UAEM Universidad Autónoma del Estado de México

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: “POLINOMIOS”

M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: AGOSTO DE 2019

UNIDAD DE APRENDIZAJE

“ALGEBRA SUPERIOR”

UNIDAD DE COMPETENCIA V:

“FUNCIONES POLINOMIALES Y FRACCIONES PARCIALES”

5.1 Función polinomial
5.2 Grafica de un polinomio
5.3 Teoremas de polinomios.
5.4 División sintética
5.5 Naturaleza de las raíces
5.6 Raíces racionales
5.7 Raíces irracionales

OBJETIVOS

Objetivos de la Unidad de Aprendizaje. Analizar elementos de la teoría de números y del análisis matemático utilizando principios del cálculo combinatorio, funciones, relaciones y estructuras algebraicas para resolver problemas en ciencias de la ingeniería.

Objetivo de la Unidad de Competencia. Calcular las raíces de un polinomio, mediante diversos métodos, para establecer una relación entre la solución algebraica y la representación geométrica.

JUSTIFICACIÓN

El presente material sirve de apoyo a la Quinta Unidad de competencia “Polinomios” de la Unidad de Aprendizaje Álgebra Superior que se imparte en el Primer período de la Licenciatura en Ingeniero en Computación.

Se expone el contenido temático y se plantean algunos ejemplos lo que ayuda a abordar de forma más sencilla los ejercicios que se desarrollan posteriormente para reafirmar los conocimientos.

DEFINICIÓN DE POLINOMIOS

Polinomios. La expresión $2x^3 + 6x^2 + 3$ es un polinomio, y si escribimos $P(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3$, tenemos una función polinomial. La función polinomial es la expresión utilizada para describir la función de un polinomio. Por lo general, los polinomios se escriben en orden descendente respecto de alguna variable.

$5x + 4x^2 - 6 = 4x^2 + 5x – 6$

$xy - 6x^2 + 8y^2 = -6x^2 + xy + 8y^2$

$4x^3 + 6x^2 + 2x + 7$

DEFINICIÓN DE POLINOMIOS: Ejemplo

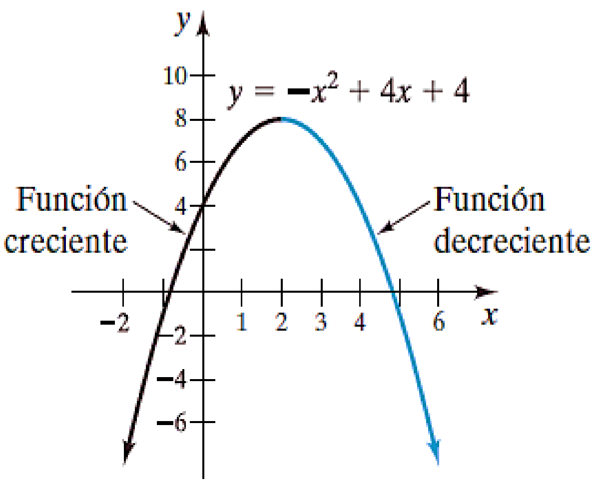
Número de términos, el grado y el término principal de polinomios.

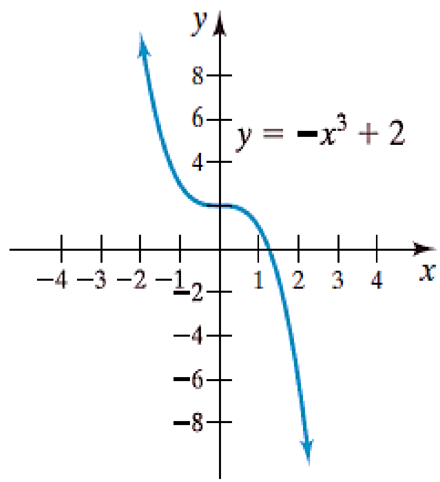
Tipo de polinomio	Ejemplos
Monomio	$4x^2,\ 6x^2y,\ 3,\ -2xyz^5,\ 7$
Binomio	$x^2+1,\ 2x^2-y,\ 6x^3-5y^2$
Trinomio	$x^3+6x-8,\ x^2y-9x+y^2$

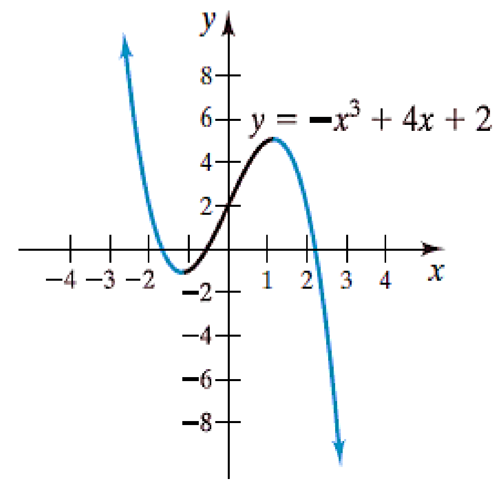
Polinomio	Número de términos	Grado del polinomio	Término principal
a) $2x^5-3x^2+6x-9$	4	5 (de $2x^5$)	$2x^5$
b) $8x^2y^4-6xy^3+3xy^2z^4$	3	7 (de $3xy^2z^4$)	$3xy^2z^4$

GRÁFICA DE POLINOMIOS

En general, para graficar una función polinomial f de grado n ≤ 3 se necesita el cálculo, o bien usar una herramienta graficadora.







OPERACIONES CON POLINOMIOS: SUMA Y RESTA

Sumar y restar polinomios. Para sumar o restar polinomios, primero quitamos los paréntesis (si los hay), agrupamos términos y después reducimos los términos semejantes. Ejemplo.

Sumar $(4x^2 - 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1)$.

$(4x^2 - 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1)$

$4x^2 - 6x + 3 + 2x^2 + 5x - 1$ Eliminar paréntesis

$4x^2 + 2x^2 - 6x + 5x + 3 - 1$ Agrupar términos

$6x^2$ $-x$ $+2$ Reducir términos semejantes

ANIMACIÓN

OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN

Multiplicación de polinomios. Cada término de un polinomio debe multiplicarse por cada término del otro. Esto es, se multiplican cada término del multiplicando por cada término del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos y exponentes. Después se reducen términos semejantes.

Ejemplo: multiplicar $x^2 - x + 1$ y $x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{l}
\underline{(x^2 - x + 1)\ \ (x^2 + x + 1)} \\
x^4 - x^3 + x^2) \\
\qquad x^3 - x^2 + x \\
\underline{\qquad\qquad x^2 - x + 1} \\
x^4 \qquad + x^2 \qquad + 1
\end{array}
$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN

Ejemplo: multiplicar $x^2 - 4x + 1$ y $2x^2 - 3$

$$
\begin{array}{r}
x^2 - 4x + 1 \\
\underline{2x^2 - 3} \\
2x^4 - 8x^3 + 2x^2 \qquad\qquad \\
\underline{- 3x^2 + 12x - 3} \\
2x^4 - 8x^3 - x^2 + 12x - 3
\end{array}
$$

Ejercicios.

1. $3x^2 + 6xy - 5y^2$ por $x + 4y$.
2. $X^3 + 2x^2 - x$ por $x^2 - 2x + 5$
3. $2 - 3x^2 + x^4$ por $x^2 - 2x - 1$

ANIMACIÓN

OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN

Procedimiento:

1. Se ordenan el dividendo y el divisor según las potencias descendentes de una misma literal.
2. Se busca un número que multiplicado por el divisor sea igual al primer término del dividendo, el resultado es el primer término del cociente, multiplicar, restar.
3. El residuo obtenido en 2 se toma como nuevo dividendo y se repite 2. Y continuar hasta que en el dividendo no haya términos igual al del divisor. Ejemplo:

Ejemplo: $\boldsymbol{x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \div x^2 + 3x - 2}$

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \,\underline{\big|\, x^2 + 3x - 2}$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN

Continuación…

$$\cancel{x^4} - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \;\Big|\; \underline{x^2 + 3x - 2}$$

$$\underline{-\cancel{x^4} - 3x^3 + 2x^2} \qquad\qquad x^2 - 5x + 6$$

$$-\cancel{5x^3} - 9x^2 + 30x - 20$$

$$\underline{\cancel{5x^3} + 15x^2 - 10x}$$

$$\cancel{6x^2} + 20x - 20$$

$$\underline{-\cancel{6x^2} - 18x + 12}$$

$$2x - 8$$

TEOREMA DEL FACTOR

Teorema del factor. Si el residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x - a)$ es 0. Esto es, un polinomio entero en x que se anula para $x = a$, o sea, sustituyendo el valor de a en el polinomio. Entonces se dice que $x = a$ es una raíz o cero del polinomio.

Se cumple que: $P(x) = (x – a).C(x)$

Siendo $C(x)$ el cociente que nos haya dado la división y $(x – a)$ será un factor de $P(x)$.

TEOREMA DEL FACTOR: Ejercicios

Ejemplo. Demostrar que $x - 2$ es un factor del polinomio $x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

$f(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 3(2) + 2 = 0$

$$\boldsymbol{x^3 - 4x^2 + 3x + 2 \ \div \ x - 2}$$

Ejemplo. Demostrar que para la función polinomial $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$, el número complejo $1 + i$ es una de sus raíces.

TEOREMA DEL RESIDUO O RESTO

TEOREMA DEL RESIDUO. Si un polinomio f (x) se divide entre un polinomio lineal x = a, el residuo r es el valor de f(x) en x = a esto es, f(a) = r. Es el valor del polinomio al sustituir la variable x por el valor de a. Si el binomio es de la forma (x + a) , sustituiremos la x por - a.

Calcular r cuando $f(x) = 4x^3 - x^2 + 4$ se divide entre $x - 2$.

$r = f(2) = 4(2)^3 - (2)^2 + 4 = 32.$

TEOREMA DEL RESIDUO O RESTO

Ejemplo. Dividir $3x^3 – 2x^2 - 18x – 1$ entre $x + 2$

Según el teorema:

$3(-2)^3 – 2(-2)^2 – 18(-2) – 1$

$- 24 - 8 + 36 – 1 = 3$

3 es el residuo de la división

Ejemplo. Hallar el residuo de la siguiente división

$x^3 – 7x^2 + 17x – 6$ entre $x – 3$

DIVISION SINTETICA O REGLA DE RUFFINI

División Sintética. Se utiliza cuando se trate de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x – a)$.

Procedimiento:

1. Se ordena el dividendo forma decreciente. Si es incompleto, poner ceros.
2. Se colocan en fila los coeficientes del dividendo y se coloca a la izquierda el valor del número a.
3. Se aplicar el algoritmo correspondiente de Ruffini.
4. Los números obtenidos son los coeficientes del cociente, salvo el último que es el residuo de la división.

ALGORITMO DE LA REGLA DE RUFFINI

1. Se colocan en la primera fila los coeficientes del dividendo.
2. Se escribe el coeficiente a_0 como primer término de la tercera fila y se multiplica por a, escribiendo el producto en la segunda fila debajo de a_1.
3. Se suma $a_1 + a_0a$ en la tercera fila. Se continua de esta manera hasta que se usa a_n como sumando.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

$$\begin{array}{c|cccccl}
 & a_0 & a_1 & a_2\ldots & a_{n-1} & a_n & \text{1ª fila} \\
 & & + & + & + & + & \\
a & & ab_0 & ab_1\ldots & ab_{n-2} & ab_{n-1} & \text{2ª fila} \\
\hline
 & a_0 = b_0 & b_1 & b_2\ldots & b_{n-1} & r & \text{3ª fila}
\end{array}$$

DIVISIÓN SINTÉTICA

Dividir un polinomio $2x^3 - 6x^2 - 4x + 12$ entre $x - 2$ aplicando la Regla de Ruffini

se suma

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -6 & -4 & 12 \\
2 & & 4 & -4 & -16 \\
\hline
 & 2 & -2 & -8 & \boxed{-4}
\end{array}
$$

r

se multiplica por 2

Por lo que:

$\mathbf{2x^3 - 6x^2 - 4x + 12 = (2x^2 - 2x - 8)\,(x - 2) + (-4)}$

DIVISIÓN SINTÉTICA

Comprobar si $x + 3$ es un factor del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 9$, aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -6 & -9 \\ -3 & & -3 & 3 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

se suma

se multiplica por -3

r

Por lo que:

$$\mathbf{x^3 + x^2 - 6x - 9} = (x^2 - x - 3)\,(x + 3)$$

ANIMACIÓN

DIVISIÓN SINTÉTICA Y DIVISION LARGA

Dividir $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ entre $x - 3$

$$
\begin{array}{r l}
 & \boldsymbol{x^2 + x - 1} \\
\boldsymbol{x - 3} & \overline{\big)\, \boldsymbol{x^3 - 2x^2 - 4x + 5}} \\
 & \underline{\boldsymbol{-(x^3 - 3x^2)}} \\
 & \qquad \boldsymbol{x^2 - 4x} \\
 & \qquad \underline{\boldsymbol{-(x^2 - 3x)}} \\
 & \qquad\qquad \boldsymbol{-x^2 + 5} \\
 & \qquad\qquad \underline{\boldsymbol{-(-x^2 + 3)}} \\
 & \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & -4 & 5 \\
3 & & 3 & 3 & -3 \\
\hline
 & 1 & 1 & -1 & 2
\end{array}
$$

Dividir $2x^3 - x^2 - 19x + 18$ entre $x - 3$

RAICES O CEROS DE POLINOMIOS

Raíces de un polinomio. Son los valores que lo hacen cero, es decir, las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

TEOREMA. r es raíz de $P(x)$ si y solo si $P(r) = 0$.

TEOREMA: "Un polinomio de grado n, tiene como máximo, n raíces reales".

Multiplicidad o raíz múltiple. r es raíz de multiplicidad m de $P(X)$ si existe un polinomio $Q(x)$ con $P(X) = (x-r)^m Q(x)$ y $Q(r) \neq 0$.
ejemplo:

$(x-3)^2 \; (x-1)^3 \; (x+5) = 0$; 3 tiene multiplicidad 2

RAICES O CEROS DE POLINOMIOS: Clasificación

TEOREMA. “Un número c es una raíz de una función polinomial f si, y sólo si, x - c es un factor de f(x)”.

- Reales
  - Racionales (Son aquellas representadas en forma de cociente)
    - Positivas
    - Cero
    - Negativas
  - Irracionales (No se pueden representar en forma de cociente)
    - Positivas
    - Negativas
- Complejas
  - De la forma $z = a + bi \neq 0$

RAICES ENTERAS DE POLINOMIOS

TEOREMA. "Si un polinomio tiene raíces enteras, éstas son divisores del término independiente".

EJEMPLO: Para $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

Las raíces del polinomio son: -2, -1, 1 y 3

ya que:

$(-2)^4 - (-2)^3 - 7(-2)^2 + (-2) + 6 = 0$

$16 + 8 - 28 - 2 + 6 = 0$

$(-1)^4 - (-1)^3 - 7(-1)^2 + (-1) + 6 = 0$

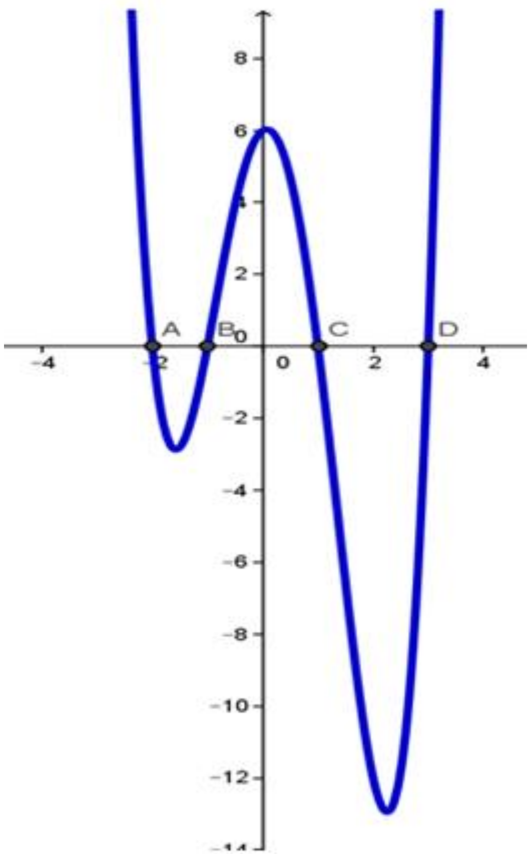
$1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$

$(1)^4 - (1)^3 - 7(1)^2 + (1) + 6 = 0$

$1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$

$(3)^4 - (3)^3 - 7(3)^2 + (3) + 6 = 0$

$81 - 27 - 63 + 3 + 6 = 0$



RAICES ENTERAS O CEROS DE POLINOMIOS

Ejemplo. Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Las posibles soluciones o raíces enteras son: {1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6} , o sea los divisores de 6

Aplicando el Teorema del Residuo en $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

$P(1) = 1^3 + 2.1^2 - 5.1 - 6 = -8 \rightarrow$ No es raíz x =1

$P(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 0 \rightarrow x = -1$ si es raíz.

$P(2) = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6 = 0 \rightarrow x = 2$ es otra raíz.

$P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2) - 6 = 4 \rightarrow$ No es raíz x=-2

$P(3) = 3^3 + 2.3^2 - 5.3 - 6 = 24 \rightarrow$ No es raíz

$P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 5(-3) - 6 = 0 \rightarrow x = -3$ es otra raíz

Las soluciones o raíces son: $x = -1$, $x = 2$ y $x = -3$

RAICES RACIONALES DE POLINOMIOS

TEOREMA DE GAUSS: Sea b/c una fracción racional irreductible que sea raíz de la ecuación de coeficientes enteros, entonces b es divisor de a_n (los numeradores deben de ser factores de a_n) y c lo es de a_0. (los denominadores factores de a_0).

Ejemplo: Para $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$

Numerador → factores de 4 = 1, 2, 4

Denominador → factores de 2 = 1, 2

Posibles raíces: ±1/2, ±1, ±2, ±4.

RAICES RACIONALES DE POLINOMIOS

Ejemplo: Para $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0$

Numerador → factores de 4 = 1, 2, 4

Denominador → factores de 2 = 1, 2

$\pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \pm 4.$

$f(-4) = 2(-4)^4 - (-4)^3 - 4(-4)^2 + 10(-4) - 4 = 468$

$f(-2) = 2(-2)^4 - (-2)^3 - 4(-2)^2 + 10(-2) - 4 = 0$

$f(1/2) = 2(1/2)^4 - (1/2)^3 - 4(1/2)^2 + 10(1/2) - 4 = 0$

1/2	2	-1	-4	10	-4
		1	0	-2	4
-2	2	0	-4	8	0
		-4	8	-8	
	2	-4	4	0	

$2x^2 - 4x + 4 = 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

NATURALEZA DE RAICES

Teorema 1. Si un número complejo $a+bi$ es una raíz de una ecuación racional entera f(x) = 0, de coeficientes reales, el complejo conjugado, $a-bi$ es también raíz de dicha ecuación.

Teorema 2. Si la ecuación racional entera f(x) = 0 de coeficientes racionales tiene raíz de la forma $a+\sqrt{b}$, siendo a y b racionales y $\sqrt{b}$ irracional, $a-\sqrt{b}$ es otra raíz de la ecuación.

Ejemplo.

$f(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Regla de los signos de Descartes. Si P(X) es un polinomio ordenado, con coeficientes reales y término independiente distinto de cero, entonces:

1. El número de ceros reales positivos de P(x), es igual al número de variaciones de signo en P(x) o es menor que ese número por un entero par.

2. El número de ceros reales negativos, es igual al número de variaciones de signo en P(-x) o es menor que ese número por un entero par.

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

$+ \quad - \quad - \quad + \quad +$ = Dos variaciones

"Tiene dos o cero raíces positivas"

$P(-x) = (-x)^4 – (-x)^3 – 7(-x)^2 + x + 6 = 0$

$+ \quad + \quad - \quad + \quad +$ = Dos variaciones

"Tiene dos o cero raíces negativas"

Positivas	Negativas	complejas
2	2	0
2	0	2
0	2	2
0	0	4

RAICES O CEROS DE POLINOMIOS

Teorema del valor medio. Si f (x) es un polinomio con coeficientes reales y si f (a) y f (b) difieren en signo, entonces existe al menos un valor c tal que f (c) = 0 entre x = a y x = b.

Ejemplo: $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$

f (-2) = -5; f (-1) = 6;

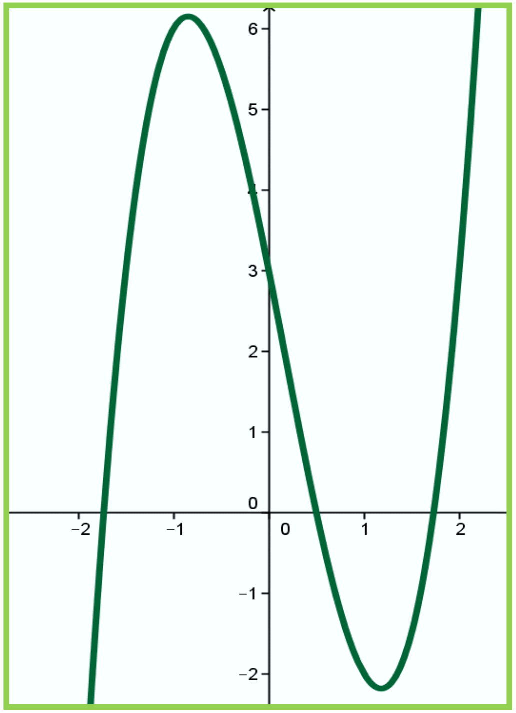
existe una raíz entre -2 y -1.

f (0) = 3; f (1) = -2;

existe una raíz entre 0 y 1.

f (1) = -2; f (2) = 3;

existe una raíz entre 1 y 2.



ANIMACIÓN

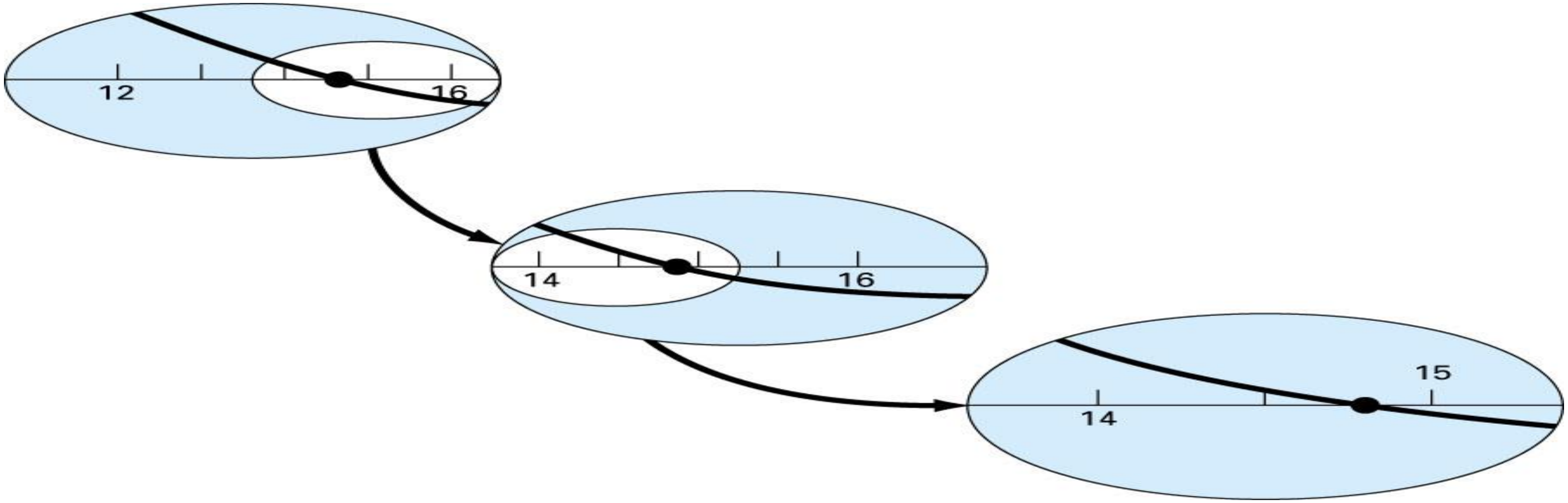
RAICES IRRACIONALES: MÉTODO DEL VALOR MEDIO

1) Buscamos un intervalo (a, b) tal que f(a) y f(b) tengan distinto signo.

2) Tomamos $c_1 = (a + b)/2$. Redefinimos $b = c_1$ o $a = c_1$. Según para el que se tenga distinto signo.

3) Tomamos $c_2 = (a + b)/2$. Redefinimos $b = c_2$ o $a = c_2$. Según para el que se tenga distinto signo.

4) Tomamos $c_3 = (a + b)/2$. Redefinimos… y así sucesivamente.



MÉTODO DEL VALOR MEDIO: Ejemplo

Aproximar las raíces del polinomio, en el intervalo (-2, 0).

$x^5-6x^4+9x^3+10x^2-36x+24=0$

f (-2) = -64; f (0) = 24, existe una raíz entre -2 y 0.

Se toma el valor medio del intervalo (-2, 0)

f (-1) = 54; El cambio de signo se da en (-2, -1)

Se toma el valor medio del intervalo (-2, -1)

f (-1.5) = 32.156 El cambio de signo se da en (-2, -1.5)

Se toma el valor medio del intervalo (-2, -1.5)

f (-1.75) = -3.2959 El cambio de signo se da en (-1.75, -1.5)

Se toma el valor medio del intervalo (-1.75, -1.5)

f (-1.625) = 17.119 El cambio de signo se da en (-1.75, -1.625)

Se toma el valor medio del intervalo (-1.75, -1.625)

f (-1.6875) = 7.6387 El cambio de signo se da en (-1.75, -1.6875)

f (-1.71875) =

……, ……, …… f (-1.7322) = -0.0016869

MÉTODO DEL VALOR MEDIO: Ejercicio

Ejemplo: $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$

$f(-2) = -5$; $f(-1) = 6$;

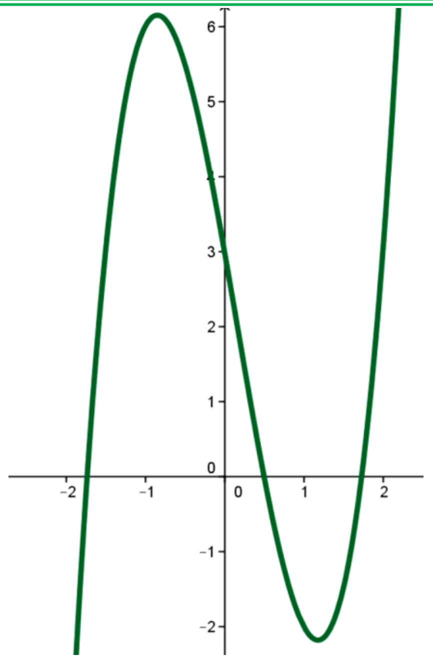
existe una raíz entre -2 y -1.

$f(0) = 3$; $f(1) = -2$;

existe una raíz entre 0 y 1.

$f(1) = -2$; $f(2) = 3$;

existe una raíz entre 1 y 2.

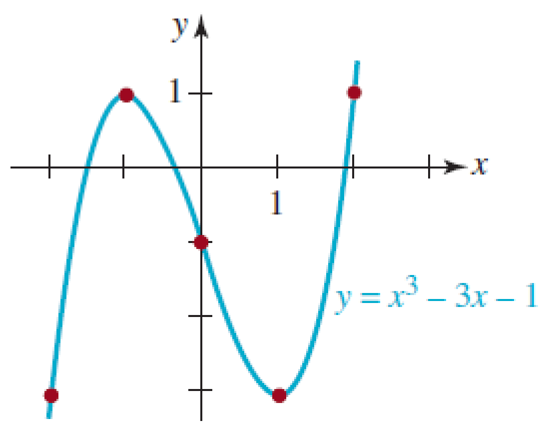


Considere la función polinomial

$f(x) = x^3 - 3x - 1$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	1	-1	-3	1

signos contrarios



RAICES DE POLINOMIOS: MÉTODO DE NEWTON

Método de Newton.

1. Consiste en elegir un punto inicial cualquiera P_o como aproximación de la raíz.
2. Obtener el valor de la función por ese punto y trazar una recta tangente a la función por ese punto.
3. El punto de intersección de esta recta con el eje de las abscisas (x_r, 0), constituye una segunda aproximación de la raíz.
4. El proceso se repite n veces hasta que el punto de intersección x_n coincide prácticamente con el valor exacto de la raíz.

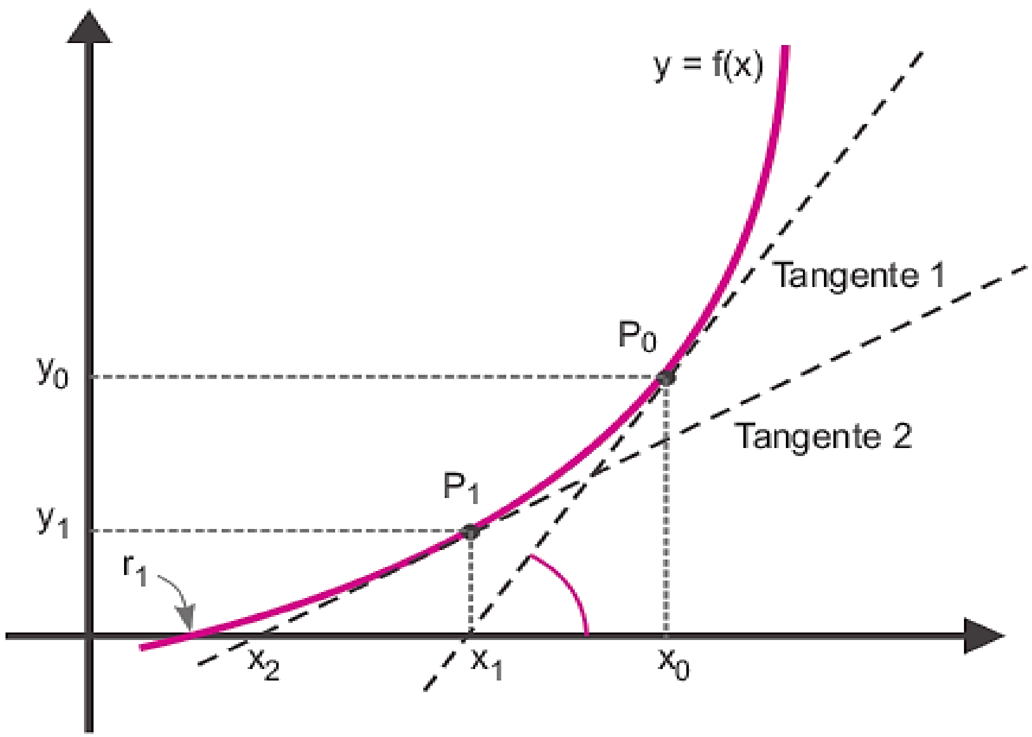
La raíz es el valor de x_{n+1} cuando $f(x_{n+1}) = 0$,

$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$, esto es la fórmula de Newton-Raphson.

RAICES DE POLINOMIOS: MÉTODO DE NEWTON

Para calcular la recta tangente se utiliza el desarrollo de Taylor de una función: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \ldots, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

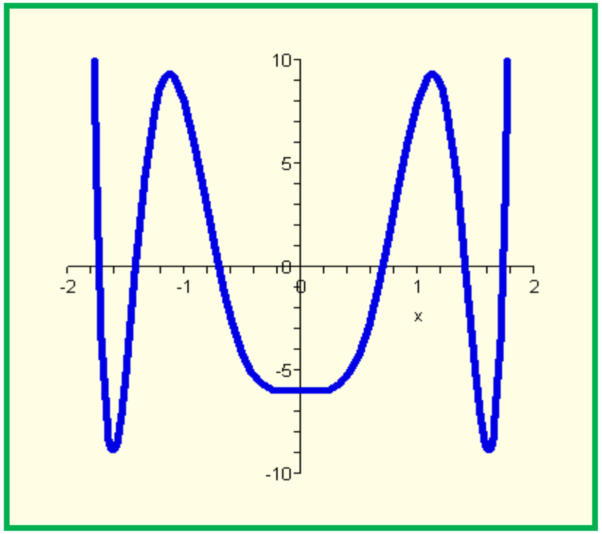
La raíz es el valor de $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$, es la fórmula de Newton-Raphson.



MÉTODO DE NEWTON: Ejemplo

Aproximar la raíz del polinomio $6x^8 – 31x^6 + 40x^4 – x^2 – 6$ que está en el intervalo [0,1].

La función de iteración f es: $\dfrac{42x^8 - 155x^6 + 120x^4 - x^2 + 6}{48x^7 - 186x^5 + 160x^3 - 2x}$



Para $a = 0.5$, se tiene:

$$x_0 = 0.81048$$
$$x_1 = 0.71118$$
$$x_2 = 0.70712$$
$$x_3 = 0.70711.$$

Como $f(0.69) \approx -0.44644 < 0$ y $f(0.71) \approx 0.076916 > 0$, el polinomio f debe tener una raíz entre 0.69 y 0.71.

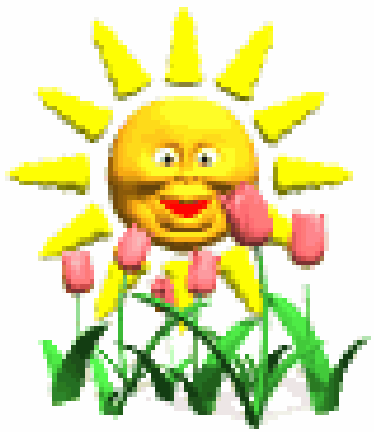
RAICES DE POLINOMIOS: REGLA FALSA

1. Consiste en considerar un intervalo (a, b) en el que se garantice que la función tiene raíz.
2. Se traza una recta que une los puntos (a, f(a)), (b, f(b))
3. Se obtiene el punto de intersección de esta recta con el eje de las abscisas: (c, 0); se toma c como aproximación de la raíz buscada.
4. Se identifica luego en cuál de los dos intervalos está la raíz.
5. El proceso se repite n veces, hasta que el punto de intersección c coincide prácticamente con el valor exacto de la raíz.

La regla falsa modificada, que reduce a la mitad el valor de la función en el punto extremo que se repita dos veces, con lo que la convergencia se acelera significativamente.

BIBLIOGRAFIA

- Ayres Jr., Frank (1991) *Álgebra Superior*. Mc. Graw Hill. México.
- Becerril Vilchis Francisco y Ojeda Toche Lilia (2003) *Álgebra Superior, Conceptos y Formulas*. UAEM.
- Lehman (2003) *Álgebra*, Limusa Noriega Editores.. México.
- Lovaglia (1987) *Álgebra*, Harla. México.
- Rees y Spark (1994) Álgebra. México
- Hasser, Lasalle Sullivan. *Análisis matemático*.. vol. I Trillas. México.



FIN DE LA PRESENTACION