



Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ingeniería

APUNTES PARA LA UNIDAD DE APRENDIZAJE DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

Profesor: Dr. Horacio Ramírez de Alba

**Apoyo de: Carlos Ismael López Salas Prestador de
Servicio Social**

Resumen del programa

Propósito básico: formar en el estudiante el criterio estructural

Unidad 1. Conceptos básicos de la ingeniería estructural

Entender los principios básicos del modelado de estructuras y aplicarlos al planteamiento de sistemas estructurales

Ingeniería Estructural

Modelado de estructuras y acciones

Conceptos básicos: comportamiento lineal; superposición de causas y efectos; teoría de desplazamientos pequeños; equilibrio; indeterminación; grados de libertad; compatibilidad

Unidad 2. Estudio de deflexiones en vigas (trabes)

Determinar la deflexión y la pendiente de la curva elástica

Diagramas de deflexión y curva elástica

Teoría de la viga elástica

Método de doble integración

Teorema de área de momentos

Método de la viga conjugada

Unidad 3. Métodos clásicos de análisis

Obtener desplazamientos y elementos mecánicos de estructuras esqueléticas planas aplicando diferentes metodologías

Método de pendiente deflexión

Método de Cross

Métodos energéticos: definición de trabajo y energía; principio del trabajo virtual; teorema de Castigliano

Unidad 4. Método de rigideces

Aplicar el método de rigideces para obtener los desplazamientos y elementos mecánicos de estructuras esqueléticas (pórticos) en general

Introducción. Relaciones de rigidez de elementos estructurales

Propiedades de las matrices de rigidez

Transformaciones ortogonales para vectores y matrices

Formación de la matriz de rigideces de la estructura

Estructuras con: cargas en los nodos, con cargas en los elementos

Aplicaciones: armaduras planas, marcos planos, armaduras espaciales, parrillas, marcos especiales

Líneas de influencia

Introducción al análisis plástico

Referencias básicas:

Oscar González Cuevas (2002) **Análisis Estructural**. LIMUSA Noriega, Editores

Aslam Kassimali (2015) **Análisis Estructural**. CENGAGE Learning. Quinta edición. Traducción de Alberto Andrade Galán y Juan Felipe Heredia Mellado

Heberto Castillo (1999) **Análisis y diseño de estructuras. Tomo 1: Resistencia de materiales**. Editorial ALFAOMEGA. México.

Heberto Castillo (1999) **Análisis y diseño de estructuras. Tomo 2: Estructuras Reticulares**. Editorial ALFAOMEGA. México.

R. Park y T. Paulay (1979) **Estructuras de concreto reforzado**. Editorial LIMUSA. Traducción de Sergio Fernández Everest y José de la Cera A.

(Otros textos del tema Análisis Estructural)

Resumen de los temas que se cubrirán dentro del curso

Grado de indeterminación

Deformaciones en trabes isostáticas: doble integración; área de momento; viga conjugada

Principio del trabajo virtual: armaduras; trabes. Integrales de Mohr

Método de fuerzas

Método de rigideces, relaciones de rigidez angular y lineal. Pendiente-deflexión. Comparación con método de Cross

Ejemplo de aplicación (proyecto) de análisis y diseño

Líneas de influencia

Introducción al análisis plástico.

Ingeniería Estructural

El ingeniero civil. Planea, diseña, construye, opera y mantiene obras (construcciones, infraestructura) útiles para la sociedad

El procedimiento de diseño:

1. **Estructuración.** Se establecen las características básicas de la estructura. Concepción global
2. **Análisis:** a) modelo analítico representativo, b) cálculo de las acciones para diferentes escenarios posibles, c) cálculo del efecto de las acciones en el modelo
3. **Dimensionamiento.** Interpretar los resultados del análisis, aplicación de relaciones acción respuesta, considerar un margen de seguridad apropiado elaboración de planos y especificaciones (aplicación de reglamentos y normas)

Interpretación: El análisis estructural permite calcular el efecto de las acciones sobre el modelo representativo de la estructura con objeto de poderla dimensionar y, en caso de que se construya, funcione de forma segura y dentro de parámetros aceptables de servicio durante toda su vida útil.

Estados límite: nivel de las cargas para el cual la respuesta ya no es aceptable.

1. De falla. Flexión, cortante, torsión, flexocompresión, estabilidad, pandeo,...
2. De servicio. Deformaciones, vibraciones, distorsiones...
3. De daños. Agrietamientos, deformaciones locales, deterioro, formación de óxido...

Dos conceptos de ingenieros famosos:

Las obras no se construyen para que resistan. Se construyen para alguna otra finalidad o función que lleva, como consecuencia esencial, que la construcción mantenga su forma y condiciones a lo largo del tiempo. Su resistencia es una condición fundamental, pero no es la finalidad única, ni siquiera la finalidad primaria.

Función estructural: a) salvar un claro, b) confinar un espacio, c) contener un empuje, d) conducir equipos o materiales

EDUARDO TORROJA

La resistencia de una construcción es indispensable, pero fuera de eso irrelevante

HARDY CROSS

Modelado (idealización de estructuras y acciones)

Estructuras: elementos prismáticos vigas, trabes, columnas), elementos rectos de sección variable, arcos, armaduras, marcos planos marcos espaciales

Apoyos:

Simple: Permite giro y desplazamiento longitudinal. Se presenta solo na reacción perpendicular.

Articulación: permite giro, pero no desplazamiento. Dos reacciones perpendiculares (o una inclinada)

Empotramiento: no permite giro ni desplazamiento, tres reacciones dos fuerzas perpendiculares y un momento.

Apoyo continuo: permite algo de giro y algo de desplazamiento dependiendo de las características de los elementos a los que se une

Acciones:

Carga puntual (usualmente presentada por P, Q, W mayúsculas) Cuando el área de aplicación es relativamente pequeña. Por ejemplo las ruedas de un vehículo o un tren, el peso de un equipo apoyado en anclas. Nótese que la carga puntual es una idealización que en rigor no se puede dar en la naturaleza, ya que el esfuerzo se define como la carga entre el área de aplicación; si el área tiende a cero el esfuerzo tendería a infinito y ningún material lo resistiría.

Carga uniformemente distribuida (usualmente representada por w, q, g minúscula) Puede ser distribuida en una longitud o un área. Por ejemplo los reglamentos permiten representar las cargas vivas en edificios como cargas uniformemente distribuidas por unidad de área.

Otras: pueden ser cargas crecientes de forma lineal o siguiendo una forma circular, parabólica o elíptica.

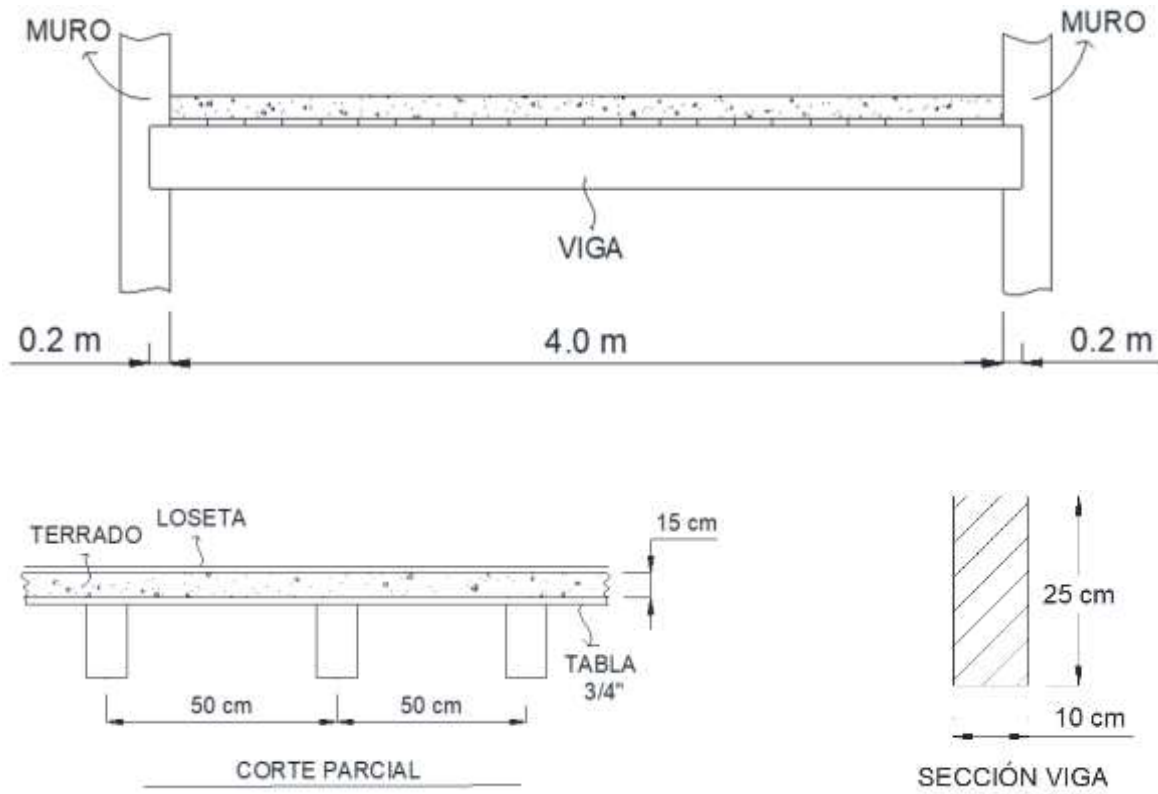
El estudiante deberá identificar y observar una construcción, por ejemplo el edificio donde toma clases, para representar gráficamente la construcción real y su modelo analítico (siguiendo los conocimientos adquiridos), así como hacer las observaciones pertinentes.

Ejemplo ilustrativo E1

El caso de un entrepiso tipo terrado (como se usaba en estructuras antiguas) formado por vigas de madera de 10 por 25cm separadas cada 50cm. Sobre las vigas un entarimado de tabla de $\frac{3}{4}$ " (19mm) y sobre el entarimado un terrado de 15cm y losetas de barro de 15mm de espesor.

La distancia libre entre los muros es de 4.0m y las vigas se apoyan sobre vigas de arrastre de 20cm embebidas en los muros de adobe.

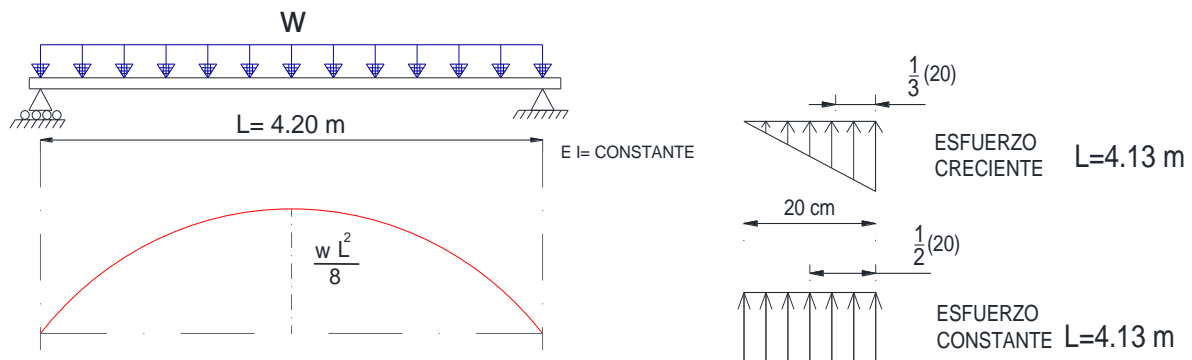
Figura representativa de la estructura:



Modelo analítico representativo

Lo más práctico es representar las vigas como una trabe simplemente apoyada. Un apoyo simple y el otro articulado (la componente horizontal de las reacciones es despreciable), el claro depende de la suposición que se haga de la transmisión de esfuerzos en los apoyos. a) esfuerzo uniforme, b) esfuerzo de variación triangular. En el primer caso el claro es $L = 4.2\text{m}$, en el segundo 4.13m . La carga se supone como uniformemente repartida por unidad de longitud.

De esta manera queda establecido el modelo que se representa en la figura:



Peso propio: $w_p = 0.1(0.25)1200 = 30\text{ kg/m}$ (se asume peso volumétrico de la madera de 1200kg/m^3 suponiendo el efecto de la humedad)

Peso del entarimado $0.019(1200) = 22.8 \text{ kg/m}^2$

Peso del terrado $0.15(1400) = 210 \text{ kg/m}^2$

Peso de la loseta $0.015(1600) = 24 \text{ kg/m}^2$

Total 256 kg/m^2

Carga viva: 180 Kg/m^2 (supuesta)

El ancho tributario de cada viga son 50cm, la carga repartida resulta:

Carga muerta: $w_{cm} = 256(0.5) + 30 = 158 \text{ kg/m}$

Carga viva: $w_{cv} = 180(0.5) = 90 \text{ kg/m}$

Carga total de servicio: $w_t = 248 \text{ kg/m}$

Carga factorizada: $w_u = 1.3(158) + 1.6(90) = 349.4 \text{ kg/m}$

Momento para la carga de servicio: $M_s = \frac{248 (4.2)^2}{8} = 546.84 \text{ kg-m}$

Momento para carga factorizada: $M_u = \frac{349.4 (4.2)^2}{8} = 770.427 \text{ kg-m}$

Cálculo de esfuerzos:

Módulo de sección.

$$S = \frac{10 (25)^2}{6} = 1041.67 \text{ cm}^3$$

Esfuerzo en condiciones de servicio: $f_s = \frac{54684}{1041.67} = 52.5 \text{ kg/cm}^2$

Esfuerzo para momento factorizado: $f_u = \frac{77042.7}{1041.67} = 73.96 \text{ kg/cm}^2$

Los esfuerzos son compatibles con la resistencia del material

Calculo de la deflexión máxima.

Módulo elástico: $E = 100000 \text{ kg/cm}^2$

Momento de inercia: $I = \frac{10 (25)^3}{12} = 13020.83 \text{ cm}^4$

$EI = 1.302 \text{ por } 10^9 \text{ Kg-cm}^2$

Deformación en condiciones de servicio: $\Delta = \frac{5 w_s L^4}{384 EI} = 0.77 \text{ cm} = 7.7 \text{ mm}$

Deformación permisible: $\Delta_p = \frac{L}{480} + 0.3 = 1.18 \text{ cm}$

Sin embargo, el propósito de este ejemplo no es el diseño sino sólo ilustrar la forma de establecer un modelo representativo y su uso para calcular parámetros de diseño como son momentos, esfuerzos y deformaciones

Observaciones:

1. El modelo debe ser lo más sencillo posible pero sin perder aproximación
2. El modelo analítico permite la aplicación de conceptos y fórmulas de equilibrio, así como relaciones acción respuesta compatibles con el comportamiento del material (materiales en el caso general)
3. La interpretación de los resultados permite establecer si el comportamiento es seguro y funcional.

Método de doble integración

Se parte de la ecuación básica: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M}{EI}$

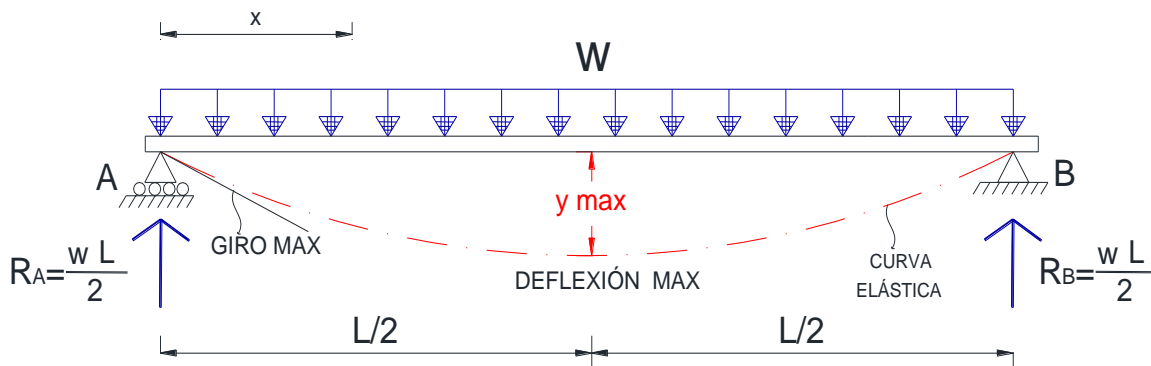
La posición de cualquier sección está dada por (x), mientras que (y) representa la ordenada de la curva elástica

La segunda derivada de la deformación es la curvatura: M es el momento flexionante, si se expresa en función de x, integrando una vez se obtendrá el giro e integrando otra vez se obtendrá la deflexión.

Ejemplo ilustrativo E2

Obtener el giro y la deflexión máxima en una trabe simplemente apoyada con claro L y con carga uniformemente distribuida (w)

Figura representativa:



Equilibrio, por simetría las reacciones valen: $R = \frac{wL}{2}$

La ecuación del momento flexionante para una sección a una distancia x del apoyo A es:

$$M = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \frac{wx^2}{2}$$

Se integra por primera vez:

$$EI(\theta) = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{w}{6}\right)x^3 + C1 \quad (C1 \text{ es constante de integración})$$

Se aplica la condición de frontera: si $x=L/2$ $\theta = 0$

$$\text{Se obtiene } C1 = -\frac{wL^3}{24}$$

$$\text{Se obtiene: } EI(\theta) = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{w}{6}\right)x^3 - \frac{wL^3}{24}$$

$$\text{El giro máximo se presenta para } x=0: EI \theta_{\max} = -\frac{wL^3}{24}$$

Se integra por segunda vez:

$$EI y = \frac{WLx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \left(\frac{wL^3}{24}\right)x + C2 \quad (C2 \text{ constante de integración})$$

Se aplica condición de frontera si $x=0$ $y=0$ por lo tanto $C2 = 0$

La ecuación de la curva elástica es:

$$EI y = \frac{WLx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \left(\frac{wL^3}{24}\right)x$$

$$\text{Si } x=L/2 \text{ se obtiene: } EI y_{\max} = -\left(\frac{5}{384}\right)wL^4$$

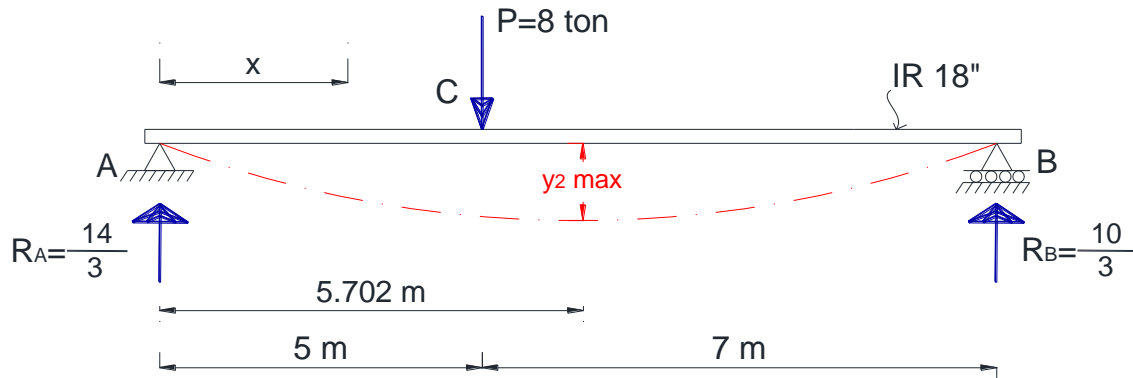
Se observa que para el giro máximo y la deflexión máxima se obtienen resultados similares a los reportados en libros y manuales.

El estudiante deberá proponer un problema diferente cuyos resultados pueda comparar respecto a un manual

Ejemplo ilustrativo E3

Calcular la deflexión máxima en milímetros para una trabe con carga concentrada fuera del centro del claro, suponer que el efecto del peso propio es despreciable. La trabe es de acero estructural con sección IR18" de 96.7kg/m

Figura representativa:



Equilibrio: $R_a = 14/3$ $R_b = 10/3$

Tramo A-C x varía entre 0 y 5 m

$$M = \frac{14}{3}(x)$$

Primera integración: $EI(\theta_1) = \frac{14}{6}x^2 + C_1$

Segunda integración: $EIy_1 = \frac{14}{18}x^3 + C_1 + C_3$

Tramo C-B x varía entre 5 y 12 m

$$M = \frac{14}{3}(x) - 8(x - 5) = -\frac{10}{3}x + 40$$

Primera integración: $EI(\theta_2) = -\frac{10}{6}x^2 + 40x + C_2$

Segunda integración: $EIy_2 = -\frac{10}{18}x^3 + 20x + C_2x + C_4$

Condiciones de frontera:

$\theta_1 = \theta_2$ para $x = 5$ se obtiene: $C_1 - C_2 = 100$ (1)

$y_1 = 0$ para $x = 0$ se obtiene: $C_3 = 0$ (2)

$y_2 = 0$ para $x = 12$ Se obtiene: $1920 + 12C_2 + C_4 = 0$ (3)

$y_1 = y_2$ para $x = 5$ se obtiene: $5C_1 - 5C_2 - C_4 = \frac{1000}{3}$ (4)

Haciendo simultáneas las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se obtiene:

$$C_1 = -\frac{665}{9} \quad C_2 = -\frac{1565}{9} \quad C_3 = 0 \quad C_4 = \frac{500}{3}$$

La ecuación de la elástica:

$$\text{Para el tramo A-C es: } Ely_1 = \frac{14}{18}x^3 - \frac{665}{9}(x)$$

$$\text{Para el tramo C-B es: } Ely_2 = -\frac{10}{18}x^3 + 20x^2 - \frac{1565}{9}x + \frac{500}{3}$$

La deflexión en el punto de aplicación de la carga se obtiene para $x = 5$ en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores. Resulta $Ely = 272.22$ (correspondiente a las unidades de ton y metros)

Sin embargo el valor máximo se presenta dentro del tramo C-B, en particular en el punto donde $\theta_2 = 0$

$$\text{Haciendo esto se tiene: } -\frac{10}{6}x^2 + 40x - \frac{1565}{9} = 0 \text{ el resultado es: } x = 5.702\text{m}$$

El valor máximo de la deflexión se obtiene sustituyendo este valor en la ecuación de la elástica del tramo C-B: Se obtiene: $Ely_{2\max} = -277.59$ (2% mayor que la correspondiente al punto de aplicación de la carga)

La sección supuesta IR18" de 96.7Kg/m tiene momento de inercia de: $I = 44537\text{cm}^4$

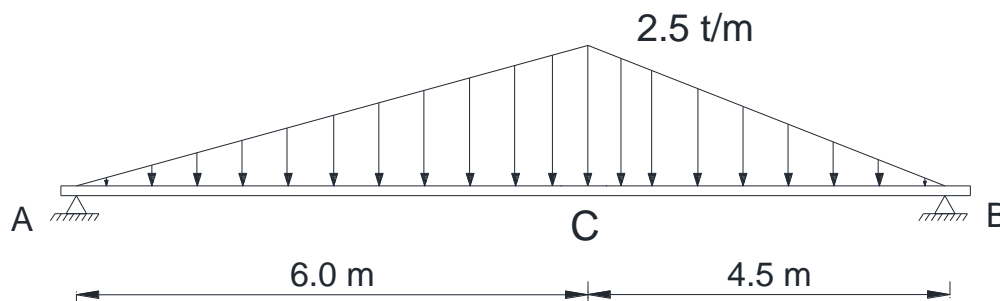
El módulo elástico del acero es: $E = 2.03 \text{ por } 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Por lo tanto: $EI = 9.041 \text{ por } 10^{10} \text{ kg-cm}^2 = 9041\text{ton-m}^2$, se obtiene: $y_{2\max} = \frac{277.59}{9041} = 0.0307\text{m} = 30.7\text{mm}$ Que es el resultado de este ejemplo.

En seguida se resuelve un problema alternativo, **Ejemplo E3B**, que formó parte de un examen extraordinario de esta unidad de aprendizaje, mismo que no fue resuelto por ninguno de los estudiantes que presentaron el examen.

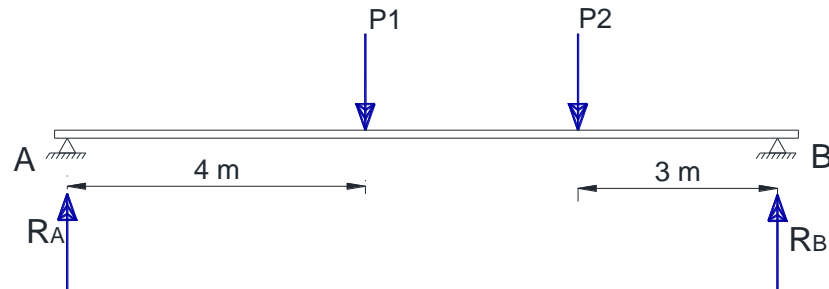
Se trata de una trabe simplemente apoyada con claro de 10.5 m, la carga sobre la trabe es triangular con un máximo de 2.5 ton/m a 6.0 m del primer apoyo, dicha carga descende a cero hacia ambos extremos (apoyos). Se requiere calcular con el método de doble integración el giro máximo en radianes y la deformación vertical máxima en mm si la sección de la trabe es IR 18X71 (105.3 kg/m) con $I_x = 48699 \text{ cm}^4$.

Dibujo representativo:



Paso 1. Obtención del equilibrio externo. Para este efecto se puede suponer que se tienen dos cargas concentradas equivalentes, una con valor de $P_1 = \frac{(2.5)(6)}{2} = 7.5$ ton aplicada a una distancia de $(6)\left(\frac{2}{3}\right) = 4$ m del apoyo izquierdo, la otra con valor de $P_2 = \frac{(2.5)(4.5)}{2} = 6.625$ ton aplicada a una distancia de $(4.5)\left(\frac{2}{3}\right) = 3$ m del apoyo derecho.

Dibujo representativo:



Con momentos respecto al apoyo A:

$$R_a = 7.5 \left(\frac{6.5}{10.5} \right) + 5.625 \left(\frac{3}{10.5} \right) = 6.25 \text{ ton}$$

Con momentos respecto al apoyo B:

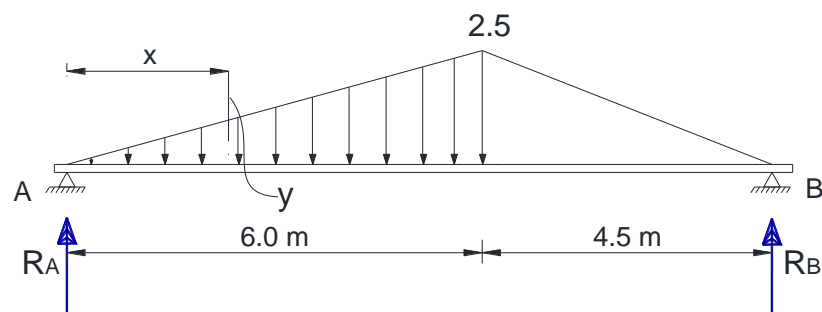
$$R_b = 7.5 \left(\frac{4}{10.5} \right) + 5.625 \left(\frac{7.5}{10.5} \right) = 6.875 \text{ ton}$$

Se comprueba equilibrio de fuerzas: suma de fuerzas aplicadas $-7.5 - 5.625 = -13.125$ ton

Suma de reacciones: $R_a + R_b = 6.25 + 6.875 = +13.125$ ton CUMPLE

Paso 2. Obtención del momento flexionante en el tramo A-C, x varía entre 0 y 6.0 m

Dibujo representativo



$$M_x = 6.25x - xy \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{3} \right) = 6.25x - \frac{yx^2}{6}$$

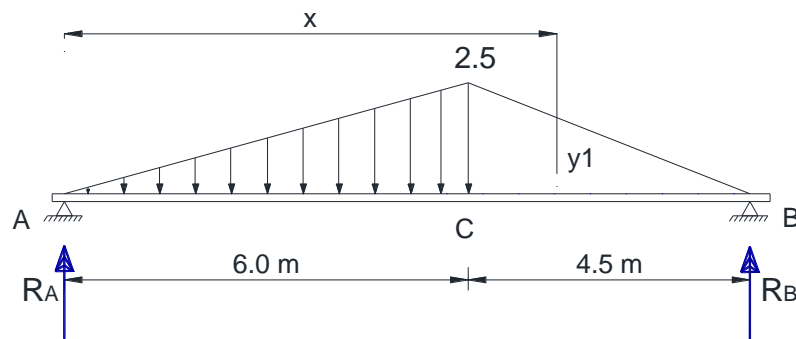
Pero por triángulos semejantes $y = \left(\frac{2.5}{6} \right) x = \left(\frac{5}{12} \right) x$

$$M_x = 6.25x - \left(\frac{5}{12} \right) x \left(\frac{x^2}{6} \right) = 6.25x - \left(\frac{5}{72} \right) x^3$$

Para $x = 0$ $M_x = 0$; para $x = 6$ $M_x = \left(\frac{45}{2} \right)$

Paso 3. Obtención del momento flexionante en el tramo C-B, x varía entre 6 y 10.5 m

Dibujo representativo:



Momento de la reacción: $M_1 = 6.25x$

Momento de la fuerza izquierda: $M_2 = -7.5(x-4)$

Momento de la fuerza derecha parte triangular: $M_3 = -(2.5 - y_1)(x - 6) \left(\frac{1}{2}\right) (x - 6) \left(\frac{2}{3}\right)$

Pero por triángulos semejantes: $y_1 = \frac{2.5}{4.5}(10.5 - x) = \frac{35}{6} - \left(\frac{5}{9}\right)x$

$M_3 = -\left(2.5 - \frac{35}{6} + \frac{5}{9}x\right) \left(\frac{(x-6)^2}{3}\right) = -\left(-\frac{10}{3} + \frac{5}{9}x\right) \left(\frac{(x-6)^2}{3}\right)$

Momento de la fuerza derecha parte rectangular: $M_4 = -y_1 \left(\frac{(x-6)(x-6)}{2}\right)$

$M_4 = -\left(\frac{35}{6} - \frac{5}{9}x\right) \frac{(x-6)^2}{2}$

Sumando los cuatro momentos y simplificando algebraicamente se obtiene:

$Mx = \left(\frac{5}{54}\right)x^3 - \left(\frac{35}{12}\right)x^2 + \left(\frac{95}{4}\right)x - 35$

Para $x = 6$ se obtiene $Mx = \frac{45}{2}$; para $x = 10.5$ se obtiene $Mx = 0$

Por lo tanto hasta este punto los resultados son congruentes.

Paso 4. Doble integración en tramo A-C:

$Mx = 6.25x - \left(\frac{5}{72}\right)x^3$

Primera derivada (1): $\Theta' = \frac{25}{8}x^2 - \left(\frac{5}{288}\right)x^4 + C_1$

Segunda derivada (2): $\Delta' = \frac{25}{24}x^3 - \left(\frac{1}{288}\right)x^5 + C_1x + C_2$

Paso 5. Doble integración tramo C-B

$$M_x = \left(\frac{5}{54}\right)x^3 - \left(\frac{35}{12}\right)x^2 + \left(\frac{95}{4}\right)x - 35$$

$$\text{Primera derivada (3): } \theta' = \left(\frac{5}{216}\right)x^4 - \left(\frac{35}{36}\right)x^3 + \left(\frac{95}{8}\right)x^2 - 35x + C_3$$

$$\text{Segunda derivada (4): } \Delta' = \left(\frac{1}{126}\right)x^5 - \left(\frac{35}{144}\right)x^4 + \left(\frac{95}{24}\right)x^3 - \left(\frac{35}{2}\right)x^2 + C_3x + C_4$$

Paso 5. Condiciones de frontera y cálculo de las constantes de integración:

1. Ángulo θ igual en los dos tramos para $x=6$
2. Deformación Δ igual en los dos tramos para $x=6$
3. Deformación $\Delta = 0$ para $x=0$ y para $x=10.5$

Se obtiene:

$$90 + C_1 = \frac{75}{2} + C_3$$

$$198 + 6C_1 + C_2 = -54 + 6C_3 + C_4$$

$$C_2 = 0$$

$$\frac{9261}{32} + \left(\frac{21}{2}\right)C_3 + C_4 = 0$$

Resolviendo se obtiene:

$$C_1 = -\frac{1185}{16}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{345}{16}$$

$$C_4 = -63$$

El giro en el apoyo A se obtiene con la ecuación (1) si $x = 0$; $\theta'_A = -74.625$

El giro en el apoyo B se obtiene con la ecuación (3) si $x = 10.5$; $\theta'_B = 77.055$

Por lo tanto el giro máximo se presenta en el apoyo B, el valor en radianes se obtiene dividiendo entre EI:

$$\text{Para el acero } E = 2030000 \text{ kg/cm}^2 \quad I = 48699 \text{ cm}^4$$

$$EI = 9.889 \times 10^6 \text{ kg-cm}^2 = 9886 \text{ ton-m}^2$$

$$\text{Giro máximo: } \theta_{\max} = \frac{77.055}{9886} = 0.00779 \text{ radianes}$$

Es de suponerse que la deformación vertical máxima ocurra en el tramo A-C, precisamente en el punto donde la tangente a la curva elástica es cero. Por lo tanto:

$$\theta' = \left(\frac{25}{8}\right)x^2 - \left(\frac{5}{288}\right)x^4 - \frac{1185}{16} = 0 \quad \text{Al resolver la ecuación se obtiene: } x = 5.299 \text{ m}$$

La deformación vertical máxima se obtiene al sustituir este valor de x en la ecuación (2), que resulta:

$$\Delta'_{\max} = -251.97$$

$$\text{Dividiendo entre } EI = 9896 \text{ ton}\cdot\text{m}^2 \quad \Delta_{\max} = -251.97/9896 = -0.2544\text{m} = 25.45 \text{ mm}$$

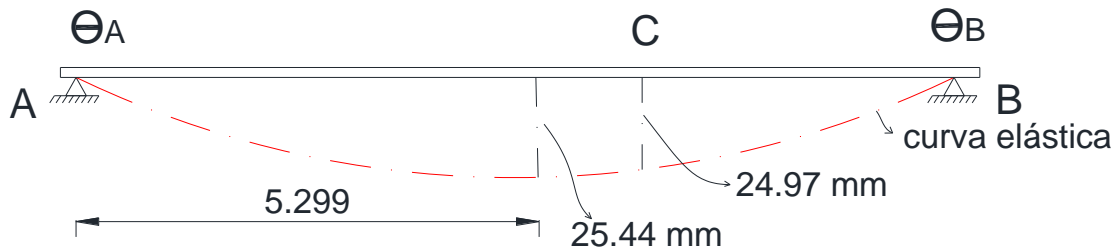
El signo negativo indica que es hacia abajo.

La deformación para $X = 6$ m (bajo el valor más alto de la carga triangular) resulta:

$$\Delta'_6 = \frac{1971}{8}$$

$$\Delta'_6 = -\frac{246.375}{9896} = 0.2492 \text{ m} = 24.92 \text{ mm} \quad \text{que como se ve es un valor un poco (2.08\%) menor que el máximo.}$$

El problema concluye al representar los resultados de forma gráfica.



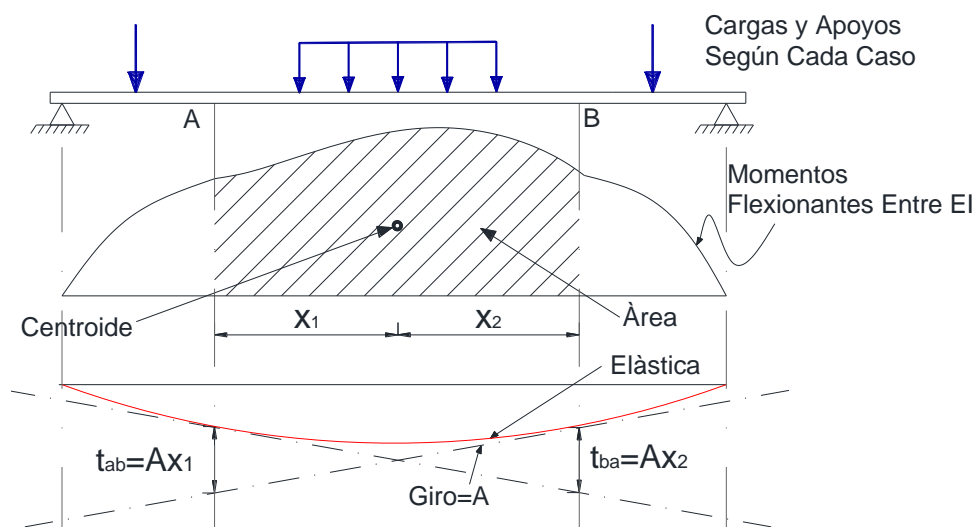
Método de área de momentos

El método se basa en los teoremas de Mohr:

Primer teorema: el ángulo que forman las tangentes entre dos puntos de la curva elástica es igual al área del diagrama de momentos flexionantes entre esos mismos dos puntos dividido entre EI .

Segundo teorema: la distancia entre las tangentes entre dos puntos es igual al área del diagrama de momentos flexionantes entre esos puntos multiplicada por la distancia centroidal respecto al primer punto, todo entre EI .

Figura ilustrativa:

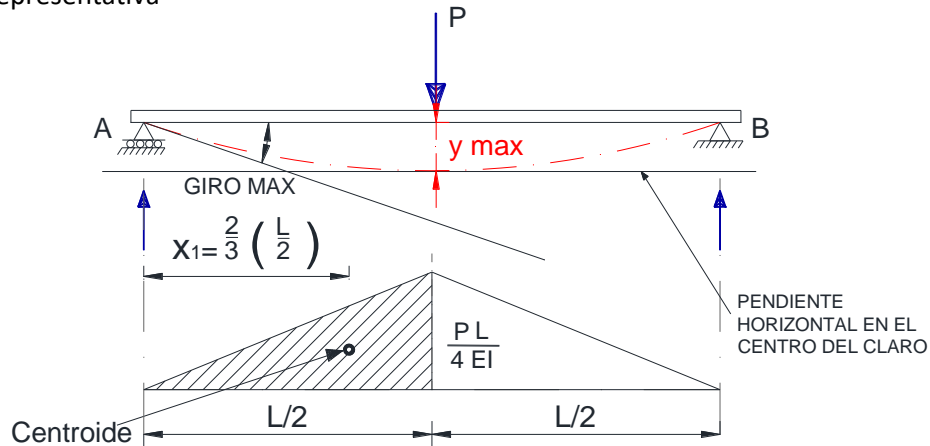


Ejemplo ilustrativo E4

Calcular el giro y la deflexión máxima para una trabe simplemente apoyada con carga concentrada en el centro del claro.

Equilibrio: las reacciones son: $R_a = \frac{P}{2}$, $R_b = \frac{P}{2}$ el diagrama de momentos flexionantes resulta triangular con un máximo de $M = \frac{PL}{4}$ en el punto de aplicación de la carga.

Figura representativa



La pendiente de la tangente en el punto C es cero, por lo tanto, el giro máximo es el área del diagrama de momentos flexionantes entre A y C, o sea: $EI(\theta_{\max}) = \left(\frac{PL}{4}\right) \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{PL^2}{16}$

La deformación máxima se presenta en el centro del claro por lo que su valor es el área antes calculada por su centroide respecto al punto A: $EIy_{\max} = \left(\frac{PL^2}{16}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{48}$

Ambos resultados son compatibles con lo que se encuentra en textos y manuales.

El estudiante deberá hacer un ejemplo de algún caso comprobable en libros o manuales

Método de la viga conjugada

El método se basa en la similitud entre las ecuaciones: $w = \frac{dV}{dx}$, $V = \frac{dM}{dx}$ con las que se obtienen giros y desplazamientos respectivamente, considerando una "viga conjugada" que se cargue con el diagrama de momentos flexionantes, de esta manera: la fuerza cortante de la viga conjugada en cualquier punto es igual al giro y el momento flexionante de la viga conjugada en cualquier punto es igual a la deflexión.

Para obtener la viga conjugada se deberá cumplir con la compatibilidad de las deformaciones, por ejemplo en un empotramiento el giro y la deflexión son cero, por lo que dicho empotramiento se convierte en extremo libre en la viga conjugada. Para otros casos comunes se presenta la siguiente tabla

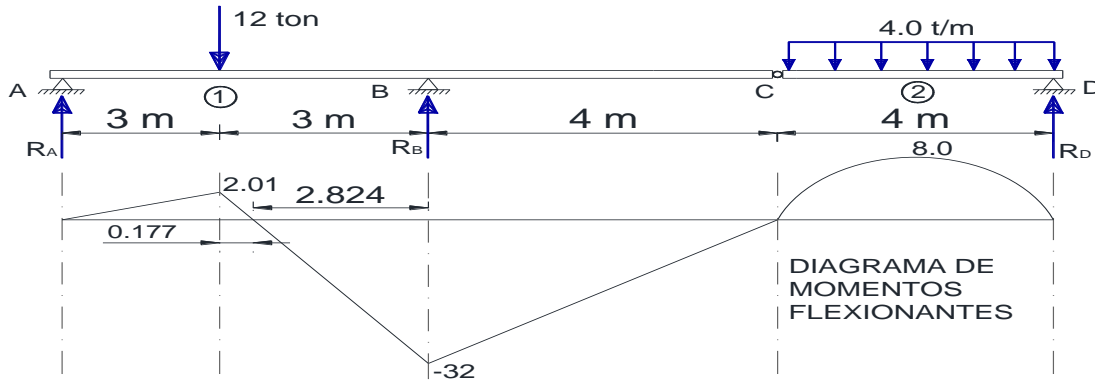
Tabla de equivalencias para la viga conjugada

VIGA REAL	VIGA CONJUGADA
Apoyo libre exterior	Apoyo libre exterior
Extremo libre	Empotramiento
Apoyo libre interior	Articulación interior
Empotramiento	Extremo libre
Articulación interior	Apoyo libre interior

Ejemplo ilustrativo E5

Trabe con EI constante, cuatro tramos 3, 3, 4 y 4 metros. Punto A apoyo libre exterior, punto 1 carga concentrada de 12 ton, punto B apoyo libre interior, punto C articulación interior, punto D apoyo libre exterior. En tramo CD carga uniforme de 4ton/m, el punto 2 es el centro del tramo C-D.

Dibujo representativo del problema



Equilibrio de la estructura original: momentos en C izquierda: $10R_a + 4R_b - 12(7) = 0$ (1)

Momentos en C derecha: $-4R_d + 16(2) = 0$ se obtiene $R_d = 8$ ton (2)

Suma de fuerzas: $R_a + R_b + R_d = 28$ (3)

De (1), (2) y (3) se obtiene; $R_a = 0.67$ ton $R_b = 19.33$ ton

Cálculo del diagrama de momentos

Tramo A-1 variación lineal de 0 a 2.01

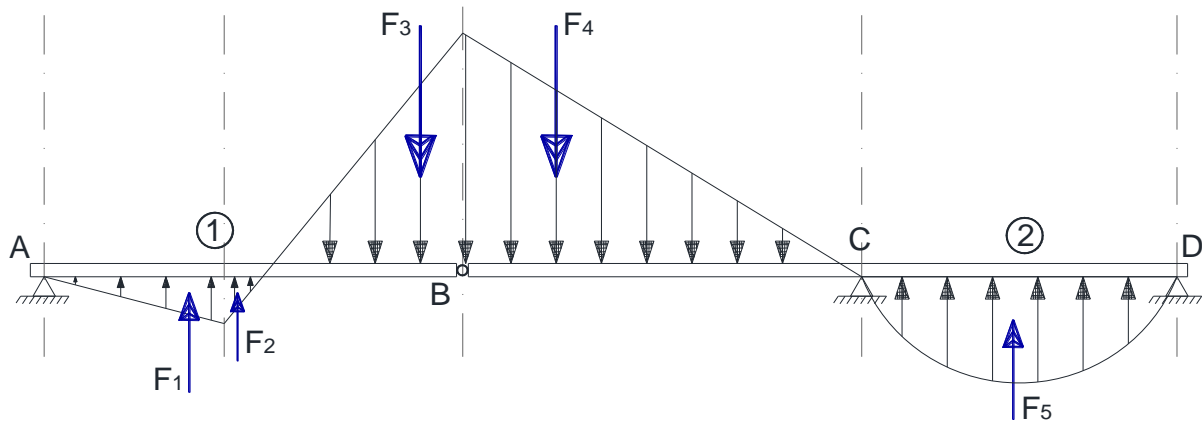
Tramo 1-B variación lineal de 2.01 a -32 con valor cero a una distancia de 0.176 m del punto 1

Tramo B-C variación lineal de -32 a 0

Tramo C-D momento cero en extremos, valor máximo en el centro del tramo de 8 ton-m

El diagrama de momentos flexionantes se representa en la figura anterior

Viga conjugada. Los apoyos A y D permanecen como apoyo libre exterior, el punto B se transforma en articulación interior, el punto C se transforma en apoyo libre interior. La viga conjugada se carga como si el diagrama de momentos fueran fuerzas, momento flexionante positivo fuerzas hacia arriba, negativo hacia abajo. La viga conjugada se representa en la siguiente figura:



Por facilidad de cálculo se obtienen las resultantes en cada tramo:

$$F_1 = \frac{2.01(3)}{2} = 3.015 \quad (\text{hacia arriba})$$

$$F_2 = \frac{2.01(0.176)}{2} = 0.178 \quad (\text{hacia arriba})$$

$$F_3 = \frac{32(2.823)}{2} = 45.168 \quad (\text{hacia abajo})$$

$$F_4 = \frac{32(4)}{2} = 64 \quad (\text{hacia abajo})$$

$$F_5 = \frac{2}{3}(8)(4) = 21.333 \quad (\text{hacia arriba})$$

Equilibrio de la viga conjugada:

$$\text{Momentos respecto a B izquierda: } 6R_a + 3.015(4) + 0.178\left(3 - \frac{0.177}{3}\right) - 45.168(0.9412) = 0$$

Se obtiene. $R_a = 4.988$

$$\text{Momentos respecto a B derecha: } -8R_d - 21.333(6) + 64\left(\frac{4}{3}\right) - 4R_c = 0$$

Se simplifica: $2R_d + R_c + 10.666 = 0$

Suma de fuerzas: $R_a + R_c + R_d = 84.642$

Resolviendo las ecuaciones, se obtiene: $R_d = -90.32 \quad R_c = 169.974$

Con estos resultados se puede calcular el giro y la deflexión en cualquier punto calculando respectivamente la fuerza cortante V y el momento M de la viga conjugada. Todos los valores encontrados se deben dividir entre EI

Algunos valores representativos se presentan en la siguiente tabla. Para esto se supone que la trabe tiene sección constante con $I = 60000\text{cm}^4$ y $E = 1.8 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Tabla de giros y deflexiones para el ejemplo E5

Punto	(EI)V	(EI)M	Giro (radianes x 10^{-4})	Deflexión (mm)
A	4.988	0.0	4.62	0.0
1	8.003	17.979	7.41	1.7
B	-36.987	0.0	-34.3	0.0
C	-100.987	-324.307	-93.5	-30
2	68.987	-172.64	63.9	-16
D	90.32	0.0	83.6	0.0

Como ejercicio adicional se recomienda que el estudiante realice el caso en que se cambie el apoyo en D por empotramiento y se elimine el apoyo en B

Principio del trabajo virtual aplicado a armaduras

La fórmula básica es: $\Delta = \sum (Mu) \frac{SL}{AE}$

Del: deflexión en un nudo de la armadura

S: Fuerza producida por las cargas externas en cada barra de la armadura

Mu: Fuerza producida por la carga unitaria aplicada en el nudo donde se pretende calcular Δ

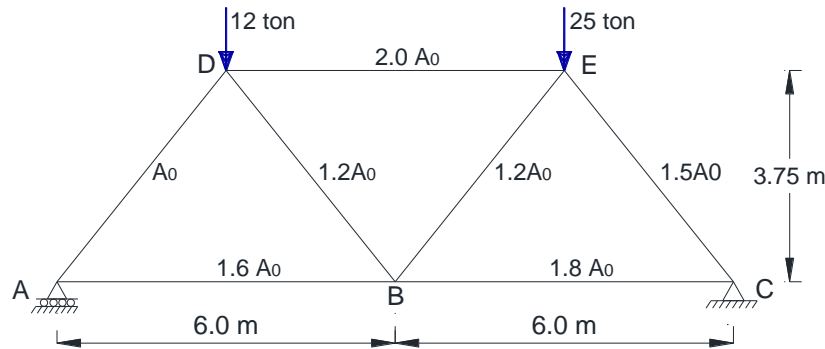
L: longitud de cada barra

A: área de la sección transversal de cada barra

E: Modulo de elasticidad de cada barra (usualmente constante)

Ejemplo ilustrativo E6

La armadura simplemente apoyada con claro de 12m y peralte de 3.75m, se compone de 7 barras y cinco uniones (identificadas con los puntos de A a E) cada una con área diferente, se tienen dos fuerzas concentradas aplicadas en la parte superior, una de 12 ton aplicada en D, y otra de 25 ton aplicada en E. Todos estos datos se muestran en la figura:



Se requiere calcular la deformación vertical en el punto central B en mm suponiendo $A_0 = 15\text{cm}^2$ y $E = 450000\text{kg/cm}^2$

Equilibrio externo: momentos respecto a C $12R_a - 12(9) - 3(25) = 0$ se obtiene: $R_a = 15.25\text{ton}$

Por suma de fuerzas se obtiene: $R_c = 21.75\text{ton}$

Calculo de las fuerzas S

El triángulo básico que se forma tiene cateto horizontal de 3m, cateto vertical de 3.75m, por lo que la hipotenusa es: 4.8023m

Equilibrio del nudo A: $AD \left(\frac{3.75}{4.8023} \right) + 15.25 = 0$ se obtiene: $AD = -19.529\text{ton}$ (compresión)

$AB = 19.529 \left(\frac{3}{4.8023} \right) = 12.2 \text{ ton}$ (tensión)

Equilibrio del nudo D: $-12 + 19.529 \left(\frac{3.75}{4.8023} \right) - \left(\frac{3.75}{4.8023} \right) DB = 0$

se obtiene $DB = 4.162 \text{ ton}$. $19.529 \left(\frac{3}{4.8023} \right) + DE + 4.162 \left(\frac{3}{4.8023} \right) = 0$, $DE = -14.8 \text{ ton}$

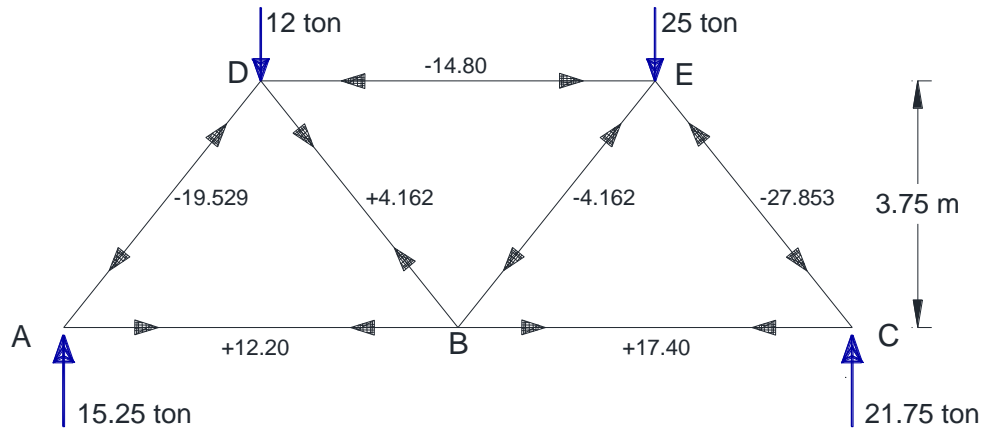
Equilibrio del nudo B: $DB = -4.162\text{ton}$. $-12 - 2 + BC - 4.162 \left(\frac{3}{4.8023} \right) (2) = 0$, $BC = 17.40 \text{ ton}$

Equilibrio del nudo E: $14.8 + 4.162 \left(\frac{3}{4.8023} \right) + EC \left(\frac{3}{4.8023} \right) = 0$, se obtiene $EC = 27.853 \text{ ton}$

Equilibrio nudo C (comprobación): $17.4 - 27.853 \left(\frac{3}{4.8023} \right) = 0.00021$, prácticamente cero

$-27.853 \left(\frac{3.75}{4.8023} \right) + 21.75 = 0.00026$ prácticamente cero

Los resultados para cada una de las barras se presentan gráficamente en la siguiente figura, donde el signo positivo representa fuerza de tensión y negativo de compresión:



Armadura con carga unitaria concentrada en el nudo B con dirección hacia abajo (donde se requiere calcular la deformación)

Equilibrio externo. Por simetría: $R_a = R_c = 0.5$

Equilibrio del nudo A: $AD \left(\frac{3.75}{4.8023} \right) + 0.5 = 0$, se obtiene $AD = -0.6403$

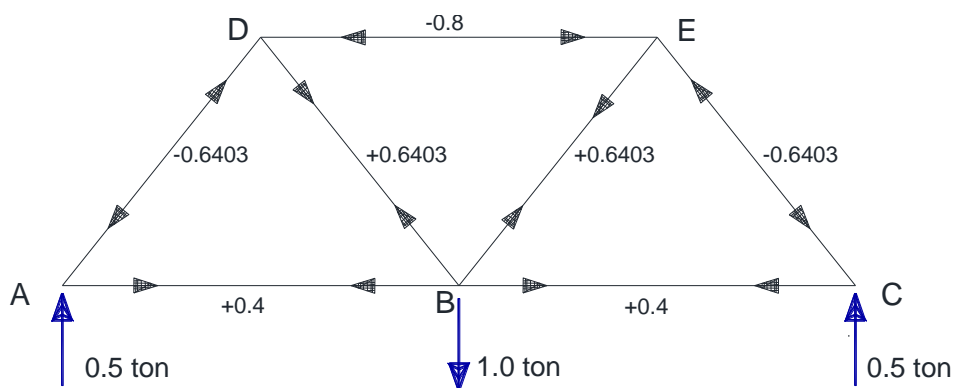
$$AB = 0.6403 \left(\frac{3}{4.8023} \right) = 0.4$$

Equilibrio nudo D: $DB = +0.6403$, $DE = -0.6403 \left(\frac{3}{4.8023} \right) (2) = -0.8$

Equilibrio nudo B: $0.6403 \left(\frac{3.75}{4.8023} \right) + BE \left(\frac{3.75}{4.8023} \right) - 1.0 = 0$ $BE = 0.6403$

$BC - 0.4 + 0.6403 \left(\frac{3}{4.8023} \right) - 0.6403 \left(\frac{3}{4.8023} \right) = 0$ $BC = 0.4$

Por simetría, las fuerzas en las demás barras corresponden a las ya calculadas, los resultados se presentan en la figura siguiente:



Se aplica el principio del trabajo virtual, lo cual se hace en forma tabular:

Tabla de aplicación del principio del trabajo virtual, ejemplo E6

Barra	L(m)	Área (Ao)	S (ton)	Mu(ton)	MuSL/AE
AB	6.0	1.6	+12.2	+0.4	+18.30
AD	4.8023	1.0	- 19.529	-0.6403	+60.05
DB	4.8023	1.2	+4.162	+0.6403	+10.67
DE	6.0	2.0	-14.80	-0.8	+35.52
BE	4.8023	1.2	-4.162	+0.6403	-10.62
BC	6.0	1.8	+17.40	+0.40	+23.2
EC	4.8023	1.5	-27.853	-0.6403	+57.10
Total					+194.22/AoE

Los datos del ejemplo: A = 15 cm² E = 450000 kg/cm²

AE = 6750000 kg = 6750 ton

Por lo tanto, la deformación es: $\Delta = \left(\frac{194.22}{6750} \right) = 0.029\text{m} = 29 \text{ mm}$

Principio del trabajo virtual aplicado a elementos sometidos a flexión

Formulas básicas:

Para deflexión: $\Delta = \int_L^0 \left(\frac{M_m dx}{EI} \right)$

Donde M es la función del momento producido por las cargas externas, m es la función del momento producido por una carga unitaria aplicada en el punto donde se requiere calcular la deflexión

Para giro:

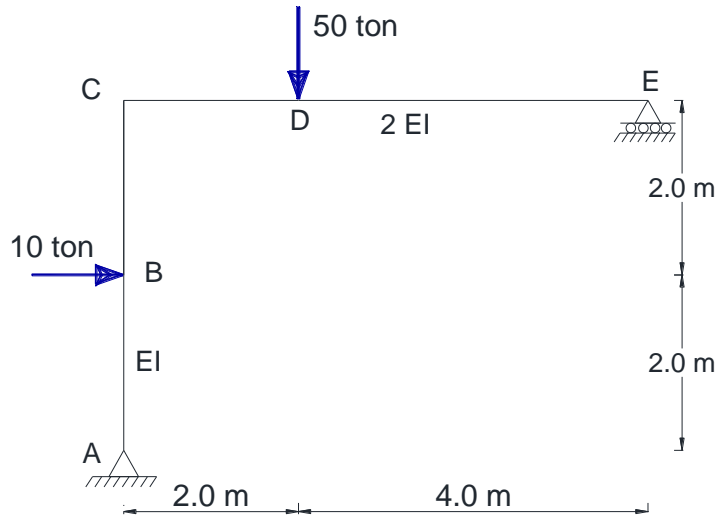
$$\theta = \int_L^0 \left(\frac{M_m dx}{EI} \right)$$

Donde M es la función del momento producido por las cargas externas, m es la función del momento producido por un momento unitario aplicado en el punto donde se requiere calcular el giro.

Ejemplo ilustrativo E7

(Se trata del ejemplo 3.18 del Libro Análisis Estructural de González Cuevas)

Calcular la deflexión horizontal en el punto E y la rotación en el punto A del marco de la figura



Equilibrio externo, suma de momentos respecto al punto A: $50(2) + 10(2) - 6R_{ey} = 0$

$R_{ey} = 20 \text{ ton}$ con suma de fuerzas en x, se obtiene $R_{ax} = 10 \text{ ton}$

Con suma de fuerzas en y se obtiene: $R_{ay} + 20 - 50 = 0$ se obtiene: $R_{ay} = 30 \text{ ton}$

Obtención de momentos flexionantes

Tramo A-B, y entre 0 y 2 metros: $M = 10y$ si $y = 0$ $M = 0$; si $y = 2$ $M = 20$

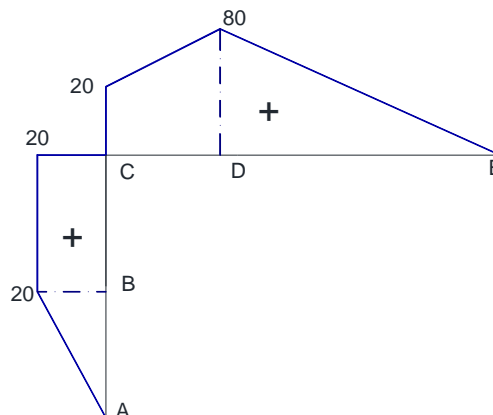
Tramo B-C, y entre 2 y 4 metros: $M = 10y - 10(y - 2) = 20$ (constante)

Tramo C-D, x entre 0 y 2 metros: $M = 30x + 40 - 20 = 30x + 20$ si $x = 0$ $M = 20$ si $x = 2$ $M = 80$

Tramo D-E, x entre 2 y 6 metros: $M = 30x + 40 - 20 - 50(x - 2) = -20x + 120$

Si $x = 2$ $M = 80$ si x igual a 6 $M = 0$ Se

grafican los resultados en la siguiente figura



Carga unitaria $F = 1.0$ aplicada E dirección horizontal y sentido positivo.

Equilibrio externo, momentos respecto al punto A. $4 - 6R_{EY} = 0$ $R_{EY} = 2/3$

Por suma de fuerzas en x: $R_{AX} = 1.0$

Por suma de fuerzas en y $R_{AY} = -2/3$

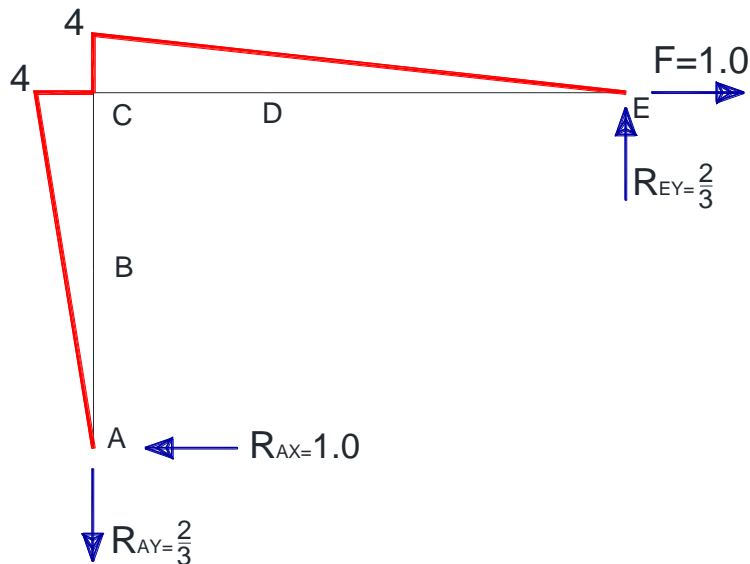
Obtención de momentos flexionantes

Tramo A-C, y varía entre 0 y 4 metros: $m = y$ si $y = 0$ $M = 0$ si $y = 4$ $m = 4$

Tramo C-E, x varía entre 0 y 6 metros: $m = -\frac{2}{3}x + 4$

Si $x = 0$ $m = 4$ si $x = 6$ $m = 0$

Se grafican los resultados en la siguiente figura



Cálculo de la deflexión en E (todos los resultados multiplicados por $\frac{1}{EI}$)

Tramo A-B $\int_0^2 (10y)(y)dy = \left(\frac{10}{3}\right)y^3$ entre 0 y 2

Se obtiene, $\Delta_{AB} = \frac{80}{3} = 26.67$

Tramo B-C $\int_2^4 (20)(y)dy = (10)y^2$ entre 2 y 4

Se obtiene, $\Delta_{BC} = 160 - 40 = 120$

Tramo C-D $\int_0^2 \frac{1}{2}(30x + 20)\left(-\frac{2}{3}x + 4\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{20}{3}x^3 + \frac{106.67}{2}x^2 + 80x\right)$ entre 0 y 2

Se obtiene, $\Delta_{CD} = \frac{320}{2} = 160$

Tramo D-E, de $\int_2^6 \frac{1}{2}(-20x + 120) \left(-\frac{2}{3}x + 4\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{13.33}{3}x^3 - 80x^2 + 480x\right)$
 entre 2 y 6; se obtiene: $\Delta_{DE} = \frac{1}{2}(959.76 - 675.55) = 142.105$

Por lo tanto la deformación resultante en E es: $\Delta = \frac{1}{EI} (26.67 + 120 + 160 + 142.105) = \frac{448.78}{EI}$
 (Resultado del libro $\frac{448.67}{EI}$)

Cálculo del giro en A

Se aplica un momento $m = 1.0$ positivo en el apoyo A

Equilibrio externo, momentos respecto a A: $1 - 6R_{EY} = 0$ se obtiene $R_{EY} = 1/6$

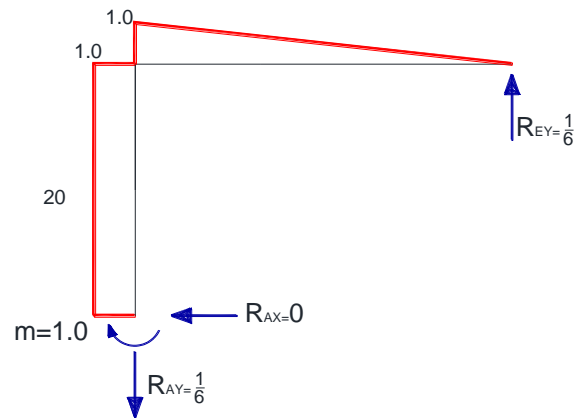
Suma de fuerzas en x, $R_{AX} = 0$ Suma de fuerzas en y, $R_{AY} = 1/6$

Cálculo de momentos flexionantes

Tramo A-C y varía de 0 a 4 metros, el momento es constante: $m = 1.0$

Tramo C-E x varía de 0 a 6 metros, $m = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)x$ si $x = 0$, $m = 1.0$, si $x = 6$, $m = 0$

Los resultados se presentan en la figura



Cálculo del giro en A (resultados multiplicados por $\frac{1}{EI}$)

Tramo A-B, y varía de 0 a 2 metros $\Theta_{AB} = \int_0^2 10y(1)dy = 5y^2$ entre 0 y 2

Se obtiene $5y^2$ entre 0 y 2 $\Theta_{AB} = 20$

Tramo B-C, y varía de 2 a 4 metros $\Theta_{BC} = \int_2^4 (20)(1)dy$

Se obtiene $20y$ entre 2 y 4 $\Theta_{BC} = 80 - 40 = 40$

Tramo D-C, x varía de 0 a 2 metros $\Theta_{DC} = \int_0^2 \frac{1}{2}(30x + 20) \left(1 - \frac{1}{6}x\right) dx$

Se obtiene $\frac{1}{2} \left(\frac{3.33}{3}x^3 - 20x^2 + 120x\right)$ entre 0 y 2 = 40.56

Tramo D-E, x varía entre 2 y 6 metros $\Theta_{DE} = \int_2^6 \frac{1}{2}(-20x + 120) \left(1 - \frac{1}{6}x\right) dx$

Se obtiene $\frac{1}{2} \left(\frac{3.33}{3} x^3 - 20x^2 + 120x \right)$ entre 2 y 6 $= \frac{1}{2} (239.76 - 168.88) = 35.44$

El giro total es: $\Theta = \frac{1}{EI} (40 + 40.56 + 20 + 35.44) = \frac{136}{EI}$ (resultado del libro $\frac{135.58}{EI}$)

Solución alternativa del problema, con las integrales de Mohr (Ver por ejemplo tabla 3.1 página 203 del libro Análisis Estructural de González Cuevas)

Cálculo de la deformación en E

Tramo A-B se combinan dos triángulos con el vértice en la misma posición,

Se obtiene $\frac{1}{3} (2)(20)(2) = 26.67$

Tramo B-C se combina un rectángulo y un trapecio,

Se obtiene $\frac{1}{2} (2)(20)(2 + 4) = 120$

Tramo B-C se combinan dos trapecios con el lado menor en diferente posición,

Se obtiene $\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right) (2) \left((20)(4)(2) + (20)(2.67) + (80)(2.67)(2) \right) = \frac{320.2}{2} = 160.1$

Tramo D-E se combinan dos triángulos con el vértice en la misma posición,

Se obtiene $\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) (4)(80)(2.67) = \frac{284.8}{2} = 142.4$

La deformación total es $\Delta_E = \frac{1}{EI} (26.67 + 120 + 160.1 + 142.4) = \frac{449.17}{EI}$ (antes 448.78)

Cálculo del giro en A

Tramo A-B se combinan un triángulo con un rectángulo,

Se obtiene $\left(\frac{1}{2}\right) (2)(20)(1) = 20$

Tramo B-C se combinan dos rectángulos,

Se obtiene $2(20)(1) = 40$

Tramo B-C se combinan dos trapecios con el lado menor en diferente posición,

Se obtiene $\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right) (2) \left((20)(1)(2) + (20) \left(\frac{2}{3}\right) + 80(1) + (80) \left(\frac{2}{3}\right) (2) \right) = \frac{80}{2} = 40$

Tramo D-E se combinan dos triángulos con el vértice en la misma posición,

Se obtiene $\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) (4)(80) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{71.11}{2} = 35.56$

El giro total es $\theta_A = \frac{1}{EI} (20 + 40 + 40 + 35.56) = \frac{135.56}{EI}$ (antes 136)

Análisis por el método de fuerzas

Procedimiento simplificado.

1. Establecer el grado de hiperestaticidad del caso, establece el número de reacciones (fuerzas y momentos) desconocidos que son las incógnitas, se le asigna un número a cada una.
2. Eliminar suficiente número de reacciones (incógnitas) para hacer la estructura estáticamente determinada.
3. Obtener el equilibrio de la estructura estáticamente determinada, así como las deformaciones y giros correspondientes a cada una de las incógnitas. Se les identifica mediante una letra mayúscula con dos índices: el primero cero que significa que son del caso estático y el otro el correspondiente a cada incógnita.
4. Por cada incógnita, y de una en una, se aplica una fuerza o momento que restituya la condición original. Se obtienen nuevos giros y desplazamientos que se les identifica con letras minúsculas con dos índices, el primero correspondiente a la incógnita en turno y el otro correspondiente a cada incógnita.
5. Una vez que se hace el paso 4 para todas las incógnitas se formula el sistema de ecuaciones para lograr la compatibilidad de deformaciones.
6. Se resuelve el sistema de ecuaciones cuya solución son las fuerzas y momentos desconocidos (incógnitas)
7. Se procede a comprobar el equilibrio general y en caso de ser correcto se calculan los diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes

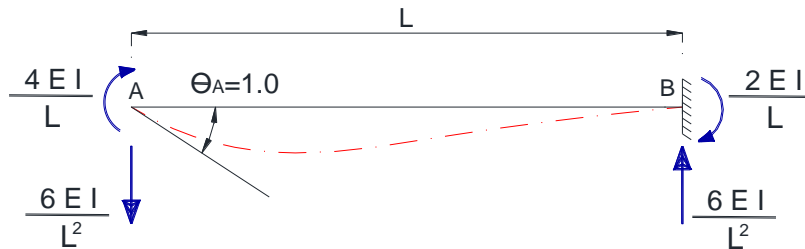
Análisis por el método de deformaciones (rigideces)

Procedimiento simplificado

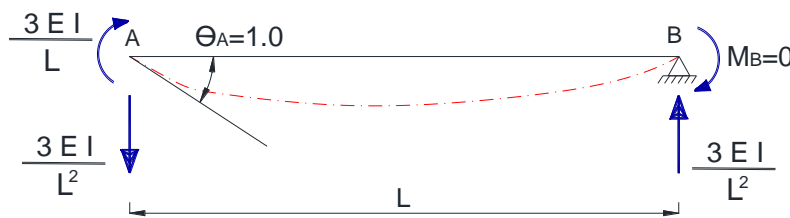
1. Establecer el grado de hiperestaticidad, en este caso las incógnitas son los giros y desplazamientos desconocidos.
2. Fijar con supuestos empotramientos para que ningún nudo tenga giros o desplazamientos, es decir sean cero.
3. Calcular los momentos y fuerzas de empotramiento perfecto en cada barra. Para esto se puede recurrir a tablas de libros y manuales (por ejemplo, la Tabla 5.1 página 349 del libro de Análisis Estructural de González Cuevas)
4. Liberar, de una en una, las restricciones impuestas en el paso 2. Para esto se imponen giros o desplazamientos siempre positivos (que en este caso son las incógnitas) de tal manera que se puedan calcular los efectos en cada nodo (momentos y fuerzas)
5. Se formula el sistema de ecuaciones de tal manera que se cumpla el equilibrio en cada nodo
6. Se resuelve el sistema de ecuaciones con lo que se obtienen los giros y desplazamientos desconocidos.
7. Con los giros y desplazamientos calculados se regresa a cada una de las ecuaciones para obtener las fuerzas y momentos finales que deberán estar en equilibrio.
8. Se procede a comprobar el equilibrio general y en caso de ser correcto se calculan los diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes

En este procedimiento es recomendable contar con las rigideces para los casos más representativos, como son:

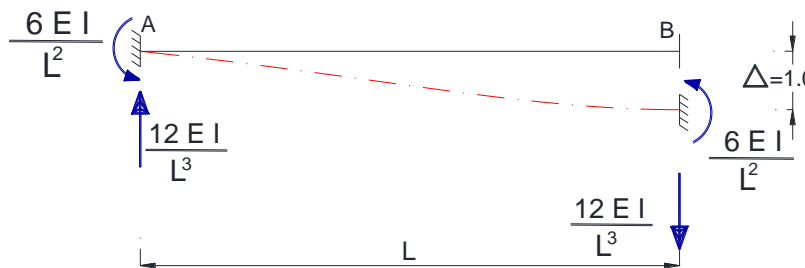
Barra doblemente empotrada con giro unitario en A: $M_a = \frac{4EI}{L}$ $M_b = \frac{2EI}{L}$ $V_a = V_b = \frac{6EI}{L^2}$



Barra empotrada articulada con giro unitario en A: $M_a = \frac{3EI}{L}$ $M_b = 0$ $V_a = V_b = \frac{3EI}{L^2}$

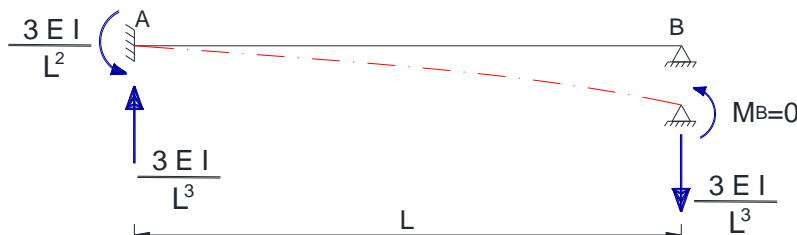


Barra doblemente empotrada con desplazamiento relativo unitario entre sus apoyos: $M_a = M_b = \frac{6EI}{L^2}$ $V_a = V_b = \frac{12EI}{L^3}$



Barra empotrada articulada con desplazamiento relativo unitario entre los apoyos:

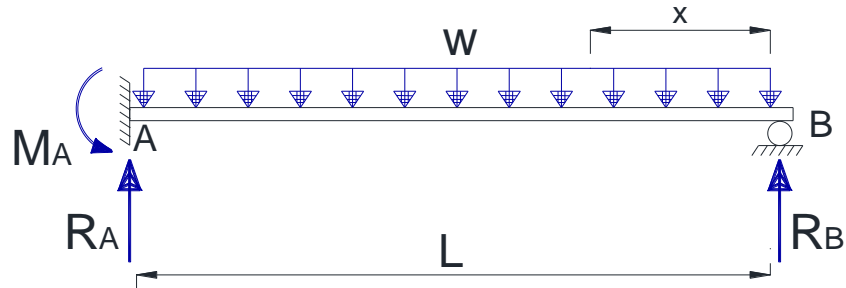
$M_a = \frac{3EI}{L^2}$ $M_b = 0$ $V_a = V_b = \frac{3EI}{L^3}$



Para ilustrar la aplicación de estos métodos se presentan dos ejemplos el primero conceptual y muy simple y el segundo más elaborado, pero también sencillo.

Ejemplo ilustrativo E8

Trabe empotrada en un extremo y articulada en el otro con carga uniformemente repartida.



Con el método de fuerzas

Paso 1, grado de hiperestaticidad = 1, la incógnita es R_b

Paso 2, se elimina R_b con lo que la trabe resulta estáticamente determinada, o sea empotrada en un extremo y libre en el otro.

Paso 3, el momento en el empotramiento es $M_a = \frac{wL^2}{2}$ la reacción es $R_a = wL$

La deformación en el extremo libre se puede calcular por ejemplo con el teorema de área de momentos:

$$(EI)\text{Área} = \frac{1}{3}(L)\frac{wL^2}{2} = \frac{wL^3}{6}$$

$$\text{Brazo} = \frac{3}{4}L \quad \text{La deformación es } \Delta_0 = -\frac{wL^4}{8EI}$$

Paso 4, se aplica una fuerza P (incógnita) en el extremo libre de abajo hacia arriba. Por equilibrio de obtiene $M_a = PL$ $R_a = P$

Por área de momentos la deformación en el extremo libre es: $(EI)\text{Área} = \frac{1}{2}(PL)(L) = \frac{PL^2}{2}$

$$\text{Brazo} = \frac{2}{3}L \quad \text{La deformación es } \Delta_1 = \frac{PL^3}{3EI} \quad (\text{positiva, hacia arriba})$$

$$\text{Paso 5, por compatibilidad: } \Delta_0 + \Delta_1 = 0 \quad \text{o sea} \quad -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{PL^3}{3EI} = 0$$

Paso 6, se resuelve para obtener $P = \frac{3}{8}(wL)$ que es el resultado de R_b

$$\text{Paso 7, con momentos respecta a A se obtiene: } M_a = \frac{wL^2}{2} - \frac{3wL^2}{8} = \frac{wL^2}{8} \quad (\text{flexionante negativo})$$

$$\text{Por suma de fuerzas se obtiene: } R_a = wL - \frac{3wL}{8} = \frac{5wL}{8}$$

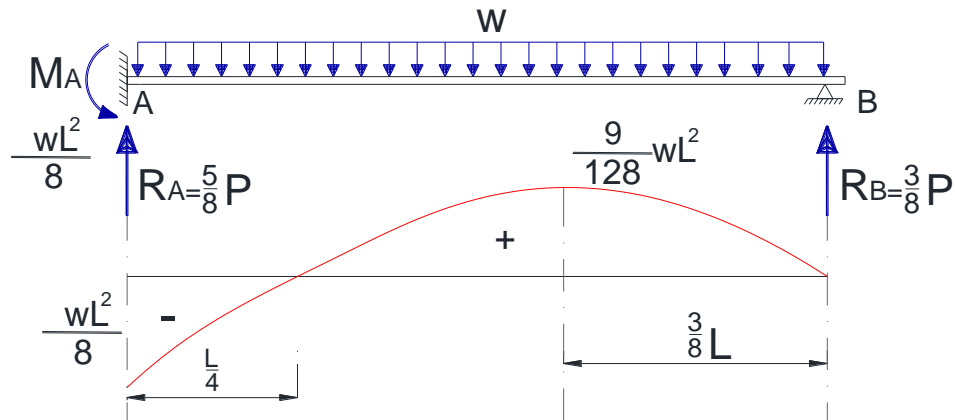
$$\text{El momento para una sección a una distancia } x \text{ de B es: } M_x = -\frac{3wL}{8}x + \frac{1}{2}wx^2$$

La derivada es $\frac{dM}{dx} = -\frac{3}{8}wL + wx$ para que sea cero la derivada $x = \frac{3}{8}L$

Por lo que el valor máximo del momento positivo es:

$$M_{\max} = \frac{3}{8}(wL)\left(\frac{3}{8}L\right) - \frac{1}{2}(w)\left(\frac{3}{8}L\right)^2 = \left(\frac{9}{128}\right)wL^2$$

El diagrama de momentos flexionantes se presenta en la figura:



Con el método de desplazamientos

Paso 1: grado de hiperestaticidad = 1 incógnita giro en B

Paso 2: se hace doblemente empotrada

Paso 3: el momento de empotramiento perfecto es $\frac{wL^2}{12}$

Paso 4: giro unitario positivo en B, con lo que $= \frac{4EI}{L}$ $M_a = \frac{2EI}{L}$

Paso 5: Equilibrio del nudo B $\frac{wL^2}{8} - \frac{4EI}{L}\theta_B = 0$

Paso 6: se obtiene $\theta_B = \frac{wL^3}{48EI}$

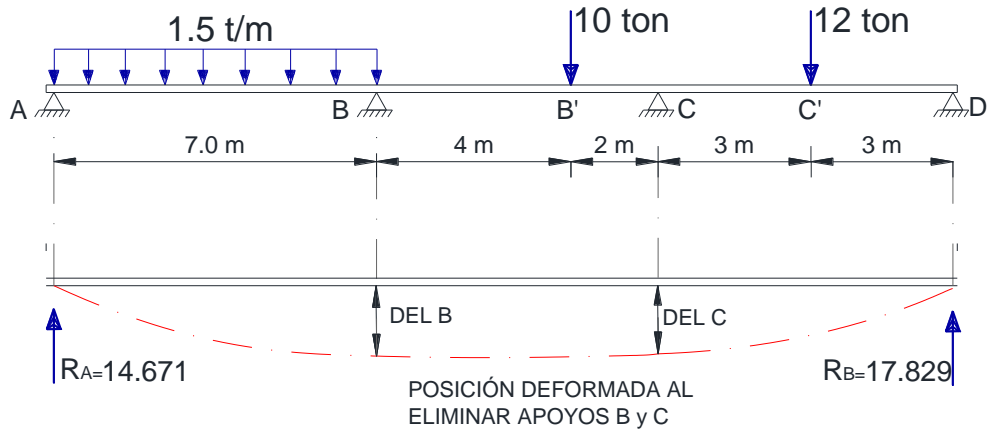
Paso 7: por equilibrio $M_a = \frac{wL^2}{12} + \left(\frac{wL^3}{48EI}\right)\left(\frac{2EI}{L}\right) = \left(\frac{wL^2}{8}\right)$

$$M_b = \frac{wL^2}{12} - \left(\frac{wL^3}{48EI}\right)\left(\frac{4EI}{L}\right) = 0$$

Paso 8: se obtiene el equilibrio y el diagrama de momentos de forma similar al caso anterior.

Ejemplo ilustrativo E9

Se pide obtener el equilibrio y el diagrama de momentos flexionantes de la trabe continua que se muestra, consta de cuatro apoyos articulados y tres claros: el primero A-B de 7.0 m de claro con carga uniformemente repartida de 1.5 ton/m; el segundo B-C con claro de 6.0 m y con una carga concentrada de 10.0 ton a cuatro metros del apoyo B; el tercero C-D con claro de 6.0 m y una carga concentrada de 12.0ton en el centro, o sea equidistante entre C y D.



El grado de indeterminación es 2, o sea cuatro reacciones y dos ecuaciones de equilibrio aplicables.

Se plantea eliminar los apoyos B y C con lo que la trabe se transforma en simplemente apoyada:

Con momentos respecto a D se obtiene: $19R_a - 10.5(15.5) - 10(8) - 12(3) = 0$, se obtiene: $R_a = 14.671\text{ton}$

Con suma de fuerzas se obtiene: $R_b = 10.5 + 10 + 12 - 14.671 = 17.829\text{ ton}$

Para calcular las deformaciones en B y C, se aplica el método de viga conjugada, para ello se calculan los momentos flexionantes.

Tramo A-B, x varia de 0 a 7: $M_x = 14.671x - \frac{1.5}{2}x^2$ si $x = 0$, $M = 0$, si $x = 7$, $M_b = 65.947$

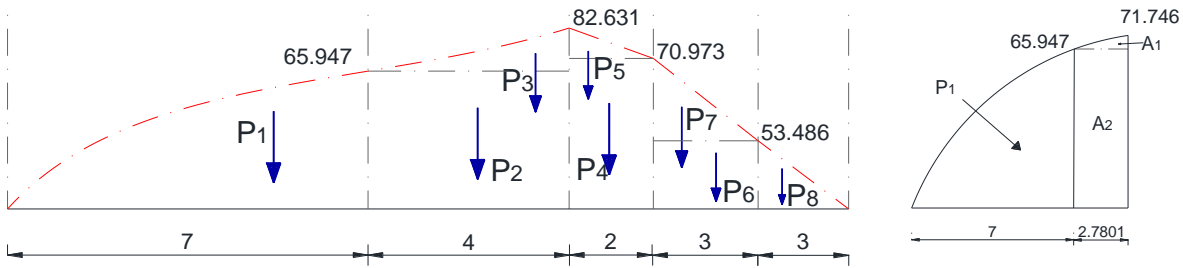
$\frac{dM_x}{dx} = 14.671 - 1.5x$ si $\frac{dM_x}{dx} = 0$ se obtiene $x = 9.7801$ (Fuera del intervalo)

$M_{\max} = 14.671(9.7801) - \frac{1.5}{2}(9.7801)^2 = 71.746$

La variación de los momentos en el resto de la trabe es lineal, se obtienen los valores del momento en los diferentes puntos mediante la tabla siguiente:

Punto	Operación	Momento
B'	$14.671(11) - 10.5(7.5)$	82.631
C	$14.671(13) - 10.5(9.5) - 10(2)$	70.973
C'	$14.671(16) - 10.5(12.5) - 10(5)$	53.486
D	$14.671(19) - 10.5(15.5) - 10(8) - 12(3)$	0.0

Las áreas del diagrama de momentos se hacen equivalentes a fuerzas concertadas, se representan por una zona parabólica (P1), tres rectángulos (P2, P4 y P6) y cuatro triángulos (P3, P5, P7 y P8) como se representa en la figura



Para el cálculo de P1, se procede de la siguiente manera:

$$\text{Área hasta el máximo, } A_t = \left(\frac{2}{3}\right) (9.7801)(71.746) = 467.789$$

$$\text{Área de la parábola entre B y el máximo, } A_1 = \left(\frac{2}{3}\right) (71.746 - 65.947)(9.7801 - 7) = 10.748$$

$$\text{Área del rectángulo entre los mismos puntos, } A_2 = (65.947)(9.7801 - 7) = 183.339$$

$$\text{Por lo tanto: } P1 = A_t - A_1 - A_2 = 273.702 \quad \text{Ver figura representativa}$$

El centroide de esta parte se calcula con:

$$467.789 \left(\frac{5}{8}\right) (9.7801) = 273.702xc + 183.339 \left(7 + \frac{2.7801}{2}\right) + 10.748 \left(7 + \frac{5}{8}(2.7801)\right)$$

Se obtiene. $xc = 4.484$

Las restantes áreas (fuerzas) se calculan en la siguiente tabla:

Fuerza	Operación	Resultado	Centroide
P2	65.947(4)	263.788	2m de B
P3	(82.631 - 65.947)(4/2)	33.368	2.667 de B
P4	70.973(2)	141.946	1.0 de B'
P5	(82.631 - 70.973)(2/2)	11.658	0.667 de B'
P6	53.486(3)	160.458	1.5 de C
P7	(70.973 - 53.468)(3/2)	26.231	1.0 de C
P8	53.486(3/2)	80.229	1.0 de C
Suma		717.686	

Se calculan las reacciones de la viga conjugada:

$$19R_A = 273.702(19 - 4.484) + 263.788(19 - 7 - 2) + 33.368(19 - 7 - 2.667) + 141.946(19 - 7 - 4 - 1) + 11.658(19 - 7 - 4 - 0.667) + 160.458 \left(3 + \frac{3}{2}\right) + 26.231 \left(3 + \frac{3}{3}(2)\right) + 80.229(3 - 1)$$

Se obtiene: $R_A = 474.488$

$$\text{Por suma de fuerzas } R_D = 717.686 + 272.702 - 474.488 = 516.90$$

Las correspondientes deformaciones son equivalentes al momento de la viga conjugada en B y C:

$$\Delta_B = 474.488(7) - 273.702(7 - 4.484) = 2632.78$$

$$\Delta_C = 516.90(6) - 80.229(3 + 1) - 160.458\left(\frac{3}{2}\right) - 26.231\left(\frac{3}{3}\right) = 2513.57$$

Se aplica una fuerza unitaria vertical en B, F_B :

$$\text{Equilibrio: } R_a = \frac{12}{19} \quad R_b = \frac{7}{19}$$

La forma del diagrama de momentos es triangular con máximo en B de: $\left(\frac{12}{19}\right)(7) = 4.421$

Se obtienen fuerzas equivalentes a las áreas: $P_{11} = 4.421\left(\frac{7}{2}\right) = 15.474$

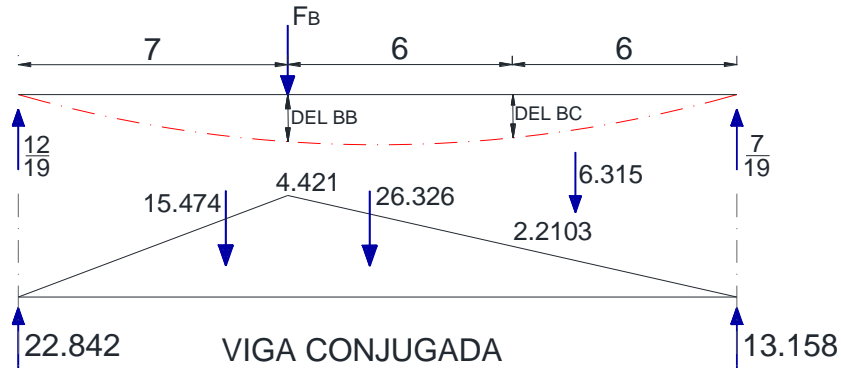
$$P_{12} = 4.421\left(\frac{12}{2}\right) = 26.526$$

Del equilibrio de la viga conjugada, se obtiene:

$$19R_A = 15.474\left(19 - 7\left(\frac{2}{3}\right)\right) + 26.526\left(19 - 7 - \frac{12}{3}\right) \quad \text{se obtiene } R_A = 22.842$$

Por suma de fuerzas: $R_D = 15.474 + 26.526 - 22.842 = 19.158$

Las deformaciones correspondientes son: $\Delta_{BB} = 22.842(7) - 15.474\left(\frac{7}{3}\right) = 123.788$



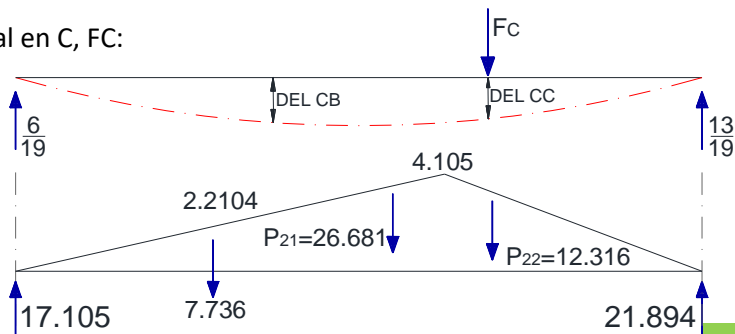
El momento en C es $\frac{4.421}{2} = 2.2105$, la fuerza correspondiente es: $2.2105\left(\frac{6}{2}\right) = 6.6315$,

$$\Delta_{BC} = 22.158(6) - 6.6315(2) = 101.685$$

Se aplica una fuerza unitaria vertical en C, F_C :

Equilibrio:

$$R_a = \frac{6}{19} \quad R_b = \frac{13}{19}$$



La forma del diagrama de momentos es triangular con máximo en C de: $\left(\frac{6}{19}\right)(13) = 4.105$

Se obtienen fuerzas equivalentes a las áreas: $P_{21} = 4.105 \left(\frac{13}{2}\right) = 26.683$

$$P_{22} = 4.105 \left(\frac{6}{2}\right) = 12.316$$

Del equilibrio de la viga conjugada, se obtiene:

$$19RA = 26.683 \left(6 + \frac{13}{3}\right) + 12.316 \left(\frac{2}{3}\right)(6) \quad \text{Se obtiene: } RA = 17.105$$

$$\text{Por suma de fuerzas: } RD = 26.683 + 12.316 - 17.105 = 21.894$$

Las deformaciones correspondientes son:

$$\Delta_{CC} = 21.984(6) - 12.316(2) = 106.732$$

El momento en B es $\left(\frac{7}{13}\right)(4.105) = 2.2104$, la fuerza correspondiente es: $2.2104 \left(\frac{7}{2}\right) = 7.736$

$$\Delta_{CD} = 17.105(7) - 7.736 \left(\frac{7}{3}\right) = 101.684$$

Se formula el siguiente sistema de ecuaciones:

$$123.788FB + 101.685FC = 2632.78$$

$$101.684FB + 106.732FC = 2513.57$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $FB = 8.85 \text{ ton}$ $FC = 15.12 \text{ ton}$

Que corresponden a las reacciones finales en B y C respectivamente

Con las condiciones de equilibrio se obtienen las reacciones faltantes: Con momentos respecto a D:

$$19Ra - 10.5(15.5) + 8.85(12) - 10(8) + 15.12(6) - 12(3) = 0 \quad \text{se obtiene } Ra = 4.307 \text{ ton}$$

$$\text{Con suma de fuerzas: } Rd = 10.5 + 10 + 12 - 4.307 - 8.85 - 15.12 = 4.223 \text{ ton}$$

Se calculan los momentos flexionantes:

$$\text{Tramo A-B, } x \text{ entre 0 y 7: } Mx = 4.307x - \left(\frac{1.5}{2}\right)x^2 \quad \text{si } x = 0 \quad Mx = 0 \quad \text{si } x = 7 \quad Mx = -6.601$$

$$\left(\frac{dMx}{dx}\right) = 4.307 - 1.5x; \text{ para que la derivada sea cero } x = 2.871 \text{ el momento máximo es:}$$

$$M_{\max} = 6.183 \text{ ton}\cdot\text{m} \quad \text{Para } Mx = 0 \text{ se obtiene } x = 5.743\text{m}$$

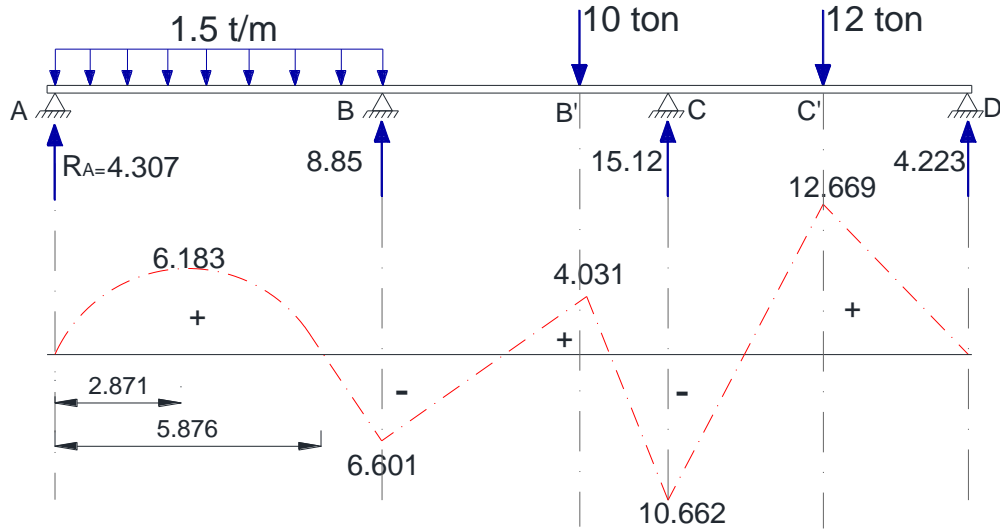
$$\text{Tramo B-C: en el punto B' } M = 4.027 \text{ ton}\cdot\text{m} \quad \text{en el apoyo C } M = -10.662 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$\text{En el punto C' } M = 2.669 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Comprobación del equilibrio general:

$$M_d = 4.307(19) + 8.85(12) + 15.12(6) - 10.5(15.5) - 10(8) - 12(3) = 0.003 \text{ (prácticamente cero)}$$

Se representa gráficamente el diagrama de momentos flexionantes:



Ejemplo ilustrativo E10

Solución del mismo problema anterior por el método de rigideces.

Se toman como variables el giro en B (θ_B) y el giro en C (θ_C) (tramos AB y CD articulado empotrado, tramo BC doblemente empotrado)

Los momentos de empotramiento son.

$$M_{ba} = \frac{1.5(7)^2}{8} = 9.1875 \text{ ton} - m$$

$$M_{bc} = \frac{10(4)(2)^2}{6^2} = 4.444 \text{ ton} - m$$

$$M_{cb} = \frac{10(2)(4)^2}{6^2} = 8.888 \text{ ton} - m$$

$$M_{cd} = \frac{3}{16}PL = \frac{3}{16}(12)(6) = 13.5 \text{ ton} - m$$

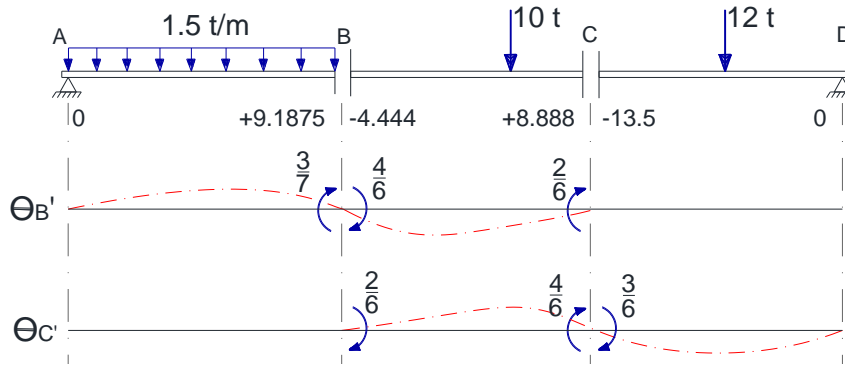
Para giro unitario positivo en B se obtienen las rigideces:

$$k_{ba} = \frac{3}{7} \quad k_{bc} = \frac{4}{6} \quad k_{cb} = \frac{2}{6}$$

Para un giro unitario positivo en C se obtienen las siguientes rigideces:

$$k_{bc} = \frac{2}{6} \quad k_{cb} = \frac{4}{6} \quad k_{cd} = \frac{3}{6}$$

Los valores de momentos de empotramiento y las rigideces se presentan gráficamente en la figura:



Por lo tanto se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$+9.1875 - 4.444 + \left(377 + \frac{4}{6}\right) \theta'_B + \left(\frac{2}{6}\right) \theta'_C = 0$$

$$+8.888 - 13.5 + \left(\frac{2}{6}\right) \theta'_B + \left(\frac{4}{6} + \frac{3}{6}\right) \theta'_C = 0$$

Se simplifica a:

$$+4.7435 + 1.09524\theta'_B + 0.333\theta'_C = 0$$

$$-4.611 + 0.333\theta'_B + 1.166\theta'_C = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $\theta'_B = -6.0606$ $\theta'_C = +5.684$

(Valores multiplicados por $1/EI$)

Desagregando las ecuaciones de equilibrio:

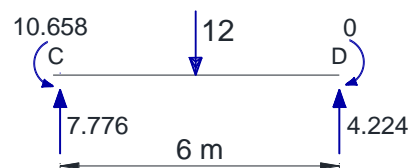
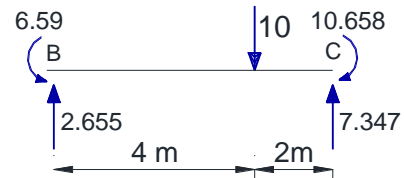
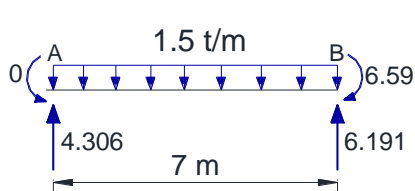
$$M_{ba} = +9.1875 + \left(\frac{3}{7}\right)(-6.0606) = +6.59 \text{ tom} - \text{m}$$

$$M_{bc} = -4.444 + \left(\frac{4}{6}\right)(-6.0606) + \left(\frac{2}{6}\right)(5.684) = -6.59 \text{ tom} - \text{m}$$

$$M_{cb} = +8.888 + \left(\frac{2}{6}\right)(-6.0606) + \left(\frac{4}{6}\right)(5.684) = +10.657 \text{ tom} - \text{m}$$

$$M_{cd} = -13.5 + \left(\frac{3}{6}\right)(5.684) = -10.658 \text{ tom} - \text{m}$$

Con estos valores se obtiene el equilibrio de cada barra por separado, como se presenta en las siguientes figuras:



Las reacciones son.

$$R_a = 4.309 \text{ ton} \quad R_b = 6.191 + 2.655 = 8.846 \text{ ton} \quad R_c = 7.776 + 7.345 = 15.121 \text{ ton} \quad R_d = 4.224 \text{ ton}$$

Se observa que se obtienen aproximadamente los mismos resultados por lo que el diagrama de momentos flexionantes será el mismo.

Observaciones:

Con el método de fuerzas se obtienen como resultado directamente reacciones (fuerzas o momentos) en cambio con el método de rigideces se obtienen, en primera instancia, giros y desplazamientos que en otra operación se tienen que relacionar con las fuerzas y momentos en cada barra. Por esto aparentemente el método de fuerzas resulta mejor que el de rigideces, pero no es así por las siguientes razones: a) la estructura isostática que requiere el método de fuerzas no es única, sino que tiene varias alternativas, b) el cálculo de los giros y desplazamientos puede ser muy complicado por ejemplo en marcos de varios niveles, c) por lo anterior este método es difícil de sistematizar y programar. El método de rigideces a pesar de no llegar a los resultados de forma directa si permite su sistematización y programación. De hecho algunos de los paquetes de análisis asistido por computadores se basan en este método. Por esta razón en este curso se le dará énfasis al método de rigideces.

Método de Cross

El Ingeniero Hardy Cross desarrolló un método iterativo para el análisis de marcos planos de varios niveles, que en su momento contó con cuatro ventajas principales: a) se basa en conceptos sencillos y claros, b) implícitamente se formula el sistema de ecuaciones de equilibrio el cual se resuelve por aproximaciones sucesivas, c) el procedimiento numérico es iterativo y convergente, generalmente se requieren de tres a cinco iteraciones, d) la persona que aplica el procedimiento no deja de tener referencia a la forma y comportamiento de la estructura por analizar.

Este método tuvo en su momento gran aceptación, sobre todo en la época en que no se contaba con herramientas algebraicas y numéricas para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas con gran número de incógnitas. En la actualidad su uso práctico se ha disminuido considerablemente debido a que las calculadoras o las computadoras permiten soluciones más rápidas y exactas.

El programa oficial del curso establece que se trate, por lo menos de forma general, el método de Cross, por lo que se presenta solamente un ejemplo resuelto con este método en dos variantes.

El método consiste de los siguientes pasos:

1. Suponer que todos los nodos se fijan mediante un empotramiento perfecto, se calculan los momentos de empotramiento.
2. En cada nodo se calcula el momento de desequilibrio en su primera iteración
3. En cada nodo se calcula el factor de distribución definido como la rigidez del elemento considerado entre la suma de las rigideces de todos los elementos que concurren a ese nodo.
4. Se calcula el momento de distribución igual al producto del momento de desequilibrio por el factor de distribución, el signo debe ser el contrario al del momento de desequilibrio (nótese que de esta manera se reestablece el equilibrio, pero no es definitivo).
5. Se calculan los momentos de transporte, para elementos de sección transversal constante el factor de transporte es $\frac{1}{2}$, o sea en cada extremo de un elemento se transporta la mitad del momento del extremo contrario.
6. Se vuelve a generar un desequilibrio que se toma como la segunda iteración. Se procede de la misma manera hasta lograr cambio poco significativo de una iteración a otra.

Ejemplo ilustrativo E11

Se requiere aplicar el método de Cross al ejemplo antes resuelto.

Primer variante, aplicar el método de forma directa.

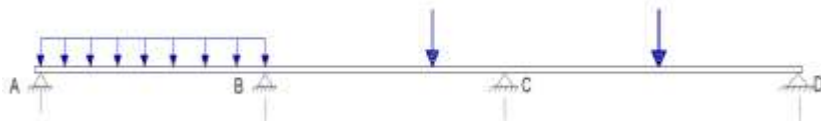
Los momentos de empotramiento son:

$$\text{Tramo A-B } \frac{wL^2}{12} = 6.125, \text{ Tramo B-C } M_{bc} = -4.444 \quad M_{cb} = 8.888, \text{ Tramo C-D } M_{cd} = -9.0$$

$$M_{dc} = +9.0$$

Los factores de distribución se calculan usando la definición. Los resultados se presentan de forma tabular

Ejemplo E11 con Método de Cross, variate directa



	APOYO A	APOYO B		APOYO C		APOYO D
Momento de empotramiento	-6.125	+6.125	-4.444	+8.888	-9.0	+9.0
Factor de distribución	1.0	0.462	0.538	0.5	0.5	1.0
Momento desequilibrio 1	-6.125		+1.681		-0.112	+9.0
Momento distribuido 1	+6.125	-0.777	-0.904	+0.056	+0.056	-9.0
Momento de trasporte 1	-0.389	+3.063	+0.028	-0.452	-4.50	+0.028
Momento desequilibrio 2	-0.389		+3.091		-4.952	+0.028
Momento distribuido 2	+0.389	-1.428	-1.663	+2.476	+2.476	-0.028
Momento de trasporte 2	-0.714	+0.195	+1.238	-0.832	-0.014	+1.238
Momento desequilibrio 3	-0.714		+1.433		-0.846	+1.238
Momento distribuido 3	+0.714	-0.662	-0.771	+0.423	+0.423	-1.238
Momento de trasporte 3	-0.331	+0.357	+0.212	-0.386	-0.619	+0.212
Momento desequilibrio 4	-0.331		+0.569		-1.005	+0.212
Momento distribuido 4	+0.331	-0.263	-0.316	+0.503	+0.503	-0.212
Momento de trasporte 4	-0.132	+0.166	+0.252	-0.153	-0.106	+0.252
Momento desequilibrio 5	-0.132		+0.418		-0.259	+0.252
Momento distribuido 5	+0.132	-0.193	-0.225	+0.130	+0.130	-0.252
Momento final	0.0	+6.583	-6.583	+10.653	-10.651	0.0

Ejemplo E11 con rigideces modificadas.

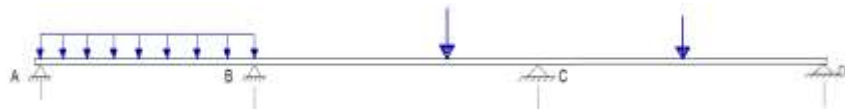
Otra variante es considerar la rigidez modificada en los elementos extremos para conservar el apoyo articulado como tal, para esto se calculan los momentos de empotramiento en un extremo (el otro se deja articulado) la rigidez es 0.75 de la correspondiente al elemento doblemente empotrado y el transporte es cero hacia y de la articulación.

Los momentos de empotramiento son: $M_{ab} = 0$ $M_{ba} = \frac{wL^2}{8} = +9.1875$

M_{bc} y M_{cb} no cambian respecto al caso anterior. $M_{cd} = -\frac{3PL}{16} = -13.5$

Los factores de distribución se modifican, los resultados se presentan en la tabla

Ejemplo E11 con Método de Cross, variate con rigidez modificada



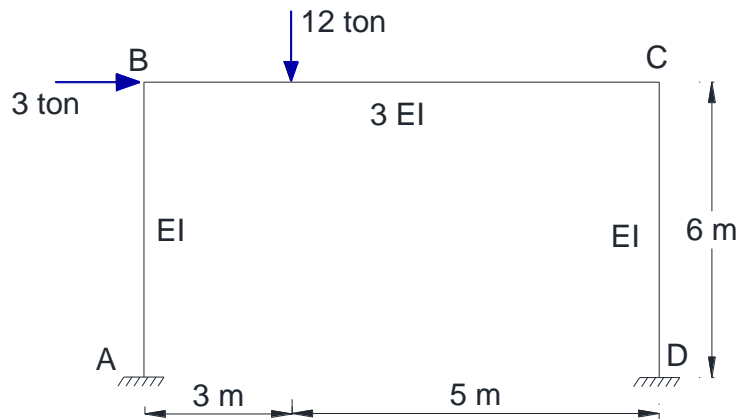
	APOYO A	APOYO B		APOYO C		APOYO D
Momento de empotramiento	0.0	+9.1875	-4.444	+8.888	-13.5	0.0
Factor de distribución	0.00	0.3913	0.6087	0.5714	0.4286	0.0
Momento desequilibrio 1	0		+4.7435		-4.612	0
Momento distribuido 1	0	-1.8561	-2.887	+2.635	+1.976	0
Momento de transporte 1	0	0	+1.318	-1.4435	0	0
Momento desequilibrio 2	0		+1.318		-1.4435	0
Momento distribuido 2	0	-0.516	-0.802	+0.825	+0.619	0
Momento de transporte 2	0	0	+0.4125	-0.401	0	0
Momento desequilibrio 3	0		+0.4125		-0.401	0
Momento distribuido 3	0	-0.1615	-0.251	+0.229	+0.172	0
Momento de transporte 3	0	0	+0.1145	-0.1255	0	0
Momento desequilibrio 4	0		+0.1145		-0.1255	0
Momento distribuido 4	0	-0.0448	-0.0697	+0.0717	+0.0538	0
Momento de transporte 4	0	0	+0.036	-0.035	0	0
Momento desequilibrio 5	0		+0.036		-0.035	0
Momento distribuido 5	0	-0.014	-0.022	+0.02	+0.015	0
Momento final	0.0	+6.5951	-6.5947	+10.6637	-10.664	0.0

Los valores obtenidos con el método de rigideces son $M_b = 6.59$ ton-m $M_c = 10.658$ ton.m

Se observa que el método de Cross llega a resultados suficientemente aproximados. En la variante directa se realizan más cálculos y se requiere mayor número de iteraciones respecto a la variante modificada.

Ejemplo Ilustrativo E12

Con el método de rigideces se requiere calcular el equilibrio y dibujar el diagrama de momentos flexionantes del marco simple mostrado que consta de un solo elemento horizontal (trabe) y dos verticales (columnas). La trabe tiene rigidez de $3EI$, las columnas de EI . El claro es de 8.0m y la altura de 6.0m . Los apoyos se consideran empotrados, se identifican cuatro nodos con letras A, B, C, y D. Se tiene una fuerza vertical actuante concentrada de 12 ton a 3.0m del punto B y una fuerza concentrada de 3.0 ton con sentido de izquierda a derecha en el punto B. Se requiere hacer los cálculos para dos casos: a) sin la carga lateral de 3.0 ton , y b) con la carga lateral de 3.0 ton además de la vertical de 12 ton .



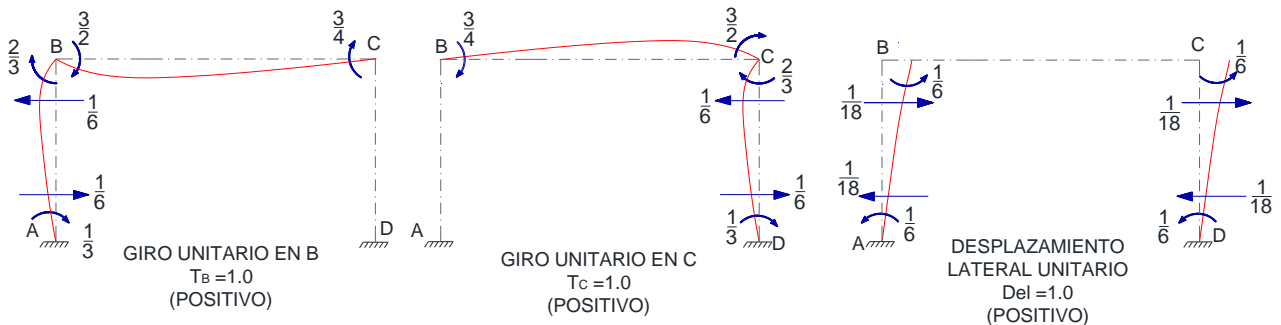
Caso 1.

Se tienen seis reacciones por calcular, la estática proporciona tres ecuaciones de equilibrio, por lo tanto, el grado de hiperestaticidad (grados de libertad) es de tres, o sea el giro en θ_B , el giro en θ_C , y el desplazamiento lateral de la parte superior Δ .

Se tiene $L = 8.0\text{m}$ $a = 3.0\text{m}$ $b = 5.0\text{m}$, los momentos de empotramiento son:

$$M_{bc} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{225}{16} = -14.0625 \quad M_{cb} = +\frac{Pa^2b}{L^2} = +\frac{135}{16} = +8.4375$$

Las rigideces angulares y lineales para cada grado de libertad se muestran gráficamente en las siguientes figuras:



Por lo tanto, se pueden plantear las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 -14.0625 + \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) \theta'_B + \left(\frac{3}{4}\right) \theta'_C - \left(\frac{1}{6}\right) \Delta' &= 0 \\
 +8.4375 + \left(\frac{3}{4}\right) \theta'_B + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) \theta'_C - \left(\frac{1}{6}\right) \Delta' &= 0 \\
 -\left(\frac{1}{6}\right) \theta'_B - \left(\frac{1}{6}\right) \theta'_C + \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{18}\right) \Delta' &= 0
 \end{aligned}$$

La matriz de rigideces es:

13/6	3/4	-1/6
3/4	13/6	-1/6
-1/6	-1/6	1/9

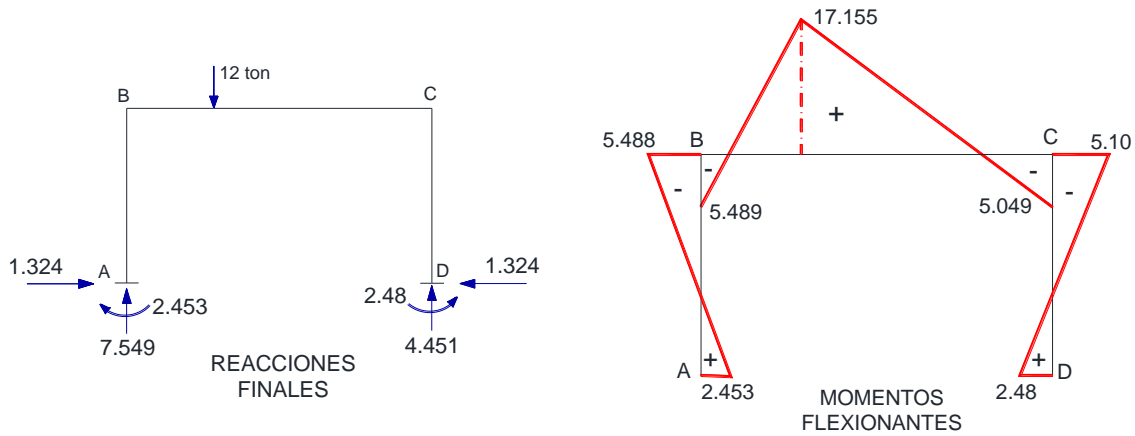
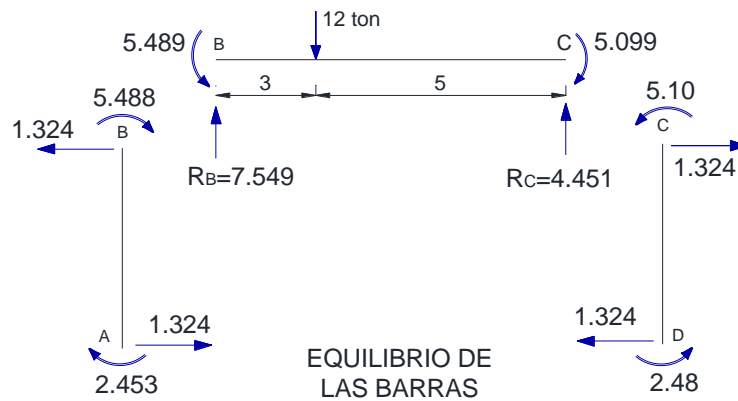
La solución del sistema de ecuaciones es: $\theta'_B = 9.105$ $\theta'_C = -6.778$ $\Delta' = +3.4905$

Observaciones: aunque no existe en este caso carga lateral se presenta un desplazamiento lateral debido a la asimetría del problema, el desplazamiento resulta positivo o sea de izquierda a derecha, lo que no resulta lo esperado a simple vista.

Se calculan los momentos internos en las barras:

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= \left(\frac{1}{3}\right) 9.105 - \left(\frac{1}{6}\right) 3.4905 = +2.453 \\
 M_{bc} &= -14.0625 + \left(\frac{3}{2}\right) 9.105 + \left(\frac{3}{4}\right) (-6.778) = -5.489 \\
 M_{ba} &= \left(\frac{2}{3}\right) 9.105 - \left(\frac{1}{6}\right) 3.4905 = +5.488 \\
 M_{cb} &= +8.4375 + \left(\frac{3}{4}\right) 9.105 + \left(\frac{3}{2}\right) (-6.778) = +5.099 \\
 M_{cd} &= \left(\frac{2}{3}\right) (-6.778) - \left(\frac{1}{6}\right) 3.4905 = -5.1 \\
 M_{dc} &= \left(\frac{1}{3}\right) (-6.778) - \left(\frac{1}{6}\right) 3.4905 = -2.48 \\
 F_{ba} &= \left(-\frac{1}{6}\right) 9.105 + \left(\frac{1}{18}\right) 3.4905 = -1.324 \\
 F_{cd} &= -\frac{1}{6} (-6.778) + \left(\frac{1}{18}\right) 3.4905 = +1.324
 \end{aligned}$$

Se calcula el equilibrio para cada barra, los resultados se presentan de forma gráfica, así como el diagrama de momentos flexionantes.



Caso 2. Con la carga lateral de 3.0 ton

La matriz de rigideces no cambia, tampoco los momentos de empotramiento, lo único cambia es el término independiente de la tercera ecuación, de la siguiente manera:

$$-\frac{225}{16} + \frac{13}{6}\theta'_B + \frac{3}{4}\theta'_C - \left(\frac{1}{6}\right)\Delta' = 0$$

$$+\frac{135}{16} + \frac{3}{4}\theta'_B + \frac{13}{6}\theta'_C - \left(\frac{1}{6}\right)\Delta' = 0$$

$$-3.0 - \frac{1}{6}\theta'_B - \frac{1}{6}\theta'_C + \left(\frac{1}{9}\right)\Delta' = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones es: $\theta'_B = 10.967$ $\theta'_C = -4.915$ $\Delta' = +36.078$

Observaciones: la carga lateral causa un aumento significativo en el desplazamiento, el signo de la fuerza en la tercera ecuación es negativo debido a que representa la fuerza que impide el desplazamiento de la parte superior de la estructura.

Se calculan los momentos internos en las barras:

$$M_{ab} = \frac{1}{3}(10.967) - \frac{1}{6}(36.078) = -2.357$$

$$M_{bc} = -14.0625 + \frac{3}{2}(10.967) + \frac{3}{4}(-4.915) = -1.298$$

$$M_{ba} = \frac{2}{3}(10.967) - \frac{1}{6}(36.078) = +1.298$$

$$M_{cb} = +8.4375 + \frac{3}{4}(10.967) + \frac{3}{2}(-4.915) = +9.29$$

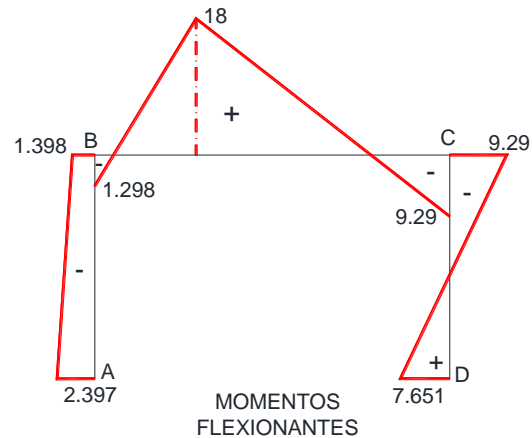
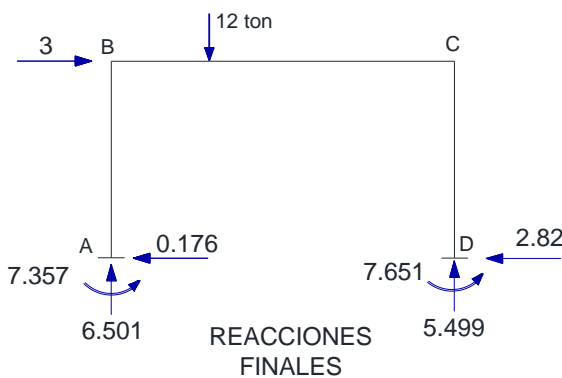
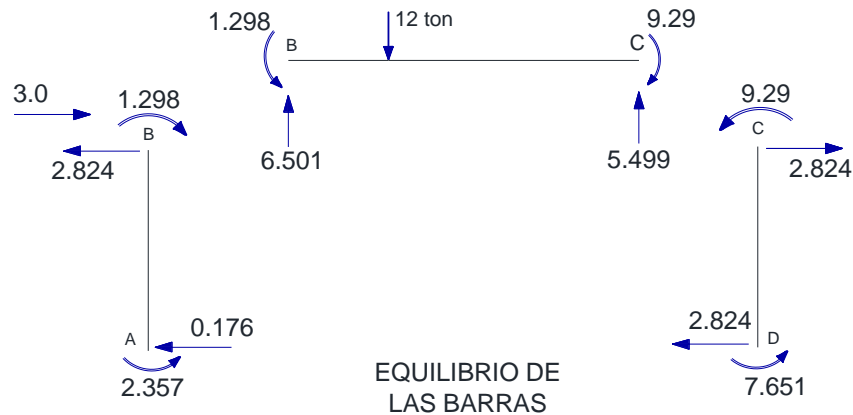
$$M_{cd} = \frac{2}{3}(-4.915) - \frac{1}{6}(36.078) = -9.29$$

$$M_{dc} = \frac{1}{3}(-4.915) - \frac{1}{6}(36.078) = -7.651$$

$$F_{ba} = -\frac{1}{6}(10.967) + \frac{1}{18}(36.078) - 3.0 = -2.824$$

$$F_{cd} = -\frac{1}{6}(-4.915) + \frac{1}{18}(36.078) = +2.824$$

Se calcula el equilibrio para cada barra, los resultados se presentan de forma gráfica, así como el diagrama de momentos flexionantes.

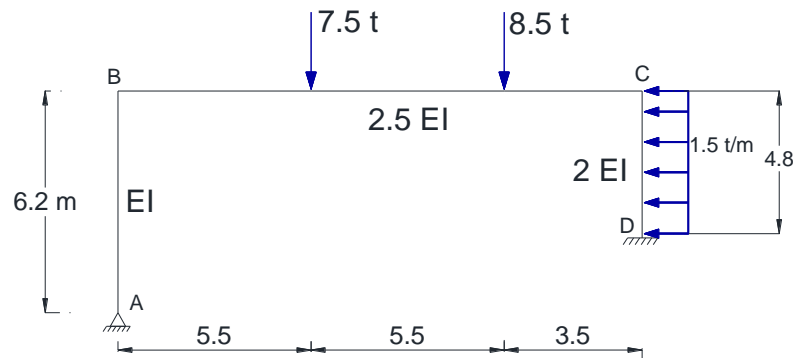


Ejemplo Ilustrativo E13

Se trata de una variante del caso anterior con objeto de señalar características importantes del método, así como contar con elementos de cálculo para abordar casos más complejos.

Se trata de un marco simple, el elemento horizontal tiene 14.5 m rigidez relativa de 2.5EI, con dos cargas concentradas una de 7.5 ton y otra de 8.5 ton. La columna izquierda es de 6.2 m de altura con apoyo inferior articulado y rigidez relativo de EI, la columna de la derecha con 4.8 m de altura apoyo inferior empotrado con rigidez relativa de 2.0EI y sometida a una carga uniforme de 1.5 ton/m aplicada de derecha a izquierda.

Dibujo representativo:



Se requiere obtener el equilibrio y el diagrama de momentos flexionantes para dos casos: a) Sin la carga lateral de 1.5 ton/m, b) con todas las cargas mostradas.

Caso 1.

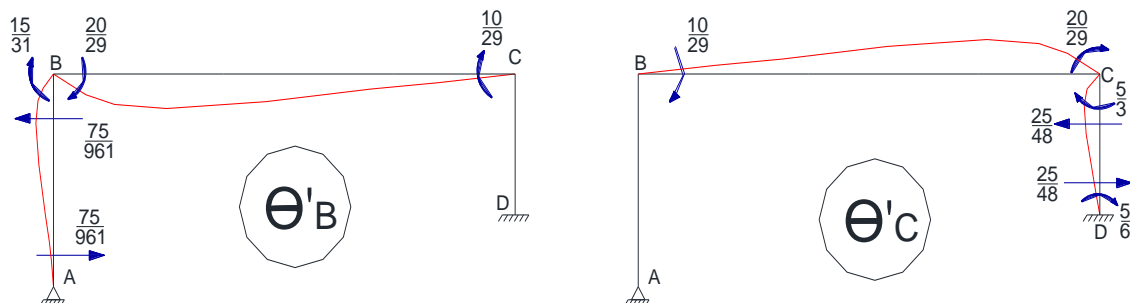
Obtención de los momentos de empotramiento perfecto. Con las formulas del libro:

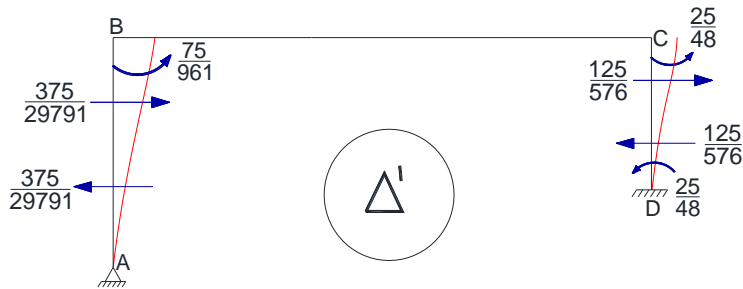
$$M_{bc} = \left(\frac{(7.5)(5.5)}{14.5^2} (9)^2 + (8.5)(3.5^2) \frac{(11)}{14.5^2} \right) = 15.892 + 5.448 = 21.34 \text{ tom} - \text{m}$$

$$M_{cb} = \left(\frac{(7.5)(9)}{14.5^2} (5.5)^2 + (8.5)(11^2) \frac{(3.5)}{14.5^2} \right) = 9.712 + 17.121 = 26.833 \text{ tom} - \text{m}$$

Se tiene tres grados de indeterminación: el giro en B, el giro en C y el desplazamiento lateral de la parte superior

En las siguientes tres figuras se muestran las rigideces angulares y lineales para cada grado de indeterminación.





Se plantean las ecuaciones de equilibrio:

Para nudo B
$$-21.43 + \left(\frac{20}{29} + \frac{15}{31}\right) \theta'_B + \left(\frac{10}{19}\right) \theta'_C - \left(\frac{71}{961}\right) \Delta' = 0$$

Para nudo C:
$$+26.833 + \left(\frac{10}{29}\right) \theta'_B + \left(\frac{20}{29} + \frac{5}{3}\right) \theta'_C - \left(\frac{25}{48}\right) \Delta' = 0$$

Para el desplazamiento:
$$0 - \left(\frac{75}{961}\right) \theta'_B - \left(\frac{25}{48}\right) \theta'_C + \left(\frac{375}{29791} + \frac{125}{576}\right) \Delta' = 0$$

La matriz de rigideces resulta:

+1.1735	+0.3448	-0.07804
+0.3448	+2.3563	-0.5208
-0.07804	-0.5208	0.2296

Vector de acciones resulta:

-21.340
+26.833
0.0

Nótese que el termino independiente para el desplazamiento es cero ya que no existen cargas laterales actuantes, pero eso no significa que $\Delta = 0$

La solución del sistema de ecuaciones resulta:

$$\theta'_B = +22.409 \quad \theta'_C = -25.992 \quad \Delta' = -51.341$$
 (el signo negativo indica que el marco se desplaza hacia la izquierda)

Se obtienen los momentos en cada nudo:

Nodo B

$$M_{ba} = \frac{15}{31}(22.409) - \frac{75}{961}(-51.341) = +14.85$$

$$M_{bc} = -21.34 + \frac{20}{29}(22.409) + \frac{10}{29}(-25.992) = -14.848$$

Nodo C

$$M_{cb} = +26.833 + \frac{10}{29}(22.409) + \frac{20}{29}(-25.992) = +16.635$$

$$M_{cd} = \frac{5}{3}(-25.992) - \frac{25}{48}(-51.341) = -16.58$$

Apoyo D

$$M_{dc} = \frac{5}{6}(-25.992) - \frac{25}{42}(-51.341) = +5.08$$

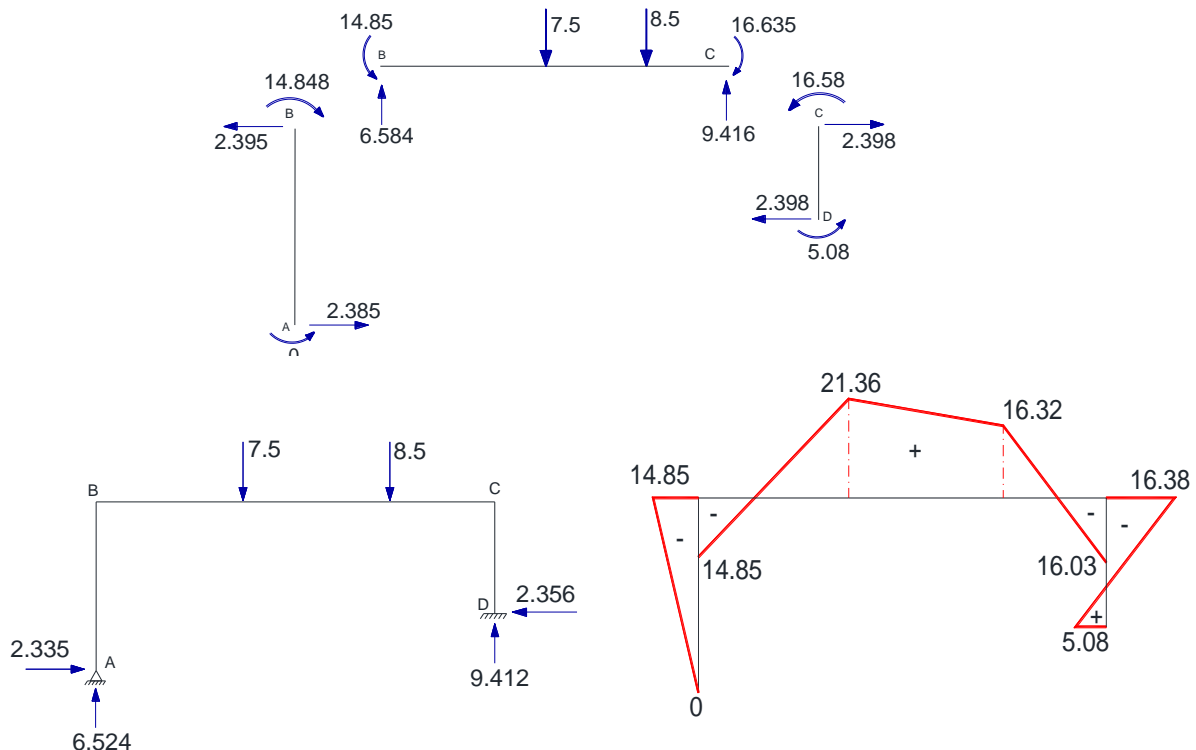
Fuerzas laterales parte superior

$$F_{ba} = -\frac{75}{961}(22.409) + \frac{375}{29791}(-51.341) = -2.395$$

$$F_{cd} = -\frac{25}{48}(-25.992) + \frac{125}{576}(-51.341) = +2.396$$

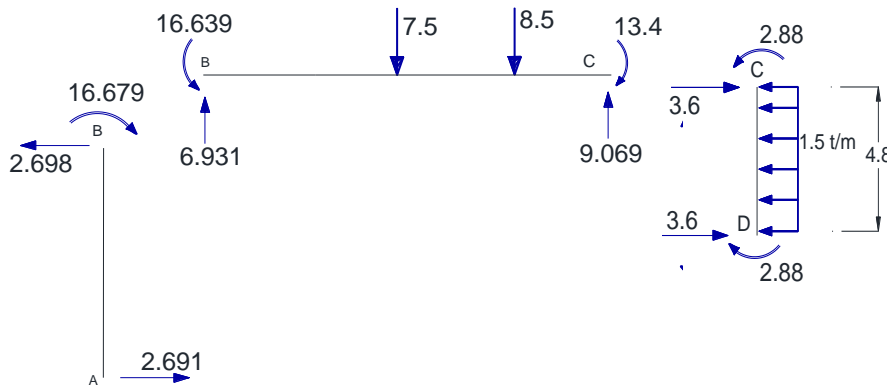
Razonablemente se cumple el equilibrio

Se obtiene el equilibrio de cada barra y el diagrama de momentos flexionantes:



Caso 2

Se calcula el momento de empotramiento perfecto y la reacción para la barra CD:



Se plantean las ecuaciones de equilibrio:

Para nudo B: $-21.43 + \left(\frac{20}{29} + \frac{15}{31}\right) \theta'_B + \left(\frac{10}{19}\right) \theta'_C - \left(\frac{71}{961}\right) \Delta' = 0$

Para nudo C: $+26.833 - 2.88 + \left(\frac{10}{29}\right) \theta'_B + \left(\frac{20}{29} + \frac{5}{3}\right) \theta'_C - \left(\frac{25}{48}\right) \Delta' = 0$

Para el desplazamiento: $+3.6 - \left(\frac{75}{961}\right) \theta'_B - \left(\frac{25}{48}\right) \theta'_C + \left(\frac{335}{29791} + \frac{125}{576}\right) \Delta' = 0$

La matriz de rigideces resulta (es la misma, no cambia):

+1.1735	+0.3448	-0.07804
+0.3448	+2.3563	-0.5208
-0.07804	-0.5208	0.2256

Vector de acciones resulta:

-21.340
+23.953
+ 3.60

Nótese que el término independiente para el desplazamiento ya no es cero por las cargas laterales actuantes.

La solución del sistema de ecuaciones resulta:

$\theta'_B = +21.997 \quad \theta'_C = -30.476 \quad \Delta' = -77.329$ (el signo negativo indica que el marco se desplaza hacia la izquierda, aumenta obviamente respecto al caso anterior)

Se obtienen los momentos en cada nodo:

Nodo B

$$M_{ba} = \frac{15}{31}(21.997) - \frac{75}{961}(-77.329) = +16.679$$

$$M_{bc} = -21.34 + \frac{20}{29}(21.997) + \frac{10}{29}(-30.476) = -16.679$$

Nodo C

$$M_{cb} = +26.833 + \frac{10}{29}(21.997) + \frac{20}{29}(-30.476) = +13.40$$

$$M_{cd} = -2.88 + \frac{5}{3}(-30.476) - \frac{25}{48}(-77.329) = -13.398$$

Apoyo D

$$M_{dc} = +2.88 + \frac{5}{6}(-30.476) - \frac{25}{42}(-77.329) = +17.759$$

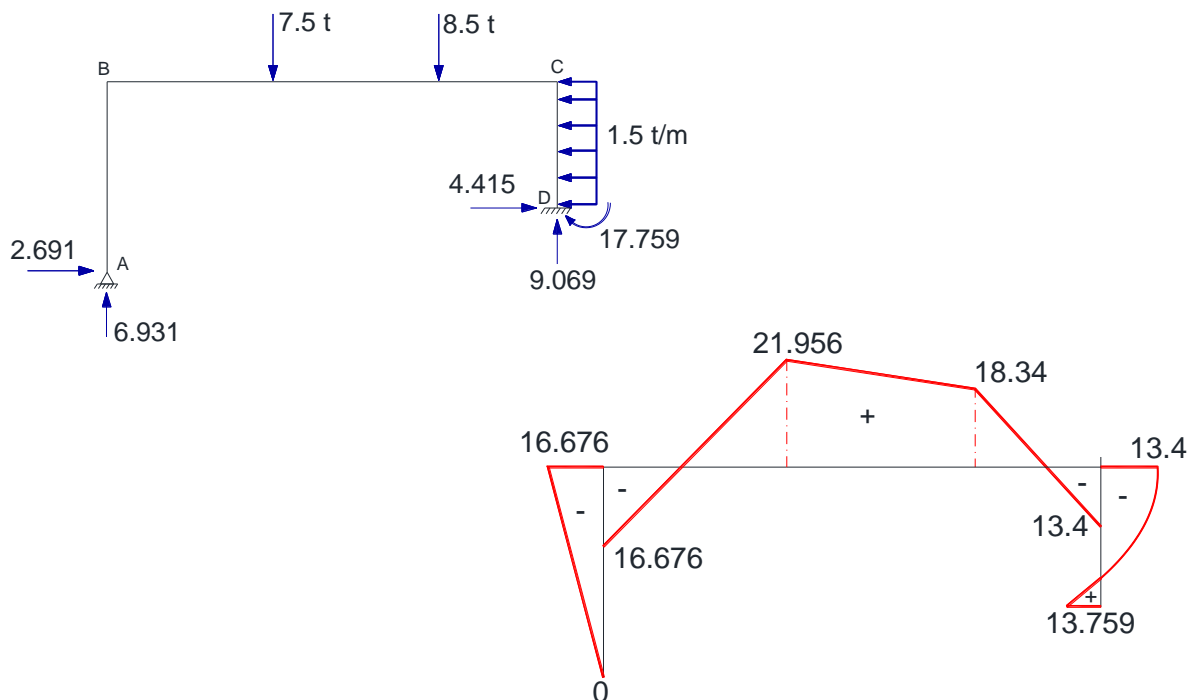
Fuerzas laterales parte superior

$$F_{ba} = -\frac{75}{961}(21.997) + \frac{375}{29791}(-77.329) = -2.69$$

$$F_{cd} = +3.6 - \frac{25}{48}(-30.476) + \frac{125}{576}(-77.329) = +2.691$$

Razonablemente se cumple el equilibrio

Finalmente se obtiene el equilibrio de cada barra y el diagrama de momentos flexionantes:



Para completar su preparación en este tema el estudiante debe elaborar un proyecto de aplicación (IN) que comprenda todo el proceso de análisis y diseño. El proyecto debe comprender: a) elección de un caso representativo que puede ser basado en un proyecto real, se sugiere que tenga por lo menos dos niveles y tres crujías (de esta manera el trabajo numérico resulta manejable) y suponer que se trata de una estructura de concreto reforzado o de acero estructural, b) elección de dos marcos representativos uno en cada dirección, c) diseño preliminar para obtener el tamaño tentativo de las secciones transversales de traveses y columnas, d) cálculo de cargas actuantes, carga muerta **CM**, carga viva máxima **CVm**, carga viva instantánea **CVi** y fuerzas laterales por sismo **CS** (método estático), e) realizar el análisis, con el método de rigideces, de cada marco para tres combinaciones: la primera con **CM + CVm**, la segunda con **CM + CVi + CS**, la tercera con **CM + CVi – CS**, f) diseñar traveses y columnas representativas, g) proponer conclusiones y elaborar la rúbrica correspondiente para la autoevaluación.

Ejemplo de aplicación IN1

A manera de ayuda se presenta el ejemplo del diseño de la trabe y las columnas del ejemplo de aplicación E13, esto sólo comprende el inciso f) el resto no se ejemplifica, para realizar su proyecto completo el estudiante debe recurrir a la asesoría del profesor.

Sólo se toma en cuenta el caso 2 del problema E13. Para la trabe se asume una sección de 30 por 70 cm con resistencia del concreto de 300 kg/cm² y acero con $f_y = 4200$ kg/cm². Para el momento máximo positivo de $M+ = 21.956$ ton-m el área de refuerzo requerida de acuerdo a ACI se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$2195600 = (0.9)(4200)A_s \left(65 - \frac{a}{2} \right)$$

La fuerza de tensión es: $T = 4200A_s$, la fuerza de compresión en el concreto es: $C_c = (0.85)(300)(30)a$

Por equilibrio $T = C_c$ se obtiene $a = 0.549A_s$

$$2195600 = (0.9)(4200)A_s \left(65 - \frac{0.549A_s}{2} \right), \text{ al resolver se obtiene: } A_s = 9.30 \text{ cm}^2$$

Para el momento negativo en la sección B de $M- = 16.676$ ton-m el área de refuerzo requerida de acuerdo a ACI se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$1667600 = (0.9)(4200)A_s \left(65 - \frac{0.549A_s}{2} \right), \text{ al resolver se obtiene: } A_s = 7.0 \text{ cm}^2$$

Para el momento negativo en la sección C de $M- = 13.40$ ton-m el área de refuerzo requerida de acuerdo a ACI se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$1340000 = (0.9)(4200)A_s \left(65 - \frac{0.549A_s}{2} \right), \text{ al resolver se obtiene: } A_s = 5.59 \text{ cm}^2$$

La fuerza cortante máxima es: $V_u = 9067$ kg con factor de reducción de 0.75 la fuerza cortante nominal es $V_n = 12089$ kg La fuerza cortante que resiste el concreto: $V_c = 16887$ kg, por lo tanto, solo se requiere refuerzo transversal mínimo, se proponen estivos No. 3 a cada 30 cm

Diseño de la columna A-B: $M_u = 16.676$ ton-m $P_u = 6931$ kg, la excentricidad es. 240.6 cm, prácticamente es un elemento sometido a flexión sola. De acuerdo a la suposición relativa de EI , el

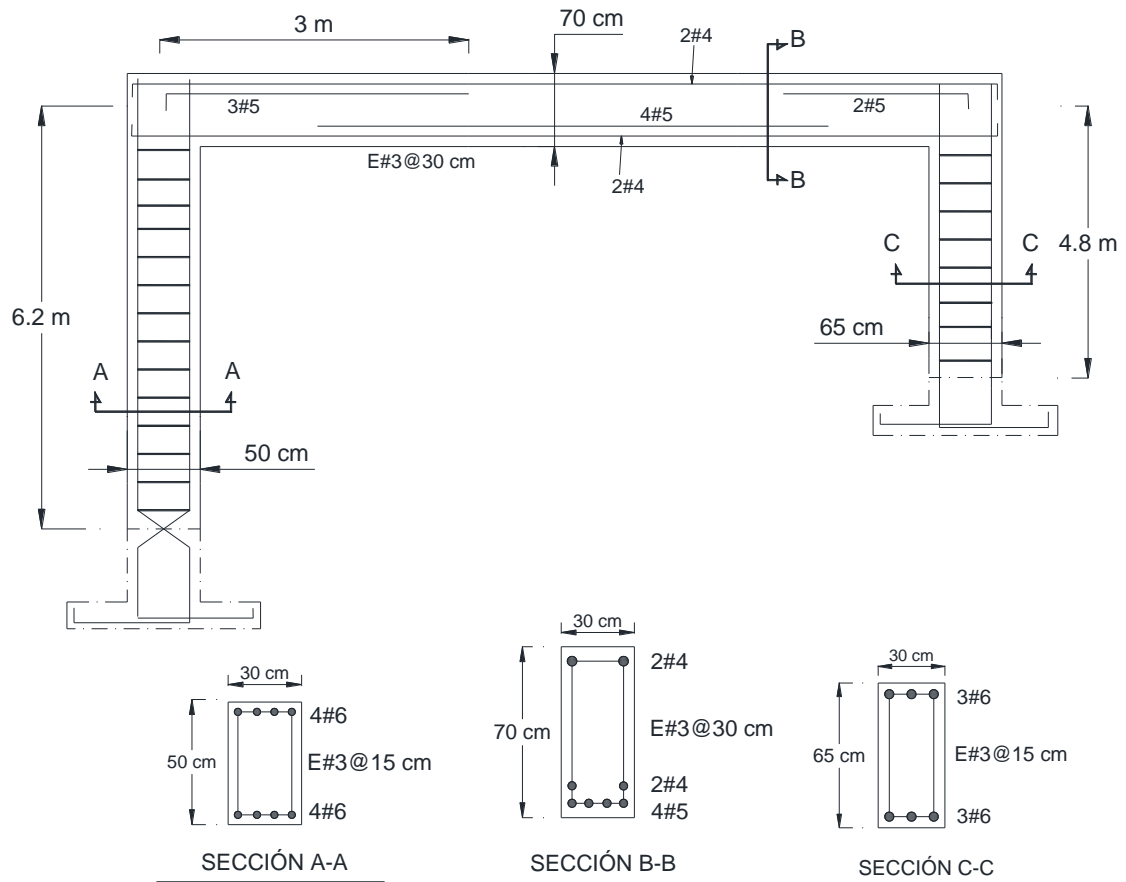
momento de inercia de la taba es: $I = 857500 \text{ cm}^4$, el correspondiente a la columna debe ser este valor dividido entre 2.5 o sea $I_c = 343000 \text{ cm}^4$, se propone sección de 30 por 50 cm. El radio de giro es: $r = 14.43 \text{ cm}$, la relación de esbeltez: $\frac{KL}{r} = 1.5 \left(\frac{620}{14.43} \right) = 64.4$ por lo tanto los efectos de esbeltez son significativos, el factor de amplificación resulta: $\Delta e_l = 1.02$, el momento amplificado es.

$M_2 = 17.01 \text{ ton-m}$ el área de refuerzo requerida es $A_s = 11.11 \text{ cm}^2$, se proponen cuatro varillas No. 6 en cada cara (Se puede comprobar que con el uso de diagramas de interacción el resultado es similar)

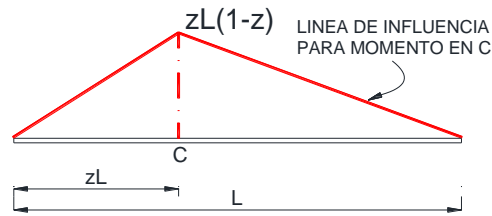
Diseño de la columna C-D: $M_u = 17.759 \text{ ton-m}$ $P_u = 9069 \text{ kg}$, la excentricidad es. 195.8 cm , prácticamente es un elemento sometido a flexión sola. De acuerdo a la suposición relativa de EI , el momento de inercia de la taba es : $I = 857500 \text{ cm}^4$, el correspondiente a la columna debe ser este valor multiplicado por $\frac{2}{2.5}$ o sea $I_c = 686000 \text{ cm}^4$, se propone sección de 30 por 65 cm. El radio de giro es: $r = 18.76 \text{ cm}$, la relación de esbeltez: $\frac{KL}{r} = 1.3 \left(\frac{480}{18.76} \right) = 33.26$ por lo tanto los efectos de esbeltez son significativos, el factor de amplificación resulta: $\Delta e_l = 1.005$, el momento amplificado es.

$M_2 = 17.85 \text{ ton-m}$ el área de refuerzo requerida es $A_s = 8.75 \text{ cm}^2$, se proponen tres varillas No. 6 en cada cara (Se puede comprobar que con el uso de diagramas de interacción el resultado es similar)

Finalmente se presentan gráficamente los resultados



Representación gráfica



La línea de influencia obtenida no debe confundirse con un diagrama de momentos flexionantes, ya que: a) en un diagrama de momentos flexionantes la ordenada en una sección cualquiera es el momento flexionante en esa sección, b) en cambio en la línea de influencia la ordenada en cualquier punto representa siempre en momento en C para una carga unitaria ubicada en la posición de la ordenada.

Como caso numérico supóngase que $L = 20\text{ m}$ y $z = 0.4$, en este caso $zL = 8\text{ m}$

El valor máximo en la línea de influencia es: $M_c = (1-0.4)(0.4)(20) = 0.24(20) = 4.8$

Para dar idea de la aplicación del concepto de líneas de influencia, se supone que se tiene un vehículo cuyo eje delantero representa una fuerza de 8.5 ton y el eje trasero 15 ton , la separación entre ejes es de 5.0 m , se requiere establecer la posición más desfavorable del vehículo y el momento máximo en la sección C. Es obvio que la posición más desfavorable para M_c se tiene cuando en eje trasero coincide con la sección C, pero se tienen dos posibilidades que el vehículo transite de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, se analizan los dos casos:

De derecha a izquierda: Por triángulos semejantes la ordenada a 5.0 a la izquierda de C es 1.8 , resulta $M_c = 15(4.8) + 8.5(1.8) = 87.3\text{ ton-m}$

De izquierda a derecha: Por triángulos semejantes la ordenada a 5.0 a la derecha de C es 2.8 , resulta $M_c = 15(4.8) + 8.5(2.8) = 95.8\text{ ton-m}$. Es evidente que esta caso resulta más desfavorable.

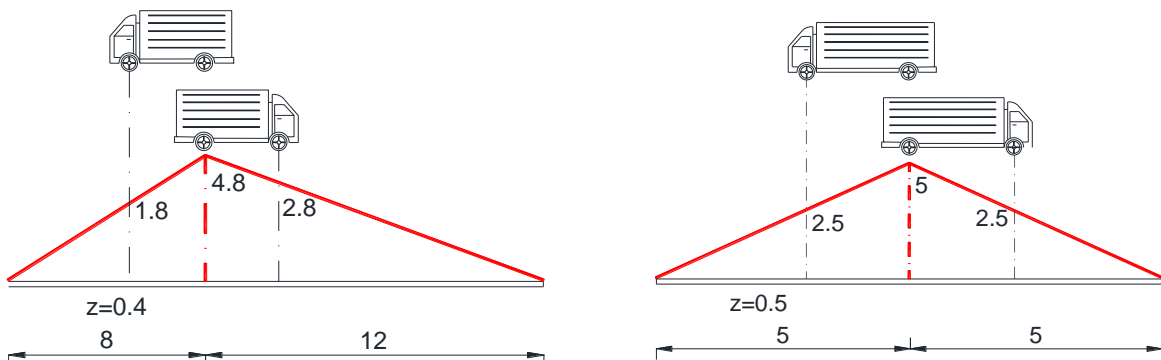
Una situación más representativa es cuando $z = 0.5$ $zL = 10\text{ m}$

El valor máximo en la línea de influencia es: $M_c = (1-0.5)(0.5)(20) = 0.25(20) = 5.0$

Por triángulos semejantes la ordenada a 5.0 a la derecha de C es 2.5 , resulta

$M_c = 15(5.0) + 8.5(2.5) = 96.25\text{ ton-m}$.

Representación gráfica



Ejemplo ilustrativo E15

Se tiene una trabe continua con dos claros, el primero de 8.0 m y el segundo de 10.0 m, el apoyo izquierdo es articulado y el derecho es empotrado. Se requiere calcular y representar gráficamente las líneas de influencia para M_c , R_b y M_c .

Representación gráfica



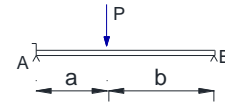
Para efectos de hacer comprender el método se opta por una solución discreta del problema. Se resuelve como una trabe con un grado de hiperestaticidad de uno, con la incógnita del giro en B (θ_B).

Para la carga unitaria en el tramo A-B

El momento de empotramiento perfecto se calcula con: $M = \left(\frac{P}{L^2}\right) \left(ab^2 + \frac{a^2b}{2}\right)$

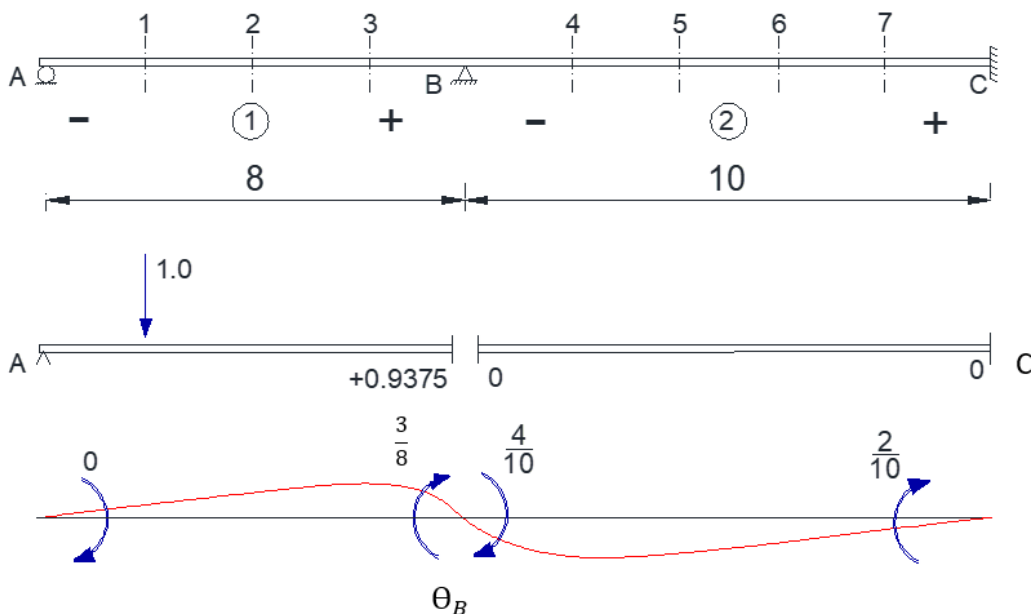
Si la carga unitaria se coloca en la sección (1) $a = 6$, $b = 2$, $P = 1.0$, $L = 8$

Se obtiene: $M = \frac{15}{16}$



Las rigideces de los dos tamos son: $R_{AB} = 0$, $R_{BA} = \frac{3}{8}$, $R_{BC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $R_{CB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Representación gráfica



Se plantea la ecuación de equilibrio:

$$+\frac{15}{16} + \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{5}\right)\theta'_B = 0 \quad \text{se obtiene: } \theta'_B = -\frac{75}{62}$$

Los momentos en la trabe son:

$$M_{ba} = +\frac{15}{16} + \left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{75}{62}\right) = \frac{15}{31}$$

$$M_{bc} = 0 + \left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{75}{62}\right) = -\frac{15}{31}$$

$$M_{cb} = \left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{75}{62}\right) = -\frac{15}{62}$$

Se obtiene el equilibrio de cada tramo:

$$8R_a + \frac{15}{31} - (1)(6) = 0 \quad R_a = \frac{171}{248} \quad R_{b'} = 1 - \frac{171}{248} = \frac{77}{248}$$

$$R_{b''} = \left(\frac{15}{31} + \frac{15}{62}\right)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{9}{125} \quad R_c = -\frac{9}{125}$$

$$\text{Las reacciones finales son: } R_a = \frac{171}{248} \quad R_b = \frac{77}{248} + \frac{9}{125} = 0.38248 \quad R_c = -\frac{9}{125}$$

Se calculan los momentos en el centro del claro en cada tramo:

$$M(1) = \left(\frac{171}{248}\right)(4) - (1)(2) = +\frac{47}{62} \quad M(2) = \left(\frac{9}{125}\right)(5) - \frac{15}{62} = -\frac{15}{124}$$

Se procede de forma similar para las posiciones (2) y (3)

Para la carga unitaria en el tramo B-C

$$\text{El momento de empotramiento perfecto se calcula con: } M_{bc} = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad M_{cb} = +\frac{Pa^2b}{L^2}$$

Si la carga unitaria se coloca en la sección (4) $a = 2$, $b = 8$, $P = 1.0$, $L = 10$

$$\text{Se obtiene: } M_{bc} = -\frac{32}{25} \quad M_{cb} = +\frac{8}{25}$$

Las rigideces de los dos tamos son las misas que en el paso anterior.

Se plantea la ecuación de equilibrio:

$$0 - \frac{32}{25} + \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{5}\right)\theta'_B = 0 \quad \text{se obtiene: } \theta'_B = \frac{256}{155}$$

Los momentos en la trabe son:

$$M_{ba} = 0 + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{256}{155}\right) = \frac{96}{155}$$

$$M_{bc} = -\frac{32}{25} + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{256}{155}\right) = -\frac{96}{155}$$

$$M_{cb} = \frac{8}{25} + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{256}{155}\right) = +\frac{504}{775}$$

Se obtiene el equilibrio de cada tramo:

$$8R_a + \frac{96}{155} = 0 \quad R_a = -\frac{12}{155} \quad R_{b'} = +\frac{12}{155}$$

$$10R_{b''} - \frac{96}{155} + \frac{504}{775} - (1)(8) = 0 \quad R_{b''} = \frac{3088}{3875} = 0.7969 \quad R_c = 1 - \frac{3088}{3875} = 0.2031$$

Las reacciones finales son: $R_a = -\frac{12}{155}$ $R_b = \frac{12}{155} + \frac{3088}{3875} = 0.8743$ $R_c = 0.2031$

Se calculan momentos en los centros del claro de cada tramo:

$$M(1) = -\left(\frac{12}{155}\right)(4) = -0.3096 \quad M(2) = (0.7969)(5) - (1)(3) - \frac{96}{155} = 0.3651$$

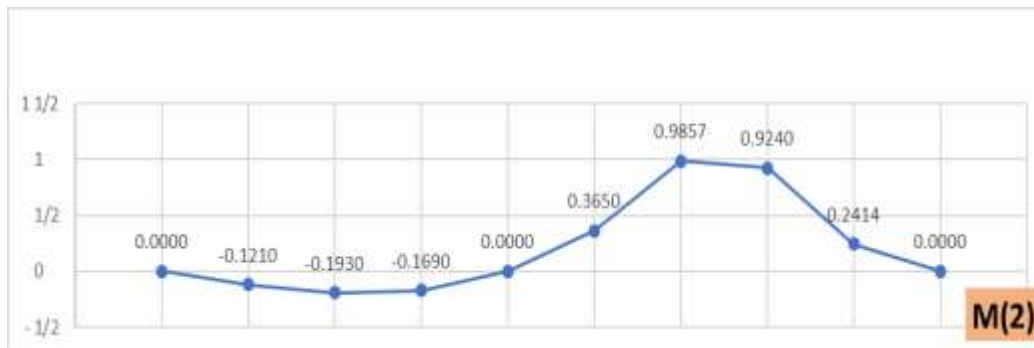
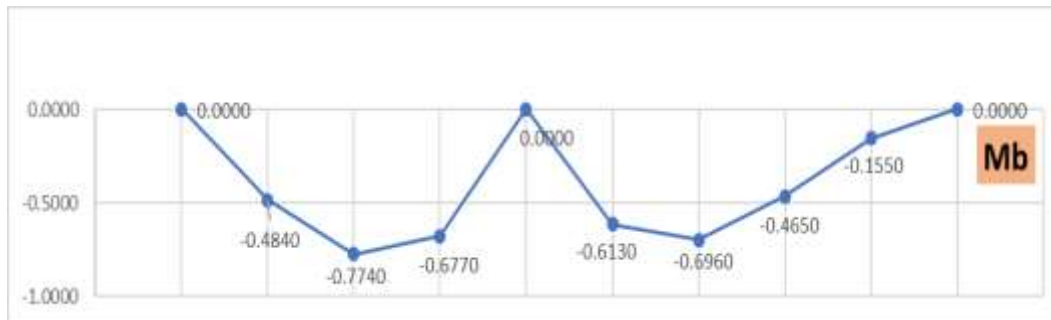
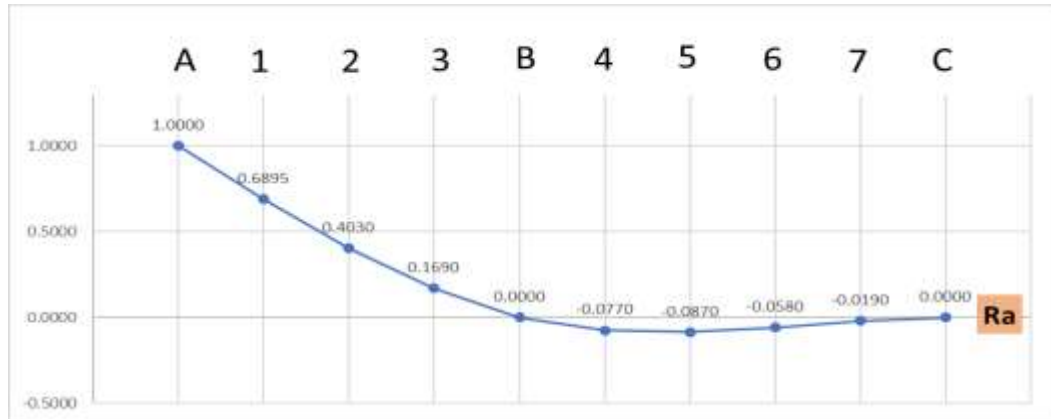
Se procede de forma similar para las posiciones (5), (6) y (7)

Los resultados se resumen en forma tabular, los valores que se muestran corresponden a los flexionantes.

Posición	R _a	R _b	R _c	M _b	M _c	M(1)	M(2)
A	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6895	0.3830	-0.0720	-0.4840	0.2420	0.7580	-0.1210
2	0.4030	0.7300	-0.1160	-0.7740	0.3870	1.6100	-0.1930
3	0.1690	0.9373	-0.1020	-0.6770	0.3390	0.6610	-0.1690
B	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	-0.0770	0.8743	0.2031	-0.6130	-0.6500	-0.3100	0.3650
5	-0.0870	0.6236	0.4635	-0.6960	-1.3300	-0.3480	0.9857
6	-0.0580	0.3358	0.7220	-0.4650	-1.6880	-0.2320	0.9240
7	-0.0190	0.0986	0.9208	-0.1550	-1.3630	-0.0770	0.2414
C	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

A manera de ejemplo se muestran gráficas de algunas líneas de influencia seleccionadas

El alumno deberá dibujar otros casos principalmente la línea de influencia correspondiente al giro en B en B



Introducción al análisis plástico

Es importante mencionar que la suposición básica de aceptar el comportamiento elástico de las estructuras es muy útil para su diseño, sin embargo en algunos casos es deseable conocer la carga de falla, o sea el nivel de carga que provocaría el colapso. Este proceso se llama Análisis plástico, pero algunos autores prefieren denominarlo Análisis al límite

La teoría de las estructuras establece que para que una estructura se encuentre en la condición de falla se deben cumplir tres condiciones simultáneas:

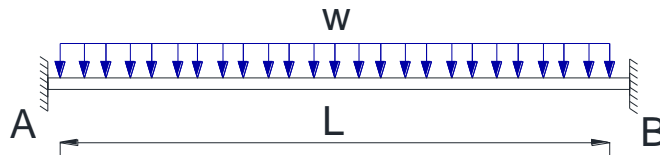
1. Equilibrio: la estructura en su generalidad y sus componentes se encuentran en equilibrio de fuerzas y momentos.
2. Plasticidad: en ninguna sección se sobrepasa la resistencia de los materiales, o sea el momento flexionante en cualquier sección es igual o menor que la resistencia.
3. Mecanismo: se forma un número suficiente de articulaciones plásticas para formar un mecanismo de falla. La articulación plástica se forma cuando el comportamiento es dúctil (marcos dúctiles de acero y de concreto reforzado) la sección es capaz de aumentar la curvatura sin disminución de la resistencia.

Si una estructura cumple los incisos 1 y 2 pero no el tres, se dice que es una solución de límite inferior (la carga calculada es menor que la teórica de falla); si cumple con 1 y 3 es una solución de límite superior (la carga calculada es mayor que la teórica de falla). Sólo cuando se cumplen los tres se llega al cálculo correcto de la carga teórica de falla.

Ejemplo ilustrativo E16

Se trata de ilustrar lo anterior para el caso de una trabe doblemente empotrada con carga uniformemente repartida y claro L.

Figura representativa:



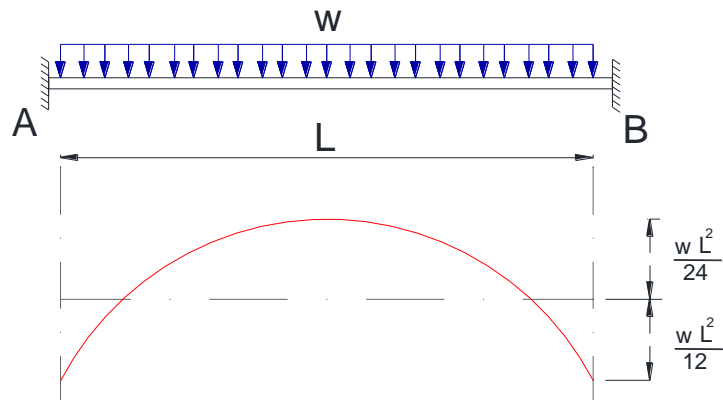
La solución elástica (ver ejemplo ilustrativo E2) resulta: para momento negativo: $M_{-} = -\frac{WL^2}{12}$, para momento positivo: $M_{+} = +\frac{WL^2}{12}$.

Si el momento máximo absoluto se iguala a la resistencia nominal de la sección (M_p) se obtiene:

$$M_p = \frac{WL^2}{12} \quad \text{La carga de falla resulta: } w = \frac{12M_p}{L^2}$$

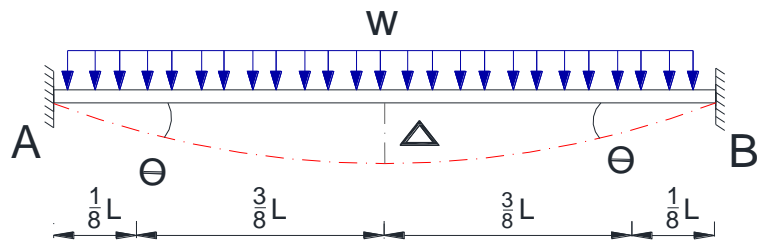
En estas condiciones se forman articulaciones plásticas en los extremos, pero no se forma un mecanismo de falla ya que la trabe en estas condiciones permite incrementos de carga. Se trata entonces de una solución de límite inferior.

Figura representativa:



Se supone ahora que se forman tres articulaciones plásticas, dos localizadas a $\frac{L}{8}$ de los apoyos y la tercera en el centro del claro.

Figura representativa:



$$\text{El trabajo de las fuerzas exteriores es: } T_{\text{ex}} = \left(\frac{3}{4}\right) wL \left(\frac{D}{2}\right) = \left(\frac{3}{8}\right) wLd$$

D es la deformación vertical en el centro del claro

$$\text{El trabajo interior de las articulaciones plásticas es: } T_{\text{int}} = M_p 4\theta$$

Teta es el ángulo de giro en los extremos, nótese que la articulación central gira dos veces lo correspondiente a los extremos.

$$\text{Pero por la geometría del mecanismo de falla se tiene: } D = \left(\frac{3}{8}\right) L\theta$$

Se igualan los trabajos interno y externo, se obtiene:

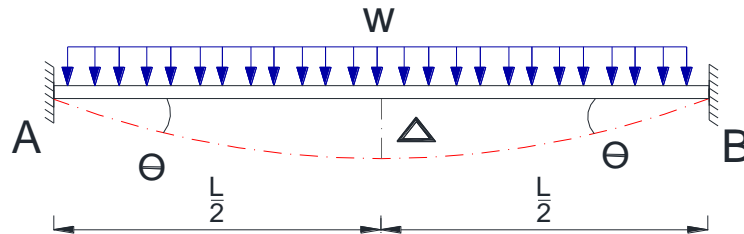
$$\left(\frac{3}{8}\right) (wL) \left(\frac{3}{8}\right) L\theta = 4M_p\theta$$

$$\text{Simplificando: } w = \left(\frac{256}{9}\right) \left(\frac{M_p}{L^2}\right) \quad \text{o bien: } w = \left(28.44 \frac{M_p}{L^2}\right)$$

En este caso se cumplen las condiciones de equilibrio y mecanismo, pero no el de plasticidad ya que el momento en los extremos es mayor que M_p , por lo que la solución es de límite superior.

Finalmente se presenta el caso en que se forman tres articulaciones plásticas, dos localizadas en cada extremo y la tercera al centro del claro.

Figura representativa:



El trabajo de las fuerzas exteriores es: $T_{ex} = \left(\frac{1}{2}\right) wL \left(\frac{D}{2}\right)$

D es la deformación vertical en el centro del claro

El trabajo interior de las articulaciones plásticas: $T_{int} = M_p 4\theta$

Teta es el ángulo que giran los extremos, nótese que la articulación central gira dos veces lo correspondiente a los extremos.

Pero por la geometría del mecanismo de falla: $D = \left(\frac{1}{2}\right) L\theta$

Se igualan los trabajos interno y externo, se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2}\right) (wL) \left(\frac{1}{2}\right) L\theta = 4M_p \theta$$

$$\text{Simplificando: } W = \frac{16M_p}{L^2}$$

En este caso se cumplen las tres condiciones (equilibrio, plasticidad y mecanismo) por lo que el resultado es la carga teórica de falla.

Para un tratamiento más detallado de este tema aplicado a las estructuras de concreto reforzado se puede recurrir al Capítulo 11 (Resistencia y ductilidad de marcos) de la referencia Park (1979)

Conclusiones generales

Los ejemplos resueltos presentados son similares a los realizados en el aula dentro de la unidad de aprendizaje Análisis Estructural I del programa académico de Ingeniero Civil que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la UAEM. Durante el curso al estudiante se le pide resolver por lo menos un problema con similares alcances pero con datos propuestos por él. Una vez resuelto su problema analizará la siguiente lista de cotejo y la rúbrica correspondiente por cada ejercicio hecho con el fin de saber en qué medida se está cumpliendo el propósito y el objetivo de enseñanza.

Lista de Cotejo

ANALIZA LA VALIDEZ DE LA PROPUESTA

Datos necesarios: que el problema sea significativamente diferente al hecho en clase

Planteamiento congruente de la o las preguntas del problema

Propuesta del planteamiento tentativo general

Analiza la factibilidad de aprendizaje

PREPARACIÓN DEL PROCEDIMIENTO

Verifica el tema y su congruencia con el curso

Se establecen y aclaran conceptos

Propone los pasos específicos para la solución, se identifican fórmulas

Refuerza conocimientos mediante asesorías o consultas (libros, notas)

APLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO

Representación gráfica del problema (dibujo proporcionado y bien hecho)

Desarrolla los pasos del procedimiento, sustituye en fórmulas.

Cuida que las unidades sean congruentes

Obtiene resultados numéricos

Resume los resultados y en su caso los representa gráficamente

ANALIZA Y DISCUTE LOS RESULTADOS

Comprobar los resultados

Resultados lógicos y congruentes, en caso contrario hacer ajustes

Identificar límites de aplicabilidad, interpretar resultados pequeños o grandes, negativos

Evaluar el grado o nivel de aprendizaje

Emprende problemas diferentes alternativos, por ejemplo, lo que es dato que sea incógnita

Discute posibles aplicaciones prácticas.

Rúbrica Problemas (E)

Criterio	Evaluación
Propone un problema válido con datos lógicos y significativamente deferente al de clase; establece preguntas acertadas; prepara procedimiento congruente con conocimientos claros; procedimiento con pasos lógicos y fórmula correctas; aplica procedimiento y obtiene resultados numéricos que resume y en su caso grafica; analiza sus resultados, son congruentes y los comprueba; identifica límites de aplicación y estima nivel de aprendizaje; emprende problemas diferentes y discute posibles aplicaciones prácticas.	10
Propone un problema válido con datos lógicos y pero no significativamente deferente al de clase; establece preguntas acertadas; prepara procedimiento congruente con conocimientos claros; procedimiento con pasos lógicos y fórmula correctas; aplica procedimiento y obtiene resultados numéricos que resume y en su caso grafica; analiza sus resultados, son congruentes y los comprueba; identifica límites de aplicación y estima nivel de aprendizaje; emprende problemas diferentes y discute posibles aplicaciones prácticas.	8
Propone un problema con datos ilógicos o incompletos; no establece preguntas acertadas; el procedimiento no es congruente; procedimiento con pasos lógicos y fórmula correctas; aplica procedimiento y obtiene resultados numéricos que resume y en su caso grafica; analiza sus resultados, son congruentes y los comprueba; identifica límites de aplicación y estima nivel de aprendizaje; emprende problemas diferentes y discute posibles aplicaciones prácticas.	7
Propone un problema con datos ilógicos o incompletos; no establece preguntas acertadas; el procedimiento no es congruente; procedimiento dudoso o fórmulas no aplicables; aplica procedimiento y obtiene resultados numéricos incorrectos o fuera de contexto; analiza sus resultados, y los comprueba; identifica límites de aplicación y estima nivel de aprendizaje; emprende problemas diferentes y discute posibles aplicaciones prácticas.	5
Propone un problema con datos ilógicos o incompletos; no establece preguntas acertadas; el procedimiento no es congruente; procedimiento dudoso o fórmulas no aplicables; aplica procedimiento y obtiene resultados numéricos incorrectos o fuera de contexto; analiza sus resultados pero no los comprueba; identifica límites de aplicación y estima nivel de aprendizaje; emprende problemas diferentes y discute posibles aplicaciones prácticas.	3
Propone un problema con datos ilógicos o incompletos; no establece preguntas acertadas; el procedimiento no es congruente; procedimiento dudoso o fórmulas no aplicables; aplica procedimiento y obtiene resultados numéricos incorrectos o fuera de contexto; analiza sus resultados pero no los comprueba; no identifica límites de aplicación ni estima nivel de aprendizaje; no emprende problemas diferentes ni discute posibles aplicaciones prácticas.	2

Lista de Cotejo para el Desarrollo complementario de un **TEMA o APLICACIÓN (IN)**

DEFINICIÓN Y ENUNCIADO DEL TEMA

Identifica correctamente el tema

Definición clara del propósito congruente con el desarrollo del curso

Redacción clara y objetiva del enunciado

Se reflejan los conocimientos correspondientes

DESARROLLO

Recurre a observaciones y/o consultas apropiadas y significativas

Claridad en la exposición, en su caso dibujos bien hechos y proporcionados

Relevancia de los argumentos e información proporcionada

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Aportación de comentarios y conclusiones significativas

Analiza el grado de conocimiento alcanzado

Discute sobre significados y repercusiones.

Rúbrica tema o aplicación Proyecto (IN)

Criterio	Evaluación
Identifica correctamente el tema y el propósito; redacción clara y objetiva del enunciado; refleja los conocimientos correspondientes; recurre a observaciones y/o consultas; desarrollo completo y claro, con dibujos bien hechos y proporcionados; argumentos e información relevante; aporta comentarios y conclusiones significativas; refleja los conocimientos alcanzados y discute las posibles aplicaciones.	10
El tema y el propósito no son claros, enunciado incompleto; refleja los conocimientos correspondientes; recurre a observaciones y/o consultas; desarrollo completo y claro, con dibujos bien hechos y proporcionados; argumentos e información relevante; aporta comentarios y conclusiones significativas; refleja los conocimientos alcanzados y discute las posibles aplicaciones.	8

<p>El tema y el propósito no son claros, enunciado incompleto; no refleja los conocimientos correspondientes; observaciones y/o consultas incompletas; desarrollo incompleto, con dibujos mal hechos; argumentos e información más o menos relevante; aporta pocos comentarios y conclusiones; refleja medianamente los conocimientos alcanzados y discute las posibles aplicaciones.</p>	<p>5</p>
<p>El tema y el propósito no son claros, enunciado incompleto; no refleja los conocimientos correspondientes; observaciones y/o consultas incompletas; desarrollo incompleto, con dibujos mal hechos o inexistentes; argumentos e información poco relevante; aporta pocos comentarios y conclusiones; no refleja nivel adecuado de conocimientos.</p>	<p>2</p>