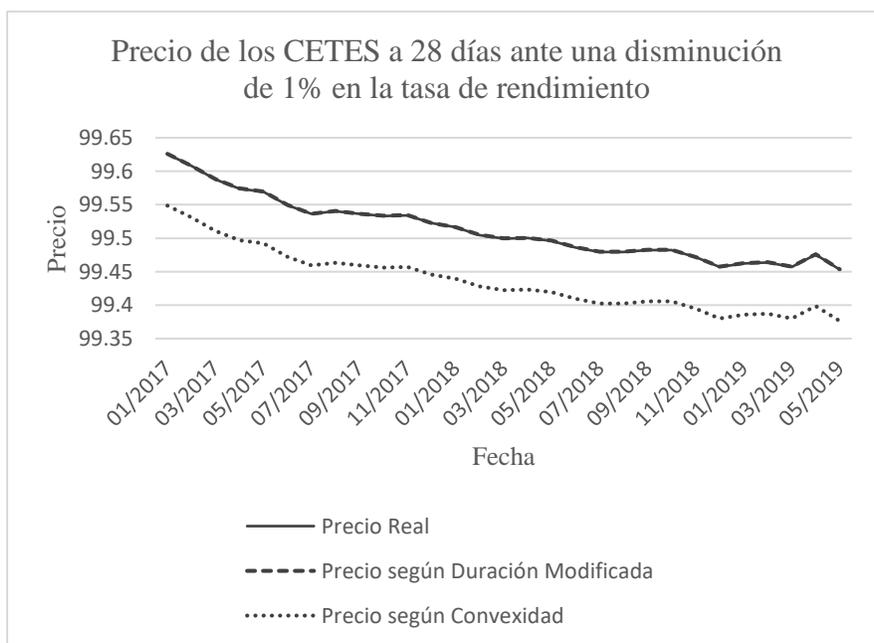
casi toda la vida del contrato, sin embargo, la Duración Modificada indica que ante una variación de un 1% en la tasa de interés, el precio de los CETES a 28 días variará 0.0773%; a 91 días, 0.2476%; y a 182 días, 0.4853%. La Convexidad (que también se mide en porcentaje) arroja resultados aún más pequeños que la Duración Modificada, por lo que se puede concluir que los tres bonos muestran una exposición muy pequeña a los cambios en las tasas.

Para conocer el precio real que tendrían los CETES ante un cambio de 1% en la tasa de interés, únicamente tiene que sumarse o restarse ese 1% a la tasa en la ecuación (2.1), dependiendo el caso. Una vez conociendo dicho precio, es posible hacer una comparación con los resultados obtenidos en las medidas de sensibilidad con el fin de saber cuál de ellas es la que más se adapta al precio real de los activos ante dicho cambio.

Los resultados del cálculo de los precios reales, de los precios según la Duración Modificada y de los precios según la Convexidad se encuentran contenidos en los anexos 3.5, 3.6 y 3.7.

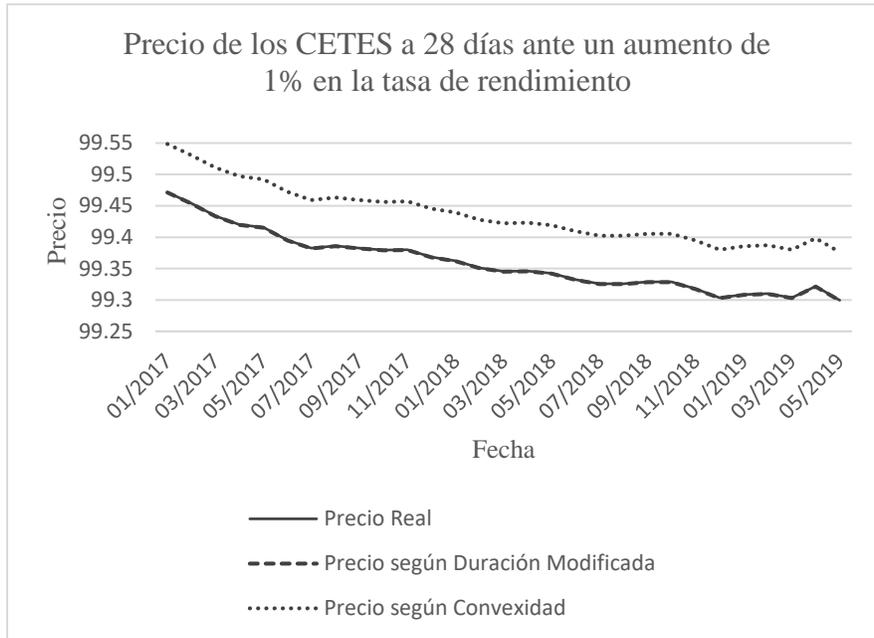
Las siguientes gráficas muestran un comparativo de dichos resultados.

**Gráfica 3.7: Comportamiento del precio de los CETES a 28 días ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento**



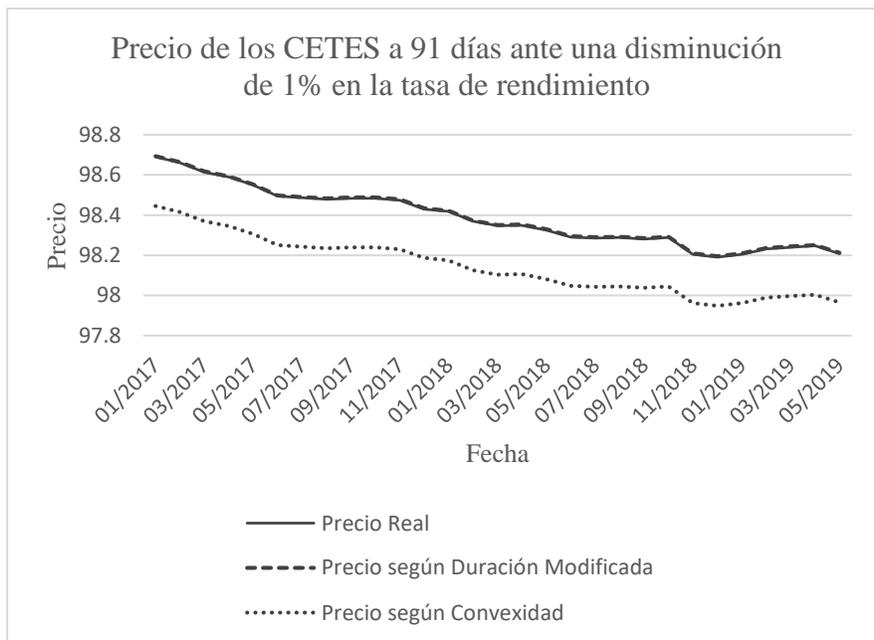
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 3.8: Comportamiento del precio de los CETES a 28 días ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento**



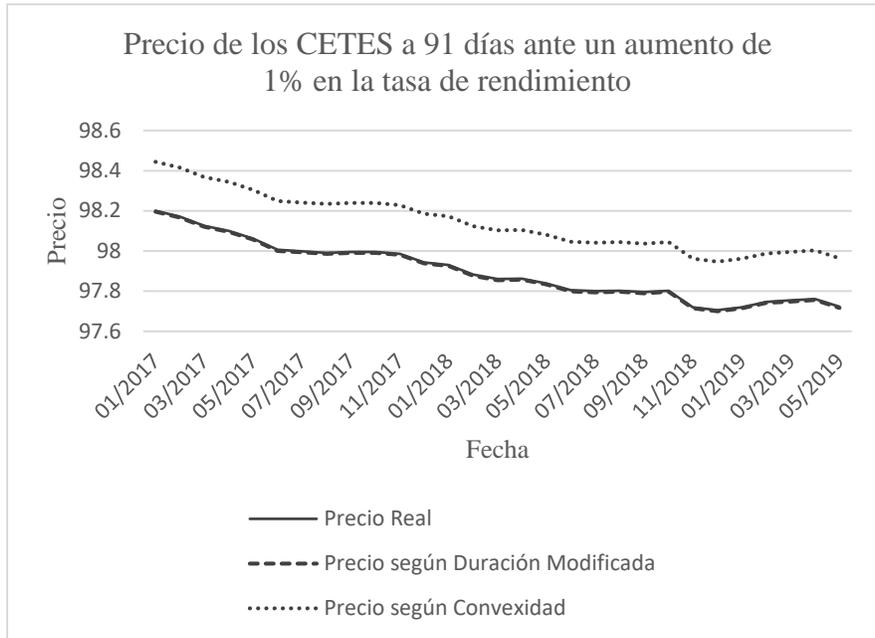
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 3.9: Comportamiento del precio de los CETES a 91 días ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento**



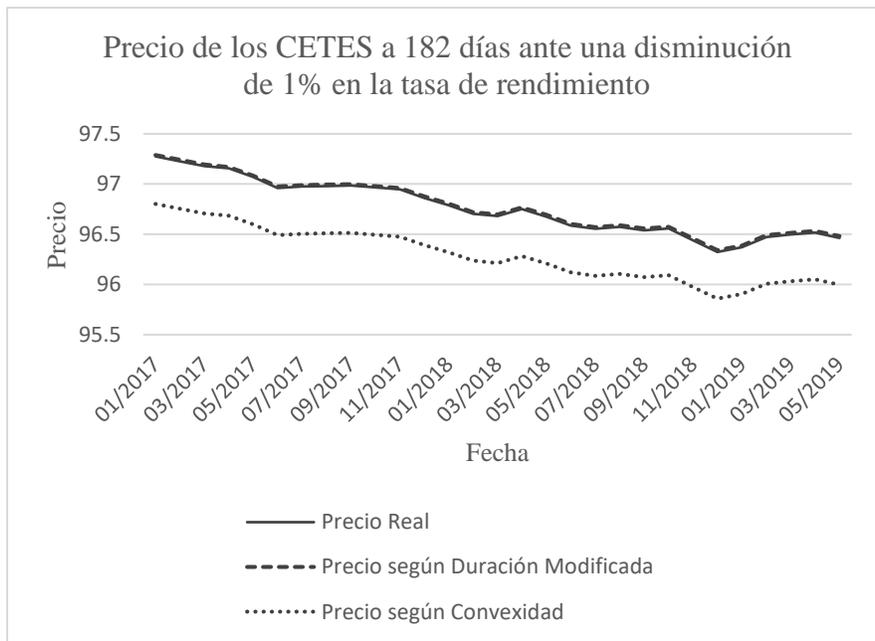
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 3.10: Comportamiento del precio de los CETES a 91 días ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento**



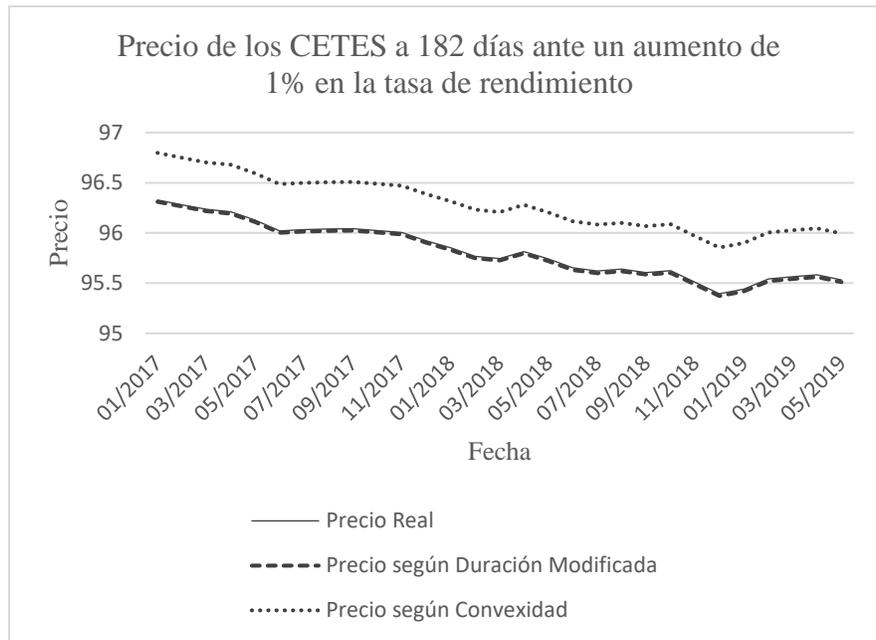
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 3.11: Comportamiento del precio de los CETES a 182 días ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento**



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 3.12: Comportamiento del precio de los CETES a 182 días ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento**



Fuente: Elaboración propia.

En todas las gráficas anteriores es posible observar que el cálculo del precio por medio de la Duración Modificada es el que más se aproxima al precio real del CETE ante un cambio en la tasa. Esto se debe a que la Duración Modificada, a diferencia de la Convexidad, es eficiente cuando hay cambios pequeños en la tasa. Los CETES, al ser de 182 días el de mayor plazo, presentan cambios muy pequeños.

### 3.2.6 Valor en Riesgo de los activos

A través de la fórmula de logaritmo natural, se calcularon los rendimientos de las tasas de interés, los cuales se muestran en el anexo 3.8. Asimismo, se calculó su volatilidad, es decir, su desviación estándar. El resultado obtenido de la volatilidad en los tres activos fue muy pequeño, lo que indica que no hay movimientos bruscos en los rendimientos.

Posteriormente, se utilizó el último precio de los bonos, así como la última Duración Modificada y la última tasa de interés para aplicar la ecuación (2.6) y con ello obtener el Valor en Riesgo actual de los tres bonos. Estrictamente debería agregarse el valor de la Convexidad a la ecuación del VaR, sin embargo, debido a que su efecto es marginal, se supone que dicho valor es igual a cero.

La Tabla 3.4 muestra los resultados obtenidos.

**Tabla 3.4: Valor en Riesgo de los CETES**

Concepto		CETE a 28 días	CETE a 91 días	CETE a 182 días
Nivel de confianza	95%	1.644853627	1.644853627	1.644853627
	99%	2.326347874	2.326347874	2.326347874
Último precio del bono (mayo 2019)		99.37624841	97.96446176	95.99616015
Última Duración Modificada (mayo 2019)		0.077292638	0.247632389	0.485313921
Última tasa de interés (mayo 2019)		8.07%	8.22%	8.25%
Volatilidad de los rendimientos		0.016744973	0.013674774	0.015497039
Primer horizonte temporal: 1 mes		1/12	1/12	1/12
VaR del bono	95%	-0.004928507	-0.012948058	-0.028282378
	99%	-0.006970481	-0.018312685	-0.040000307
Segundo horizonte temporal: 2 meses		2/12	2/12	2/12
VaR del bono	95%	-0.00696996	-0.01831132	-0.03999732
	99%	-0.00985775	-0.02589805	-0.05656898

Fuente: Elaboración propia.

Cabe mencionar que las cifras 1.644853627 y 2.326347874 indican el valor asociado al nivel de confianza, mientras que los resultados obtenidos en el Valor en Riesgo de cada bono indican que, en caso de invertirse en estos instrumentos, la pérdida máxima que podría presentarse en uno y dos meses sería menor que \$1.

### 3.2.7 Valor en Riesgo del portafolio

En primer lugar, se obtuvo el “Valor en Riesgo no diversificado del portafolio”, que es aquel valor que no toma en cuenta las correlaciones de los rendimientos entre activos. Además, este valor no considera el peso que debe tener cada activo en la inversión, es decir, representa la pérdida que se generaría si no se invirtiera la cantidad adecuada en los activos.

El resultado es la suma de los valores absolutos de los VaR de cada activo con el mismo nivel de confianza, los cuales se mostraron en la Tabla 3.4.

**Tabla 3.5: Valor en Riesgo no diversificado del portafolio de CETES**

<b>Valor en Riesgo no diversificado a 1 mes</b>		
Nivel de confianza	Operación	Resultado
Al 95%	$(0.004928507) + (0.012948058) + (0.028282378)$	0.046158942
Al 99%	$(0.006970481) + (0.018312685) + (0.040000307)$	0.065283473
<b>Valor en Riesgo no diversificado a 2 meses</b>		
Nivel de confianza	Operación	Resultado
Al 95%	$(0.00696996) + (0.01831132) + (0.03999732)$	0.065278602
Al 99%	$(0.00985775) + (0.02589805) + (0.05656898)$	0.092324773

Fuente: Elaboración propia.

Al igual que el VaR de cada CETE, el Valor en Riesgo no diversificado del portafolio indica que la pérdida máxima que podría presentarse en uno y dos meses sería menor que \$1. Sin embargo, debido a que hasta este momento el portafolio no considera las correlaciones de los rendimientos ni se ha indicado qué porcentaje se debe invertir en cada uno, este resultado es mayor que los obtenidos en los VaR individuales.

Para disminuir esta cifra, se calculó el “Valor en Riesgo diversificado del portafolio”, el cual ya toma en cuenta las correlaciones de los rendimientos entre activos y es el que se utilizará para hacer los cálculos siguientes. El resultado es la multiplicación de la última tasa de interés por la volatilidad de los rendimientos por la última Duración Modificada de cada bono, es decir; los datos de mayo de 2019.

Aunque el portafolio tiene dos horizontes temporales, el resultado de dicho cálculo es el mismo para ambos, pues la temporalidad no interviene en él.

**Tabla 3.6: Valor en Riesgo diversificado del portafolio de CETES**

<b>Valor en Riesgo diversificado del portafolio</b>		
CETE	Operación	Resultado
a 28 días	$(8.07\%) * (0.016744973) * (0.077292638)$	0.000104447
a 91 días	$(8.22\%) * (0.013674774) * (0.247632389)$	0.000278355
a 182 días	$(8.25\%) * (0.015497039) * (0.485313921)$	0.000620477

Fuente: Elaboración propia.

Con la tabla anterior, es posible observar que el VaR diversificado del portafolio es menor que los VaR individuales, arrojando que la pérdida máxima que podría presentarse sería mucho menor que \$1.

Posteriormente, se construyó la matriz de volatilidad de los rendimientos, llamada “Matriz 1” o “Matriz R”, cuya diagonal está conformada por los resultados obtenidos en la Tabla 3.6.

**Tabla 3.7: Matriz 1. Volatilidad de los rendimientos de los CETES**

<b>Matriz 1: Volatilidad de los rendimientos</b>		
0.00010445	0	0
0	0.00027836	0
0	0	0.00062048

Fuente: Elaboración propia.

Después, se construyó la matriz de correlaciones de rendimientos de tasas de interés, llamada “Matriz 2” o “Matriz C”.

La diagonal de esta matriz está compuesta por *unos*. Los demás valores se obtuvieron calculando los coeficientes de correlación.

Dicha matriz servirá para poder realizar los cálculos siguientes.

**Tabla 3.8: Matriz 2. Correlaciones de rendimientos de tasas de interés de los CETES**

<b>Matriz 2: Correlaciones de rendimientos</b>		
1	0.6890461	0.58126327
0.6890461	1	0.83726639
0.58126327	0.83726639	1

Fuente: Elaboración propia.

Seguido de eso, se multiplicó la 1 por la 2, y la matriz resultante fue llamada “Matriz 3”

**Tabla 3.9: Matriz 3 de CETES**

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{Matriz 3: } 1 * 2} \\
 \left[ \begin{array}{ccc} 0.00010445 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00027836 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00062048 \end{array} \right] \\
 * \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0.6890461 & 0.58126327 \\ 0.6890461 & 1 & 0.83726639 \\ 0.58126327 & 0.83726639 & 1 \end{array} \right] \\
 = \left[ \begin{array}{ccc} 0.00010445 & 7.1969E-05 & 6.0711E-05 \\ 0.0001918 & 0.00027836 & 0.00023306 \\ 0.00036066 & 0.0005195 & 0.00062048 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Fuente: Elaboración propia.

Y ésta última se multiplicó nuevamente por la Matriz 1:

**Tabla 3.10: Matriz 4 de CETES**

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{Matriz 4: } 3 * 1} \\
 \left[ \begin{array}{ccc} 0.00010445 & 7.1969E-05 & 6.0711E-05 \\ 0.0001918 & 0.00027836 & 0.00023306 \\ 0.00036066 & 0.0005195 & 0.00062048 \end{array} \right] \\
 * \left[ \begin{array}{ccc} 0.00010445 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00027836 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00062048 \end{array} \right] \\
 = \left[ \begin{array}{ccc} 1.0909E-08 & 2.0033E-08 & 3.767E-08 \\ 2.0033E-08 & 7.7482E-08 & 1.4461E-07 \\ 3.767E-08 & 1.4461E-07 & 3.8499E-07 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenida la Matriz 4, se procedió a determinar el peso específico que deben tener los CETES en el portafolio. Para ello, en primera instancia, se utilizó el último precio de cada uno, es decir; el precio que tienen en mayo 2019. Dichos precios se sumaron para obtener un bono total:

**Tabla 3.11: Bono total (CETES)**

Bono	Precio
CETE a 28 días	99.37624841
CETE a 91 días	97.96446176
CETE a 182 días	95.99616015

Bono Total	293.3368703
------------	-------------

Fuente: Elaboración propia.

Seguido de eso, cada precio se dividió por el bono total, formando una nueva matriz llamada “W”, y se obtuvo la matriz transpuesta, la cual representa los pesos de cada bono.

**Tabla 3.12: Matriz W de CETES**

Matriz W: Cálculo de los pesos del portafolio	
Bono	Peso
CETE a 28 días	0.33877858
CETE a 91 días	0.33396573
CETE a 182 días	0.32725569
Suma	1

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 3.13: Matriz W transpuesta de CETES**

Matriz W transpuesta
0.33877858 0.33396573 0.32725569

Fuente: Elaboración propia.

Debido a que los pesos indican el porcentaje que deberá invertirse en cada uno, en la Tabla 3.12 se realizó la suma de ellos con el fin de corroborar que al final se tuviera cubierto el 100% de la inversión.

Para calcular la volatilidad del portafolio fue necesario calcular una nueva matriz, resultado de multiplicar la W transpuesta por la 4.

**Tabla 3.14: Matriz 5 de CETES**

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Matriz 5: W transpuesta * 4} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0.33877858 & 0.33396573 & 0.32725569 \end{array} \right] \\ \\ * & \left[ \begin{array}{ccc} 1.0909\text{E-}08 & 2.0033\text{E-}08 & 3.767\text{E-}08 \\ 2.0033\text{E-}08 & 7.7482\text{E-}08 & 1.4461\text{E-}07 \\ 3.767\text{E-}08 & 1.4461\text{E-}07 & 3.8499\text{E-}07 \end{array} \right] \\ \\ = & \left[ \begin{array}{ccc} 2.2714\text{E-}08 & 7.9986\text{E-}08 & 1.8705\text{E-}07 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, esa nueva matriz se multiplicó por la Matriz W:

**Tabla 3.15: Matriz 6 de CETES**

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Matriz 6: 5 * W} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 2.2714\text{E-}08 & 7.9986\text{E-}08 & 1.8705\text{E-}07 \end{array} \right] \\ \\ * & \left[ \begin{array}{c} 0.33877858 \\ 0.33396573 \\ 0.32725569 \end{array} \right] \\ \\ = & \left[ \begin{array}{c} 9.562\text{E-}08 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Fuente: Elaboración propia.

Y de ese resultado se obtuvo la raíz cuadrada para obtener la volatilidad del portafolio.

**Tabla 3.16: Volatilidad del portafolio de CETES**

<b>Volatilidad del portafolio</b>
$(9.562E-08)^{(1/2)} = 0.00030922$

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente se calculó el Valor en Riesgo del portafolio para ambas temporalidades, cuya metodología se encuentra en el anexo 3.9. Sin embargo, básicamente es el resultado de multiplicar el valor asociado al nivel de confianza por la volatilidad del portafolio por el bono total por la raíz cuadrada de la temporalidad.

**Tabla 3.17: Valor en Riesgo del portafolio de CETES**

<b>Valor en Riesgo a 1 mes</b>		
<b>Nivel de confianza</b>	<b>Operación</b>	<b>Valor</b>
95%	$-(1.644853627) * (0.00030922) * (293.3368703) * ((1/12)^{(1/2)})$	-0.043070165
99%	$-(2.326347874) * (0.00030922) * (293.3368703) * ((1/12)^{(1/2)})$	-0.060914957
<b>Valor en Riesgo a 2 meses</b>		
<b>Nivel de confianza</b>	<b>Operación</b>	<b>Valor</b>
95%	$-(1.644853627) * (0.00030922) * (293.3368703) * ((2/12)^{(1/2)})$	-0.060910412
99%	$-(2.326347874) * (0.00030922) * (293.3368703) * ((2/12)^{(1/2)})$	-0.086146758

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en el Valor en Riesgo del portafolio indican que, en caso de invertirse en él, la pérdida máxima que podría presentarse en un mes con un 95% de confianza sería de \$0.0430 y con un 99% sería de \$0.0609. Para dos meses, la pérdida máxima con un 95% de confianza sería de \$0.0609 y con un 99% sería de \$0.0861. En cualquier caso, la pérdida del portafolio es menor que \$1 y menor que la pérdida que se generaría si no se invirtiera la cantidad adecuada en cada activo.

### 3.2.8 Rentabilidad esperada del portafolio

La rentabilidad esperada mensual del portafolio se calculó sumando los productos de los pesos de los CETES por el rendimiento esperado mensual de cada uno. Expresado matemáticamente se tiene lo siguiente:

**Tabla 3.18: Rentabilidad esperada del portafolio de CETES**

<b>Rentabilidad esperada</b>	
Operación	Valor
$(0.33877858) * (0.01161202) +$ $(0.33396573) * (0.00978531) +$ $(0.32725569) * (0.00829557)$	0.009916635

Fuente: Elaboración propia.

Cabe mencionar que el resultado obtenido es la rentabilidad esperada en cuanto a la tasa de interés.

Haciendo una comparación con los rendimientos esperados de cada uno, se obtiene un rendimiento mayor en el portafolio que en dos de los activos (CETES a 91 y 182 días), si se invirtiera en ellos por separado.

### 3.2.9 Comparación: datos reales contra resultados obtenidos

Debido a que el VaR mide la pérdida en términos monetarios, se calculó el rendimiento real de junio y julio 2019 para posteriormente calcular el rendimiento monetario que tuvo el portafolio en esos meses y con ello poder hacer una comparación con los resultados de mayo 2019. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos en ambos meses:

**Tabla 3.19: Resultados de CETES de junio y julio 2019**

<b>Rentabilidad a junio</b>	
Rendimiento real	-8.02085E-05
Ganancia monetaria	-0.023528122
<b>Rentabilidad a julio</b>	
Rendimiento real	0.000142489
Ganancia monetaria	0.041797326

Fuente: Elaboración propia.

A pesar de que el rendimiento que tuvo el portafolio en ambos meses fue menor que el esperado, con base en los datos mostrados en la Tabla 3.19 puede decirse que el resultado obtenido del VaR fue adecuado, pues la pérdida monetaria que presentan no excede el VaR calculado con los diferentes niveles de confianza.

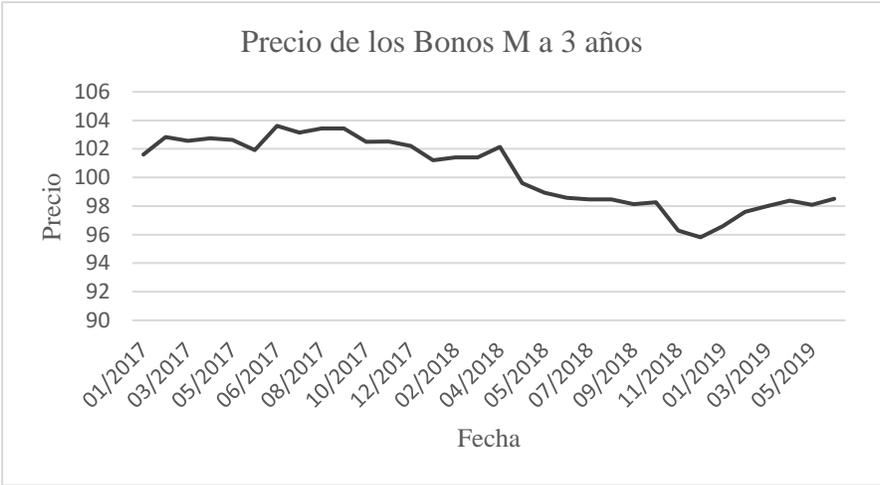
### 3.3 Portafolio de Bonos M

#### 3.3.1 Precio

Para llevar a cabo la construcción del portafolio de Bonos M, en primer lugar, se realizó el cálculo del precio de cada uno de ellos mediante la ecuación (2.7). El anexo 3.10 muestra los resultados obtenidos de dichos cálculos.

Posteriormente, se analizó el comportamiento que tuvieron los precios durante el periodo definido anteriormente mediante las siguientes gráficas.

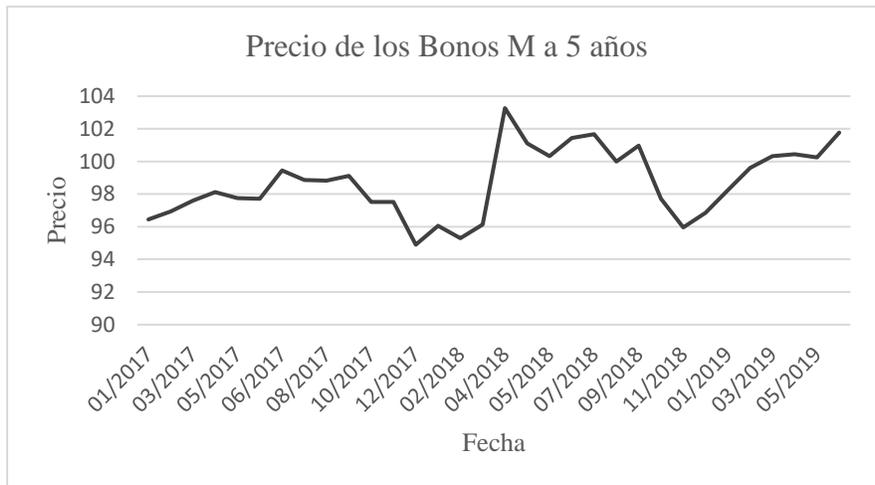
**Gráfica 3.13: Comportamiento del precio de los Bonos M a 3 años**



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

La Grafica 3.13 muestra que el precio de los Bonos M a 3 años oscila entre \$95.81 y \$103.61, lo que indica que algunos de ellos regularmente se venden sobre par, es decir; por una cifra mayor que el Valor Nominal. Además, el precio promedio de estos bonos es de \$100.34.

**Gráfica 3.14: Comportamiento del precio de los Bonos M a 5 años**



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

En la Gráfica 3.14 puede observarse que el precio de los Bonos M a 5 años oscila entre \$94.89 y \$103.26, lo que indica que, al igual que en el caso anterior, algunos de estos bonos regularmente se venden sobre par.

Asimismo, el precio promedio es de \$98.69.

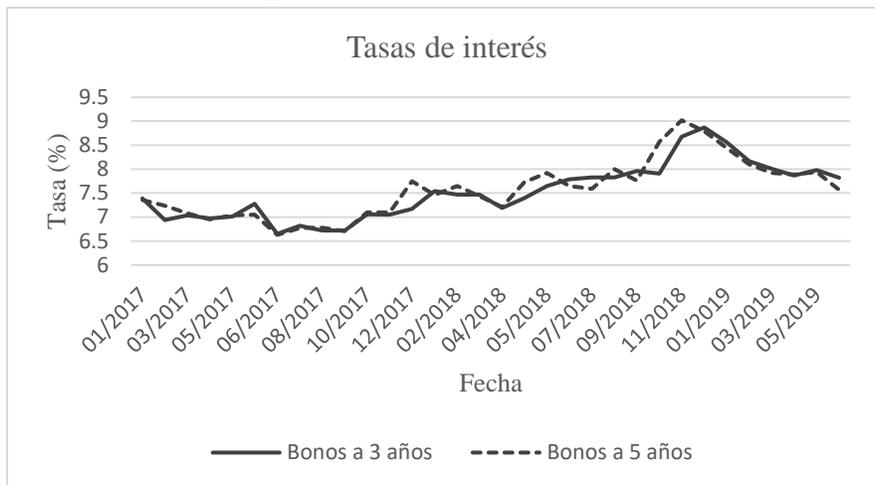
Haciendo una comparación entre los precios de los bonos se tiene que los movimientos mensuales de ambos presentan una tendencia bajista durante el 2017. Esta tendencia se mantuvo hasta finales del 2018, a excepción de abril de ese año donde hubo un incremento mayor en los precios. A partir del 2019, ambos precios presentaron una tendencia alcista.

Sin embargo, es posible observar que el precio de los bonos a 5 años tiene cambios más drásticos. Esto se debe a que la tasa de interés de estos bonos (la cual se analiza a continuación) presentó cambios de mayor medida en el periodo seleccionado, lo que afectó directamente al precio.

### **3.3.2 Tasas de interés**

La Gráfica 3.15 muestra el comportamiento de las tasas de interés para ambos bonos.

**Gráfica 3.15: Comportamiento de las tasas de interés de los Bonos M**



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

Nuevamente es importante destacar que un inversionista que desea comprar un bono debe esperar a que las tasas de interés se incrementen y los precios descieran para así obtener mayores ganancias. Por otra parte, si un inversionista ya es dueño de un bono y desea venderlo, debe esperar a que las tasas descieran y con ello los precios se incrementen.

En la gráfica 3.15 puede observarse que la tasa de interés para ambos bonos tuvo una tendencia alcista durante el 2017 y el 2018. A partir del 2019, se presenta una tendencia bajista.

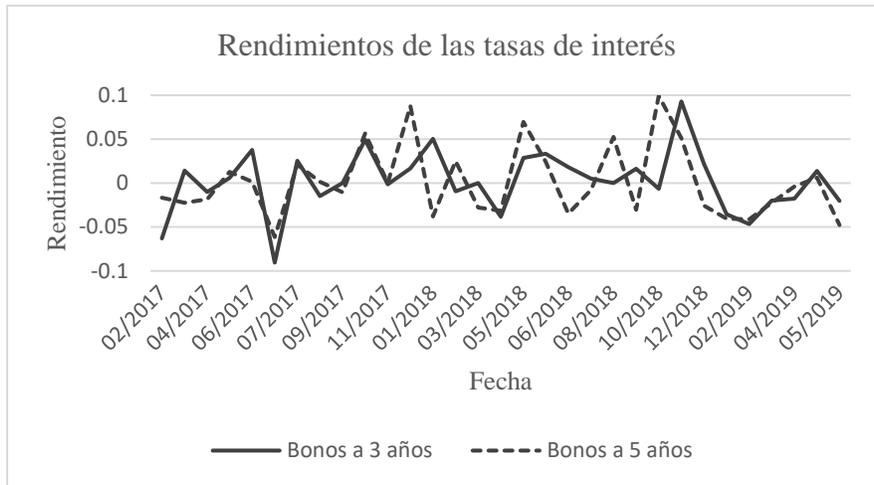
También es posible observar que la tasa para los bonos a 5 años aumenta y disminuye en mayor medida que la tasa para los bonos a 3 años, lo cual representa cambios más grandes en el precio de estos bonos (5 años).

Además, con las Gráficas 3.13, 3.14 y 3.15 es posible identificar que la relación inversa existente entre el precio del bono y la tasa de interés, es decir; se cumple que a medida que la tasa de interés baja, el precio sube y viceversa.

### 3.3.3 Rendimientos

La siguiente gráfica muestra los rendimientos obtenidos de las tasas de interés para los bonos a 3 y 5 años. Dichos rendimientos se utilizan posteriormente para realizar el cálculo del VaR de los activos.

**Gráfica 3.16: Comportamiento de los rendimientos de las tasas de interés de los Bonos M**



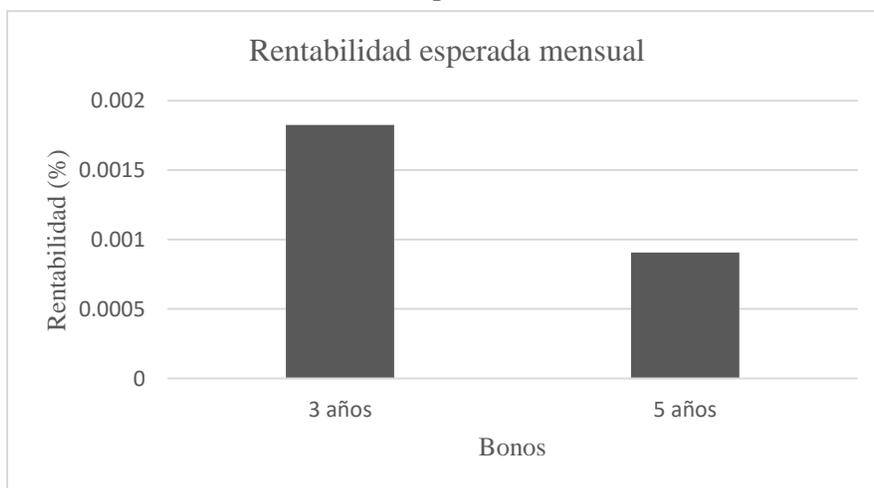
Fuente: Elaboración propia.

La gráfica anterior muestra que los rendimientos positivos obtenidos en ambos bonos fueron más grandes que los rendimientos negativos, es decir; en los meses en los que la tasa de interés aumentó, lo hizo en mayor medida que en las ocasiones en que disminuyó.

### 3.3.4 Rentabilidad esperada de los activos

Con la información obtenida anteriormente, se calculó el rendimiento que se espera obtener al mes por cada bono, es decir; se obtuvo el promedio de los rendimientos de cada uno.

**Gráfica 3.17: Rentabilidad esperada mensual de los Bonos M**



Fuente: Elaboración propia.

Puede observarse que nuevamente el bono con el plazo más pequeño, que en este caso es de 3 años, muestra un rendimiento esperado mayor que el del bono con el plazo más grande, es decir; que el de 5 años.

Lo anterior se debe a que el bono a 3 años presenta una mayor cantidad de rendimientos positivos en el periodo seleccionado. Sin embargo, hasta calcular los pesos que tendrán ambos bonos en el portafolio se sabe qué cantidad deberá invertirse en cada uno.

### 3.3.5 Duración y Convexidad

Para llevar a cabo estos cálculos, se utilizaron las fórmulas (2.8), (2.9) y (2.10). Los resultados obtenidos se muestran en el anexo 3.11. Los más recientes, es decir; los últimos, se presentan en la siguiente tabla con el fin de analizar la sensibilidad actual de los dos activos.

**Tabla 3.20: Duración y Convexidad de Bonos M**

<b>Medida de sensibilidad</b>	<b>Bonos a 3 años</b>	<b>Bonos a 5 años</b>
Duración de Macaulay	5.494663089	8.451305790
Duración Modificada	5.388154247	8.292624124
Convexidad	0.310870927	0.749036248

Fuente: Elaboración propia.

Con base en la tabla anterior, puede decirse que la Duración de Macaulay (que se mide en años) arroja que los bonos están expuestos a cambios en la tasa de interés durante casi toda la vida del contrato, sin embargo, la Duración Modificada indica que ante una variación de un 1% en la tasa de interés, el precio de los bonos a 3 años variará 5.3882%; y a 5 años, 8.2926%.

La Convexidad (que también se mide en porcentaje y que se adapta mejor a los cambios en el precio) arroja resultados más pequeños que las dos medidas de sensibilidad anteriores. Para el caso de los bonos a 3 años, la Convexidad indica que variará 0.3109%; mientras que los bonos a 5 años, 0.7490%.

Debido a las cifras anteriores, puede concluirse que los dos bonos muestran una exposición pequeña a los cambios en dichas tasas.

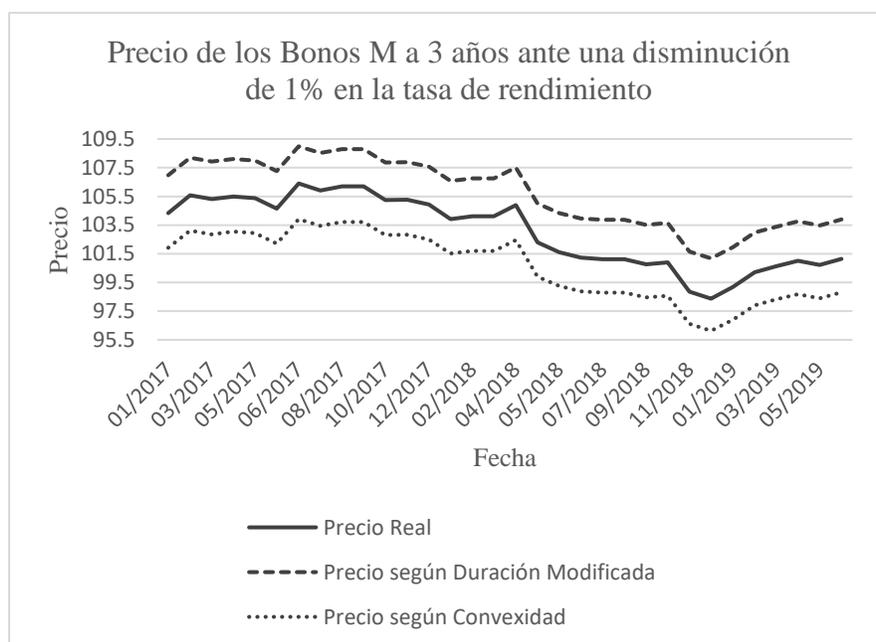
Para conocer el precio real que tendrían los Bonos M ante un cambio de 1% en la tasa de interés, se utiliza la misma metodología que en los CETES, es decir; únicamente tiene que sumarse o restarse ese 1% a la tasa en la ecuación, que en este caso es la (2.7), dependiendo de lo que se desee.

Conociendo dicho precio, es posible hacer una comparación con los resultados obtenidos en las medidas de sensibilidad para saber cuál de ellas es la que más se aproxima al precio real de los bonos ante dicho cambio.

Los resultados del cálculo de los precios reales, de los precios según la Duración Modificada y de los precios según la Convexidad se encuentran contenidos en los anexos 3.12 y 3.13.

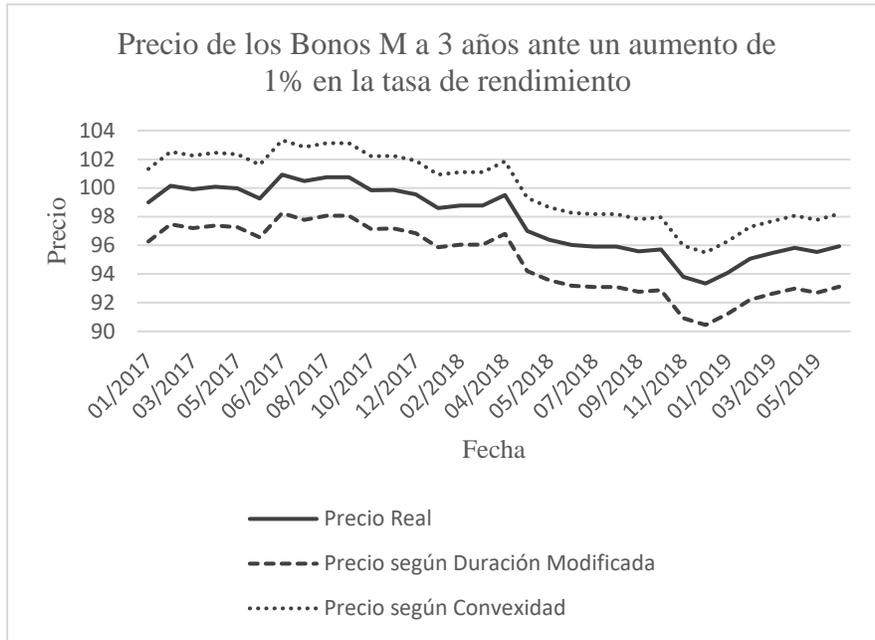
Las siguientes gráficas muestran un comparativo de dichos resultados.

**Gráfica 3.18: Comportamiento del precio de los Bonos M a 3 años ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento**



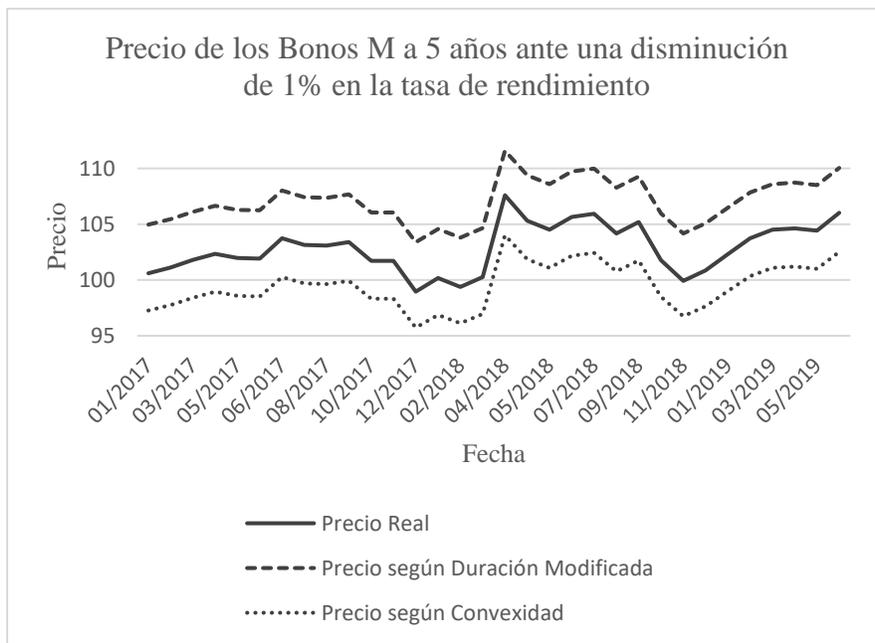
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 3.19: Comportamiento del precio de los Bonos M a 3 años ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento**



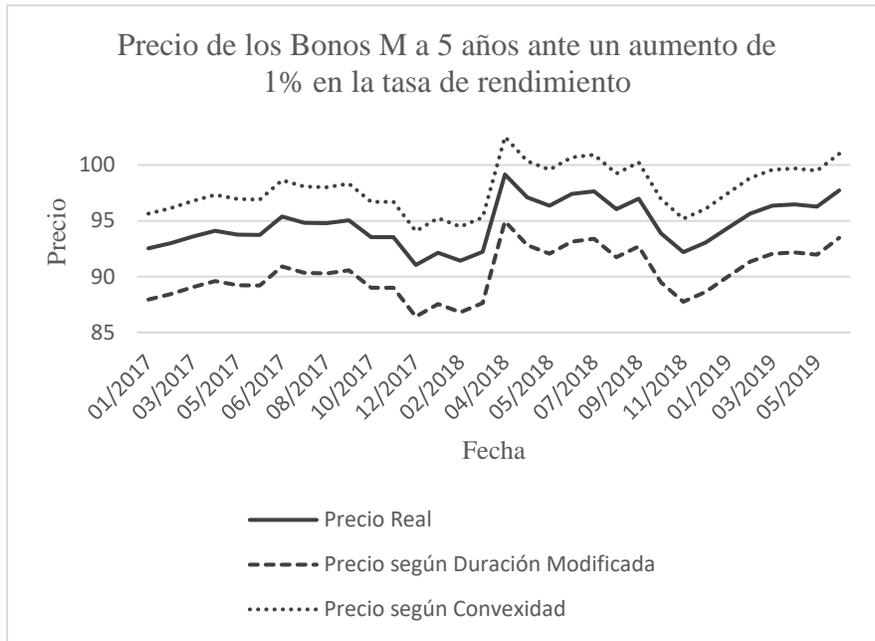
Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 3.20: Comportamiento del precio de los Bonos M a 5 años ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento**



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 3.21: Comportamiento del precio de los Bonos M a 5 años ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento**



Fuente: Elaboración propia.

Haciendo una comparación entre las Gráficas 3.18 y 3.19 se tiene que para el caso de la 3.18 (una disminución en la tasa), la Duración Modificada arroja precios más altos que los reales, mientras que la Convexidad arroja precios más bajos. En el caso de la 3.19 (un aumento en la tasa) es lo todo contrario, es decir; la Duración Modificada arroja precios más bajos que los reales, mientras que la Convexidad arroja precios más altos. No obstante, el cálculo del precio por medio de la Convexidad en ambos casos es el que más se aproxima al precio real del bono ante un cambio en la tasa.

En las Gráficas 3.20 y 3.21 sucede lo mismo que en las dos anteriores; para el caso de una disminución en la tasa, con la Duración Modificada se obtienen precios más altos y con la Convexidad precios más bajos. Para el caso de un aumento en la tasa, con la Duración Modificada se obtienen precios más bajos y con la Convexidad precios más altos. Nuevamente, el precio obtenido por medio de la Convexidad es el que más se aproxima al precio real del bono.

Lo anterior se debe a que la Convexidad, en contraste con la Duración Modificada, es eficiente cuando las temporalidades son más grandes. Los Bonos M, al ser de 3 y 5 años, presentan cambios de esta forma.

### 3.3.6 Valor en Riesgo de los activos

Al igual que en el caso de los CETES, los rendimientos de las tasas de interés de los Bonos M se calcularon a través de la fórmula de logaritmo natural. Dichos cálculos se muestran en el anexo 3.14. Seguido de eso, se calculó su desviación estándar, es decir, su volatilidad. El resultado obtenido de dicho cálculo fue muy pequeño en los dos activos, lo que indica que los rendimientos no presentan movimientos bruscos.

Posteriormente se utilizó el último precio de los bonos, así como la última Duración Modificada y la última tasa de interés para aplicar la ecuación (2.11) y obtener el Valor en Riesgo actual de los dos bonos. Para el caso de estos bonos debería agregarse el valor de la Convexidad a la ecuación del VaR, sin embargo, debido a que su efecto también es marginal, nuevamente se supone que dicho valor es igual a cero.

La Tabla 3.21 muestra los resultados obtenidos.

**Tabla 3.21: Valor en Riesgo de los Bonos M**

Concepto		Bonos a 3 años	Bonos a 5 años
Nivel de confianza	95%	1.644853627	1.644853627
	99%	2.326347874	2.326347874
Último precio del bono (mayo 2019)		98.50160368	101.7626576
Última Duración Modificada (mayo 2019)		5.388154247	8.292624124
Última tasa de interés (mayo 2019)		7.82%	7.57%
Volatilidad de los rendimientos		0.035543761	0.040828721
Primer horizonte temporal: 1 mes		1/12	1/12
VaR del bono	95%	-0.70047089	-1.23845065
	99%	-0.99068934	-1.75156439
Segundo horizonte temporal: 2 meses		2/12	2/12
VaR del bono	95%	-0.99061543	-1.75143371
	99%	-1.4010463	-2.47708612

Fuente: Elaboración propia.

Las cifras 1.644853627 y 2.326347874 indican el valor asociado al nivel de confianza. Los resultados obtenidos del cálculo del Valor en Riesgo de los bonos a 3 años muestran que la pérdida máxima que podría presentarse en un mes sería de \$0.9906 y en dos meses sería de \$1.4010, mientras que los resultados para los bonos a 5 años muestran que, en un mes, la pérdida máxima sería de \$1.7515 y en dos meses sería de \$2.4770.

### 3.3.7 Valor en Riesgo del portafolio

En primera instancia se obtuvo el “Valor en Riesgo no diversificado del portafolio” que, como se explicó anteriormente, es la suma de los valores absolutos de los VaR de cada activo con el mismo nivel de confianza, y que este valor representa la pérdida que se generaría si no se invirtiera la cantidad adecuada en los activos.

**Tabla 3.22: Valor en Riesgo no diversificado del portafolio de Bonos M**

<b>Valor en Riesgo no diversificado a 1 mes</b>		
Nivel de confianza	Operación	Resultado
Al 95%	$(0.70047089) + (1.23845065)$	1.938921538
Al 99%	$(0.99068934) + (1.75156439)$	2.742253732
<b>Valor en Riesgo no diversificado a 2 meses</b>		
Nivel de confianza	Operación	Resultado
Al 95%	$(0.99061543) + (1.75143371)$	2.742049135
Al 99%	$(1.4010463) + (2.47708612)$	3.878132419

Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, se calculó el “Valor en Riesgo diversificado del portafolio”. Es importante recordar que este valor es el resultado de multiplicar la última tasa de interés por la volatilidad de los rendimientos por la última Duración Modificada de cada bono, es decir; los datos de mayo de 2019.

Al igual que en el caso de los CETES, aunque el portafolio tiene dos horizontes temporales, el resultado de dicho cálculo es el mismo para ambos horizontes, pues la temporalidad no interviene en él.

**Tabla 3.23: Valor en Riesgo diversificado del portafolio de Bonos M**

<b>Valor en Riesgo diversificado del portafolio</b>		
Bono	Operación	Resultado
a 3 años	$(7.82\%) * (0.035543761) * (5.388154247)$	0.014976494
a 5 años	$(7.57\%) * (0.040828721) * (8.292624124)$	0.025630297

Fuente: Elaboración propia.

Seguido de eso, se construyó la matriz de volatilidad de los rendimientos, llamada “Matriz 1” o “Matriz R”, cuya diagonal está conformada por los resultados obtenidos en la Tabla 3.23.

**Tabla 3.24: Matriz 1. Volatilidad de los rendimientos de los Bonos M**

<b>Matriz 1: Volatilidad de los rendimientos</b>	
0.014976494	0
0	0.025630297

Fuente: Elaboración propia.

Después, se construyó la matriz de correlaciones de rendimientos de tasas de interés, llamada “Matriz 2” o “Matriz C”.

**Tabla 3.25: Matriz 2. Correlaciones de rendimientos de tasas de interés de los Bonos M**

<b>Matriz 2: Correlaciones de rendimientos</b>	
1	0.47066301
0.47066301	1

Fuente: Elaboración propia.

Se multiplicó la 1 por la 2, y la matriz resultante fue llamada “Matriz 3”

**Tabla 3.26: Matriz 3 de Bonos M**

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{Matriz 3: } 1 * 2} \\
 \left[ \begin{array}{cc} 0.014976494 & 0 \\ 0 & 0.025630297 \end{array} \right] \\
 * \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0.47066301 \\ 0.47066301 & 1 \end{array} \right] \\
 = \left[ \begin{array}{cc} 0.01497649 & 0.00704888 \\ 0.01206323 & 0.0256303 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Fuente: Elaboración propia.

Y ésta última se multiplicó por la Matriz 1:

**Tabla 3.27: Matriz 4 de CETES**

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{Matriz 4: } 3 * 1} \\
 \left[ \begin{array}{cc} 0.01497649 & 0.00704888 \\ 0.01206323 & 0.0256303 \end{array} \right] \\
 * \left[ \begin{array}{cc} 0.014976494 & 0 \\ 0 & 0.025630297 \end{array} \right] \\
 = \left[ \begin{array}{cc} 0.0002243 & 0.00018066 \\ 0.00018066 & 0.00065691 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenidos los resultados de la Matriz 4, se determinó el peso específico que deben tener los bonos en el portafolio. Para ello, en primer lugar, se utilizó el último precio de cada uno. Dichos precios se sumaron para obtener un bono total, es decir:

**Tabla 3.28: Bono total (Bonos M)**

Bono	Precio
a 3 años	98.50160368
a 5 años	101.7626576
Bono Total	200.2642613

Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, cada precio se dividió por el bono total, formando una nueva matriz llamada “W”, y se obtuvo la matriz transpuesta, la cual representa los pesos de cada bono.

**Tabla 3.29: Matriz W de Bonos M**

Matriz W: Cálculo de los pesos del portafolio	
Bono	Peso
a 3 años	0.49185812
a 5 años	0.50814188
Suma	1

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 3.30: Matriz W transpuesta de Bonos M**

Matriz W transpuesta	
0.49185812	0.50814188

Fuente: Elaboración propia.

Al igual que en el caso de los CETES, los pesos indican el porcentaje que deberá invertirse en cada uno de los bonos, por lo que en la Tabla 3.29 se realizó la suma de los pesos con el fin de corroborar que al final estuviera cubierto el 100% de la inversión.

Para calcular la volatilidad del portafolio fue necesario obtener una nueva matriz, resultado de multiplicar la W transpuesta por la 4.

**Tabla 3.31: Matriz 5 de Bonos M**

$$\begin{aligned} & \boxed{\text{Matriz 5: } W \text{ transpuesta} * 4} \\ & \left[ \begin{array}{cc} 0.49185812 & 0.50814188 \end{array} \right] \\ & * \left[ \begin{array}{cc} 0.0002243 & 0.00018066 \\ 0.00018066 & 0.00065691 \end{array} \right] \\ & = \left[ \begin{array}{cc} 0.00020212 & 0.00042267 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, esa nueva matriz se multiplicó por la matriz W:

**Tabla 3.32: Matriz 6 de Bonos M**

$$\begin{aligned} & \boxed{\text{Matriz 6: } 5 * W} \\ & \left[ \begin{array}{cc} 0.00020212 & 0.00042267 \end{array} \right] \\ & * \left[ \begin{array}{c} 0.49185812 \\ 0.50814188 \end{array} \right] \\ & = \left[ \begin{array}{c} 0.00031419 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Fuente: Elaboración propia.

Y de ese resultado se obtuvo la raíz cuadrada para obtener la volatilidad del portafolio.

**Tabla 3.33: Volatilidad del portafolio de Bonos M**

<b>Volatilidad del portafolio</b>
$(0.00031419)^{(1/2)} = 0.01772544$

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente se calculó el Valor en Riesgo del portafolio para ambas temporalidades, cuya metodología es la misma que la utilizada en el caso de los CETES y se encuentra en el apartado de anexos. Lo que dicha metodología indica es que el VaR del portafolio es simplemente el resultado de multiplicar el valor asociado al nivel de confianza por la volatilidad del portafolio por el bono total por la raíz cuadrada de la temporalidad.

**Tabla 3.34: Valor en Riesgo del portafolio de Bonos M**

<b>Valor en Riesgo a 1 mes</b>		
<b>Nivel de confianza</b>	<b>Operación</b>	<b>Valor</b>
95%	$-(1.644853627) * (0.01772544) * (200.2642613) * ((1/12) ^ (1/2))$	1.685532112
99%	$-(2.326347874) * (0.01772544) * (200.2642613) * ((1/12) ^ (1/2))$	2.383880231
<b>Valor en Riesgo a 2 meses</b>		
<b>Nivel de confianza</b>	<b>Operación</b>	<b>Valor</b>
95%	$-(1.644853627) * (0.01772544) * (200.2642613) * ((2/12) ^ (1/2))$	2.383702372
99%	$-(2.326347874) * (0.01772544) * (200.2642613) * ((2/12) ^ (1/2))$	3.371315754

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en el Valor en Riesgo del portafolio indican que, en caso de invertirse en él, la pérdida máxima que podría presentarse en un mes con un 95% de confianza sería de \$1.6855 y con un 99% sería de \$2.3838. Para dos meses, la pérdida máxima con un 95% de confianza sería de \$2.3837 y con un 99% sería de \$3.3713. En cualquier caso, la pérdida del portafolio es menor que la pérdida que se generaría si no se invirtiera la cantidad adecuada en cada bono.

### **3.3.8 Rentabilidad esperada del portafolio**

La rentabilidad esperada mensual del portafolio se calculó de la misma forma que en el caso de los CETES; se sumaron los productos de los pesos de los Bonos M por el rendimiento esperado mensual de cada uno.

Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

**Tabla 3.35: Rentabilidad esperada del portafolio de Bonos M**

<b>Rentabilidad esperada</b>	
Operación	Valor
$(0.49185812) * (0.001824414) +$ $(0.50814188) * (0.00090752)$	0.001358502

Fuente: Elaboración propia.

Cabe mencionar que el resultado obtenido nuevamente es la rentabilidad esperada en cuanto a la tasa de interés y no en cuanto a precios.

Comparando este valor con los rendimientos esperados de cada uno, es posible ver que si se invirtiera en el portafolio, se obtendría un rendimiento intermedio a lo que ofrecen los activos por separado, lo que resulta adecuado pues, además, se compensa con una disminución en el VaR.

### **3.3.9 Comparación: datos reales contra resultados obtenidos**

Ya que el VaR mide la pérdida del portafolio en términos monetarios, en última instancia se calculó el rendimiento real de junio y julio 2019 para posteriormente calcular el rendimiento monetario que tuvo el portafolio en ambos meses y así poder hacer una comparación con los resultados de mayo 2019.

La siguiente tabla muestra la rentabilidad obtenida en junio y julio 2019:

**Tabla 3.36: Resultados de Bonos M de junio y julio 2019**

<b>Rentabilidad a junio</b>	
Rendimiento real	0.007395312
Ganancia monetaria	1.481016699
<b>Rentabilidad a julio</b>	
Rendimiento real	0.01083114
Ganancia monetaria	2.169090343

Fuente: Elaboración propia.

A diferencia del caso de los CETES, el rendimiento que tuvo el portafolio de Bonos M en ambos meses superó al rendimiento esperado. Además, con base en los datos de la tabla anterior, puede decirse que el resultado obtenido del VaR fue adecuado, pues ninguno excede el VaR calculado con los diferentes niveles de confianza.

Durante este capítulo, se analizó el comportamiento de los instrumentos financieros del mercado de dinero (CETES a 28, 91 y 182 días, así como Bonos M a 3 y 5 años) durante el periodo 2017-2019 y se construyeron dos portafolios de inversión; uno con bonos cupón cero (CETES) y otro con bonos con cupón (Bonos M). En primera instancia, se explicó la selección de los activos que comprenden la estructura de cada portafolio. Posteriormente, se realizó un análisis de sensibilidad en los precios de los bonos seleccionados por medio de la Duración, Duración Modificada y Convexidad, así como un análisis del rendimiento y del Valor en Riesgo para los meses de junio y julio de 2019. Finalmente, la evidencia empírica mostró que el inversionista tiene mejores resultados en los portafolios de bonos con y sin cupones que de manera individual.

## Conclusiones

El mercado cuenta con muchas más opciones de inversión, no solo las acciones tradicionales que presentan altos índices de volatilidad u otros activos que actualmente son dominados por una gran incertidumbre y que presentan menores volúmenes de negociación. A diferencia de dichos activos, los bonos con tasa de interés fija garantizan otorgar el rendimiento pactado, aunque éste sea más pequeño que el que ofrecen las otras opciones, además de tener volatilidades más pequeñas y mayores volúmenes de negociación.

En el presente trabajo se analizaron los precios de los CETES y de los Bonos M en el periodo de tiempo seleccionado y se obtuvo que la mayoría de los bonos presentan ganancias en el precio debido a que éste es menor que el Valor Nominal, es decir; la cantidad de dinero que se obtiene al finalizar el plazo es mayor que la cantidad de dinero que se paga por adquirir el bono. La diferencia entre ambos, hace que el tenedor del activo tenga una ganancia. Además, pudo observarse que los precios presentan una tendencia bajista.

Al analizar las tasas de interés de ambos bonos, se observó que éstas presentan una tendencia alcista, con lo cual es posible ver la relación inversa existente entre el precio y la tasa, es decir; a medida que la tasa de interés sube, el precio baja y viceversa. Dicha tendencia representa una gran oportunidad para obtener ganancias más grandes en el precio, por lo que es recomendable llevar a cabo la adquisición de muchos de estos activos.

En cuanto a los rendimientos de las tasas, se observó que la mayoría de ellos fueron positivos durante los meses analizados, tanto para los CETES como para los Bonos M, además arrojaron una volatilidad muy pequeña en cada bono. Esta volatilidad fue un indicador muy importante, pues muestra en una sola cifra que los cambios que presentaron las tasas fueron mínimos. Otro indicador importante fue el rendimiento esperado de cada bono, pues a pesar de ser bastante pequeño, todos los bonos presentaron un rendimiento positivo.

Las tres medidas de sensibilidad arrojaron que, en general, los bonos seleccionados tienen una exposición muy pequeña a los cambios en la tasa de interés. Sin embargo, ante un cambio de 1%, el cálculo del precio por medio de la Duración Modificada es el que más se aproxima al precio real que tendrían los CETES, mientras que el cálculo por medio de la Convexidad es el que más se aproxima al precio real que tendrían los Bonos M. Lo anterior se debe a que

la Duración Modificada es eficiente cuando hay cambios pequeños en la tasa de rendimiento en periodos cortos de tiempo, mientras que la Convexidad es eficiente cuando las temporalidades de los bonos son más grandes. Los CETES, al ser de 182 días el de mayor plazo, están expuestos a cambios más pequeños en contraste con los Bonos M, al ser de un plazo más grande; 3 y 5 años.

El método utilizado para la conformación del portafolio ofrece una alternativa de inversión que permite identificar una adecuada distribución del dinero en cada bono para que el inversionista con una gran aversión al riesgo pueda realizar operaciones en el mercado con una participación del 100% de su presupuesto.

El portafolio construido también brinda a los inversionistas una mejor opción en cuanto a rentabilidad-riesgo, pues con la ponderación obtenida en cada bono, se obtiene un Valor en Riesgo más pequeño y una rentabilidad más grande que si se invirtiera en cada uno por separado, siendo la inversión en portafolios de bonos adecuada para el inversionista por lo que se acepta la hipótesis planteada.

El VaR obtenido a través del método delta-normal mostró en ambos meses de junio y julio cifras de mayores pérdidas respecto a los resultados reales, por lo que dicho VaR calculado a diferentes niveles de confianza es viable, lo que permite a los inversionistas ampliar su panorama en cuanto a los riesgos que podrían presentarse.

Entonces, con base en la información anterior, es posible decir que resulta adecuado invertir en estos activos. Asimismo, durante el desarrollo del trabajo se cumplieron los objetivos específicos y el objetivo general, pues se analizó el impacto de las tasas de interés, así como el comportamiento de instrumentos de bajo riesgo y se demostró que invertir en ellos es mejor que hacerlo en activos riesgosos, dadas las condiciones actuales que se tienen en México.

Sin embargo, como se mencionó al inicio, es importante destacar que la investigación tiene como principal limitación que el modelo utilizado, Delta-Normal, asume el supuesto de normalidad en las series financieras. Por este motivo, es recomendable que investigaciones futuras rompan dicho supuesto mediante la construcción de los portafolios de inversión a través de la metodología de Cópulas, así como realizar pruebas de validación para el Valor en Riesgo como la de *backtesting*.

## Referencias de consulta

- Banxico. (7 de Junio de 2019). *Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal*. Obtenido de <http://www.banxico.org.mx/mercados/d/%7B1FD9FBB3-A8B6-1905-6BE0-0896E00682BB%7D.pdf>
- Banxico. (6 de Junio de 2019). *Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija*. Obtenido de <http://www.banxico.org.mx/mercados/d/%7B77F7E7D0-8EDF-B4C1-406A-32968005EBC9%7D.pdf>
- Banxico. (7 de Junio de 2019). *Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión*. Obtenido de <http://www.banxico.org.mx/mercados/d/%7B52319AD4-4B78-6F95-E313-7AC67498B728%7D.pdf>
- Banxico. (7 de Junio de 2019). *Bonos de Protección al Ahorro*. Obtenido de <http://www.banxico.org.mx/mercados/d/%7BB734EC94-1B23-D2DC-1806-D7967C456D41%7D.pdf>
- Banxico. (7 de Junio de 2019). *Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México*. Obtenido de <http://www.banxico.org.mx/politica-monetaria/d/%7BDF6EE883-9992-1714-E9BB-F488093CD036%7D.pdf>
- Banxico. (03 de Julio de 2019). *Glosario*. Obtenido de <http://www.anterior.banxico.org.mx/divulgacion/glosario/glosario.html#T>
- Banxico. (6 de Junio de 2019). *Mercado de deuda en México*. Obtenido de <http://www.anterior.banxico.org.mx/divulgacion/sistema-financiero/sistema-financiero.html#ElmercadodedeudaenMexico>
- Banxico. (6 de Junio de 2019). *Tipos de instrumentos y su colocación*. Obtenido de <http://www.anterior.banxico.org.mx/elib/mercado-valores-gub/OEBPS/Text/ii.html>
- BBVA. (11 de Junio de 2019). *Renta Fija III: Gestión de Riesgos*. Obtenido de Duración y Convexidad: <https://www.bbva.es/estaticos/mult/renta-fija-gestion-riesgos.pdf>
- Caldeira, F., & Moura, G. V. (3 de Junio de 2013). *Measuring risk in fixed income portfolios using yield curve models*. Florianopolis, Santa Catarina , Brasil.

- Govinden, L. P. (2005). *Matemáticas financieras*. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill.
- Jorion, P. (2007). *Value at Risk - The New Benchmark for Managing Financial Risk*. New York: McGraw-Hill.
- Morgan J. (1994). *RiskMetrics*. New York.
- Morgan, J. (1996). *RiskMetrics*. New York.
- Olivares, H. A., Bucio, C., Agudelo, G. A., Franco, L. C., & Franco, L. E. (2017). Valor en Riesgo: Un análisis del modelo de cópulas elípticas para el sector de vivienda en México. *Espacios*, 27.
- Osorio, J. M. (19 de Abril de 2015). DERIVADOS DE TASA DE INTERES. *Finanzas Internacionales*, (pág. 6).
- Sevilla, A. (9 de Junio de 2019). *Economipedia*. Obtenido de Duración de un bono: <https://economipedia.com/definiciones/duracion-de-un-bono.html>
- Vidaurri, H. (2012). *Matemáticas financieras*. México D.F: Cengage Learning Editores.

## Anexos

### Anexo 2.1 Precio del CETE a partir de su tasa de descuento

Si  $d$  es la tasa de descuento de un CETE, entonces:

$$d = \frac{i}{\left[1 + i\left(\frac{t}{360}\right)\right]}$$

Despejando  $i$ :

$$i = d \left[1 + i\left(\frac{t}{360}\right)\right]$$

$$i = d + di\left(\frac{t}{360}\right)$$

$$i - di\left(\frac{t}{360}\right) = d$$

$$i \left[1 - d\left(\frac{t}{360}\right)\right] = d$$

$$i = \frac{d}{\left[1 - d\left(\frac{t}{360}\right)\right]}$$

Sustituyendo  $i$  en la ecuación (2.1):

$$P = \frac{VN}{\left[1 + i\left(\frac{t}{360}\right)\right]}$$

$$P = \frac{VN}{\left\{ 1 + \left[ \frac{d}{1 - d \left( \frac{t}{360} \right)} \right] \left( \frac{t}{360} \right) \right\}}$$

$$P = \frac{VN}{\left( 1 + \frac{d t}{360 - d t} \right)}$$

$$P = \frac{VN}{\left( \frac{360 - d t + d t}{360 - d t} \right)}$$

$$P = \frac{VN}{\left( \frac{360}{360 - d t} \right)}$$

$$P = \frac{VN(360 - d t)}{360}$$

$$P = VN \left( \frac{360 - d t}{360} \right)$$

Finalmente se obtiene la ecuación del precio del CETE a partir de su tasa de descuento:

$$P = VN \left( 1 - \frac{d t}{360} \right)$$

## Anexo 2.2: Obtención de la ecuación de la Duración de un bono cuponado

Como se mencionó en el capítulo 2, su obtención se lleva a cabo calculando la primera derivada del precio del bono con respecto a la tasa de interés. La ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{I_t}{(1+i)^t} + \frac{VN}{(1+i)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{I_t}{(1+i)^t} + \frac{VN}{(1+i)^n} \right] = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \underbrace{\frac{I}{(1+i)}}_a + \underbrace{\frac{I}{(1+i)^2}}_b + \dots + \underbrace{\frac{I}{(1+i)^n}}_n + \underbrace{\frac{VN}{(1+i)^n}}_m \right]$$

Obteniendo las derivadas de cada término:

$$\frac{d a}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \frac{I}{(1+i)} \right] = \left[ \frac{(1+i)d(I) - I d(1+i)}{(1+i)^2} \right] = -\frac{I}{(1+i)^2}$$

$$\frac{d b}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \frac{I}{(1+i)^2} \right] = \left[ \frac{(1+i)^2 d(I) - I d(1+i)^2}{(1+i)^4} \right] = -\frac{2I(1+i)}{(1+i)^4} = -\frac{2I}{(1+i)^3}$$

⋮

$$\frac{d n}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \frac{I}{(1+i)^n} \right] = -\frac{nI}{(1+i)^{n+1}}$$

$$\frac{d m}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \frac{M}{(1+i)^n} \right] = -\frac{nM}{(1+i)^{n+1}}$$

Sustituyendo en la derivada del precio:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d(1+i)} &= -\frac{I}{(1+i)^2} - \frac{2I}{(1+i)^3} - \dots - \frac{nI}{(1+i)^{n+1}} - \frac{nVN}{(1+i)^{n+1}} \\ &= -I(1+i)^{-2} - 2I(1+i)^{-3} - \dots - nI(1+i)^{-(n+1)} - nVN(1+i)^{-(n+1)}\end{aligned}$$

Multiplicando la última ecuación por  $\frac{(1+i)}{P}$  se tiene que:

$$\left[ \frac{dP}{d(1+i)} \right] \left[ \frac{(1+i)}{P} \right] = \frac{(1+i)}{P} \left[ -I(1+i)^{-2} - 2I(1+i)^{-3} - \dots - nI(1+i)^{-(n+1)} - nVN(1+i)^{-(n+1)} \right]$$

$$\frac{\frac{dP}{d(1+i)}}{(1+i)} = \frac{1}{P} \left[ -I(1+i)^{-1} - 2I(1+i)^{-2} - \dots - nI(1+i)^{-n} - nVN(1+i)^{-n} \right]$$

$$\frac{\frac{dP}{d(1+i)}}{(1+i)} = -\frac{1}{P} \left[ \frac{I}{(1+i)} + \frac{2I}{(1+i)^2} + \dots + \frac{nI}{(1+i)^n} + \frac{nVN}{(1+i)^n} \right]$$

$$-\frac{\frac{dP}{d(1+i)}}{(1+i)} = \frac{1}{P} \left[ \frac{I}{(1+i)} + \frac{2I}{(1+i)^2} + \dots + \frac{nI}{(1+i)^n} + \frac{nVN}{(1+i)^n} \right]$$

Finalmente se obtiene la ecuación de la Duración de un bono cuponado:

$$D = \frac{1}{P} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{(t)I}{(1+i)^t} + \frac{nVN}{(1+i)^n} \right]$$

### Anexo 2.3: Obtención de la ecuación de la Convexidad de un bono cuponado

Para obtener la ecuación de esta medida de sensibilidad, tiene que calcularse la segunda derivada del precio del bono con respecto a la tasa de interés.

Recordando que la ecuación de la Duración es la primera derivada del precio del bono, ésta a su vez, se deriva con respecto a la tasa de interés:

$$D = \frac{1}{P} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{(t)I}{(1+i)^t} + \frac{nVN}{(1+i)^n} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left\{ \frac{1}{P} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{(t)I}{(1+i)^t} + \frac{nVN}{(1+i)^n} \right] \right\}$$

$$= \frac{d}{d(1+i)} \left\{ \frac{1}{P} \left[ \underbrace{\frac{I}{(1+i)}}_a + \underbrace{\frac{2I}{(1+i)^2}}_b + \dots + \underbrace{\frac{nI}{(1+i)^n}}_n + \underbrace{\frac{nVN}{(1+i)^n}}_m \right] \right\}$$

Obteniendo las derivadas de cada término:

$$\Rightarrow \frac{da}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \frac{I}{(1+i)} \right] = \left[ \frac{(1+i)d(I) - I d(1+i)}{(1+i)^2} \right] = -\frac{I}{(1+i)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{db}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \frac{2I}{(1+i)^2} \right] = \left[ \frac{(1+i)^2 d(2I) - 2I d(1+i)^2}{(1+i)^4} \right] = -\frac{4I(1+i)}{(1+i)^4} = -\frac{4I}{(1+i)^3}$$

⋮

$$\Rightarrow \frac{dn}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \frac{nI}{(1+i)^n} \right] = -\frac{n^2 I}{(1+i)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{d(1+i)} = \frac{d}{d(1+i)} \left[ \frac{nVN}{(1+i)^n} \right] = -\frac{n^2 VN}{(1+i)^{n+1}}$$

Sustituyendo en la derivada de la Duración:

$$\frac{dD}{d(1+i)} = \frac{1}{P} \left[ -\frac{I}{(1+i)^2} - \frac{4I}{(1+i)^3} - \dots - \frac{n^2 I}{(1+i)^{n+1}} - \frac{n^2 VN}{(1+i)^{n+1}} \right]$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{P} \left[ -I(1+i)^{-2} - 4I(1+i)^{-3} - \dots - n^2 I(1+i)^{-(n+1)} - n^2 VN(1+i)^{-(n+1)} \right]$$

Multiplicando la última ecuación por  $\frac{(1+i)}{P}$  se tiene que:

$$\left[ \frac{dD}{d(1+i)} \right] \left[ \frac{(1+i)}{P} \right] = \left[ \frac{(1+i)}{P} \right] \left\{ \frac{1}{P} \left[ -I(1+i)^{-2} - 4I(1+i)^{-3} - \dots - n^2 I(1+i)^{-(n+1)} - n^2 VN(1+i)^{-(n+1)} \right] \right\}$$

$$\frac{\frac{dD}{P}}{\frac{d(1+i)}{(1+i)}} = \frac{1}{P^2} \left[ -I(1+i)^{-2} - 4I(1+i)^{-3} - \dots - n^2 I(1+i)^{-(n+1)} - n^2 VN(1+i)^{-(n+1)} \right]$$

$$\frac{\frac{dD}{P}}{\frac{d(1+i)}{(1+i)}} = -\frac{1}{P^2} \left[ \frac{I}{(1+i)^2} + \frac{4I}{(1+i)^3} + \dots + \frac{n^2 I}{(1+i)^{n+1}} + \frac{n^2 VN}{(1+i)^{n+1}} \right]$$

$$-\frac{\frac{dD}{P}}{\frac{d(1+i)}{(1+i)}} = \frac{1}{P^2} \left[ \frac{I}{(1+i)^2} + \frac{4I}{(1+i)^3} + \dots + \frac{n^2 I}{(1+i)^{n+1}} + \frac{n^2 VN}{(1+i)^{n+1}} \right]$$

Finalmente se obtiene la ecuación de la Convexidad de un bono cuponado:

$$C = \frac{1}{P^2} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{(t^2)I}{(1+i)^{t+1}} + \frac{n^2 VN}{(1+i)^{n+1}} \right]$$

**Anexo 3.1: Información histórica de CETES (enero 2017-mayo 2019)**

<b>Fecha</b>	<b>Tasa de rendimiento (%) CETES a 28 días</b>	<b>Tasa de rendimiento (%) CETES a 91 días</b>	<b>Tasa de rendimiento (%) CETES a 182 días</b>
01/2017	5.83	6.25	6.54
02/2017	6.06	6.37	6.64
03/2017	6.32	6.56	6.74
04/2017	6.5	6.66	6.79
05/2017	6.56	6.82	6.97
06/2017	6.82	7.05	7.2
07/2017	6.99	7.08	7.17
08/2017	6.94	7.11	7.16
09/2017	6.99	7.09	7.15
10/2017	7.03	7.09	7.19
11/2017	7.02	7.13	7.23
12/2017	7.17	7.31	7.41
01/2018	7.25	7.36	7.56
02/2018	7.4	7.56	7.74
03/2018	7.47	7.65	7.79
04/2018	7.46	7.64	7.64
05/2018	7.51	7.74	7.8
06/2018	7.64	7.88	7.99
07/2018	7.73	7.9	8.06
08/2018	7.73	7.89	8.02
09/2018	7.69	7.92	8.09
10/2018	7.69	7.89	8.05
11/2018	7.83	8.23	8.3
12/2018	8.02	8.29	8.55
01/2019	7.95	8.23	8.45
02/2019	7.93	8.12	8.23
03/2019	8.02	8.09	8.18
04/2019	7.78	8.06	8.14
05/2019	8.07	8.22	8.25

Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

**Anexo 3.2: Información histórica de Bonos M (enero 2017-mayo 2019)**

<b>Fecha</b>	<b>Tasa de rendimiento (%) Bonos a 3 años</b>	<b>Tasa de rendimiento (%) Bonos a 5 años</b>
01/2017	7.39	7.36
02/2017	6.94	7.24
03/2017	7.04	7.08
04/2017	6.97	6.95
05/2017	7.01	7.04
06/2017	7.28	7.05
06/2017	6.65	6.63
07/2017	6.82	6.77
08/2017	6.72	6.78
09/2017	6.72	6.71
10/2017	7.06	7.1
11/2017	7.05	7.1
12/2017	7.17	7.75
01/2018	7.54	7.46
02/2018	7.47	7.65
03/2018	7.47	7.44
04/2018	7.19	7.21
05/2018	7.4	7.73
05/2018	7.65	7.92
06/2018	7.79	7.65
07/2018	7.83	7.59
08/2018	7.83	8
09/2018	7.96	7.76
10/2018	7.91	8.57
11/2018	8.68	9.02
12/2018	8.87	8.79
01/2019	8.56	8.44
02/2019	8.17	8.1
03/2019	8.01	7.92
04/2019	7.87	7.89
05/2019	7.98	7.94
05/2019	7.82	7.57

Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico.

### Anexo 3.3: Resultados del cálculo del precio de los CETES

Fecha	Precio del CETE a 28 días	Precio del CETE a 91 días	Precio del CETE a 182 días
01/2017	99.54860239	98.44471031	96.79948632
02/2017	99.5308778	98.41532195	96.75213822
03/2017	99.51084889	98.36882626	96.70483642
04/2017	99.49698745	98.34437249	96.68120286
05/2017	99.49236783	98.30527173	96.59621761
06/2017	99.47235442	98.24911883	96.48784253
07/2017	99.45927309	98.24179927	96.50196462
08/2017	99.46312018	98.23448079	96.5066729
09/2017	99.45927309	98.23935965	96.51138164
10/2017	99.45619562	98.23935965	96.49254944
11/2017	99.45696497	98.22960242	96.47372458
12/2017	99.44542601	98.18571883	96.38910353
01/2018	99.43927299	98.17353591	96.31869931
02/2018	99.42773813	98.12483441	96.23434989
03/2018	99.42235611	98.1029345	96.21094571
04/2018	99.42312494	98.10536734	96.28119243
05/2018	99.41928093	98.08104437	96.20626623
06/2018	99.40928792	98.04701245	96.1174427
07/2018	99.40237086	98.04215268	96.08475957
08/2018	99.40237086	98.04458251	96.10343292
09/2018	99.40544499	98.03729339	96.07075932
10/2018	99.40544499	98.04458251	96.08942723
11/2018	99.39468636	97.9620359	95.97287167
12/2018	99.38008909	97.94748328	95.85659853
01/2019	99.38546653	97.9620359	95.90307396
02/2019	99.38700305	97.98872694	96.00547871
03/2019	99.38008909	97.99600884	96.02878303
04/2019	99.39852846	98.00329182	96.04743463
05/2019	99.37624841	97.96446176	95.99616015

Fuente: Elaboración propia.

### Anexo 3.4: Resultados del cálculo de la Duración y la Convexidad de los CETES

Fecha	CETES 28 días			CETES 91 días			CETES 182 días		
	Duración	Duración*	Convexidad	Duración	Duración*	Convexidad	Duración	Duración*	Convexidad
01/2017	0.077777778	0.077426691	5.99489E-05	0.252777778	0.248846351	0.000619245	0.505555556	0.489375181	0.002394881
02/2017	0.077777778	0.077412905	5.99276E-05	0.252777778	0.248772064	0.000618875	0.505555556	0.48913581	0.002392538
03/2017	0.077777778	0.077397327	5.99035E-05	0.252777778	0.248654533	0.000618291	0.505555556	0.488896673	0.0023902
04/2017	0.077777778	0.077386546	5.98868E-05	0.252777778	0.248592719	0.000617983	0.505555556	0.488777192	0.002389031
05/2017	0.077777778	0.077382953	5.98812E-05	0.252777778	0.248493881	0.000617492	0.505555556	0.488347545	0.002384833
06/2017	0.077777778	0.077367387	5.98571E-05	0.252777778	0.248351939	0.000616787	0.505555556	0.487799648	0.002379485
07/2017	0.077777778	0.077357212	5.98414E-05	0.252777778	0.248333437	0.000616695	0.505555556	0.487871043	0.002380182
08/2017	0.077777778	0.077360205	5.9846E-05	0.252777778	0.248314938	0.000616603	0.505555556	0.487894846	0.002380414
09/2017	0.077777778	0.077357212	5.98414E-05	0.252777778	0.24832727	0.000616664	0.505555556	0.487918652	0.002380646
10/2017	0.077777778	0.077354819	5.98377E-05	0.252777778	0.24832727	0.000616664	0.505555556	0.487823444	0.002379717
11/2017	0.077777778	0.077355417	5.98386E-05	0.252777778	0.248302606	0.000616542	0.505555556	0.487728274	0.002378789
12/2017	0.077777778	0.077346442	5.98247E-05	0.252777778	0.248191678	0.000615991	0.505555556	0.487300468	0.002374617
01/2018	0.077777778	0.077341657	5.98173E-05	0.252777778	0.248160882	0.000615838	0.505555556	0.486944535	0.00237115
02/2018	0.077777778	0.077332685	5.98034E-05	0.252777778	0.248037776	0.000615227	0.505555556	0.486518102	0.002366999
03/2018	0.077777778	0.077328499	5.9797E-05	0.252777778	0.247982418	0.000614953	0.505555556	0.486399781	0.002365847
04/2018	0.077777778	0.077329097	5.97979E-05	0.252777778	0.247988567	0.000614983	0.505555556	0.486754917	0.002369303
05/2018	0.077777778	0.077326107	5.97933E-05	0.252777778	0.247927084	0.000614678	0.505555556	0.486376124	0.002365617
06/2018	0.077777778	0.077318335	5.97812E-05	0.252777778	0.247841059	0.000614252	0.505555556	0.485927071	0.002361251
07/2018	0.077777778	0.077312955	5.97729E-05	0.252777778	0.247828775	0.000614191	0.505555556	0.48576184	0.002359646
08/2018	0.077777778	0.077312955	5.97729E-05	0.252777778	0.247834917	0.000614221	0.505555556	0.485856244	0.002360563
09/2018	0.077777778	0.077315346	5.97766E-05	0.252777778	0.247816492	0.00061413	0.505555556	0.485691061	0.002358958
10/2018	0.077777778	0.077315346	5.97766E-05	0.252777778	0.247834917	0.000614221	0.505555556	0.485785438	0.002359875
11/2018	0.077777778	0.077306978	5.97637E-05	0.252777778	0.247626257	0.000613188	0.505555556	0.485196185	0.002354153
12/2018	0.077777778	0.077295625	5.97461E-05	0.252777778	0.247589472	0.000613005	0.505555556	0.484608359	0.002348453
01/2019	0.077777778	0.077299807	5.97526E-05	0.252777778	0.247626257	0.000613188	0.505555556	0.484843318	0.00235073
02/2019	0.077777778	0.077301002	5.97544E-05	0.252777778	0.247693726	0.000613522	0.505555556	0.485361031	0.002355753
03/2019	0.077777778	0.077295625	5.97461E-05	0.252777778	0.247712133	0.000613613	0.505555556	0.485478848	0.002356897
04/2019	0.077777778	0.077309967	5.97683E-05	0.252777778	0.247730543	0.000613704	0.505555556	0.485573142	0.002357813
05/2019	0.077777778	0.077292638	5.97415E-05	0.252777778	0.247632389	0.000613218	0.505555556	0.485313921	0.002355296

Fuente: Elaboración propia.

**Anexo 3.5: Precio de los CETES a 28 días ante un cambio de 1% en la tasa de  
rendimiento**

Fecha	Precio del CETE ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento			Precio del CETE ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento		
	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad
01/2017	99.62573931	99.62602908	99.54866234	99.47158484	99.4711757	99.54854244
02/2017	99.60798723	99.6082907	99.53093772	99.45388765	99.45346489	99.53081787
03/2017	99.58792729	99.58824622	99.5109088	99.43388972	99.43345157	99.51078899
04/2017	99.57404437	99.574374	99.49704734	99.42004971	99.41960091	99.49692757
05/2017	99.56941759	99.56975078	99.49242771	99.41543723	99.41498488	99.49230795
06/2017	99.54937317	99.54972181	99.47241428	99.39545476	99.39498704	99.47229457
07/2017	99.53627157	99.5366303	99.45933293	99.38239364	99.38191587	99.45921324
08/2017	99.54012462	99.54048038	99.46318003	99.38623479	99.38575998	99.46306033
09/2017	99.53627157	99.5366303	99.45933293	99.38239364	99.38191587	99.45921324
10/2017	99.53318934	99.53355044	99.45625546	99.37932093	99.3788408	99.45613579
11/2017	99.53395988	99.53432039	99.45702481	99.38008909	99.37960955	99.45690513
12/2017	99.52240305	99.52277245	99.44548583	99.36856796	99.36807957	99.44536618
01/2018	99.5162405	99.51661465	99.43933281	99.36242444	99.36193133	99.43921317
02/2018	99.50468778	99.50507081	99.42779793	99.3509074	99.35040544	99.42767833
03/2018	99.49929742	99.49968461	99.42241591	99.3455337	99.34502761	99.42229631
04/2018	99.50006744	99.50045403	99.42318473	99.34630134	99.34579584	99.42306514
05/2018	99.49621749	99.49660704	99.41934073	99.34246327	99.34195483	99.41922114
06/2018	99.486209	99.48660626	99.4093477	99.3324857	99.33196959	99.40922814
07/2018	99.47928123	99.47968381	99.40243063	99.32557932	99.3250579	99.40231108
08/2018	99.47928123	99.47968381	99.40243063	99.32557932	99.3250579	99.40231108
09/2018	99.48236012	99.48276033	99.40550477	99.3286487	99.32812964	99.40538521
10/2018	99.48236012	99.48276033	99.40550477	99.3286487	99.32812964	99.40538521
11/2018	99.47158484	99.47199334	99.39474612	99.31790669	99.31737938	99.3946266
12/2018	99.45696497	99.45738471	99.38014883	99.30333196	99.30279346	99.38002934
01/2019	99.46235074	99.46276634	99.38552628	99.3087011	99.30816672	99.38540678
02/2019	99.46388963	99.46430405	99.38706281	99.31023524	99.30970205	99.3869433
03/2019	99.45696497	99.45738471	99.38014883	99.30333196	99.30279346	99.38002934
04/2019	99.47543288	99.47583843	99.39858823	99.32174285	99.32121849	99.39846869
05/2019	99.45311835	99.45354105	99.37630816	99.29949721	99.29895578	99.37618867

Fuente: Elaboración propia.

**Anexo 3.6: Precio de los CETES a 91 días ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento**

Fecha	Precio del CETE ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento			Precio del CETE ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento		
	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad
01/2017	98.69029751	98.69355666	98.44532955	98.20034234	98.19586395	98.44409106
02/2017	98.66076237	98.66409402	98.41594083	98.17109968	98.16654989	98.41470308
03/2017	98.61403453	98.6174808	98.36944455	98.12483441	98.12017173	98.36820797
04/2017	98.58945871	98.59296521	98.34499047	98.10050178	98.09577977	98.34375451
05/2017	98.55016285	98.55376561	98.30588922	98.06159467	98.05677785	98.30465424
06/2017	98.49372992	98.49747077	98.24973562	98.00571972	98.00076689	98.24850204
07/2017	98.48637386	98.4901327	98.24241596	97.99843638	97.99346583	98.24118257
08/2017	98.47901891	98.48279573	98.2350974	97.99115412	97.98616586	98.23386419
09/2017	98.48392209	98.48768692	98.23997632	97.99600884	97.99103238	98.23874299
10/2017	98.48392209	98.48768692	98.23997632	97.99600884	97.99103238	98.23874299
11/2017	98.47411622	98.47790502	98.23021896	97.98629988	97.98129981	98.22898588
12/2017	98.43001394	98.43391051	98.18633482	97.94263337	97.93752715	98.18510284
01/2018	98.41777031	98.42169679	98.17415174	97.93051069	97.92537502	98.17292007
02/2018	98.36882626	98.37287219	98.12544964	97.88204995	97.87679664	98.12421919
03/2018	98.34681732	98.35091692	98.10354946	97.86025827	97.85495209	98.10231955
04/2018	98.34926227	98.35335591	98.10598233	97.86267909	97.85737878	98.10475236
05/2018	98.32481822	98.32897145	98.08165905	97.83847629	97.83311728	98.08042969
06/2018	98.29061696	98.29485351	98.0476267	97.80461247	97.79917139	98.0463982
07/2018	98.28573301	98.28998145	98.04276687	97.79977669	97.7943239	98.04153849
08/2018	98.28817492	98.29241742	98.04519673	97.80219452	97.79674759	98.04396828
09/2018	98.28084954	98.28510988	98.03790752	97.79494139	97.78947689	98.03667926
10/2018	98.28817492	98.29241742	98.04519673	97.80219452	97.79674759	98.04396828
11/2018	98.20521781	98.20966216	97.96264909	97.72005539	97.71440964	97.96142271
12/2018	98.19059285	98.19507275	97.94809629	97.70557456	97.69989381	97.94687027
01/2019	98.20521781	98.20966216	97.96264909	97.72005539	97.71440964	97.96142271
02/2019	98.23204155	98.23642067	97.98934046	97.74661471	97.74103321	97.98811342
03/2019	98.23935965	98.24372097	97.99662245	97.75386067	97.74829671	97.99539523
04/2019	98.24667885	98.25102236	98.00390553	97.7611077	97.75556128	98.00267812
05/2019	98.20765572	98.21209415	97.96507498	97.72246927	97.71682937	97.96384854

Fuente: Elaboración propia.

**Anexo 3.7: Precio de los CETES a 182 días ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento**

Fecha	Precio del CETE ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento			Precio del CETE ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento		
	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad
01/2017	97.27552861	97.2888615	96.8018812	96.3280806	96.31011114	96.79709144
02/2017	97.22771379	97.24127403	96.75453076	96.28119243	96.26300241	96.74974568
03/2017	97.17994595	97.1937331	96.70722662	96.23434989	96.21593975	96.70244622
04/2017	97.15607962	97.16998006	96.6835919	96.21094571	96.19242567	96.67881383
05/2017	97.07025783	97.08456516	96.59860245	96.12678482	96.10787007	96.59383278
06/2017	96.96081706	96.97564218	96.49022202	96.01945994	96.00004288	96.48546305
07/2017	96.97507794	96.98983566	96.5043448	96.03344525	96.01409358	96.49958444
08/2017	96.97983251	96.99456775	96.50905331	96.03810792	96.01877805	96.50429249
09/2017	96.98458753	96.99930029	96.51376229	96.04277105	96.02346299	96.50900099
10/2017	96.96557022	96.98037288	96.49492915	96.02412126	96.00472599	96.49016972
11/2017	96.94656036	96.96145285	96.47610337	96.00547871	95.9859963	96.47134579
12/2017	96.86110817	96.876404	96.39147815	95.92167675	95.90180307	96.38672892
01/2018	96.79001299	96.80564385	96.32107046	95.85195346	95.83175478	96.31632816
02/2018	96.70483642	96.72086799	96.23671689	95.76841919	95.74783179	96.23198289
03/2018	96.68120286	96.69734549	96.21331155	95.74524106	95.72454592	96.20857986
04/2018	96.75213822	96.76794735	96.28356174	95.81480914	95.79443751	96.27882313
05/2018	96.67647754	96.69264236	96.20863185	95.74060678	95.71989011	96.20390062
06/2018	96.58678403	96.60336977	96.11980395	95.65264062	95.63151563	96.11508145
07/2018	96.55378099	96.57052141	96.08711921	95.62027277	95.59899773	96.08239992
08/2018	96.57263711	96.58928917	96.10579348	95.638766	95.61757668	96.10107236
09/2018	96.53964374	96.55645038	96.07311827	95.60640754	95.58506826	96.06840036
10/2018	96.55849433	96.57521266	96.0917871	95.62489541	95.60364179	96.08706735
11/2018	96.44079874	96.45806785	95.97522582	95.5094634	95.48767548	95.97051751
12/2018	96.32338973	96.34120689	95.85894698	95.39430973	95.37199017	95.85425008
01/2019	96.37031901	96.38791728	95.90542469	95.44033786	95.41823064	95.90072323
02/2019	96.47372458	96.49083974	96.00783447	95.54175626	95.52011768	96.00312296
03/2019	96.4972568	96.51426187	96.03113992	95.56483596	95.54330418	96.02642613
04/2019	96.51609084	96.53300777	96.04979244	95.58330776	95.56186148	96.04507681
05/2019	96.4643149	96.48147407	95.99851545	95.5325275	95.51084623	95.99380486

Fuente: Elaboración propia.

### Anexo 3.8: Rendimientos de las tasas de interés de los CETES

Fecha	CETES a 28 días	CETES a 91 días	CETES a 182 días
02/2017	0.0386928	0.019018006	0.015174798
03/2017	0.042009408	0.029391133	0.014947961
04/2017	0.028082969	0.015128882	0.007391017
05/2017	0.009188426	0.023739987	0.026164283
06/2017	0.038868869	0.033168145	0.032465801
07/2017	0.024621084	0.004246291	-0.004175371
08/2017	-0.007178782	0.004228336	-0.001395674
09/2017	0.007178782	-0.002816903	-0.001397624
10/2017	0.00570615	0	0.005578815
11/2017	-0.001423488	0.005625894	0.005547864
12/2017	0.021142437	0.024932039	0.024591403
01/2018	0.011095814	0.006816659	0.020040751
02/2018	0.020478531	0.026811257	0.023530497
03/2018	0.009414999	0.011834458	0.006439172
04/2018	-0.001339585	-0.001308045	-0.019443257
05/2018	0.006680052	0.013004084	0.020726131
06/2018	0.017162137	0.017926216	0.024067026
07/2018	0.011711259	0.002534856	0.008722797
08/2018	0	-0.001266625	-0.004975135
09/2018	-0.005188079	0.003795071	0.008690309
10/2018	0	-0.003795071	-0.00495664
11/2018	0.018041726	0.04218988	0.030583423
12/2018	0.023975912	0.007263954	0.029675768
01/2019	-0.008766493	-0.007263954	-0.011764842
02/2019	-0.002518893	-0.013455861	-0.026380427
03/2019	0.011285386	-0.003701423	-0.006093864
04/2019	-0.030382084	-0.003715175	-0.004901971
05/2019	0.036597144	0.019656653	0.01342302

Fuente: Elaboración propia.

### Anexo 3.9: Metodología del Valor en Riesgo Delta-Normal

En esta tesis se obtendrá el Valor en Riesgo basado en el modelo planteado por J.P. Morgan; el Delta-Normal, el cual se determina de la siguiente manera:

Figura A.1: Valor en Riesgo Delta-Normal

$$VaR_{Portafolio} = -\Phi \left\{ (w_1, w_2, \dots, w_n) \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix} \times t \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Fuente: Elaboración propia.

Donde:

$\Phi$  : Nivel de significancia.

$w_i$  : Ponderación de la inversión realizada en cada bono del portafolio.

$\sigma_{ij}$  : Covarianza entre los rendimientos de los bonos i y j si  $i \neq j$  .

$\sigma_{ij}$  : Varianza entre los rendimientos de los bonos i y j si  $i = j$  .

$t$  : Horizonte temporal.

### Anexo 3.10: Resultados del cálculo del precio de los Bonos M

<b>Fecha</b>	<b>Precio del Bono a 3 años</b>	<b>Precio del Bono a 5 años</b>
01/2017	101.61485	96.45608612
02/2017	102.8269182	96.94138413
03/2017	102.556026	97.5930397
04/2017	102.7455574	98.12640367
05/2017	102.6372006	97.75677846
06/2017	101.9094888	97.71581273
06/2017	103.617541	99.45434466
07/2017	103.1531617	98.87072217
08/2017	103.4260126	98.82919299
09/2017	103.4260126	99.12033937
10/2017	102.5019539	97.51129437
11/2017	102.5289855	97.51129437
12/2017	102.2051886	94.89899784
01/2018	101.2147719	96.05390982
02/2018	101.4012312	95.29533877
03/2018	101.4012312	96.13418288
04/2018	102.1513459	103.2677419
05/2018	99.60297071	101.1023669
05/2018	98.94557316	100.3250828
06/2018	98.57977207	101.4318534
07/2018	98.47556457	101.6798327
08/2018	98.47556457	100
09/2018	98.13782914	100.9791479
10/2018	98.2675577	97.72084543
11/2018	96.29300589	95.96649716
12/2018	95.81334686	96.85827757
01/2019	96.59747929	98.23498618
02/2019	97.59527548	99.59546276
03/2019	98.0083122	100.3250828
04/2019	98.37149318	100.4473232
05/2019	98.08599699	100.2436907
05/2019	98.50160368	101.7626576

Fuente: Elaboración propia.

### Anexo 3.11: Resultados del cálculo de la Duración y la Convexidad de los Bonos M

Fecha	Bonos a 3 años			Bonos a 5 años		
	Duración	Duración*	Convexidad	Duración	Duración*	Convexidad
01/2017	5.456916596	5.356849166	0.298991042	8.667758855	8.509445351	0.820178987
02/2017	5.460654439	5.366510931	0.296383336	8.671743255	8.515892952	0.817045223
03/2017	5.459825291	5.364363463	0.296961725	8.677042356	8.524482534	0.812877307
04/2017	5.460405784	5.365866666	0.296556786	8.681336572	8.531455488	0.809499683
05/2017	5.460074125	5.365007679	0.296788142	8.678364732	8.526628639	0.811837196
06/2017	5.457831877	5.359210494	0.298352427	8.678034228	8.526092161	0.812097154
06/2017	5.463054174	5.372739909	0.294709569	8.691863778	8.548596426	0.801219304
07/2017	5.461648298	5.3690882	0.2956901	8.68726568	8.541101338	0.804836048
08/2017	5.462475581	5.371236182	0.295113096	8.686936794	8.540565732	0.805094739
09/2017	5.462475581	5.371236182	0.295113096	8.689237732	8.544314295	0.803284885
10/2017	5.45965936	5.363933998	0.297077479	8.676380808	8.523409287	0.813397643
11/2017	5.45974233	5.364148729	0.297019599	8.676380808	8.523409287	0.813397643
12/2017	5.458746131	5.361572105	0.297714573	8.654749909	8.488458646	0.830409846
01/2018	5.455666833	5.353629627	0.299863105	8.664431924	8.504068809	0.822795569
02/2018	5.456250294	5.355132013	0.299455966	8.658094232	8.493844514	0.827779843
03/2018	5.456250294	5.355132013	0.299455966	8.66509779	8.505144375	0.822271881
04/2018	5.45857998	5.3611427	0.29783049	8.464594565	8.313086259	0.740961233
05/2018	5.497944481	5.396990771	0.308304034	8.445374802	8.283517177	0.752638561
05/2018	5.49599302	5.391730433	0.309830465	8.438311905	8.272692599	0.756926938
06/2018	5.494897956	5.388785289	0.31068717	8.448342207	8.288071622	0.750836378
07/2018	5.494584784	5.387943904	0.310932194	8.450565253	8.291486181	0.749486088
08/2018	5.494584784	5.387943904	0.310932194	8.435331611	8.268131616	0.758736003
09/2018	5.493566066	5.385209664	0.311729291	8.44426104	8.28180876	0.753314908
10/2018	5.493958045	5.386261248	0.311422576	8.413986687	8.235578884	0.771683842
11/2018	5.487898752	5.370073375	0.316165261	8.396999048	8.209810801	0.781976905
12/2018	5.486396092	5.366081101	0.317341864	8.405696629	8.222988673	0.776708256
01/2019	5.488846268	5.372595246	0.315423433	8.418871843	8.243011766	0.768721896
02/2019	5.491917508	5.380793656	0.313019394	8.431600878	8.262427671	0.761000183
03/2019	5.493173882	5.38415814	0.31203618	8.438311905	8.272692599	0.756926938
04/2019	5.49427148	5.387102557	0.311177329	8.439428531	8.274402469	0.756249062
05/2019	5.493409217	5.384789048	0.311852026	8.437567189	8.271552534	0.757379014
05/2019	5.494663089	5.388154247	0.310870927	8.45130579	8.292624124	0.749036248

Fuente: Elaboración propia.

**Anexo 3.12: Precio de los Bonos M a 3 años ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento**

Fecha	Precio del Bono ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento			Precio del Bono ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento		
	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad
01/2017	104.3327946	106.9716992	101.9138411	98.98424079	96.25800088	101.315859
02/2017	105.5852595	108.1934291	103.1233015	100.1574178	97.46040728	102.5305349
03/2017	105.3053303	107.9203895	102.8529877	99.89522549	97.19166254	102.2590643
04/2017	105.501184	108.1114241	103.0421142	100.0786705	97.37969077	102.4490006
05/2017	105.3892124	108.0022083	102.9339887	99.97379358	97.27219292	102.3404125
06/2017	104.6372443	107.2686993	102.2078412	99.26943395	96.55027831	101.6111364
06/2017	106.4022852	108.9902809	103.9122506	100.9226235	98.24480109	103.3228314
07/2017	105.9223929	108.5222499	103.4488518	100.4731778	97.78407349	102.8574716
08/2017	106.2043569	108.7972488	103.7211257	100.7372559	98.05477641	103.1308995
09/2017	106.2043569	108.7972488	103.7211257	100.7372559	98.05477641	103.1308995
10/2017	105.2494549	107.8658879	102.7990313	99.84288937	97.13801987	102.2048764
11/2017	105.277388	107.8931342	102.8260051	99.86905317	97.16483678	102.2319659
12/2017	104.9427962	107.5667607	102.5029032	99.55564873	96.84361649	101.907474
01/2018	103.9194038	106.5684015	101.514635	98.59697977	95.86114225	100.9149088
02/2018	104.1120663	106.7563632	101.7006872	98.77746683	96.04609921	101.1017753
03/2018	104.1120663	106.7563632	101.7006872	98.77746683	96.04609921	101.1017753
04/2018	104.8871591	107.5124886	102.4491764	99.5035335	96.79020318	101.8535154
05/2018	102.2871225	104.9999615	99.91127474	97.00529837	94.20597994	99.29466667
05/2018	101.607796	104.3373036	99.25540363	96.36901282	93.55384273	98.6357427
06/2018	101.2298055	103.9685574	98.89045924	96.01494746	93.19098678	98.2690849
07/2018	101.1221272	103.8635085	98.78649677	95.91408163	93.08762067	98.16463238
08/2018	101.1221272	103.8635085	98.78649677	95.91408163	93.08762067	98.16463238
09/2018	100.773148	103.5230388	98.44955843	95.58717177	92.75261947	97.82609985
10/2018	100.9071945	103.6538189	98.57898027	95.71274294	92.88129645	97.95613512
11/2018	98.86704619	101.6630793	96.60917115	93.80135298	90.92293251	95.97684063
12/2018	98.37149318	101.179428	96.13068872	93.3369994	90.44726576	95.49600499
01/2019	99.18161693	101.9700745	96.91290272	94.09610322	91.22488404	96.28205585
02/2019	100.2125483	102.9760691	97.90829487	95.06199365	92.21448182	97.28225608
03/2019	100.6393214	103.3924703	98.32034838	95.46180438	92.62415406	97.69627602
04/2019	101.0145903	103.7585957	98.68267051	95.81334686	92.98439062	98.06031585
05/2019	100.719591	103.470786	98.39784902	95.53700039	92.70120794	97.77414496
05/2019	101.1490335	103.8897579	98.81247461	95.93928579	93.11344943	98.19073275

Fuente: Elaboración propia.

**Anexo 3.13: Precio de los Bonos M a 5 años ante un cambio de 1% en la tasa de rendimiento**

Fecha	Precio del Bono ante una disminución de 1% en la tasa de rendimiento			Precio del Bono ante un aumento de 1% en la tasa de rendimiento		
	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad	Precio Real	Precio según Duración Modificada	Precio según Convexidad
01/2017	100.5916663	104.9655315	97.2762651	92.52400698	87.94664077	95.63590713
02/2017	101.102166	105.4572771	97.75842935	92.98548644	88.42549117	96.1243389
03/2017	101.7876914	106.1175222	98.405917	93.6051325	89.06855716	96.78016239
04/2017	102.3488015	106.6578592	98.93590335	94.11227537	89.59494818	97.31690398
05/2017	101.9599457	106.2834071	98.56861566	93.7608237	89.23014982	96.94494126
06/2017	101.9168492	106.2419049	98.52790988	93.72187156	89.18972056	96.90371557
06/2017	103.7459188	108.0029411	100.255564	95.37484676	90.90574824	98.65312536
07/2017	103.1318771	107.4118235	99.67555822	94.81996883	90.32962083	98.06588612
08/2017	103.0881843	107.3697587	99.63428773	94.78048415	90.28862726	98.02409825
09/2017	103.3945015	107.6646537	99.92362425	95.05729476	90.57602508	98.31705448
10/2017	101.7016955	106.0347037	98.32469201	93.52740417	88.98788508	96.69789673
11/2017	101.7016955	106.0347037	98.32469201	93.52740417	88.98788508	96.69789673
12/2017	98.95384364	103.3874565	95.72940768	91.04322787	86.41053919	94.06858799
01/2018	100.1686189	104.5579786	96.87670539	92.14155695	87.54984101	95.23111425
02/2018	99.37071637	103.7891833	96.12311861	91.42016154	86.80149425	94.46755892
03/2018	100.2530567	104.6393273	96.95645476	92.21789363	87.6290385	95.31191099
04/2018	107.5937839	111.5808281	104.0087031	99.15279015	94.9546556	102.5267806
05/2018	105.3171623	109.3858841	101.8550054	97.09259127	92.8188497	100.3497283
05/2018	104.5000349	108.5977754	101.0820098	96.35298049	92.05239023	99.56815589
06/2018	105.6635527	109.719925	102.1826898	97.40609535	93.1437818	100.681017
07/2018	105.9242598	109.9713189	102.4293188	97.6420408	93.38834653	100.9303466
08/2018	104.1583027	108.2681316	100.758736	96.04364091	91.73186838	99.241264
09/2018	105.187624	109.2609567	101.7324628	96.97534735	92.69733917	100.225833
10/2018	101.7626576	105.9564243	98.49252928	93.87464737	89.48526655	96.94916159
11/2018	99.9189314	104.176308	96.74847406	92.20483372	87.75668636	95.18452025
12/2018	100.8561131	105.0812662	97.63498582	93.05367164	88.6352889	96.08156931
01/2019	102.30304	106.4779979	99.00370808	94.36397066	89.99197442	97.46626429
02/2019	103.7330584	107.8578904	100.3564629	95.65868416	91.33303509	98.83446258
03/2019	104.5000349	108.5977754	101.0820098	96.35298049	92.05239023	99.56815589
04/2019	104.6285381	108.7217257	101.2035722	96.46929898	92.17292072	99.69107413
05/2019	104.4144734	108.5152432	101.0010697	96.27553074	91.97213814	99.48631166
05/2019	106.0113368	110.0552817	102.5116939	97.72084543	93.47003348	101.0136214

Fuente: Elaboración propia.

### Anexo 3.14: Rendimientos de las tasas de interés de los Bonos M

Fecha	Bonos a 3 años	Bonos a 5 años
02/2017	-0.06282596	-0.016438726
03/2017	0.014306396	-0.022347299
04/2017	-0.009992945	-0.018532248
05/2017	0.005722476	0.012866511
06/2017	0.037793161	0.001419447
06/2017	-0.090514008	-0.061422813
07/2017	0.025242617	0.020896283
08/2017	-0.014771317	0.001476015
09/2017	0	-0.010378151
10/2017	0.049356897	0.056495833
11/2017	-0.001417435	0
12/2017	0.016878038	0.087598059
01/2018	0.050316527	-0.038137429
02/2018	-0.009327183	0.025150234
03/2018	0	-0.027834799
04/2018	-0.038203827	-0.031401898
05/2018	0.028788828	0.069639911
05/2018	0.033225648	0.024282343
06/2018	0.018135212	-0.034685558
07/2018	0.00512165	-0.007874056
08/2018	0	0.05260995
09/2018	0.01646649	-0.030459207
10/2018	-0.006301218	0.099285398
11/2018	0.092893747	0.051176601
12/2018	0.021653268	-0.025829622
01/2019	-0.035574606	-0.040632403
02/2019	-0.046631281	-0.041118247
03/2019	-0.019778148	-0.022472856
04/2019	-0.017632699	-0.003795071
05/2019	0.013880349	0.00631714
05/2019	-0.020253857	-0.047720208

Fuente: Elaboración propia.

## Ejercicios

**Ejemplo 1.1.** Suponga que se hace un depósito de \$10,000 en una cuenta de ahorro durante 2 años con una tasa de interés simple del 3%

Aplicando la ecuación de interés simple se tiene que:

$$I = k i t$$

$$I = (10,000)(0.03)(2)$$

$$I = 600$$

**Ejemplo 1.2.** Suponga que se invierte \$1,000,000 en un proyecto con una tasa de interés simple del 5%. ¿Cuál es el monto de la inversión después de 6 meses?

Aplicando la ecuación (1.2) tenemos que:

$$M = k(1 + it)$$

$$M = 1,000,000 \left[ 1 + (0.05) \left( \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$M = 1,000,000 [1 + 0.025]$$

$$M = 1,000,000 [1.25]$$

$$M = 1,025,000$$

El monto de la inversión después de seis meses es de \$1,025,000.

**Ejemplo 1.3.** Suponga que el monto de una deuda después de un año es de \$500,000 con una tasa de interés simple del 3%. ¿Cuál fue el capital prestado?

Aplicando la ecuación (1.3) se tiene que:

$$k = \frac{500,000}{1 + (0.03)(1)}$$

$$k = \frac{500,000}{1.03}$$

$$k = 485,436.8932$$

El capital prestado hace un año fue \$485,436.8932

**Ejemplo 1.4.** Suponga que se invierte \$1,000,000 en un proyecto con una tasa de interés del 5%. ¿Cuál es el monto de la inversión después de 6 meses?

Aplicando la ecuación (1.5) tenemos que:

$$M = 1,000,000(1 + 0.05)^{\frac{1}{2}}$$

$$M = 1,000,000(1.024695077)$$

$$M = 1,024,695.077$$

El monto de la inversión después de seis meses es de \$1,024,695.077.

**Ejemplo 1.5.** Suponga que el monto de una deuda después de dos años es de \$500,000 con una tasa del 3%. ¿Cuál fue el capital prestado?

Aplicando la ecuación (1.6) tenemos que:

$$k = \frac{500,000}{(1 + 0.03)^2}$$

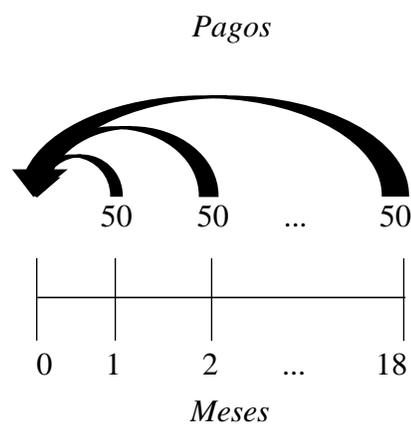
$$k = 471,297.9545$$

El capital prestado hace un año fue \$471,297.9545

**Ejemplo 1.6.** Para liquidar una deuda con interés del 6%, un señor acuerda hacer pagos de \$50 al final de cada mes por los próximos 18 meses ¿Cuál es el importe de la deuda?

Línea de tiempo:

Imagen A.1: Valor Presente de una anualidad vencida



Fuente: Elaboración propia.

Aplicando la ecuación (1.11):

$$VP = x \left[ \frac{1 - (1+i)^{-t}}{i} \right]$$

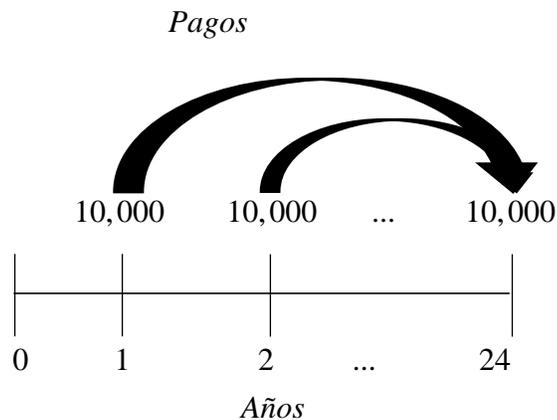
$$VP = 50 \left[ \frac{1 - (1+0.06)^{-18}}{0.06} \right]$$

$$VP = 541.3801741$$

Los \$541.3801741 es el Valor Presente de los 18 pagos mensuales de \$50 cada uno.

**Ejemplo 1.7.** Una persona ahorra \$10,000 al final de cada año con una tasa del 7%. ¿Qué monto habrá acumulado en un plazo de 5 años? Línea de tiempo:

**Imagen A.2: Valor Futuro de una anualidad vencida**



Fuente: Elaboración propia.

Aplicando la ecuación (1.12):

$$VF = x \left[ \frac{(1+i)^t - 1}{i} \right]$$

$$VF = 10,000 \left[ \frac{(1+0.07)^5 - 1}{0.07} \right]$$

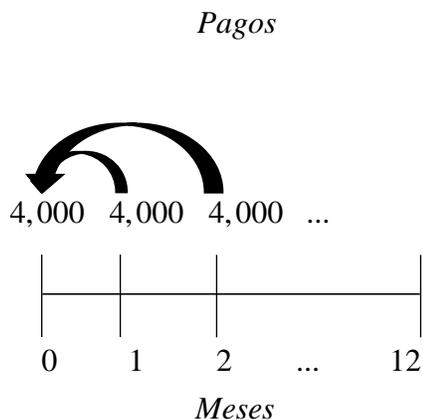
$$VF = 57,507.3901$$

Al final de 5 años, la persona habrá acumulado \$57,507.3901

**Ejemplo 1.8.** La renta mensual de un departamento es de \$4,000, los cuales deben pagarse al principio de cada mes durante un año. ¿Cuál es el Valor Presente de esta anualidad al 6%?

Línea de tiempo:

**Imagen A.3: Valor Presente de una anualidad anticipada**



Fuente: Elaboración propia.

Aplicando la ecuación (1.13):

$$VP = x \left[ 1 + \frac{1 - (1+i)^{-(t-1)}}{i} \right]$$

$$VP = 4,000 \left[ 1 + \frac{1 - (1+0.06)^{-(12-1)}}{0.06} \right]$$

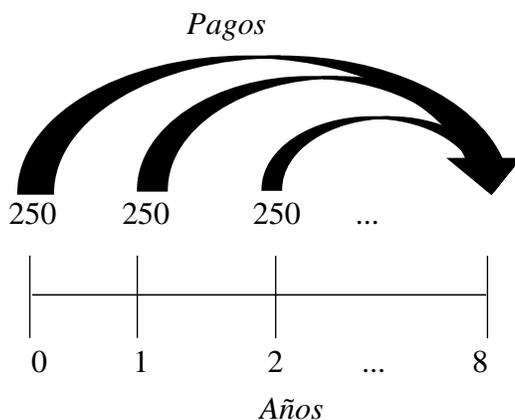
$$VP = 35,547.49831$$

Los \$35,547.49831 es el Valor Presente de los 12 pagos mensuales que se harán por anticipado, de \$4,000 cada uno.

**Ejemplo 1.9** Una persona deposita \$250 en su cuenta de ahorro al principio de cada año. ¿Cuánto tendrá al final de 8 años si el banco le da una tasa de interés del 3%?

Línea de tiempo:

Imagen A.4: Valor Futuro de una anualidad anticipada



Fuente: Elaboración propia.

Aplicando la ecuación (1.14):

$$VF = x \left[ \frac{(1+i)^{t+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

$$VF = 250 \left[ \frac{(1+0.03)^{8+1} - 1}{0.03} - 1 \right]$$

$$VF = 2,289.776532$$

Al final de los 8 años, la persona tendrá \$2,289.776532 en su cuenta de ahorro.

**Ejemplo 1.10.** Dado un bono que pagará \$1,000 al vencimiento de 1 año con un precio actual de \$934.58, ¿cuál es la tasa Spot del año t?

Para resolver el problema, es necesario sustituir los valores dados en la ecuación y después despejar la tasa Spot ( $S_t$ ).

Entonces:

$$934.58 = \frac{1000}{(1+S_t)^1}$$

$$(1+S_t)^1 = \frac{1000}{934.58}$$

$$S_t = \frac{1000}{934.58} - 1$$

$$S_t = 0.0699$$

La tasa Spot del año t (que en este caso es 1) es de 6.99%

**Ejemplo 1.11.** Dados los plazos y las tasas de rendimiento, encontrar las tasas Forward correspondientes.

**Tabla A.1: Cálculo de tasas Forward**

Plazo (días)	Tasa de rendimiento	Cálculo	Tasa Forward
1	6.83%	-	6.83%
7	6.88%	$f = \left[ \frac{1 + (0.0688)\left(\frac{7}{360}\right)}{1 + (0.0683)\left(\frac{1}{360}\right)} - 1 \right] \left( \frac{1}{\frac{6}{360}} \right)$	$f = 6.887026711\%$
14	6.96%	$f = \left[ \frac{1 + (0.0696)\left(\frac{14}{360}\right)}{1 + (0.0688)\left(\frac{7}{360}\right)} - 1 \right] \left( \frac{1}{\frac{7}{360}} \right)$	$f = 7.030594627\%$
28	7.15%	$f = \left[ \frac{1 + (0.0715)\left(\frac{28}{360}\right)}{1 + (0.0696)\left(\frac{14}{360}\right)} - 1 \right] \left( \frac{1}{\frac{14}{360}} \right)$	$f = 7.320186695\%$
60	7.60%	$f = \left[ \frac{1 + (0.076)\left(\frac{60}{360}\right)}{1 + (0.0715)\left(\frac{28}{360}\right)} - 1 \right] \left( \frac{1}{\frac{32}{360}} \right)$	$f = 7.949541715\%$

Fuente: Elaboración propia.

**Ejemplo 1.12.** Suponga que se cuenta con los siguientes nodos:

**Tabla A.2: Nodos para la interpolación lineal**

Plazo	Tasa de interés
28	7.26%
91	7.46%

Fuente: Elaboración propia.

¿Cuáles son las tasas de interés correspondientes a los plazos (en días) si  $T = 50$  y  $T = 70$ ?

Aplicando la ecuación 1.16 se tiene que:

a) Si  $T = 50$ :

$$R = \left( \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1} \right) (T - T_1) + R_1$$

$$R = \left( \frac{0.0746 - 0.0726}{91 - 28} \right) (50 - 28) + 0.0726$$

$$= 7.32984127\%$$

b) Si  $T = 70$ :

$$R = \left( \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1} \right) (T - T_1) + R_1$$

$$R = \left( \frac{0.0746 - 0.0726}{91 - 28} \right) (70 - 28) + 0.0726$$

$$= 7.393\%$$

**Ejemplo 2.1.** Suponga que un inversionista compra CETES con un Valor Nominal de \$10 y con vencimiento en 28 días con un rendimiento del 15.5%. Calcular el precio a partir de la tasa de rendimiento y de la tasa de descuento.

a) Aplicando la ecuación (2.1):

$$P = \frac{10}{\left[1 + 0.155 \left(\frac{28}{360}\right)\right]}$$

$$P = \frac{10}{1.012055556}$$

$$P = 9.880880496$$

b) Inicialmente, se tiene que calcular la tasa de descuento:

$$d = \frac{0.155}{\left[1 + 0.155 \left(\frac{28}{360}\right)\right]}$$

$$d = \frac{0.155}{1.012055556}$$

$$d = 0.1531536477$$

Una vez obtenida la tasa, es posible calcular el precio del CETE aplicando la ecuación (2.2)

$$P = 10 \left(1 - \frac{(0.1531536477)(28)}{360}\right)$$

$$P = 10(0.9880880496)$$

$$P = 9.880880496$$

**Ejemplo 2.2.** Suponga que se tiene un CETE con un Valor Nominal de \$100 que vence en 28 días. ¿Cuál es su Duración?

Por la ecuación (2.3):

$$D = \frac{t}{360}$$

$$D = \frac{28}{360}$$

$$D = 0.077777777778$$

**Ejemplo 2.3.** Suponga que se tiene un CETE con un Valor Nominal de \$100 que vence en 182 días con una tasa de interés del 5%. ¿Cuál es su Duración Modificada?

Aplicando la ecuación (2.4):

$$D^* = \frac{\frac{t}{360}}{1 + i \left( \frac{t}{360} \right)}$$

$$D^* = \frac{\frac{182}{360}}{1 + (0.05) \left( \frac{182}{360} \right)}$$

$$D^* = \frac{0.5055555556}{1.025277778}$$

$$D^* = 0.4930913032$$

El resultado indica que ante una variación de un 1% en la tasa de interés, el precio del CETE a 182 días variará 0.4930913032%;

**Ejemplo 2.4.** Suponga que se tiene un CETE con un Valor Nominal de \$100 que vence en 1 año con una tasa de interés del 5%.

¿Cuál es su Convexidad?

A partir de la ecuación (2.5) se tiene que:

$$C = \left\{ \frac{\frac{2}{\left[ 1 + (0.05) \left( \frac{364}{360} \right) \right]^2}}{\left( \frac{360}{364} \right)^2} \right\} \left( \frac{1}{2} \right) (0.01)$$

$$C = \left( \frac{1.81214084}{0.9781427364} \right) \left( \frac{1}{2} \right) (0.01)$$

$$C = 0.009263171788$$

El resultado indica que ante una variación de un 1% en la tasa de interés, el precio del CETE que vence en un año variará 0.009263171788%;

**Ejemplo 2.5.** Suponga que se tiene un CETE con Valor Nominal de \$20,500,000 que vence en 1 año. Los últimos valores de las tasas de interés se presentan a continuación:

**Tabla A.3: Valores de las tasas CETES**

Día	Tasa
t-3	24.05
t-2	26.00
Ayer (t-1)	25.00
Hoy (t)	24.60

Fuente: Elaboración propia.

Calcular el Valor en Riesgo.

Solución:

Como puede observarse en la ecuación, el primer valor que se necesita para realizar el cálculo es el del cuantil ( $\Phi$ ). Si se quiere hacer con un 95% de confianza, el valor será 1.64 (por la tabla de la normal).

Los valores restantes se calculan a continuación.

- a) Precio del bono, aplicando la ecuación (2.1):

$$P = \frac{20,500,000}{\left[1 + (0.2460)\left(\frac{364}{360}\right)\right]}$$

$$P = 16,416,635.52$$

b) Duración Modificada, aplicando la ecuación (2.4):

$$D^* = \frac{\frac{364}{360}}{1 + (0.2460)\left(\frac{364}{360}\right)}$$

$$D^* = 0.8097093944$$

c) Volatilidad de los rendimientos:

**Tabla A.4: Rendimientos de los CETES**

Tasa	Rendimientos $= \ln(\text{Valor}_{\text{Hoy}}) - \ln(\text{Valor}_{\text{Ayer}})$
24.05	-
26.00	$= \ln(26.00) - \ln(24.05)$ $= 7.8\%$
25.00	$= \ln(25.00) - \ln(26.00)$ $= -3.92\%$
24.60	$= \ln(24.60) - \ln(25.00)$ $= -1.61\%$

Fuente: Elaboración propia.

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{7.8\% - 3.92\% - 1.61\%}{3} = \frac{227}{300}\%$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\left(7.8\% - \frac{227}{300}\%\right)^2 + \left(-3.92\% - \frac{227}{300}\%\right)^2 + \left(-1.61\% - \frac{227}{300}\%\right)^2}{3-1}}$$

$$\Rightarrow \sigma = 6.21\%$$

Una vez obtenidos todos los datos anteriores, es posible realizar el cálculo del VaR aplicando la ecuación (2.6).

$$VaR = -\Phi PD * i \sigma \sqrt{t}$$

$$VaR = -(1.64)(16,416,635.52)(0.8097093944)(0.2460)(0.0621)(\sqrt{1})$$

$$VaR = -333,030.4081$$

El resultado obtenido indica que, en caso de invertirse en el CETE, la pérdida máxima que podría presentarse sería de \$333,030.4081. Comparando este resultado con el precio del bono (\$20,500,000) puede decirse que es adecuado llevar a cabo la inversión, pues representa una pérdida muy pequeña (menos del 2%).

**Ejemplo 2.6.** ¿Cuál es el precio a pagar por un bono emitido a tres años, con Valor Nominal de \$100, con cupón del 10% anual a pagar semestralmente y con una rentabilidad requerida del 14%?

Solución. Se tienen los siguientes datos:

$$VN = 100$$

$$I_t = \frac{10}{2} = 5$$

$$i = \frac{0.14}{2} = 0.07$$

$$n = 6 \text{ semestres}$$

Sustituyéndolos en la ecuación (2.7):

$$P = \frac{5}{(1+0.07)} + \frac{5}{(1+0.07)^2} + \dots + \frac{5}{(1+0.07)^6} + \frac{100}{(1+0.07)^6}$$

$$P = \frac{5}{(1+0.07)} + \frac{5}{(1+0.07)^2} + \dots + \frac{105}{(1+0.07)^6}$$

$$P = 90.74$$

El día de hoy, el inversionista tendría que pagar \$90.74 por un bono que cada semestre le pagará \$5 y, al cabo de tres años, le pagará \$100.

**Ejemplo 2.7.** Suponga que se tiene el mismo bono del ejemplo anterior. ¿Cuál es su Duración?

Datos:

$$VN = 100$$

$$I_t = 5$$

$$i = 0.07$$

$$n = 6$$

$$P = 90.47$$

Con base en la ecuación (2.8), la Duración es la siguiente:

$$D = \frac{1}{90.47} \left[ \frac{(1)(5)}{(1+0.07)} + \frac{(2)(5)}{(1+0.07)^2} + \frac{(3)(5)}{(1+0.07)^3} + \frac{(4)(5)}{(1+0.07)^4} + \frac{(5)(5)}{(1+0.07)^5} + \frac{(6)(5)}{(1+0.07)^6} + \frac{(6)100}{(1+0.07)^6} \right]$$

$$D = 5.289376726$$

El resultado obtenido arroja que el bono está expuesto a cambios en la tasa de interés durante 5.28 años, lo cual indica que es muy sensible debido a que vence en 3 años. Sin embargo, en la realidad esto no sucede, es decir, la Duración no es más grande que la vigencia del bono.

**Ejemplo 2.8.** Suponga que un inversionista adquirió con una tasa del 6% un bono que paga cupones anuales. Considerando que la Duración es de 10.66 años, ¿cuál es la Duración Modificada?

Por la ecuación (2.9), la Duración Modificada es:

$$D^* = \frac{10.66}{1 + (0.06) \left( \frac{364}{360} \right)}$$

$$D^* = 10.05$$

El resultado indica que ante una variación de un 1% en la tasa de interés, el precio del bono variará 10.05%.

**Ejemplo 2.9.** Suponga que se tiene un bono con las siguientes características:

$$VN = 100$$

$$I_t = 5$$

$$i = 0.07$$

$$n = 6$$

$$P = 90.47$$

¿Cuál es su Convexidad?

Aplicando la ecuación (2.10), el valor de la Convexidad es el siguiente:

$$C = \frac{1}{(90.47)^2} \left[ \frac{(1)^2 (5)}{(1+0.07)^2} + \frac{(2)^2 (5)}{(1+0.07)^3} + \frac{(3)^2 (5)}{(1+0.07)^4} + \frac{(4)^2 (5)}{(1+0.07)^5} + \frac{(5)^2 (5)}{(1+0.07)^6} + \frac{(6)^2 (5)}{(1+0.07)^7} + \frac{(6)^2 100}{(1+0.07)^7} \right]$$

$$C = 0.311472806$$

El resultado indica que ante una variación de un 1% en la tasa de interés, el precio del bono variará 0.311472806 %.

**Ejemplo 2.10.** Considere un bono con las siguientes características:

$$P = 101.5$$

$$D^* = 12.76$$

$$i = 8\%$$

$$\sigma = 2\%$$

$$\Phi = 95\%$$

¿Cuál es el Valor en Riesgo al adquirir el bono?

Sustituyendo los valores en la ecuación (2.11) se tiene que:

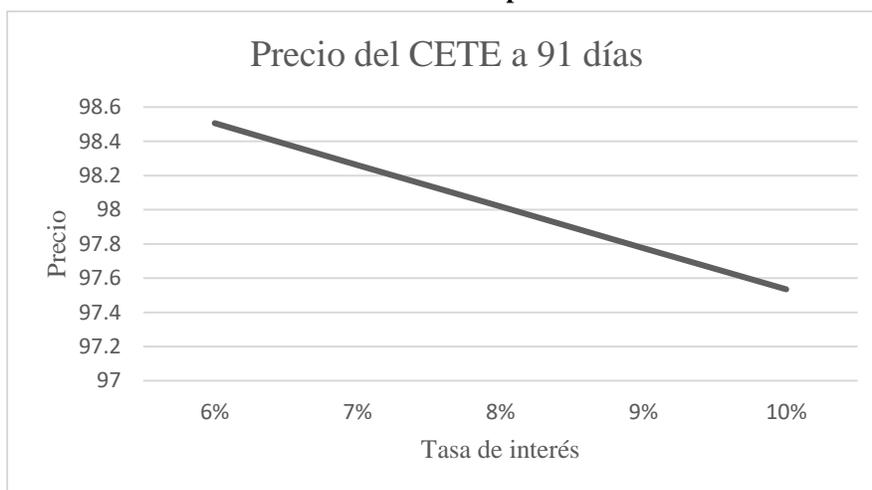
$$VaR = -\Phi P D * i \sigma \sqrt{t}$$

$$VaR = -(1.64)(101.5)(12.76)(0.08)(0.02)(\sqrt{1})$$

$$VaR = -3.39844736$$

**Ejemplo 3.1.** Considere un CETE a 91 días con un Valor Nominal de \$100. Si se calcula su precio con diferentes tasas, se tiene la siguiente gráfica:

**Gráfica A.1: Evolución del precio del CETE**



Fuente: Elaboración propia.

Como se observa, a medida que la tasa de interés se incrementa, el precio desciende. Entonces, si un inversionista desea comprar el bono, debe esperar a que la tasa se incremente para obtener una mayor ganancia, resultante de la diferencia entre el Valor Nominal y el precio. Por el contrario, si el inversionista desea vender el bono, debe esperar a que la tasa descienda.