UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: “TEORÍA DE CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES”

M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: Julio de 2019

UNIDAD DE APRENDIZAJE
"ALGEBRA SUPERIOR"

UNIDAD DE COMPETENCIA I: TEORÍA DE CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES

TEMAS:

1.1 Definición y tipos de conjuntos.
1.2 Operaciones y propiedades de los conjuntos.
1.3 Diagramas de Venn.
1.4 Producto Cartesiano y relaciones.
1.5 Relaciones de equivalencia.
1.6 Definición de función.
1.7 Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

OBJETIVOS

Objetivos de la unidad de aprendizaje. Analizar elementos de la teoría de números y del análisis matemático utilizando principios del cálculo combinatorio, funciones, relaciones y estructuras algebraicas para resolver problemas en ciencias de la ingeniería.

Objetivo de la Unidad de Competencia: Analizar la teoría de conjuntos, relaciones y funciones, mediante la resolución de ejercicios típicos, para resolver problemas de conjuntos, relaciones y funciones.

JUSTIFICACIÓN

El presente material sirve de apoyo a la Primera Unidad de competencia “Teoría de conjuntos, relaciones y funciones” de la Unidad de Aprendizaje Algebra Superior que se imparte en el Primer período de la Licenciatura en Ingeniero en Computación.

Se desarrollan los temas de forma breve y concisa para entender las bases conceptuales del contenido temático junto con algunos ejemplos.

Lo anterior sirve de ayuda para resolver los ejercicios que se abordan posteriormente.

TEORIA DE CONJUNTOS

Conjunto. Un conjunto es una colección bien definida de objetos, los cuales se llaman elementos. Los conjuntos son elementos un conjunto universal, U.

Los conjuntos los denotamos por letras mayúsculas: A; B; C;… y los elementos por letras minúsculas a; b; c; …

Ejemplo.

"a es un elemento del conjunto A" (o "a es un miembro de A" o "a está en A" o "a pertenece a A") se denota: a Є A.

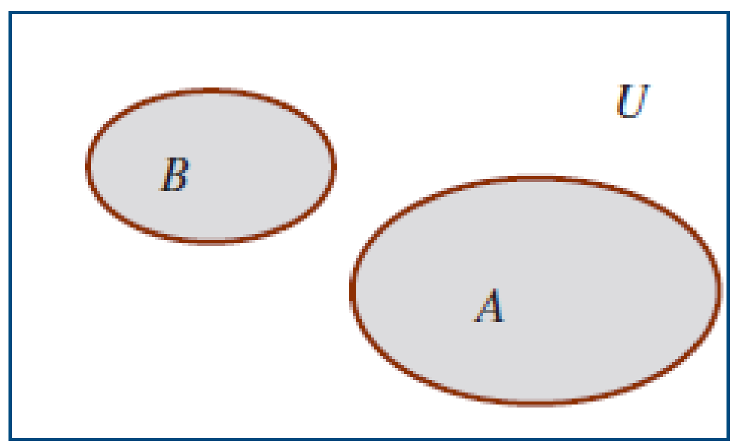
TEORIA DE CONJUNTOS

Los elementos de un conjunto pueden mostrarse mediante una lista de todos los elementos entre llaves.

A = {x | x son los enteros positivos}

A = {1; 2; 3; 4...}

A = {x | x = x^2+1}



TEORIA DE CONJUNTOS

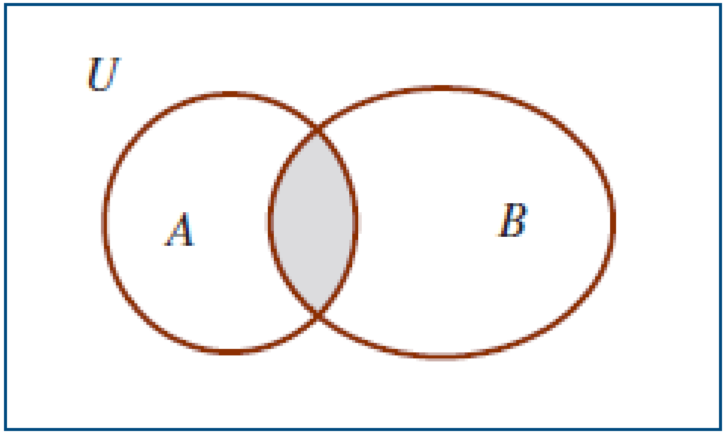
Las formas de especificar un conjunto son: Enunciado, ecuación, Extensión, numérica o tabla y gráfica.

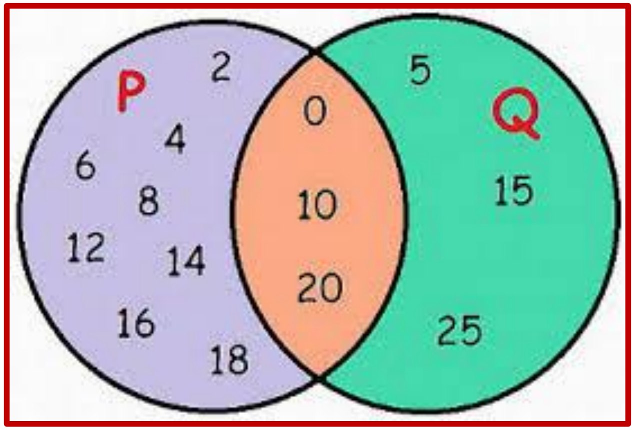
A = {x ͼ U: x es una vocal}

B = {1; 2; 3; 4; 5}

C = {a; e; i; o; u}

D = {x ͼ R / x^2 = -1}

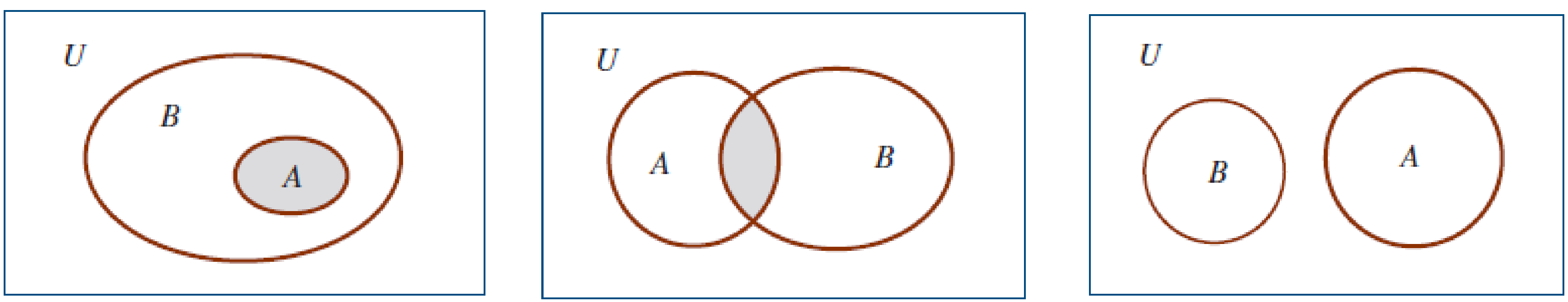




TIPOS DE CONJUNTOS

Los conjuntos que tienen un número finito de elementos; se llaman **conjuntos finitos**. Un conjunto que no tiene un número finito de elementos se llama un **conjunto infinito**.

El **conjunto vacío** es el que carece de elementos. Se denota por { } o Ø.



TIPOS DE CONJUNTOS

Igualdad de conjuntos. Un conjunto A es igual a un conjunto B, denotado A = B, si y sólo si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A.

Ejemplo. Sean A, B y C los conjuntos

A = {a, e, i, o, u}

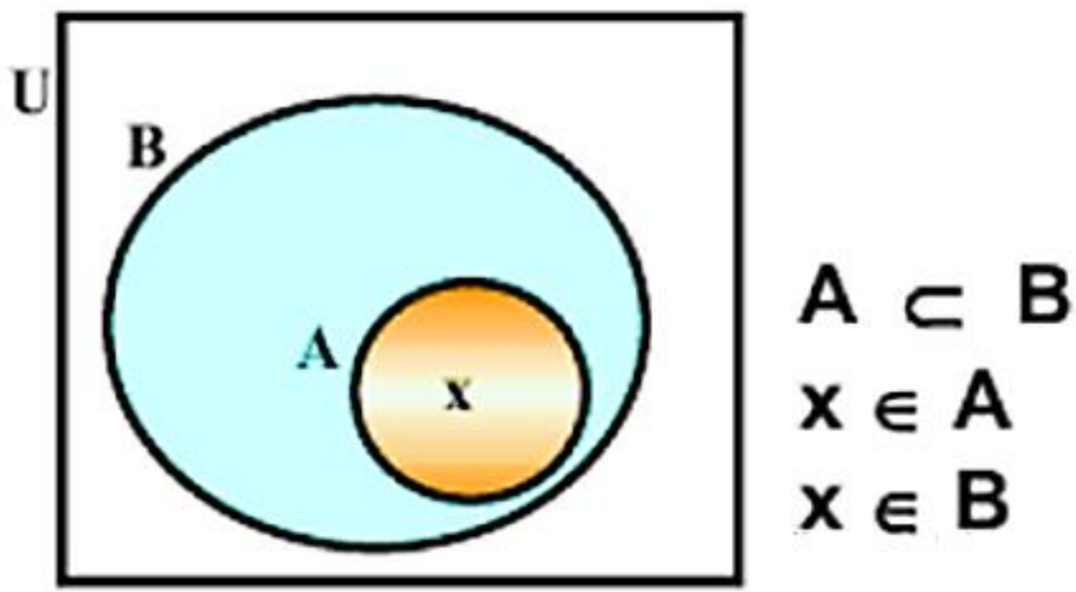
B = {a, i, o, e, u}

C = {a, e, i, o}

A = B ya que ambos contienen exactamente los mismos elementos.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

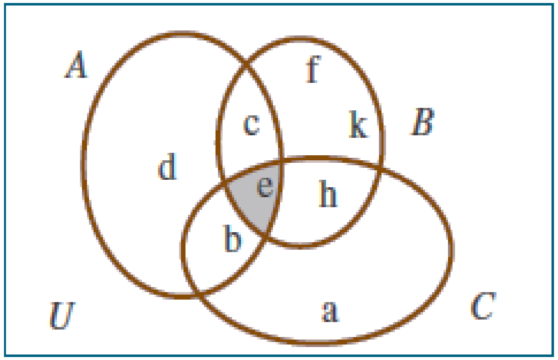
Sean A, B conjuntos. Se dice que A es un subconjunto de B si y sólo si cada elemento de A es un elemento de B.

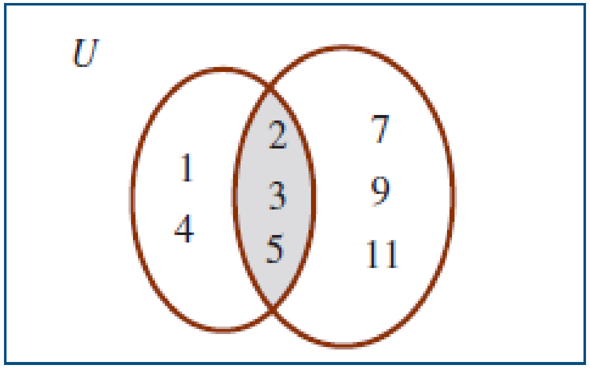


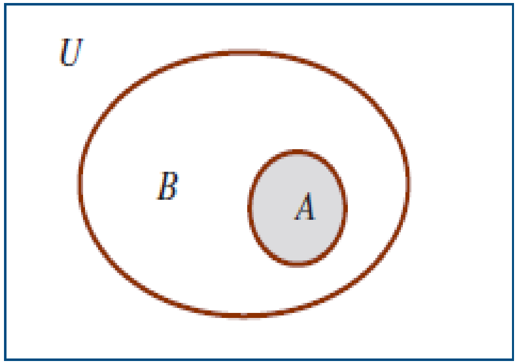
OPERACIONES CON CONJUNTOS

Intersección de conjuntos. La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes a los dos conjuntos. Se denota como $A \cap B = \{X \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Sea A = {1, 2, 3, 4, 5} y *B* = {2, 3, 5, 7, 9, 11} determine el conjunto intersección de *A* y *B*.



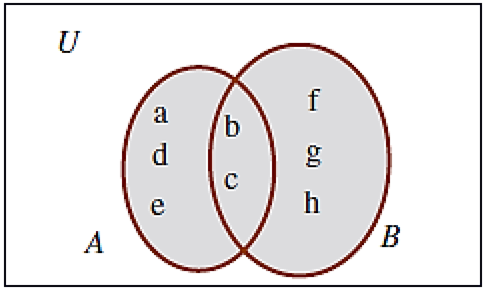




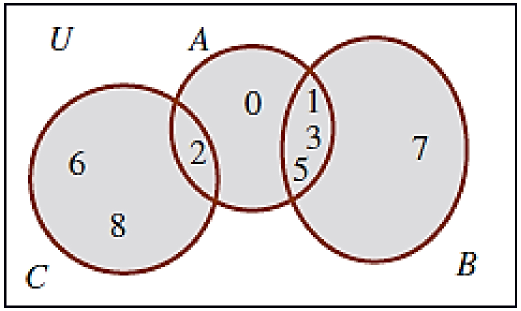
OPERACIONES CON CONJUNTOS

Unión de conjuntos. La unión de dos conjuntos A y B consta de todos los elementos que pertenecen a A o a B. La unión de A y B se denota por A U B.

A U B = {X | x є A v x є B}



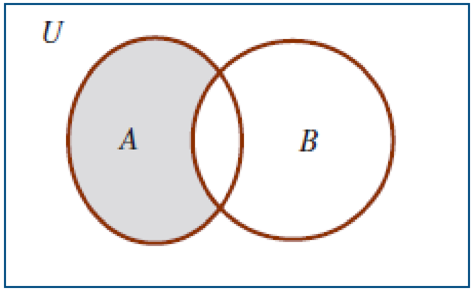
Dados los conjuntos A ={0, 1, 2, 3, 5}, B ={l, 3, 5, 7} y C ={2, 6, 8}, determine A U B U C.



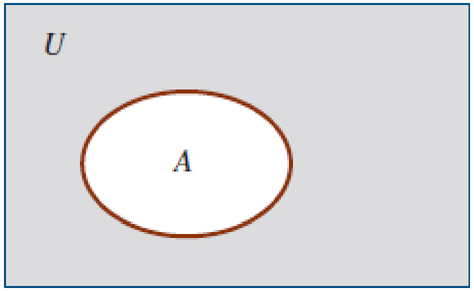
OPERACIONES CON CONJUNTOS

Diferencia de conjuntos. Es el conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a A pero no a B.

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$



El complemento de un conjunto A, que se denota por A´ o por A^c, es el conjunto U – A.

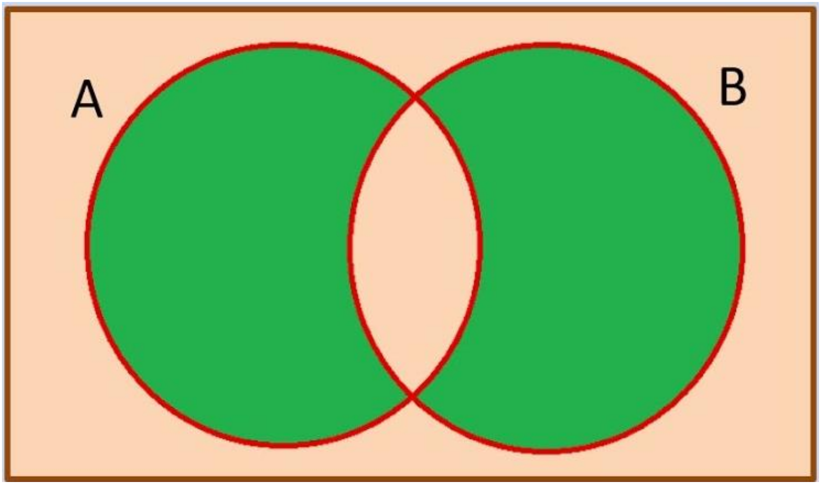


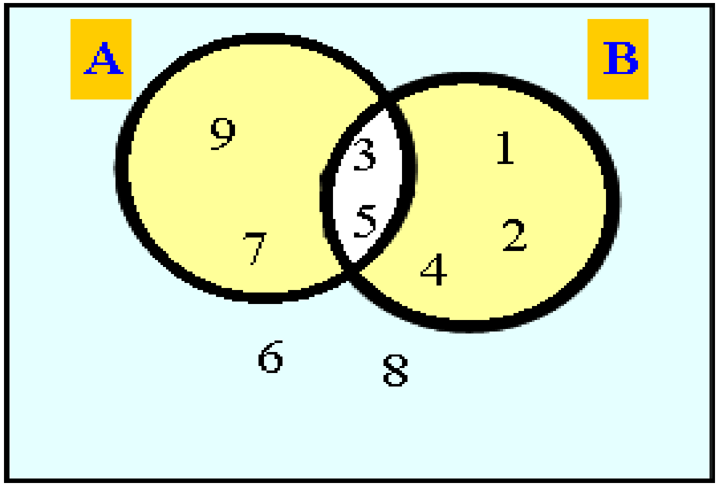
OPERACIONES CON CONJUNTOS

Diferencia simétrica. La diferencia simétrica de los conjuntos A y B, denotada por A ⊕ B, consta de los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos. Es decir, $A \oplus B = (A \cup B)-(A \cap B)$ o $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

$A = \{ 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$





OPERACIONES CON CONJUNTOS

Ejemplo. Si $A = \{a, b, c, e\}$, $B = \{b, c, d\}$ y $C = \{a, c, e, f\}$ entonces

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

$A \cap B = \{b, c\}$

$A - B = \{a, e\}$

$B - A = \{d\}$

$C - B = \{a, e, f\}$

$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \{a, e\} \cup \{d\} = \{a, d, e\}$

$(A \cap B) \cup (A - B) = \{b, c\} \cup \{a, e\} = \{a, b, c, e\}$

$(A \cup C) - (B \cap C) = \{a, b, c, e, f\} - \{c\} = \{a, b, e, f\}$

PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes idemponentes

1a. $A \cup A = A$ **1b.** $A \cap A = A$

Leyes asociativas

2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **2b.** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leyes conmutativas

3a. $A \cup B = B \cup A$ **3b.** $A \cap B = B \cap A$

Leyes distributivas

4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **4b.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de identidad y absorción

5a. $A \cup \varnothing = A$ **5b.** $A \cap U = A$

6a. $A \cup U = U$ **6b.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Ley involutiva

7a. $(A^c)^c = A$

Leyes del complementario

8a. $A \cup A^c = U$ **8b.** $A \cap A^c = \varnothing$

9a. $U^c = \varnothing$ **9b.** $\varnothing = U$

Leyes de De Morgan

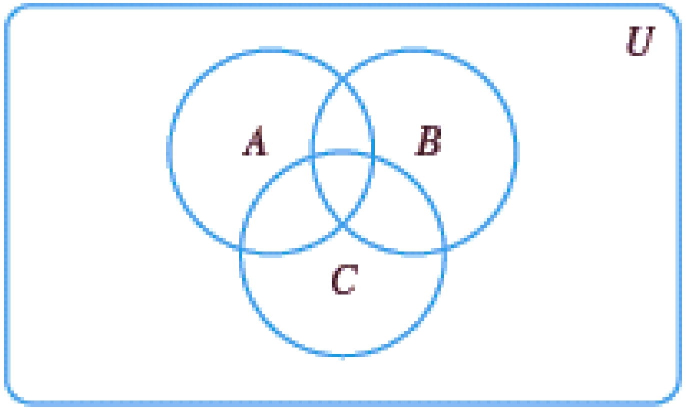
10a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ **10b.** $A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

En los ejercicios siguientes sombree la porción de la figura que representa cada conjunto.

a) A U B U C, b) A ∩ B ∩ C, c) $A \cap B \cap C^c$; d) $A^c \cap B \cap C$

e) $A^c \cap B^c \cap C^c$ f) $(A \cup B)^c \cap C$ g) $A \cup (B \cap C)^c$ h) $(A \cup B \cup C)^c$



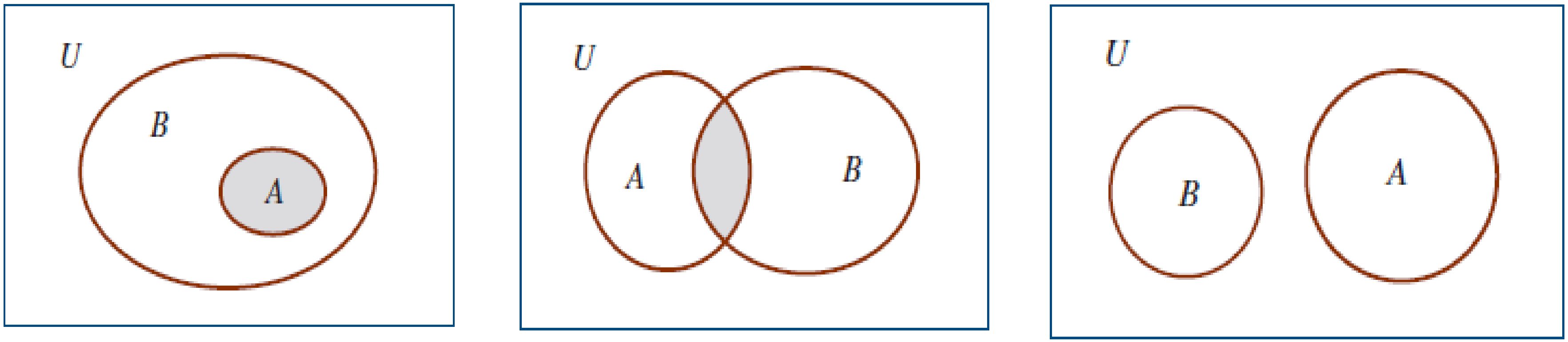
Sean U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {2, 4, 6, 8, 10} y C = {1, 2, 4, 5, 8, 9}. Haga una lista de los elementos de cada conjunto.

a) A^c b) B U C, c) $C \cup C^c$; d) $C \cap C^c$; e) $(A \cap C)^c$ f) A U (B ∩ C)

g) (A ∩ B) U C h) $(A \cup B \cup C)^c$ i) $(A \cup B)^c \cap C$ j) $A \cup (B \cap C)^c$

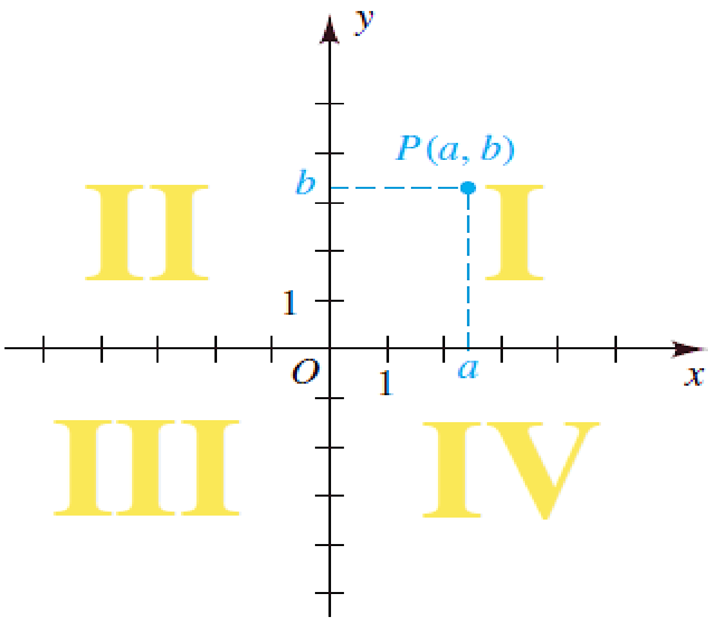
DIAGRAMAS DE VENN

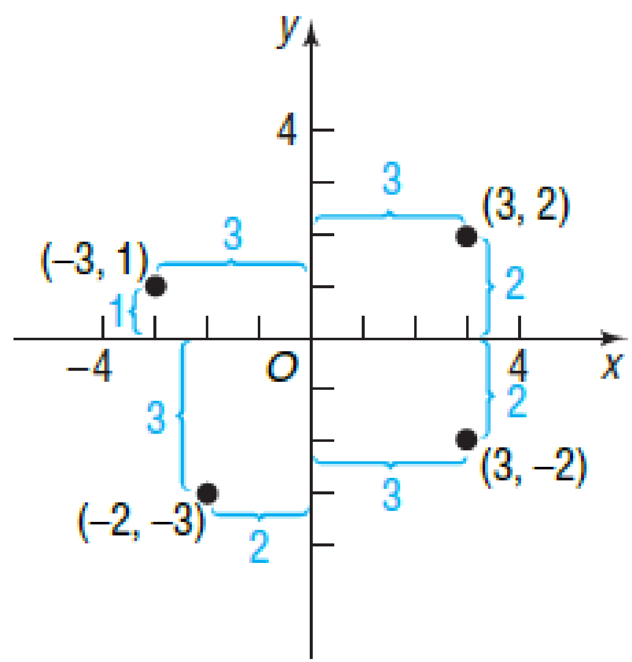
Diagrama de Venn. Una representación gráfica de los conjuntos y de las relaciones entre ellos donde el conjunto referencial U suele representarse por un rectángulo y los conjuntos en U; por recintos cerrados en el interior del mismo.



PRODUCTO CARTESIANO Y RELACIONES

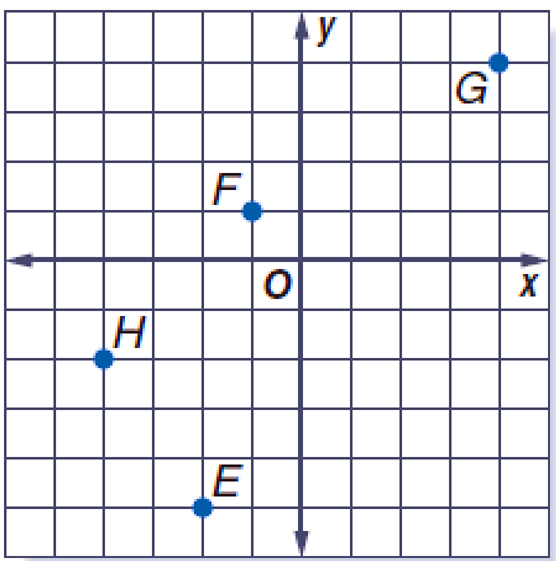
El plano coordenado. Un sistema coordenado rectangular o cartesiano se forma con dos rectas numéricas perpendiculares que se intersecan en el en el origen O. Muchas veces nos referimos a la recta horizontal como eje x y a la vertical como eje y. Los marcamos como x e y.

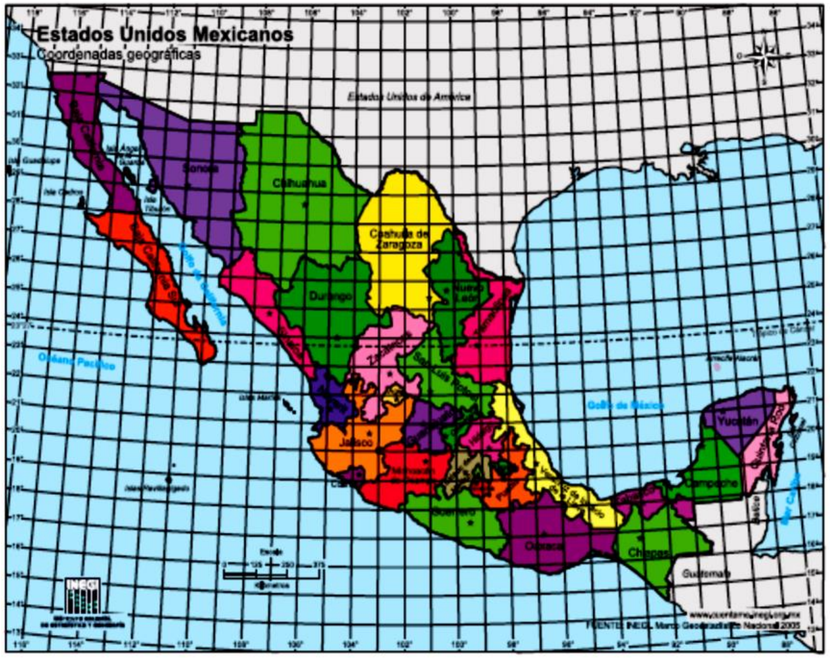




PRODUCTO CARTESIANO Y RELACIONES

Producto cartesiano. Los puntos en el plano coordenado son llamados pares ordenados de la forma (x, y). El primer número o coordenada x corresponde al número sobre el eje x. El segundo número o coordenada y corresponde al número sobre el eje y.



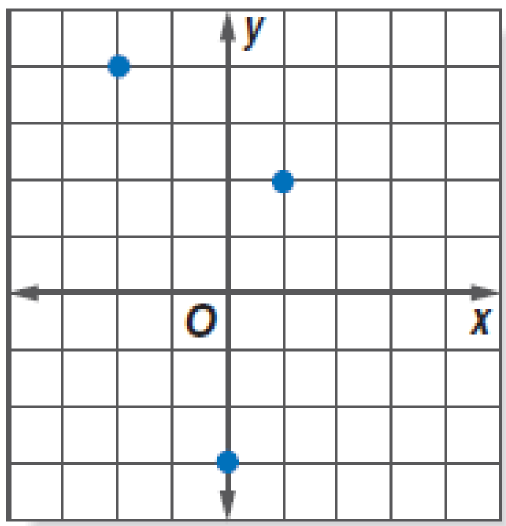


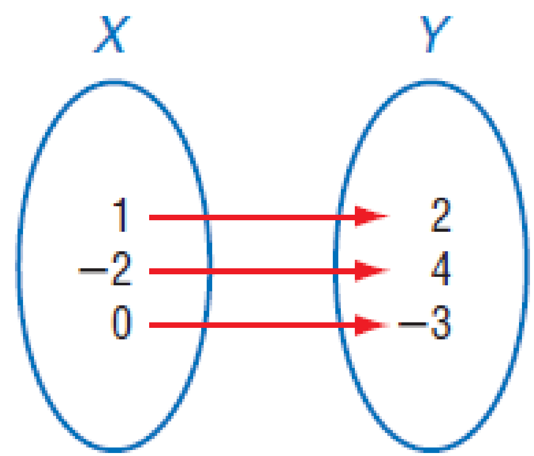
PRODUCTO CARTESIANO Y RELACIONES

Pares ordenados de la forma (x, y).

- (1, 2),
- (-2, 4) y
- (0, -3)

x	y
1	2
−2	4
0	−3





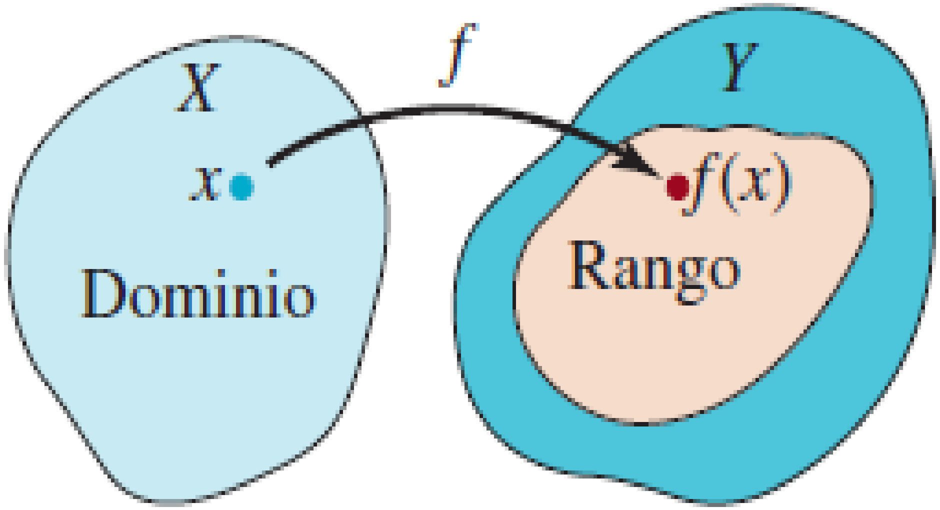
PRODUCTO CARTESIANO Y RELACIONES

Relación. Una relación en los reales es una regla de correspondencia ($y = f(x)$, $f\colon A \to B$, $(x, f(x))$) que asocia a cada número real “x” de un conjunto de partida A ⊂ R (llamado dominio de la relación) uno o más números reales “y” de un conjunto de llegada B ⊂ R (llamado codominio).

$A = \pi r^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

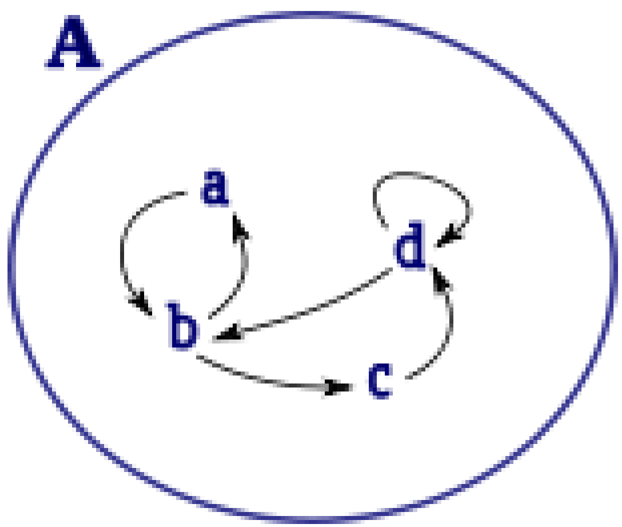
y= $x^2 + 1$



RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Relaciones de equivalencia. Sea A un conjunto cualquiera, una relación en A, es un subconjunto R del producto cartesiano A x A.

Si el par (a, b) está en R, diremos que a está relacionado con b, y lo denotamos por a ~ b



RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Las relaciones de equivalencia dividen a los elementos del conjunto en diferentes clases, llamadas clases de equivalencia, de tal suerte que cada elemento pertenece a una y sólo una clase.

Una relación R sobre A, se dice que es de equivalencia, si satisface las tres condiciones.

1. Reflexiva. $a \sim a$ para todo a en A.
2. Simétrica. $a \sim b$ implica $b \sim a$, para todos a y b en A.
3. Transitiva. Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$, para todos a, b y c en A.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA: Ejemplo

Sea X = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y sea ={{1, 3, 5},{2, 6},{4}} una partición de X. R ={(1 ,1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 4)}

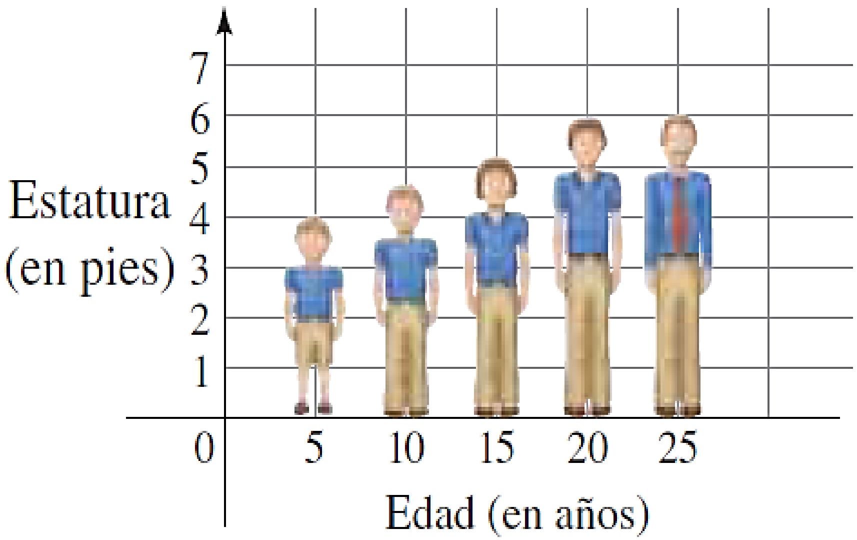
la cual, por la definición anterior es una relación de equivalencia.

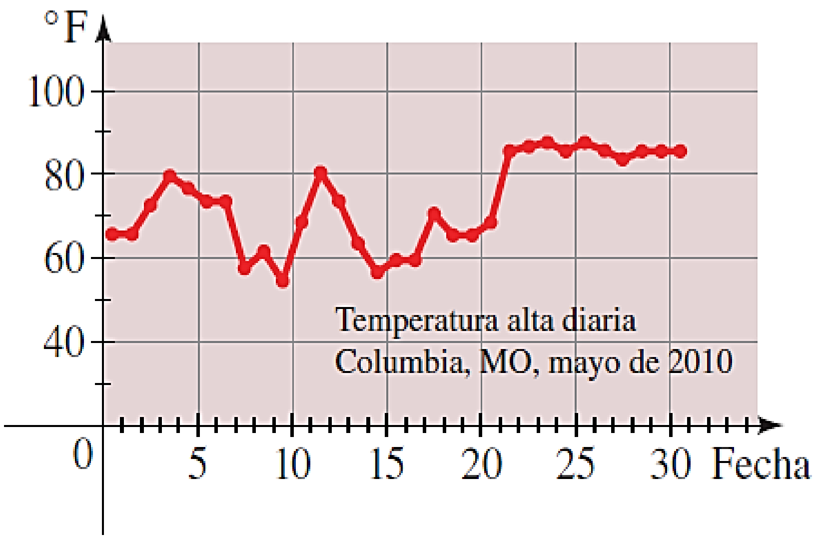
- R es reflexiva puesto que (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) Є R
- R es simétrica ya que siempre que si (x, y) Є R también (y, x) Є R
- R es transitiva puesto que siempre que si si (x, y) y (y, z) Є R también (x, z) Є R

y como es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces es una relación de equivalencia sobre X.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN.

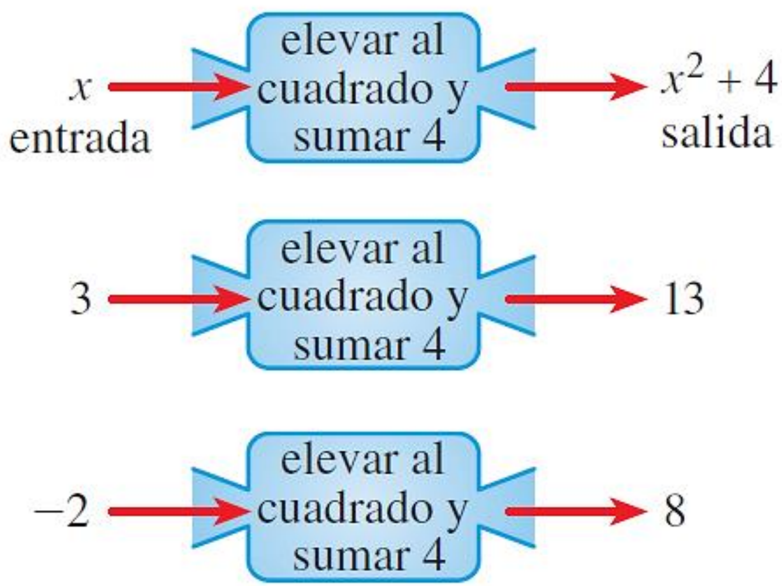
FUNCION. Una función es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente uno y solamente un número de salida.

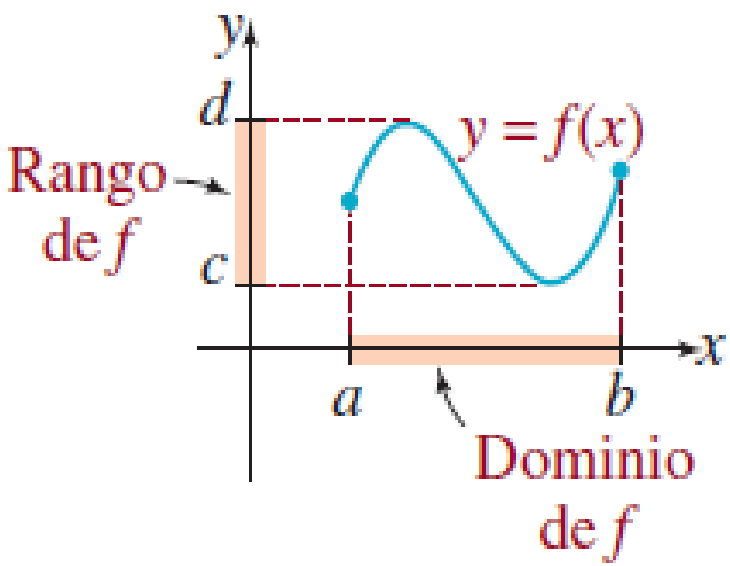




DEFINICIÓN DE FUNCIÓN.

Al conjunto de números de entrada para los cuales se aplica la regla se le llama el dominio de la función. El conjunto de todos los números de salida se llama el rango.

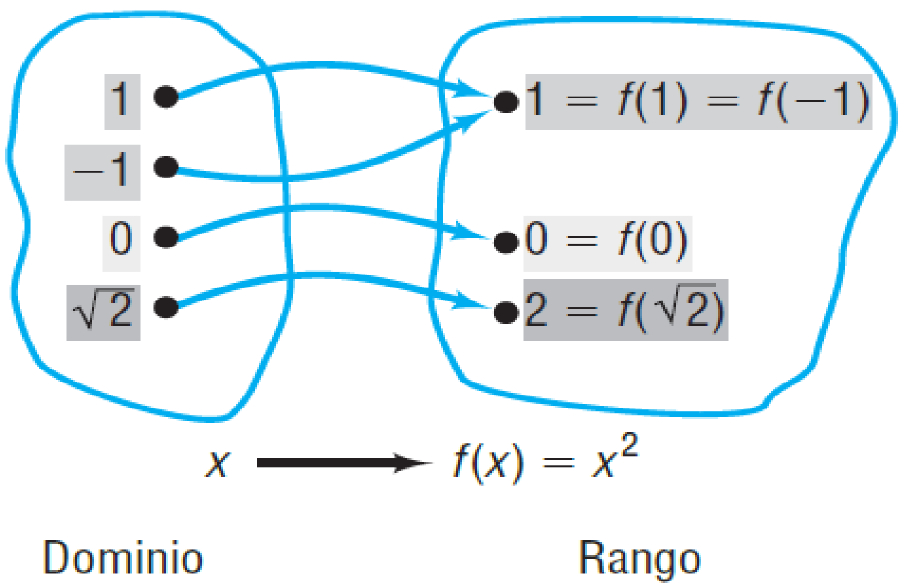




FUNCIÓN: IMAGEN Y RANGO

El dominio de una función f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que f(x) es un número real.

Imagen o Rango. Es el elemento que se obtiene en el segundo conjunto después de aplicar la regla de correspondencia a un elemento del primer conjunto. Si x es el elemento en el dominio la imagen se denota como f(x), (“f de x”).

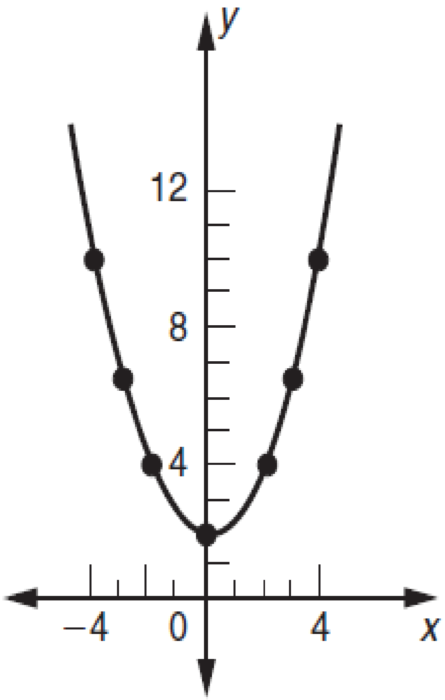


GRAFICA DE UNA FUNCIÓN

Gráfica. Conjunto de todos los puntos que satisfacen la ecuación. La gráfica de una función *f* se obtiene dibujando todos los puntos (*x, y*), en donde *x* pertenece al dominio de *f* y *y* = *f* (*x*), manejando *x* y *y* como coordenadas cartesianas.

Ejemplo: $f(x) = 2 + 0.5x^2$

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
$y = f(x)$	2	2.5	4	6.5	10	2.5	4	6.5	10



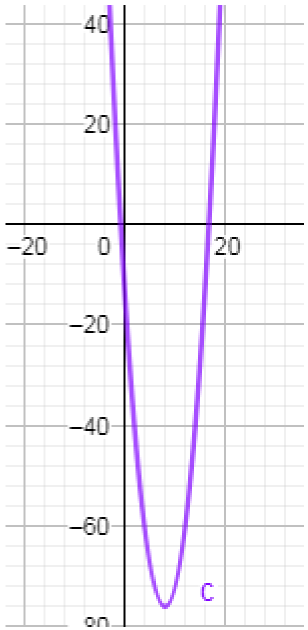
DETERMINACIÓN DE DOMINIOS

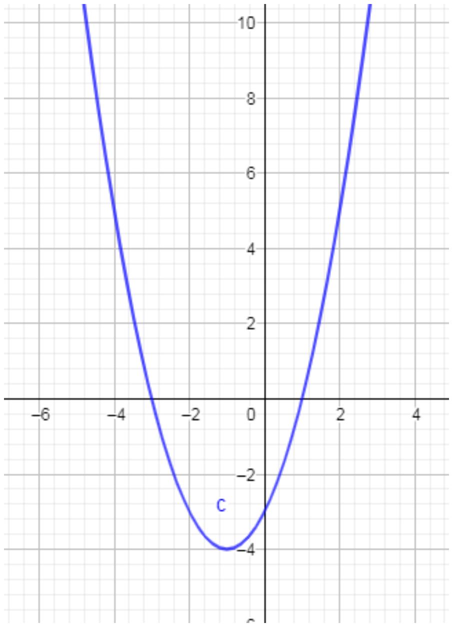
Hallar si la siguiente relación es una función, encuentre el dominio y codominio y trace su gráfica

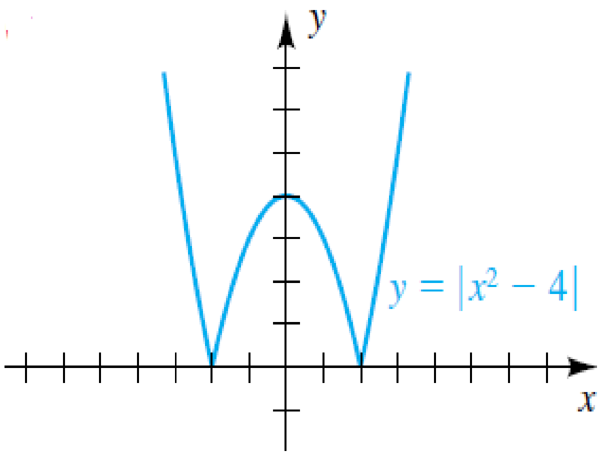
$y = x^2 - 16x - 12$

$y = x^2 + 2x - 3$

$y = |x^2 + 4|$



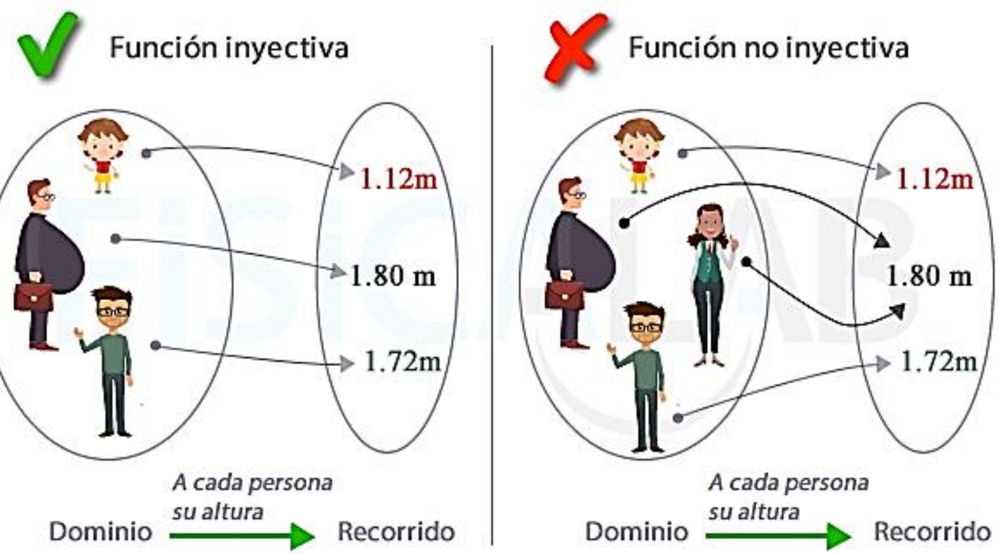




FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

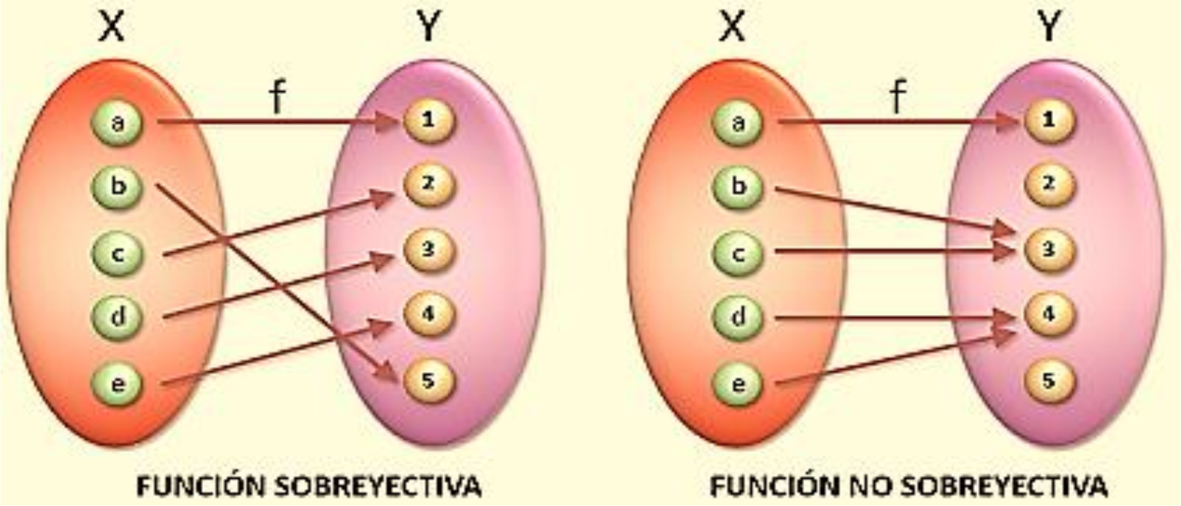
Las funciones se pueden clasificar en Inyectivas, Suprayectivas y Biyectivas.

Función inyectiva. Sea la función $y = f(x)$; si para todo x_1 y x_2 en el dominio de $f(x)$, donde $x_1 \neq x_2$; entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, nos indica que la función es inyectiva. Esto es, aquella que al tomar dos valores diferentes en el dominio sus imágenes van a ser diferentes.



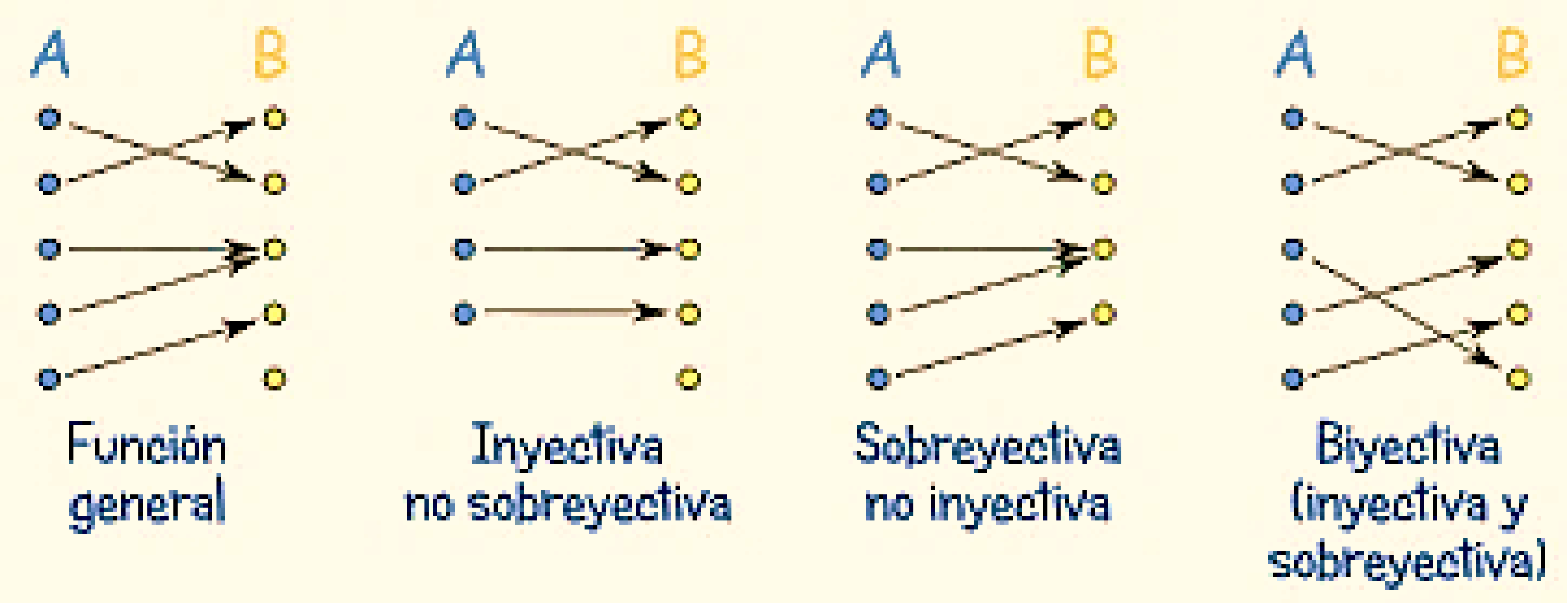
FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Suprayectiva o sobreyectiva. Para una función y = f (x) , cuando todos los elementos del rango son al menos imagen de un elemento del dominio. Es cuando el rango es igual al codominio. Eso significa que todos los elementos del codominio están relacionados con alguno del dominio.



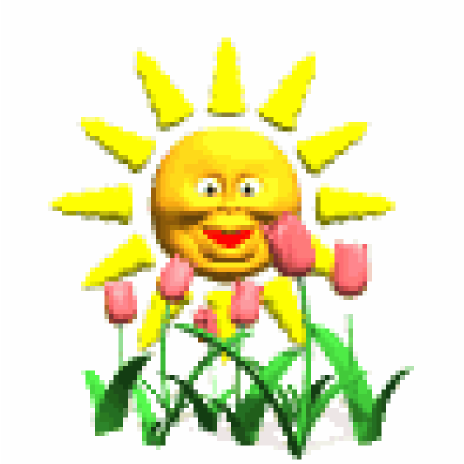
FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Biyectiva. Una función y = f(x) es biyectiva, si y solo si, es inyectiva y sobreyectiva. Si es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente.



BIBLIOGRAFIA

- Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Swokowski, Thompson.
- Álgebra Moderna, Ayres Frank, Mc. Graw Hill.
- Algebra Superior, Reyes Guerrero Araceli, Thompson.
- Análisis Matemático vol I y II, Hasser Lasalle, Trillas.
- Algebra, Baldor A. Editorial Cultural.



FIN DE LA PRESENTACION