UAEM Universidad Autónoma del Estado de México

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: “CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRIA ANÁLITICA”

M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: JUNIO DE 2019

UNIDAD DE APRENDIZAJE
"GEOMETRÍA ANALÍTICA"

UNIDAD DE COMPETENCIA I:
Conceptos Básicos de la Geometría Analítica

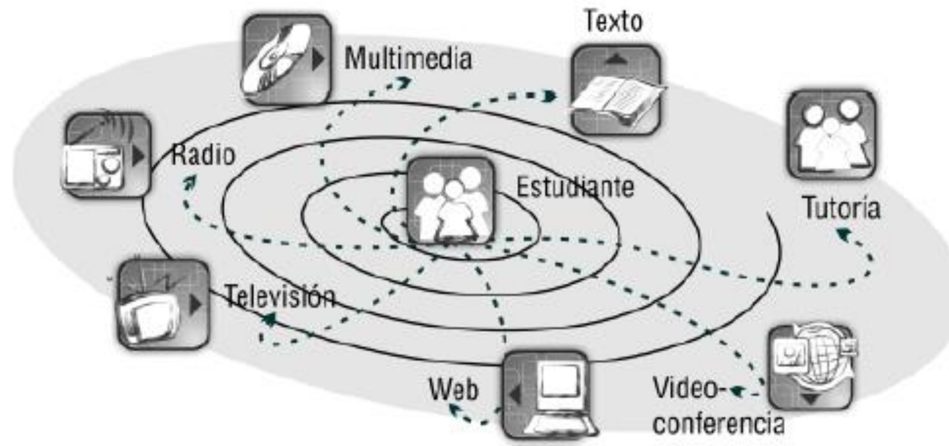
Temas:

1.1 La Geometría Euclidiana.
1.2 El sistema cartesiano de referencia.
1.3 El Problema Fundamental de la Geometría Analítica.
1.4 Ecuaciones cartesianas de la recta.
1.5 Ecuaciones cartesianas de las cónicas.
1.6 Ecuación general de segundo grado.
1.7 Intersecciones entre rectas, entre cónicas, entre recta y cónica.
1.8 Introducción a software matemático para Geometría Analítica.

OBJETIVOS

Objetivos de la unidad de aprendizaje: Analizar curvas y superficies en el plano y en el espacio en distintos sistemas de coordenadas de manera cartesiana y vectorial, para resolver problemas en ciencias de la ingeniería.

Objetivos de la unidad de competencia: Comparar el desarrollo histórico de la geometría analítica y las aplicaciones, mediante la exposición de ejercicios de tipo cartesiano para organizar los conceptos escalares de la Geometría Analítica.



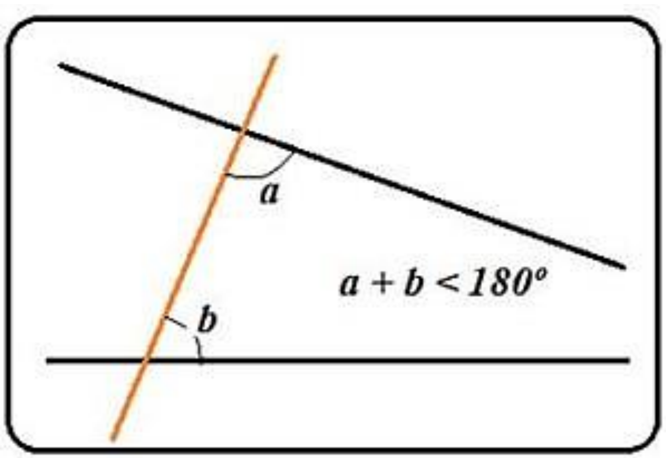
JUSTIFICACIÓN

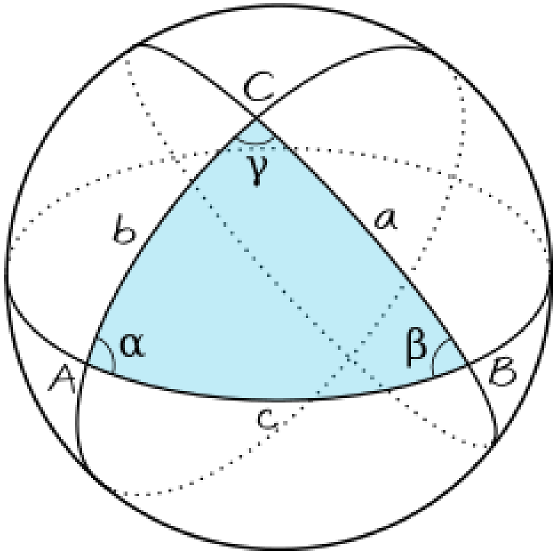
El presente material sirve de apoyo a la Primera Unidad de competencia "Conceptos básicos de la Geometría Analítica" de la Unidad de Aprendizaje Geometría Analítica que se imparte en el Primer período de la Licenciatura en Ingeniero en Computación.

Se expone el contenido temático que ayuda a abordar de forma más sencilla los ejercicios que se plantean para reafirmar los conocimientos.

LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Se considera que la geometría euclidiana es aquella centrada en el análisis de las propiedades de los espacios geométricos que cumplen con los axiomas del pensador griego. Euclides propuso cinco postulados que permiten estudiar las propiedades de las formas regulares (líneas, triángulos, círculos, etc.).





LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA: Postulados

1. Dos puntos cualquiera determinan un segmento de recta.

2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

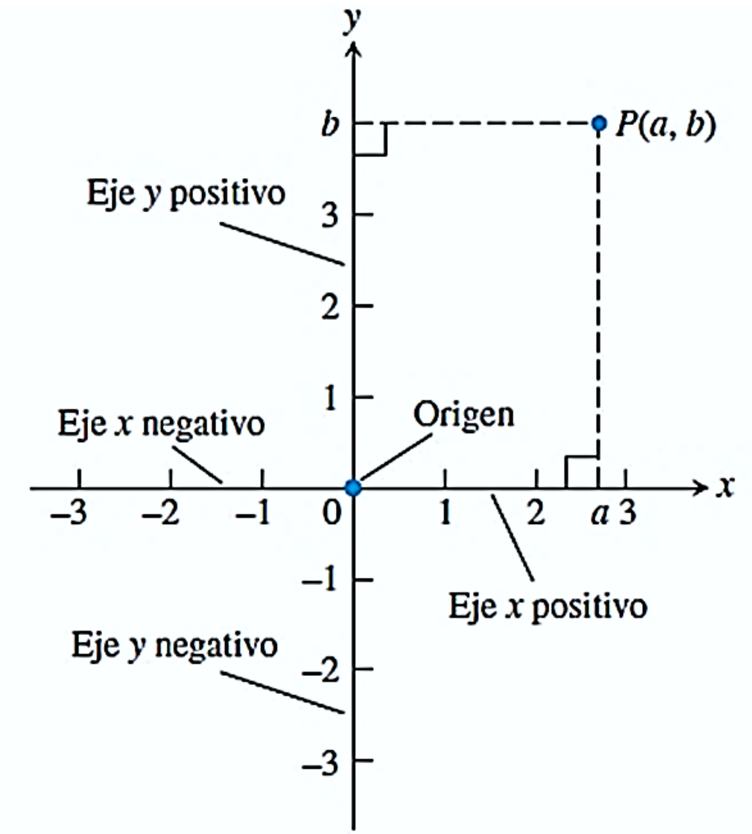
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.

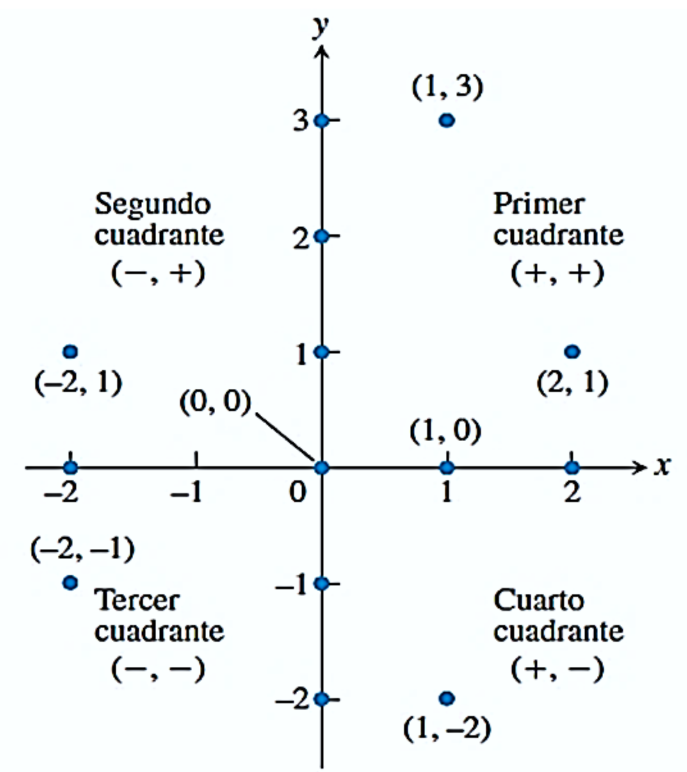
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Postulado de las paralelas. Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

SISTEMA CARTESIANO

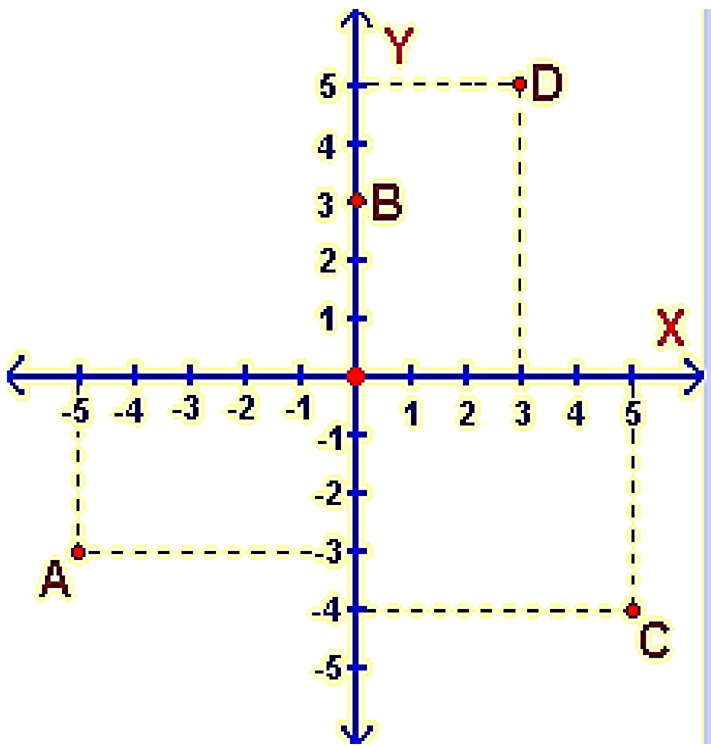
Un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas en un plano, se forma por medio de dos rectas perpendiculares coordenadas, llamadas ejes de coordenadas, que se cruzan en el origen O.





SISTEMA CARTESIANO

Un punto en el plano se localiza con una pareja ordenada de valores (x, y) llamados coordenadas, donde x es la primera componente y y la segunda. La primera componente (x) se localiza en el eje de las abscisas, y la segunda (y) en el eje de las ordenadas.



A (-5, -3)

B (0, 3)

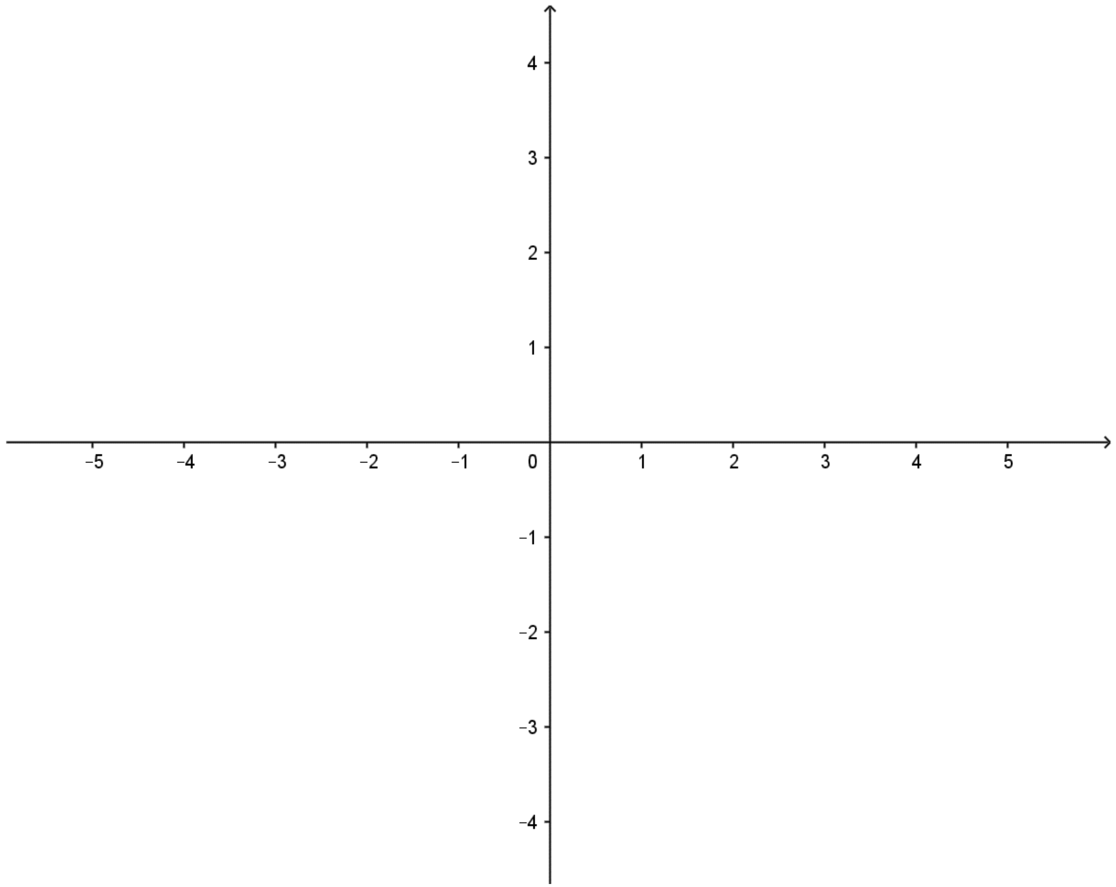
C (5, -4)

D (3, 5)

SISTEMA CARTESIANO

Graficar los puntos en el plano.

A = (2,2), D = (-3, -2), G = (2, -3), B = (3,1), E = (-2, -3), H = (0, 1), C = (-1, 2), F = (0, -2) y I = (2, 0).



PROBLEMA FUNDAMENTA DE LA GEOMETRIA

En Geometría Analítica es imprescindible abordar el estudio de dos problemas fundamentales: Se trata de encontrar la ecuación matemática para las figuras geométricas o conociendo la ecuación saber a que figura corresponde.

1) Construir la curva definida por una ecuación y

2) Hallar la ecuación de un lugar geométrico.

Dibujar la gráfica de

$y = x^2 - 2$

$y = x^2 - 3x - 3$

$y = x^3 - 4x$

PROBLEMA FUNDAMENTA DE LA GEOMETRIA

Quieres obtener	Debes hacer
Intersección en x	$y=0$ y resolver la ecuación resultante para "x". Los puntos obtenidos serán de la forma $P(x,0)$.
Intersección en y	$x=0$ y resolver la ecuación resultante para "y". Los puntos obtenidos serán de la forma $P(0,y)$.
Simetría con el eje x	Sustituye las "y" por "$-y$", si la ecuación resultante es la misma que la original entonces "la ecuación es simétrica respecto al eje x".
Simetría con el eje y	Sustituye las "x" por "$-x$", si la ecuación resultante es la misma que la original entonces "la ecuación es simétrica respecto al eje y".
Extensión en el eje x	Despeja la variable "y" y analiza el intervalo al que pertenece "x" tal que "y" tome valores reales $(\mathbb{R})$.
Extensión en el eje y	Despeja la variable "x" y analiza el intervalo al que pertenece "y" tal que "x" tome valores reales $(\mathbb{R})$.
Asíntotas verticales	Si en el despeje de "y", hay una variable "x" en el denominador, entonces iguala el denominador a cero y resuelve para x. La asíntota vertical es de la forma $x=a$, donde a es una constante.
Asíntotas horizontales	Si en el despeje de "x", hay una variable "y" en el denominador, entonces iguala el denominador a cero y resuelve para y. La asíntota horizontal es de la forma $y=a$, donde a es una constante.

PROBLEMA FUNDAMENTA DE LA GEOMETRIA

Ejemplo. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos A(-3, 4) y B(4, 1).

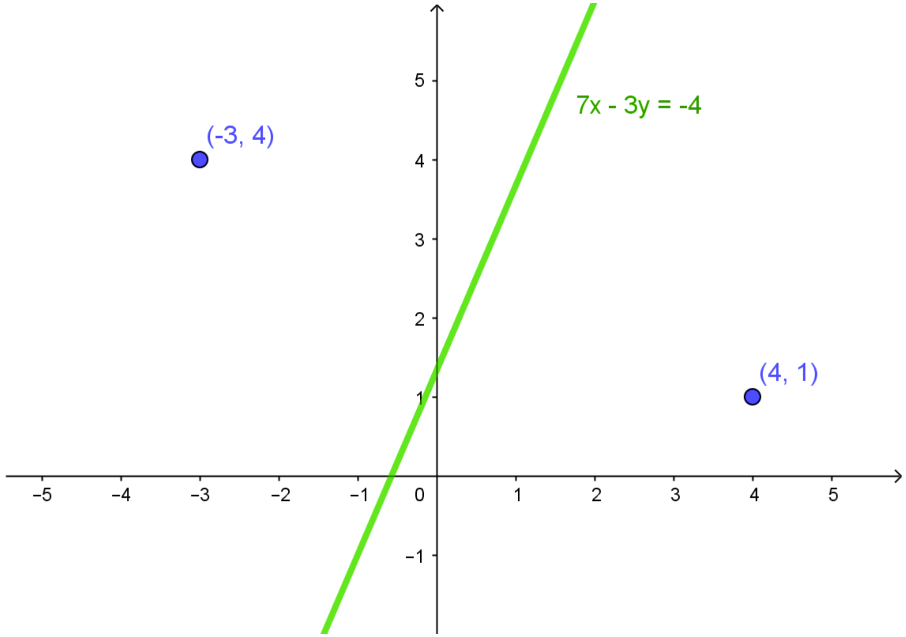
Sabiendo que: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Entonces $d_{PA} = d_{PB}$

Esto es: $\sqrt{(x_1 + 3)^2 + (y_1 - 4)^2} = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + (y_1 - 1)^2}$

Resolviendo obtenemos

7x - 3y + 9 = 0



ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA

La Recta. Es el lugar geométrico de todos los puntos que tomados de dos en dos, poseen la misma pendiente.

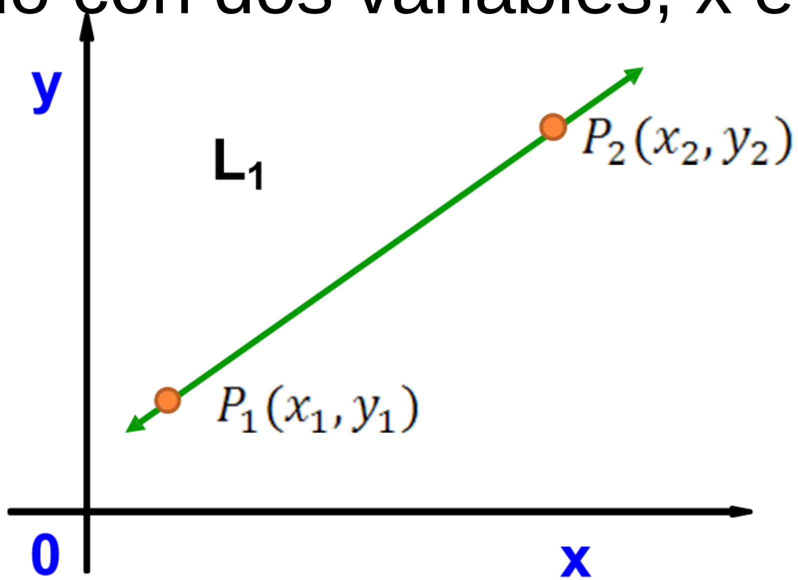
La recta en el plano está representada por una ecuación de primer grado con dos variables, x e y.

Ejemplos

$5x + 6y + 8 = 0$

$y = 4x + 7$

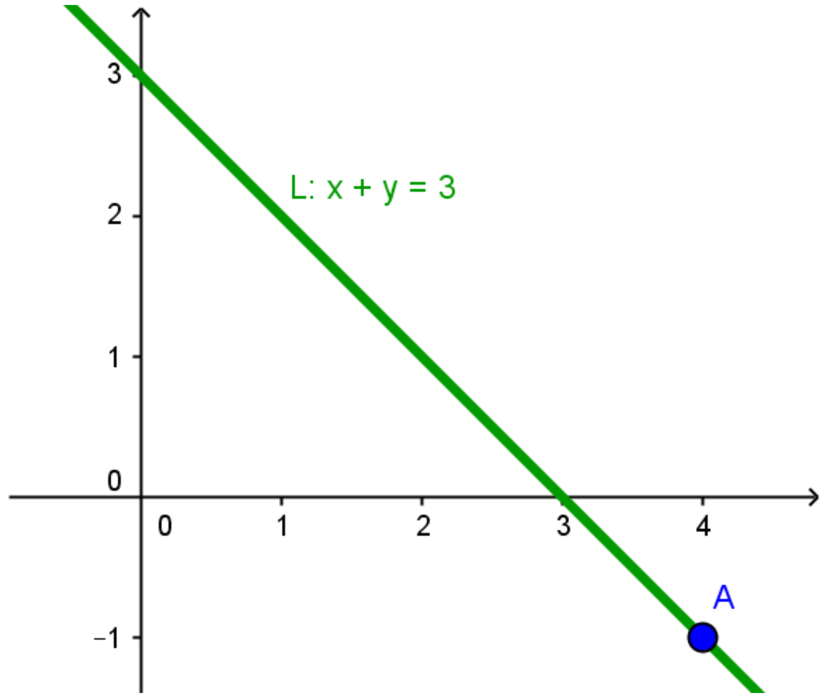
$6x + 4y = 7$



ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA

Ecuación en su forma punto-pendiente. La recta que pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene por pendiente dado m, tiene por ecuación: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo1: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, -1) y tiene pendiente de -1.



ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. A partir de la pendiente *m y de la ecuación de la* recta en forma de punto pendiente.

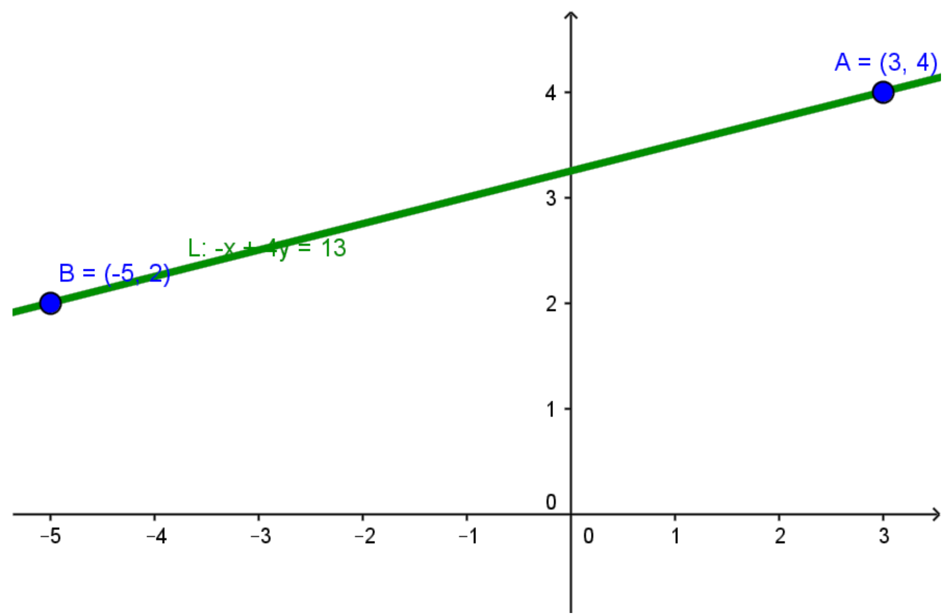
$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por (3, 4) y (-5, 2).

$$y - 4 = \frac{(2-4)}{(-5-3)}(x - 3)$$

$$4y - 16 = x - 3$$

$$x - 4y + 13 = 0$$



ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA

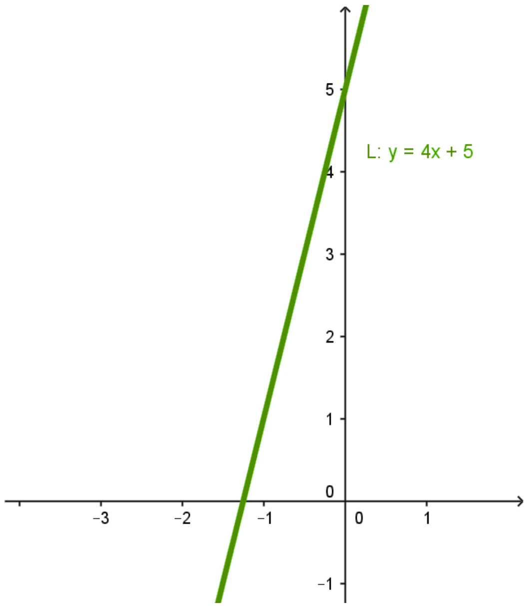
Ecuación pendiente dada y ordenada al origen. Considera un recta que pasa por los puntos A(x, y) y B(0,b), como se muestra en la figura.

Pendiente $m = \frac{(b-y)}{(0-x)}$

Despejando y ordenando obtenemos: $y = mx + b$

Ejemplo: Hallar y graficar la ecuación de la recta que tiene pendiente $\mathrm{m} = 4$ y $b = 5$

$y = 4x + 5$



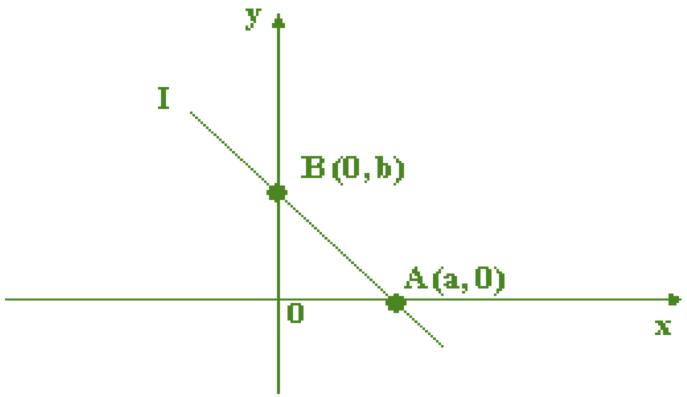
ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA

Ecuación de la recta en forma simétrica. La siguiente figura ilustra una recta que pasa por los puntos A(a,0) y B(0,b); (Intercepción en x es a ≠ 0 e Intercepción en y es b ≠ 0)

Donde $m = \frac{(b-0)}{(0-a)}$, $m = \frac{-b}{a}$;

Al sustituir m en la ecuación de la recta en su forma ordenada al origen $y = mx + b$, tenemos: $y = \frac{-b}{a}x + b$;

$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$ es la ecuación simétrica de la recta.



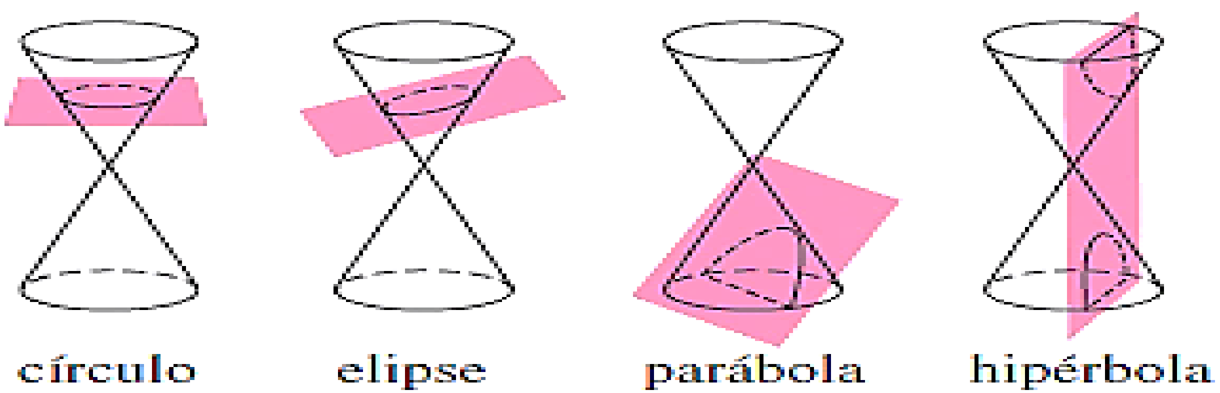
ECUACIONES CARTESIANAS DE LAS CÓNICAS

La gráfica de una ecuación cuadrática en **x** o **y**, que se puede representar como caso especial de la ***ecuación general*** siguiente:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

En la cual los coeficientes **A**, **B** y **C no** son todos **cero**.

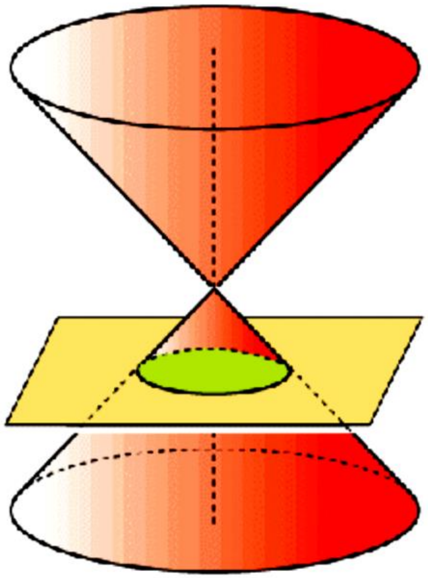
Estas cuatro curvas son: la ***circunferencia***, la ***parábola***, la ***elipse*** y la ***hipérbola***, llamadas **CÓNICAS** debido a que se pueden describir como las curvas que se generan al intersectarse un plano con un cono circular.

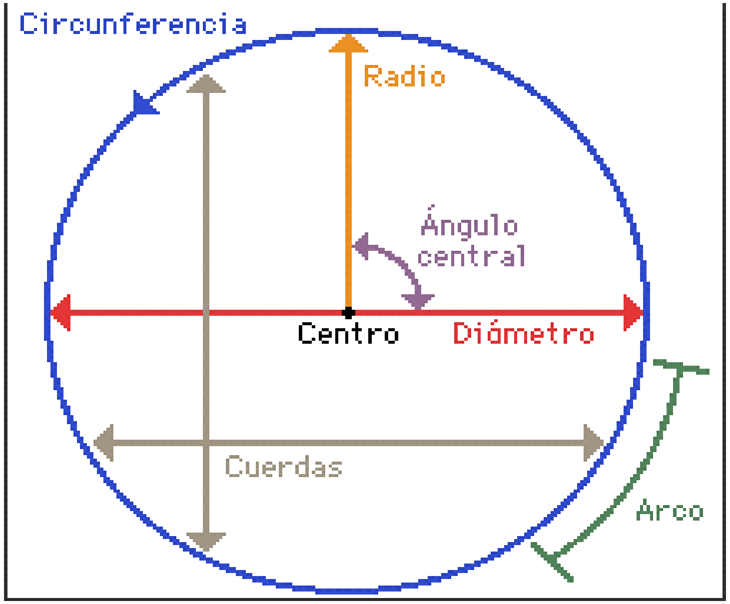


CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo llamado centro en una cantidad constante llamada radio.

Cónica que se obtiene cuando el plano secante es perpendicular al eje de la superficie cónica, corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice.





ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

La ecuación de la circunferencia de centro (h, k) y radio r en forma REDUCIDA es:

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2=0}$$

La ecuación de la circunferencia en forma DESARROLLADA es:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Que es la **forma general** de la ecuación de la circunferencia

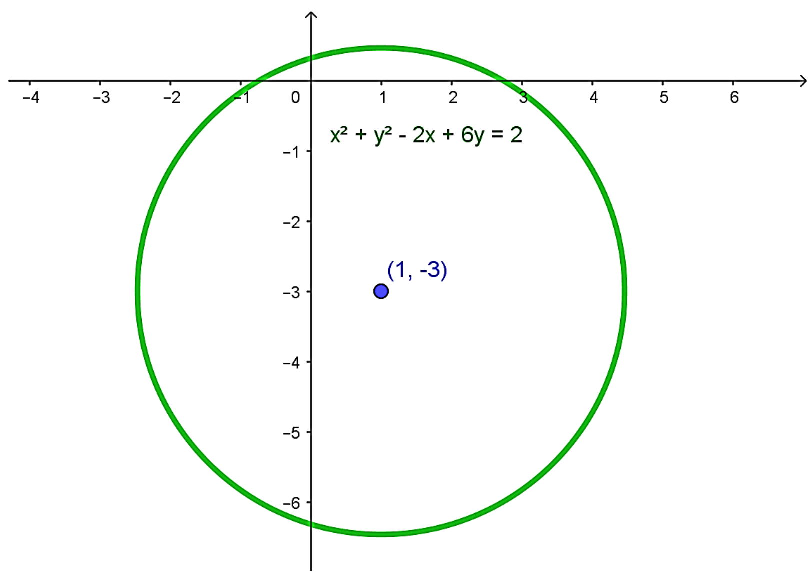
ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

La **forma general** de la ecuación de la circunferencia es:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

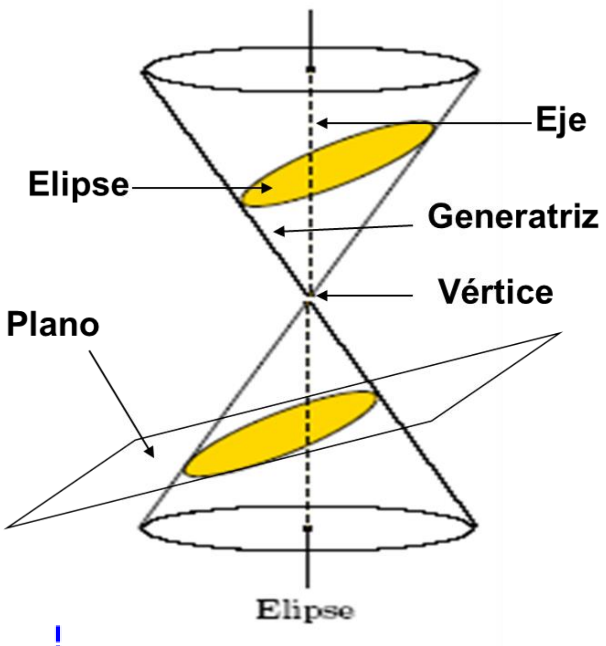
Centro: $(h, k) = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y Radio: $r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$

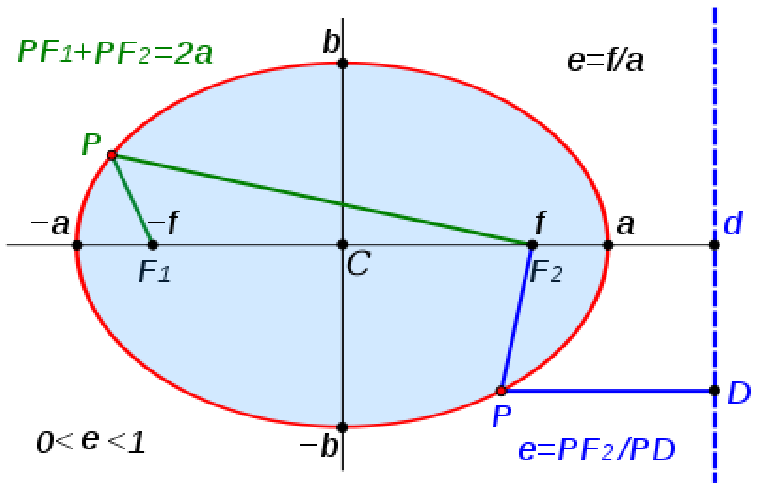
Ejemplo: Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2 = 0$. Trazar la circunferencia.



ECUACIONES CARTESIANAS DE LA ELIPSE

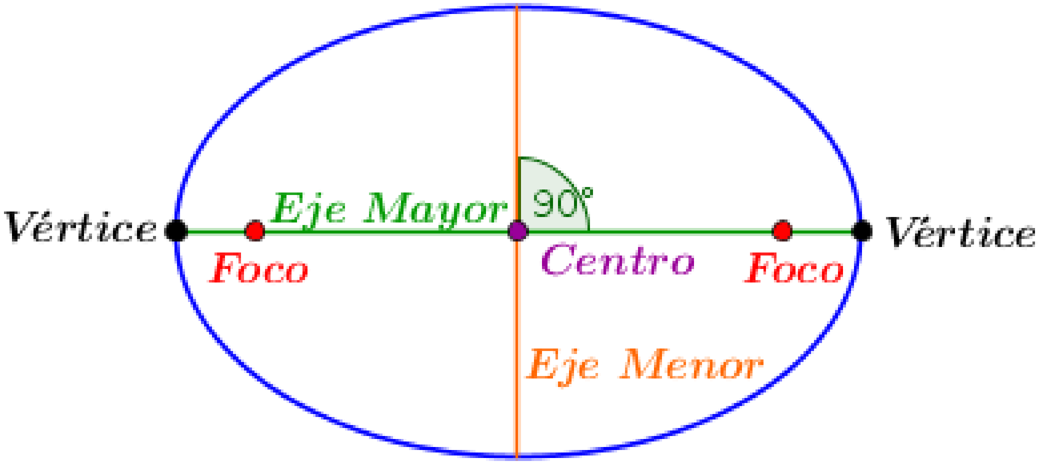
La elipse, se origina al cortar un cono con un plano que no pase por el vértice del cono y cuyo ángulo de inclinación respecto al eje del cono es mayor que el de la generatriz del cono.





ELEMENTOS DE LA ELIPSE

Focos. Los puntos F_1 y F_2.
Centro. El punto medio de F_1 y F_2.
Los vértices V_1 y V_2. Los puntos de intersección de la elipse con su eje principal.
Eje mayor. el segmento entre los vértices.
Eje menor. Los extremos están B_1 y B_2.
Distancia Focal: Es la distancia entre los focos "F_1" y "F_2"
Lado recto: Es la cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por cada foco, donde $LR = \frac{2b^2}{a}$
Excentricidad: Se representa con la letra "*e*" y es la relación entre la distancia focal (2c) y eje mayor (2a).

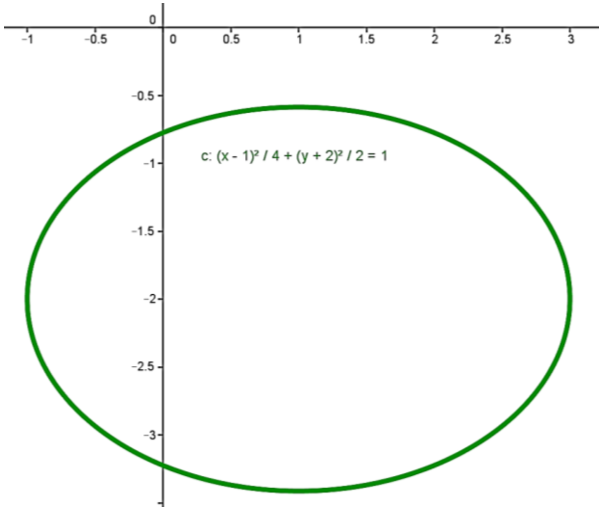


ECUACIONES CARTESIANAS DE LA ELIPSE

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una elipse, si los coeficientes A y C son diferentes y del mismo signo.

Donde: $A=b^2$; $C=a^2$; $D=-2b^2h$; $E=-2a^2k$ y $F= b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

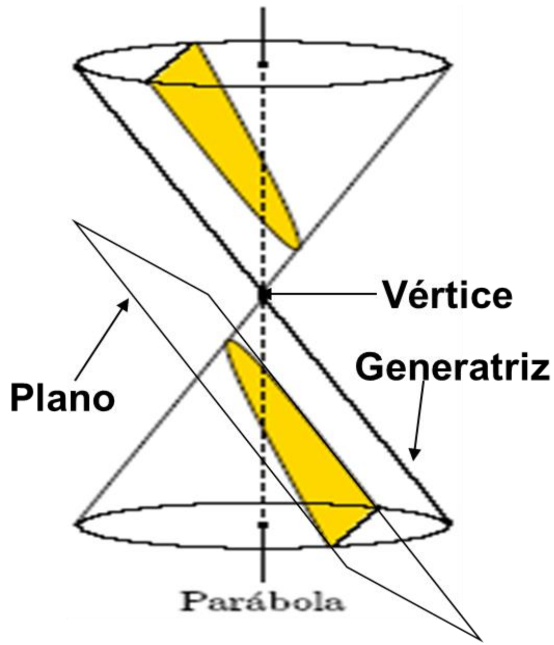
Ejemplo: Represente gráficamente y determine las coordenadas de los focos y de los vértices de la siguiente elipse $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$

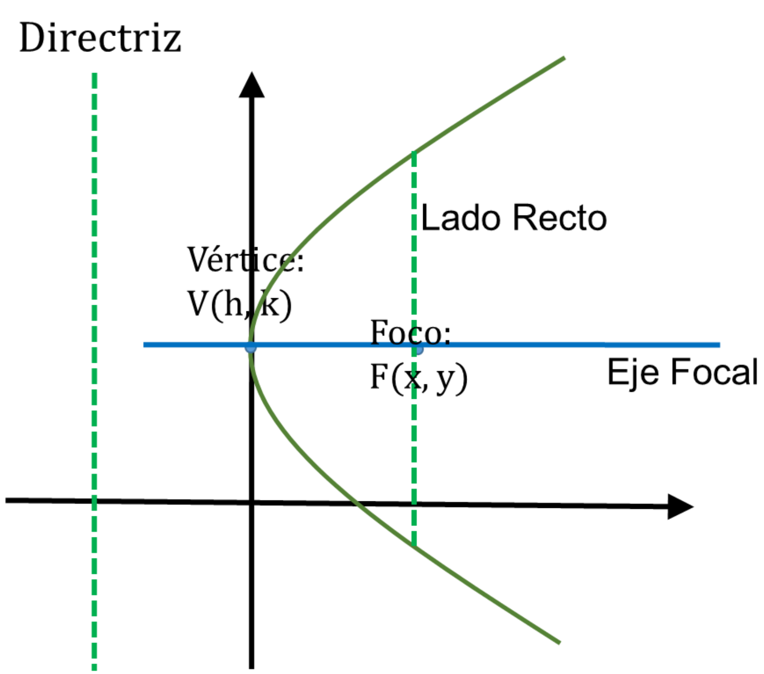


ECUACIONES CARTESIANAS DE LA PARÁBOLA

LA PARÁBOLA. Es el conjunto de todos los puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo y de una recta fija en el plano. El punto fijo se llama foco y la recta fija, directriz.

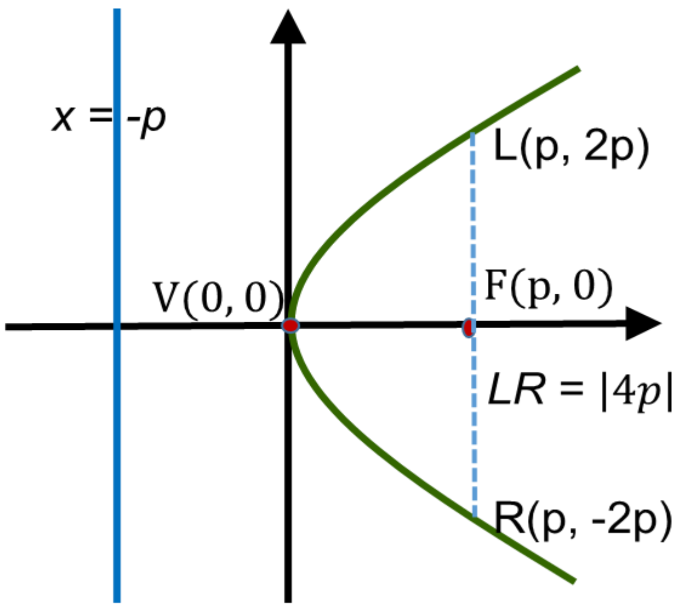
Una parábola se forma al cortar el cono con un plano que no pase por el vértice y sea paralelo a una generatriz.





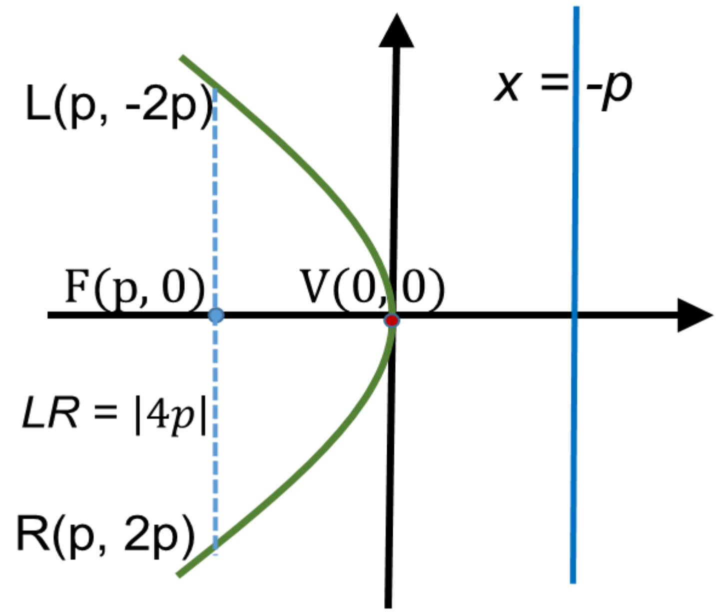
ECUACIONES CARTESIANAS DE LA PARÁBOLA

$y^2 = 4px \quad si \ p > 0$



Abre a la **derecha**
Vértice: V(0, 0)
Foco: *F(p, 0)*
Directriz: *x = -p*
Lado recto: LR=4p

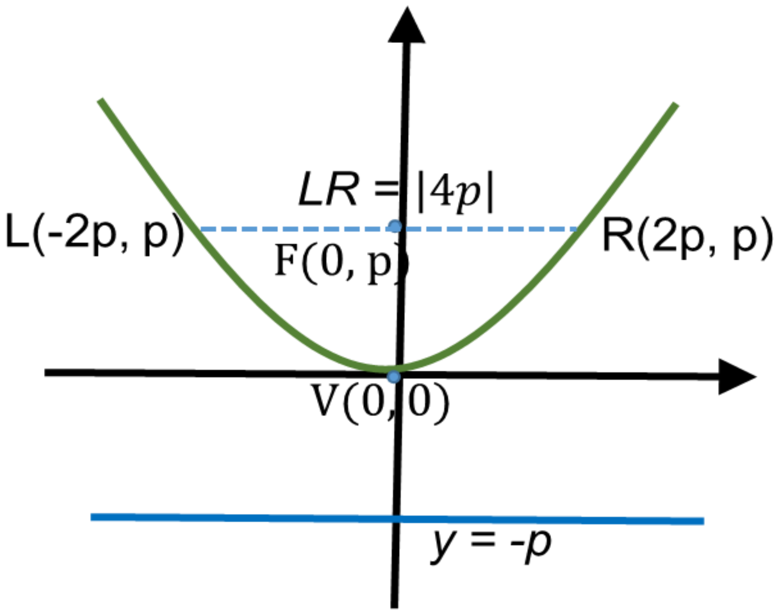
$y^2 = 4px$ **si p < 0**



Abre a la **izquierda**
Vértice: V(0, 0)
Foco: F(p, 0)
Directriz: *x = -p*
Lado recto: LR=4p

ECUACIONES CARTESIANAS DE LA PARÁBOLA

$$x^2 = 4py \quad si \quad p > 0$$



Abre hacia **arriba**

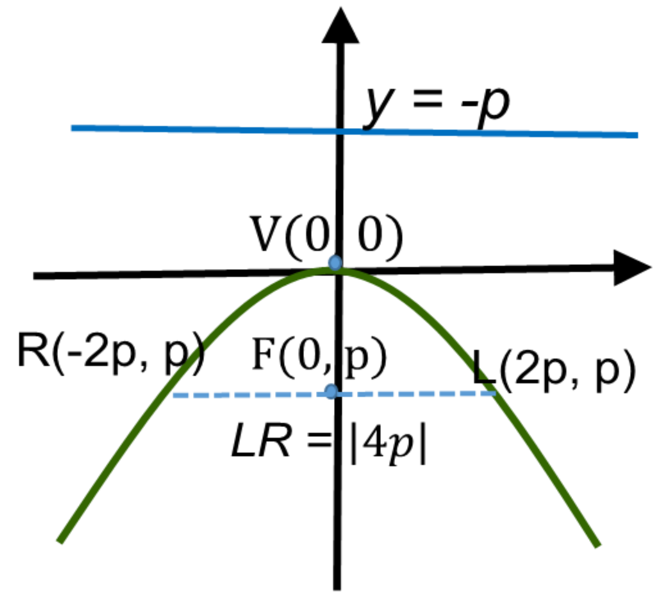
Vértice: **V(0, 0)**

Foco: **(0, p)**

Directriz: **y = – p**

Lado Recto: LR=4p

$$x^2 = 4py \quad si \quad p > 0$$



Abre hacia **abajo**

Vértice: **V(0, 0)**

Foco: **(0, p)**

Directriz: **y = – p**

Lado Recto: LR=4p

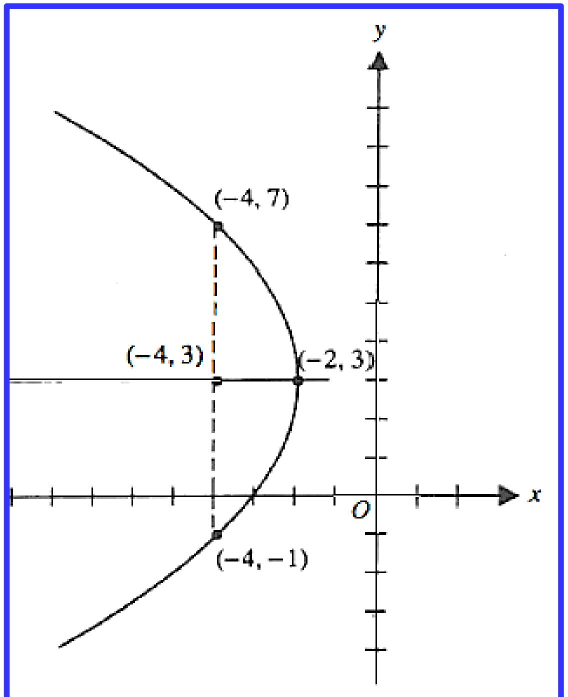
ECUACIONES CARTESIANAS DE LA PARÁBOLA

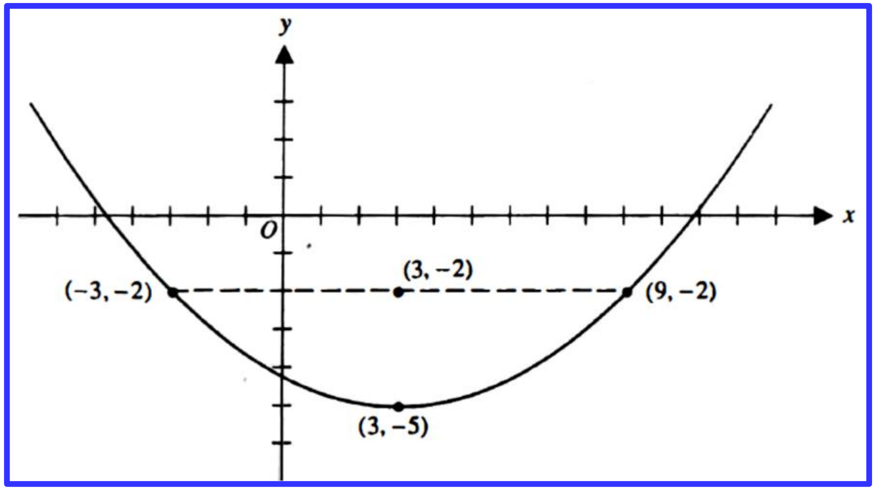
Si su eje focal es paralelo al eje X: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ejemplo: $y^2 + 8x - 6y + 25 = O.$

Si su eje focal es paralelo al eje Y: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$

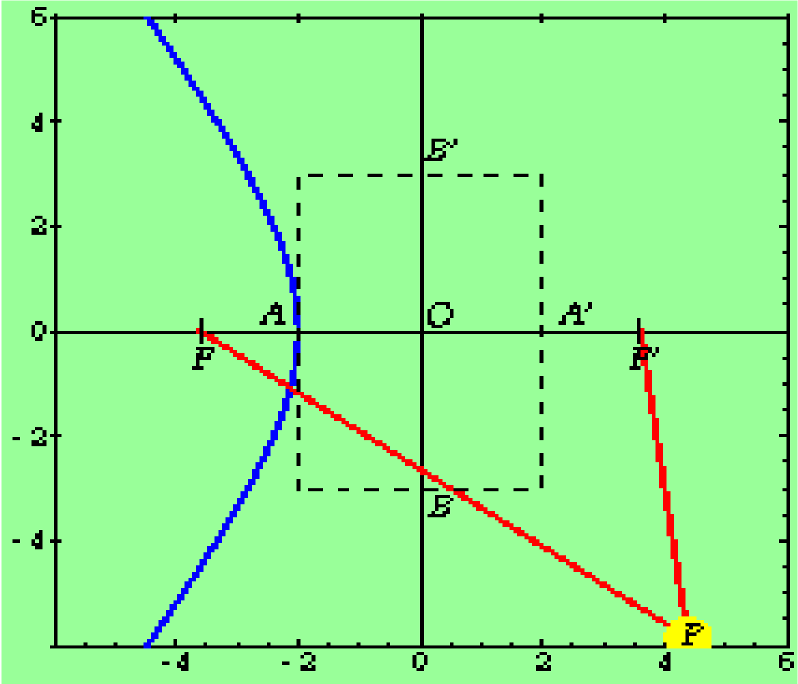
Ejemplo: $X^2 - 6x - 12y - 51 = O.$

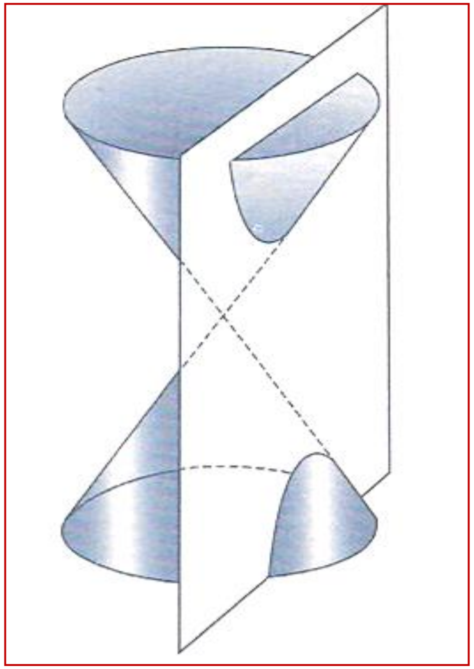




ECUACIONES CARTESIANA DE HIPÉRBOLA

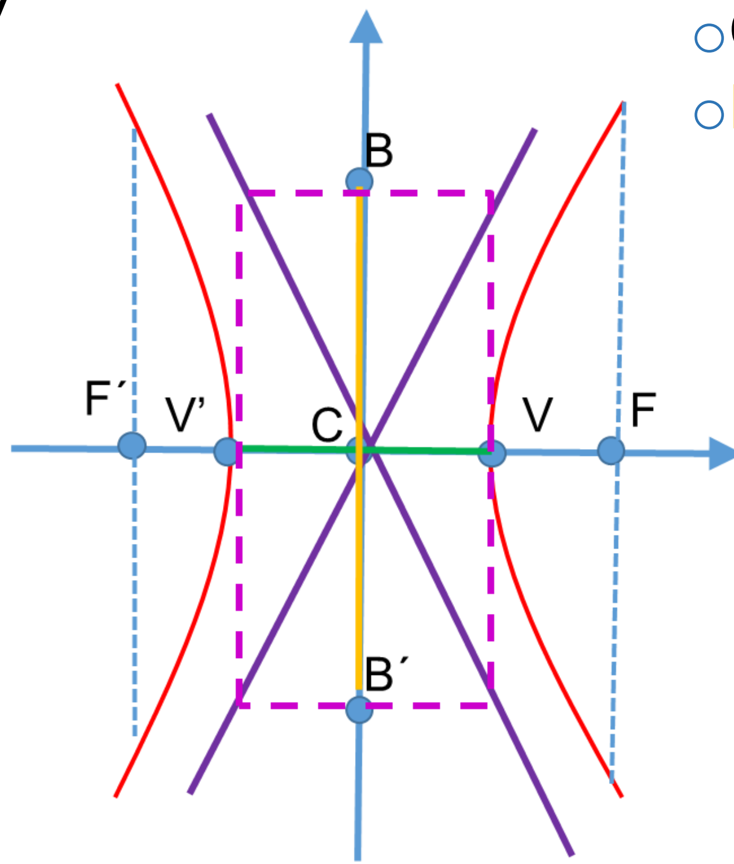
La hipérbola. Lugar geométrico de todos los puntos contenidos en un plano, que tienen la propiedad de que la diferencia entre las distancias de los focos a un punto es constante, y se representa por 2a.





ECUACIONES CARTESIANAS DE HIPÉRBOLA

- Focos: F y F´
- Vértices: V y V´
- Eje transversal: VV´
- Centro: C
- Eje conjugado: BB´



- Asíntotas
- Rectángulo fundamental
- Lados Rectos: LR y L´R´.

ECUACIONES CARTESIANAS DE LA HIPÉRBOLA

La Forma General es:

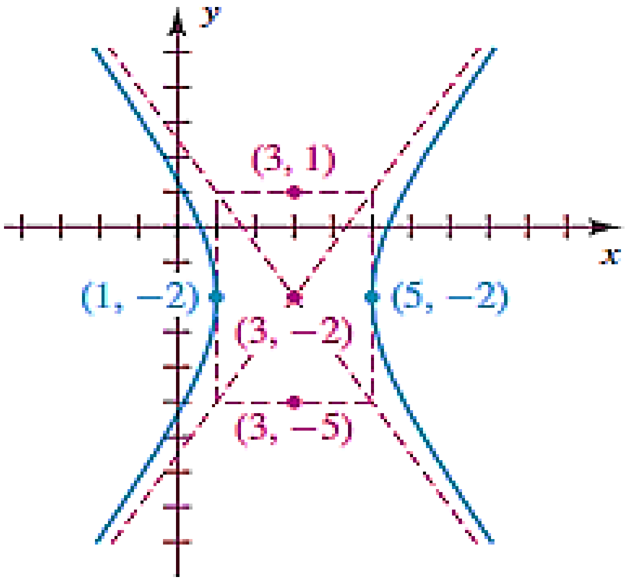
1. Horizontal. $\mathbf{A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \mathbf{- C}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} \mathbf{+ D}\boldsymbol{x} \mathbf{+ E}\boldsymbol{y} \mathbf{+ F = 0}$

Con $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = 2a^2k$ y $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

2. Vertical. $-\mathbf{A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \mathbf{+ C}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} \mathbf{+ D}\boldsymbol{x} \mathbf{+ E}\boldsymbol{y} \mathbf{+ F = 0}$

Con $A = a^2$, $C = b^2$, $D = 2a^2h$, $E = -2b^2k$ y $F = -a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$

Trace la gráfica de la $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$.



ECUACIONES CARTESIANAS DE LAS CÓNICAS

Tipo	*Ecuación*	*Gráfica*	*Centro*	*Vértices*	*Focos*
(1) $r > 0$	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Circunferencia	(h, k)	—	—
$a > b > 0$	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Elipse	(h, k)	$(h \pm a, k)$	$(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$
	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	Elipse	(h, k)	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm \sqrt{a^2 - b^2})$
(2)	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	Parábola	—	(h, k)	$(h, k+p)$
$p \neq 0$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	Parábola	—	(h, k)	$(h+p, k)$
(3) $a > 0$	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Hipérbola	(h, k)	$(h \pm a, k)$	$(h \pm \sqrt{a^2 + b^2}, k)$
$b > 0$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	Hipérbola	(h, k)	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm \sqrt{a^2 + b^2})$

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

La ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, $c \in R$ y $a \neq 0$ es una ecuación de segundo grado; al término ax^2 se le llama cuadrático, a bx lineal, c es el término independiente.

- Ecuaciones de segundo grado
  - Completas
    - $x^2 + bx + c = 0$
  - Incompletas
    - Mixtas
      - $x^2 + bx = 0$
    - Puras
      - $x^2 + c = 0$

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones, también se denominan raíces.

Existen diferentes métodos para encontrar la solución, los más comunes son:

a) Fórmula general: $\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

b) Factorización. Se buscan dos números que multiplicados den (*ac*) y sumados (*b*); se sustituye *b* por la suma de estos números en la expresión y se factoriza por agrupación.

Ejemplo: Resolver $4x^2 - 7x - 15 = 0$;

Los dos números multiplicados deben dar -60 y la suma -7

Entonces $4x^2 + (-12 + 5)x - 15 = 0$; $4x^2 - 12x + 5x - 15 = 0$;

$4x(x-3) + 5(x-3) = 0$; $(4x+5)(x-3) = 0$; $x = -\frac{5}{4}$; $x = 3$

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

c) Completando cuadrados.

1) Reescriba la ecuación con la constante en el lado derecho de la ecuación.

2) Sumar en ambos lados de la ecuación un medio del coeficiente numérico del término de primer grado elevado al cuadrado.

3) Reemplace el trinomio con su binomio elevado al cuadrado equivalente.

4) Utilice la propiedad de la raíz cuadrada.

5) Despeje la variable.

Ejemplo: Resolver $x^2 + 6x + 5 = 0;$

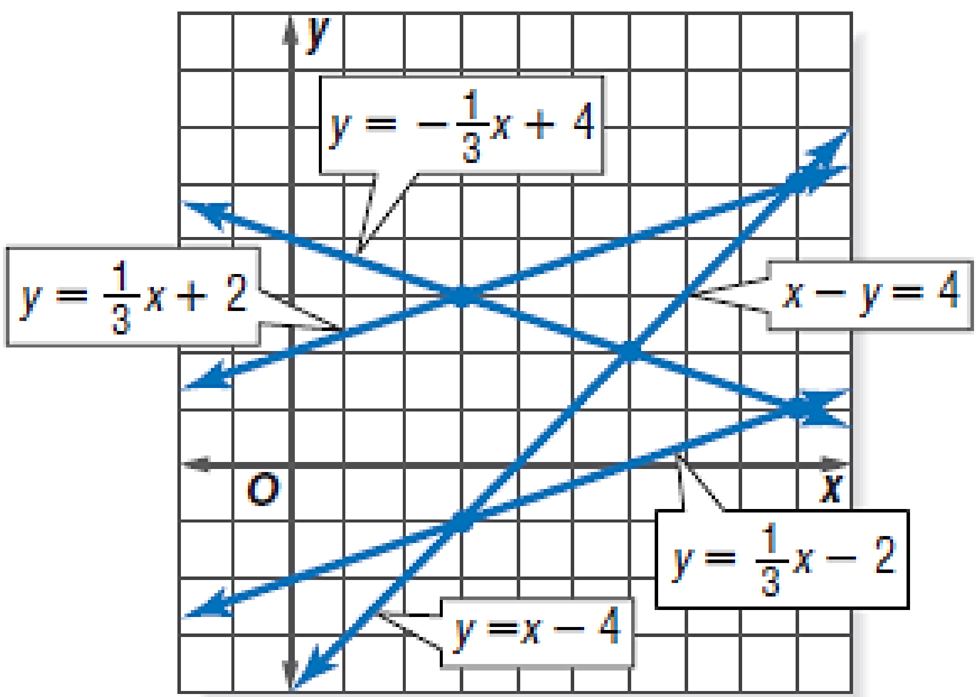
Entonces $x^2 + 6x + \quad = -5;$ $\quad x^2 + 6x + (\frac{6}{2})^2 = -5 + (\frac{6}{2})^2;$

$x^2 + 6x + 3^2 = -5 + 3^2;$ $\quad x^2 + 6x + 3^2 = -5 + 9;$ $\quad (x+3)^2 = 4;$

$(x+3) = \pm\sqrt{4};$ $\quad x + 3 = \pm\sqrt{4};$ $\quad x = -3 \pm 2;$ $\quad x = -1;$ $\quad x = -5$

INTERSECCIONES ENTRE RECTAS

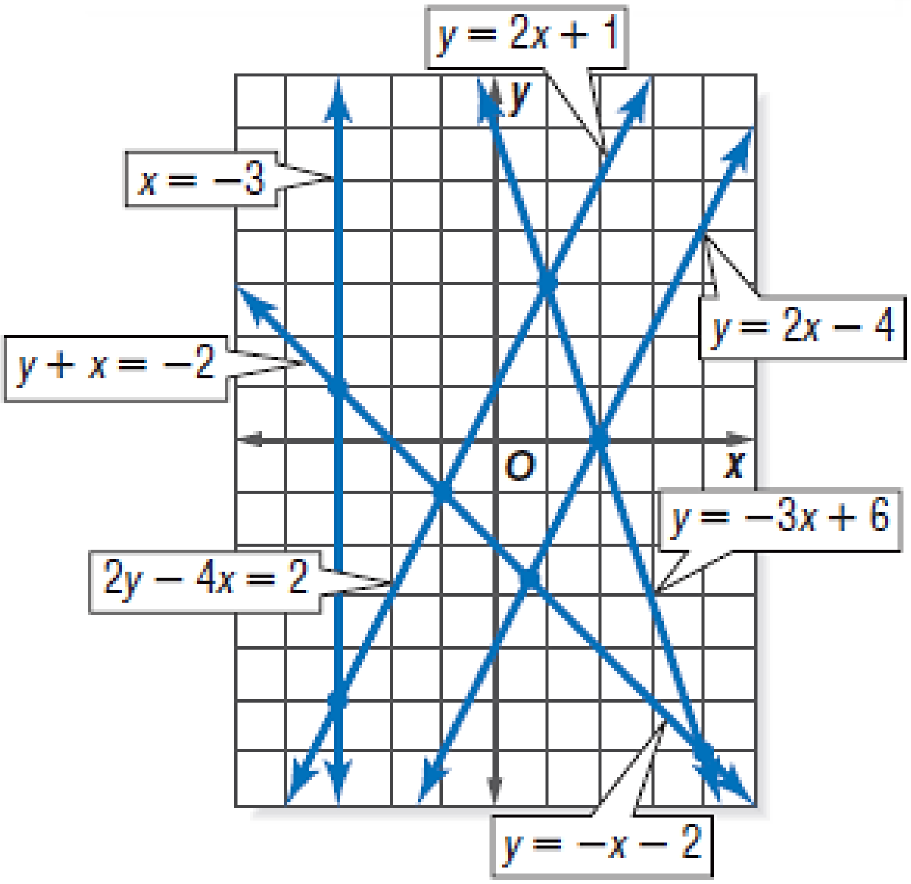
Un sistema de dos ecuaciones lineales puede tener 0, 1 o un número infinito de soluciones. La solución de un sistema de ecuaciones es un par ordenado de números que satisface ambas ecuaciones y se encuentran resolviendo el sistema formado por las ecuaciones. Gráficamente representa el lugar donde se cortan.



INTERSECCIONES ENTRE RECTAS

Use la gráfica para determinar si cada sistema no tiene solución, una solución o infinitas soluciones.

1. $x = -3, \ y = 2x + 1$
2. $y + x = -2, y = -x - 2$
3. $y = -3x + 6, \ y = 2x - 4$
4. $2y - 4x = 2, \ y = -3 + 6x$
5. $y = -x - 2, \ y = 2x - 4$
6. $y = 2x + 1, \ y = 2x - 4$
7. $2y - 4x = 2, \ y = 2x - 4$
8. $2y - 4x = 2, \ y = 2x + 1$

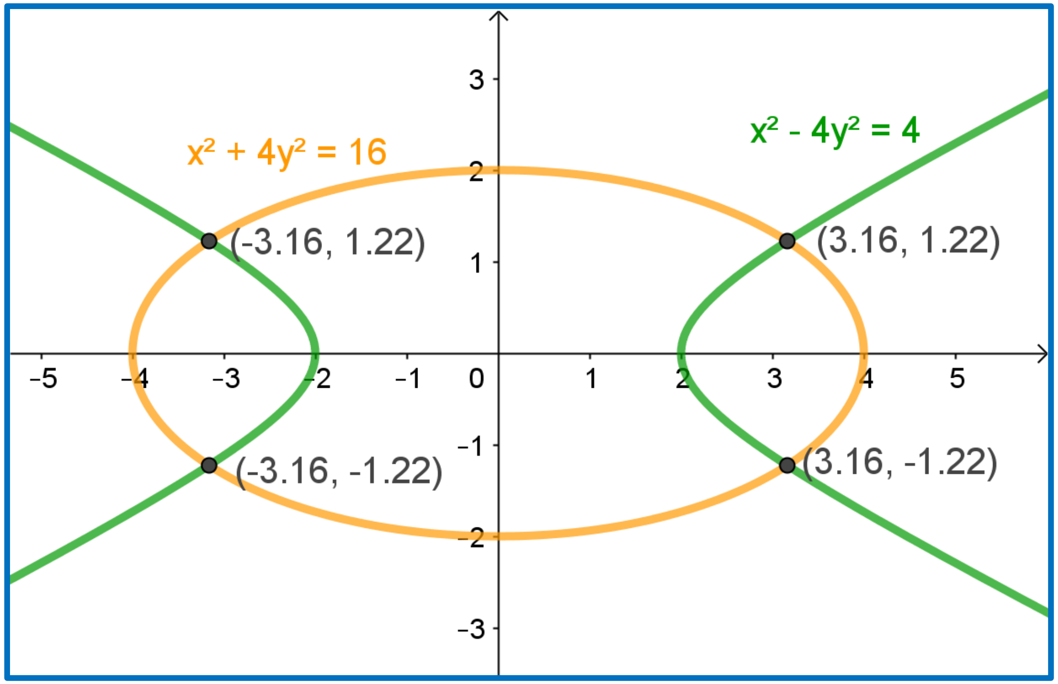


INTERSECCIONES ENTRE CÓNICAS.

Para hallar los puntos de intersección de dos cónicas se procede de manera similar a como se resuelve un sistema de ecuaciones lineales. Se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones.

Ejemplo: Resolver el sistema formado por las ecuaciones $x^2 + 4y^2 = 16$ y $x^2 - 4y^2 = 4$;

$$x^2 + 4y^2 = 16$$
$$\underline{x^2 - 4y^2 = 4}$$
$$2x^2 = 20$$
$$x = \pm\sqrt{10}$$
$$\left(\pm\sqrt{10}\right)^2 + 4y^2 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{6}{4}}$$



INTERSECCIONES ENTRE RECTA Y CÓNICA.

Para hallar los puntos comunes a una cónica y una recta, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de ambas.
Paso 1: Despejamos de la lineal.
Paso 2: sustituimos en la no lineal.

Calcule la posición relativa de la recta $3x + y - 5 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 -2x -3 = 0$

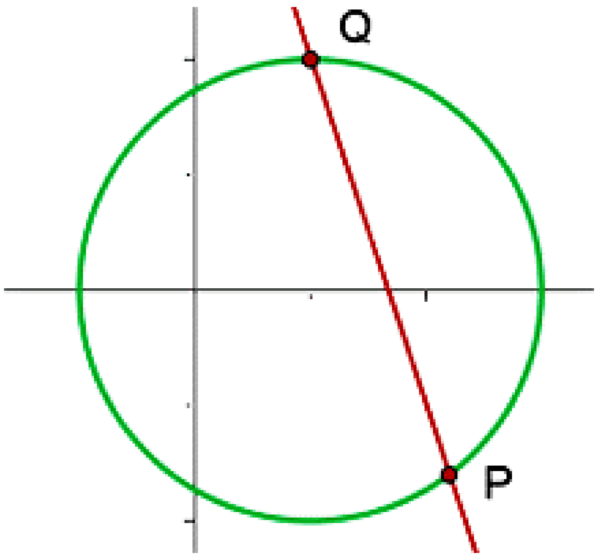
$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0; \quad y = 5 - 3x$

$x^2 + (5 - 3x)^2 - 2x - 3 = 0$

$5x^2 + - 16x + 11 = 0$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256-220}}{10} = \frac{16 \pm 6}{10}; \quad x_1 = \frac{11}{5} \quad x_2 = 1$$

$$P\left(\frac{11}{5}, -\frac{8}{5}\right) \quad y \quad Q(1,2)$$



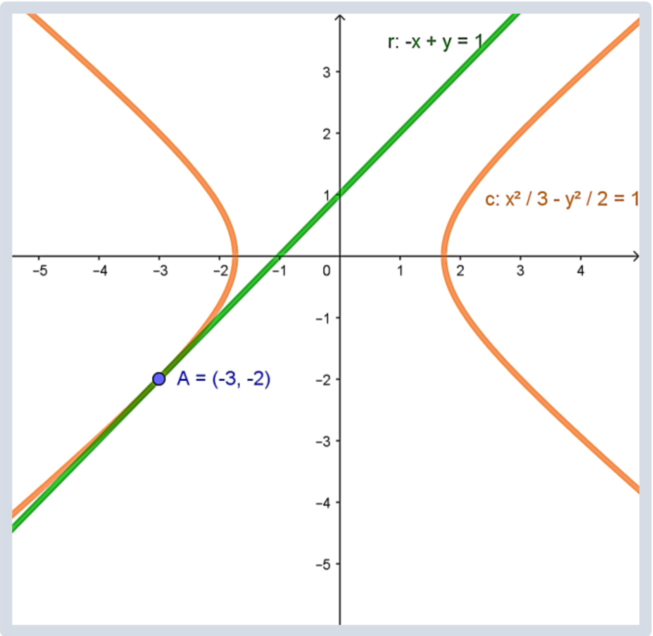
INTERSECCIONES ENTRE RECTA Y CÓNICA.

La ecuación de la tangente a la cónica general en el punto (x_1, y_1). Donde $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es

$$\boldsymbol{Ax_1x + \frac{B}{2}(x_1y + y_1x) + Cy_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0}$$

Encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto dado.

$2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$ en el punto P (-3, -2).



BIBLIOGAFIA

1. Arcos Ismael, Geometría analítica para estudiantes de ingeniería GECEI-FIUAEM México 2005

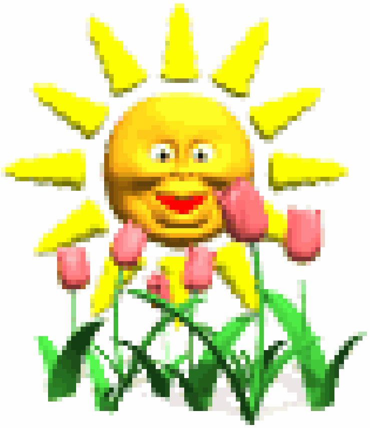
2.- Filloy, Hitt, Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

3.- Lehmann. Geometría Analítica. Limusa. México.

4.- Solis y Nolasco, Geometría Analítica, Editorial Limusa, México.

5. Menna Z. Geometría analítica del espacio, un enfoque vectorial LIMUSA México.

6. Wexler C. Geometría analítica, un enfoque vectorial Montaner y Simón, España.



FIN DE LA PRESENTACION