UNIDAD ACADÉMICA PROFESIONAL TIANGUISTENCO

Unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística

Unidad II:
Modelos probabilísticos.

Elaboró:
M en CC Marcela Camacho Avila

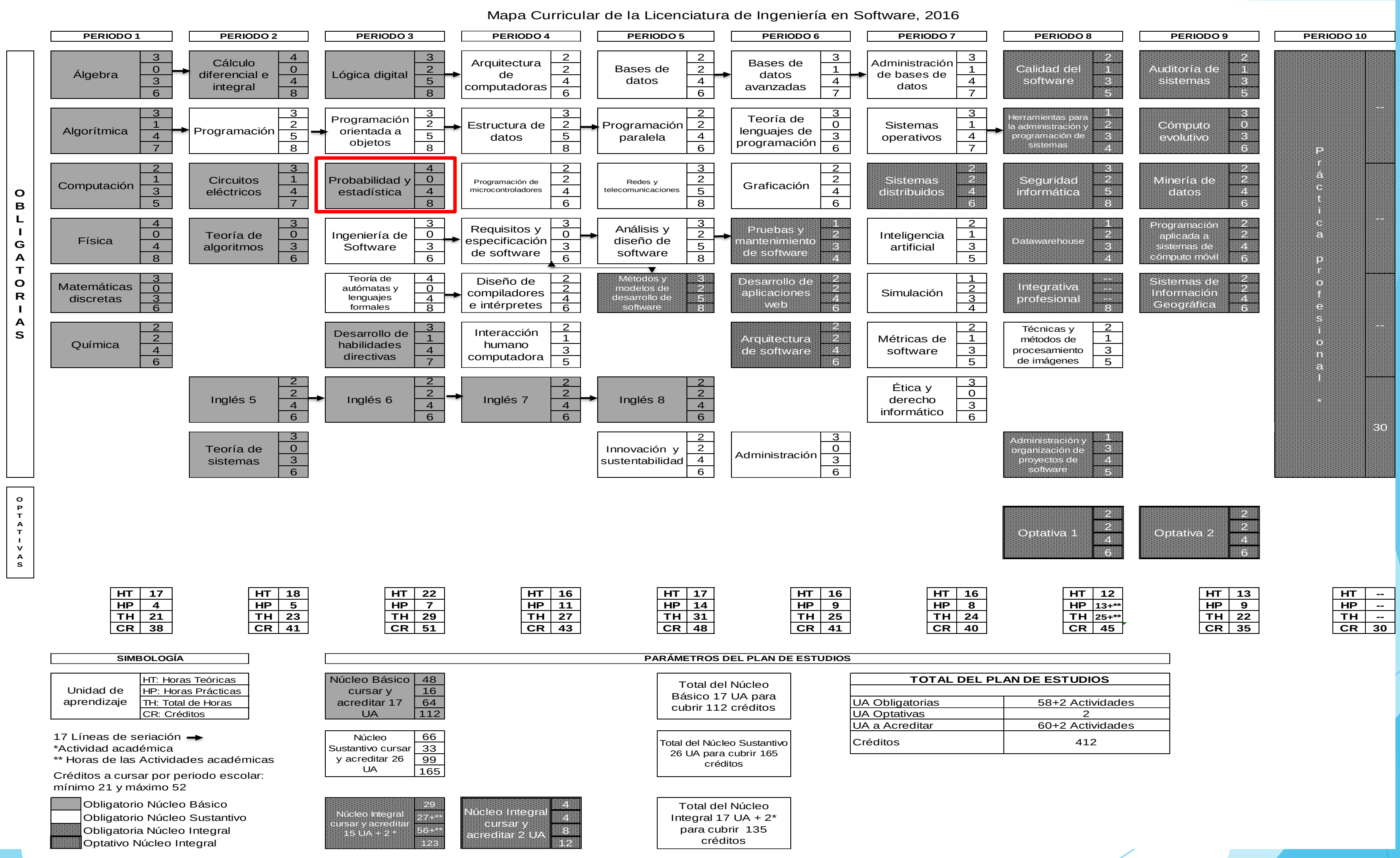
Agosto 2019

UAEM

Administración 2017 • 2021

CONTENIDO

MAPA CURRICULAR



PROGRAMA DE ESTUDIOS

I. Datos de identificación

Espacio educativo donde se imparte	**Unidad Académica Profesional Tianguistenco**
Licenciatura	**Ingeniería en Software**
Unidad de aprendizaje	**Probabilidad y estadística**
Clave	

Carga académica

Horas teóricas	Horas prácticas	Total de horas	Créditos
4	0	4	8

Período escolar en que se ubica

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		■						

Seriación

UA Antecedente	UA Consecuente
Ninguna	Ninguna

Tipo de Unidad de Aprendizaje

Curso	X	Curso taller	
Seminario		Taller	
Laboratorio		Práctica profesional	
Otro tipo (especificar)			

Modalidad educativa

Escolarizada. Sistema rígido		No escolarizada. Sistema virtual	
Escolarizada. Sistema flexible	X	No escolarizada. Sistema a distancia	
No escolarizada. Sistema abierto		Mixta (especificar)	

Formación común

Licenciatura de Ingeniería en Plásticos		
Licenciatura de Ingeniería en Producción Industrial		

Formación equivalente	**Unidad de Aprendizaje**
Licenciatura de Ingeniería en Plásticos	Probabilidad y estadística
Licenciatura de Ingeniería en Producción Industrial	Probabilidad y estadística

ESTRUCTURA DEL PROGRAMA DE APRENDIZAJE

- **Unidad 1.** Probabilidad.
- **Unidad 2. Modelos probabilísticos**
- **Unidad 3.** Estadística descriptiva
- **Unidad 4.** Regresión lineal y correlación

ESTRUCTURA DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE
2. Modelos probabilísticos

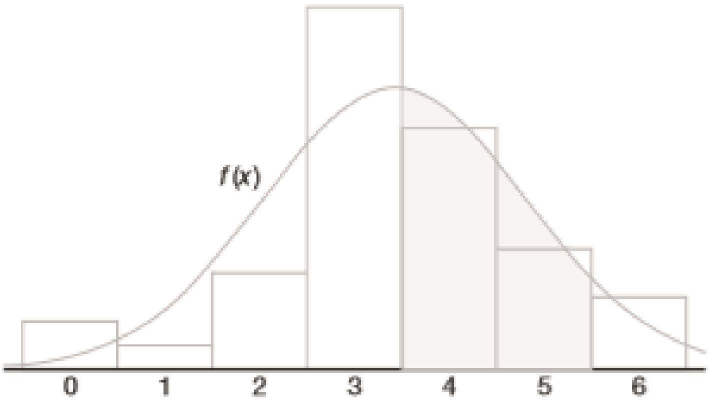
- **2.1:** Concepto de variable aleatoria discreta y continua.
- **2.2:** Función de distribución.
- **2.3:** *Distribuciones de probabilidad discreta.*
  - **2.3.1:** Distribución binomial
  - **2.3.2:** Distribución multinomial
  - **2.3.3:** Distribución hipergeométrica
  - **2.3.4:** Distribución hipergeométrica generalizada
  - **2.3.5:** Distribución poisson
  - **2.3.6:** Distribución geométrica
- **2.4:** *Distribuciones de probabilidad continua.*
  - **2.4.1:** *Distribution normal*
  - **2.4.1:** *Aproximación de la normal a la binomial*
  - **2.4.1:** *Distribution exponencial*

Guión explicativo

Este material es un apoyo en la exposición del tema a desarrollar, contiene información relevante, con la finalidad de ofrecer una visión completa, tomando como referencia distintos autores, con el fin de lograr el objetivo de la unidad de aprendizaje. En esta unidad se desarrollarán problemas reales con modelos probabilísticos por medio de la identificación de parámetros de variables aleatorias para la interpretación de su comportamiento.

Introducción

Vida de una batería en años



Se dice que una distribución es simétrica si se puede doblar a lo largo de un eje vertical de manera que ambos lados coincidan. Si una distribución carece de simetría respecto de un eje vertical, se dice que está sesgada. La distribución que se ilustra en la figura, se dice que está sesgada a la derecha porque tiene una cola derecha larga y una cola izquierda mucho más corta. La distribución de probabilidad muestra, en forma gráfica o en una ecuación, toda la información necesaria para describir una estructura de probabilidad.

Variable aleatoria

Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral

Se utiliza una letra mayúscula, X, para denotar una variable aleatoria, y su correspondiente letra minúscula, x, para uno de sus valores. Por ejemplo, sea el espacio muestral S dado a partir de seleccionar 3 componentes electrónicos que pueden estar dañados o no dañados. Se observa que la variable aleatoria X toma el valor 2 para todos los elementos en el subconjunto del espacio muestral S.

$$E = \{DDN, DND, NDD\}$$

Esto es, cada valor posible de X representa un evento que es un subconjunto del espacio muestral para el experimento dado

(Navidi, 2006)(Hines et al, 2006) (Montgomery, 2016)

Variable aleatoria discreta

Si un espacio muestral contiene un número finito de posibilidades, o una serie interminable con tantos elementos como números enteros existen, se llama **espacio muestral discreto**.

Una variable aleatoria se llama **variable aleatoria discreta** si se puede contar su conjunto de resultados posibles.

(Navidi, 2006)(Hines et al, 2006)
(Montgomery, 2016)

Variable aleatoria continua

Si un espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades, igual al número de puntos en un segmento de recta, se le denomina **espacio muestral continuo.**

Cuando una variable aleatoria puede tomar valores en una escala continua, se le denomina **variable aleatoria continua.**

(Navidi, 2006)(Hines et al, 2006)
(Montgomery, 2016)

Función de distribución de variable aleatoria discreta

El conjunto de pares ordenados (x, f (x)) es una función de probabilidad, una función de masa de probabilidad o una distribución de probabilidad de la **variable aleatoria discreta** X si, para cada resultado x posible

1. $f(x) \geq 0,$
2. $\sum_{x} f(x) = 1,$
3. $P(X = x) = f(x).$

La función de la distribución **acumulativa** F(x) de una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad f (x) es

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty.$$

(Hines et al, 2006)(Montgomery, 2016)

Función de distribución de variable aleatoria discreta - ejemplo

Un embarque de 20 computadoras portátiles similares para una tienda minorista contiene 3 que están defectuosas. Si una escuela compra al azar 2 de estas computadoras, calcule la distribución de probabilidad para el número de computadoras defectuosas.

Solución: Sea X una variable aleatoria cuyos valores x son los números posibles de computadoras defectuosas compradas por la escuela. Entonces x sólo puede asumir los números 0, 1 y 2. Así,

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{68}{95}, \quad f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{17}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{51}{190},$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{0}}{\binom{20}{2}} = \frac{3}{190}.$$

Por consiguiente, la distribución de probabilidad de X es

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{68}{95}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

Función de distribución de variable aleatoria continua

La función f (x) es **una función de densidad de probabilidad** (fdp) para la variable aleatoria continua X, definida en el conjunto de números reales, si

1. $f(x) \geq 0$, para toda $x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$.

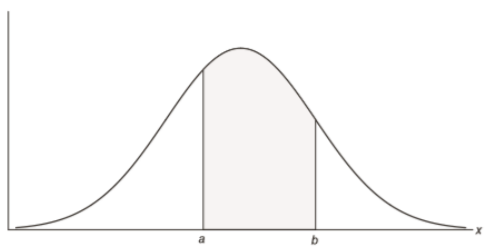


Figura 3.5: $P(a < X < b)$.

La función de **distribución acumulativa** F(x), de una variable aleatoria continua X con función de densidad f (x), es

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \text{ para } -\infty < x < \infty.$$

(Hines et al, 2006)(Montgomery, 2016)

Función de distribución de variable aleatoria continua - ejemplo

Suponga que el error en la temperatura de reacción, en °C, en un experimento de laboratorio controlado, es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique que f (x) es una función de densidad.
b) Calcule $P(0 < X \leq 1)$.

a) Evidentemente, $f(x) \geq 0$. Para verificar la condición 2 de la definición

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$

b) Si usamos la fórmula 3 de la definición

$$P(0 < X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9}.$$

Distribución binomial

- Un experimento de Bernoulli puede tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad q = 1 – p. Entonces, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X, el número de éxitos en n ensayos independientes, es

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- Observe que cuando n = 3 y p = 1/4, la distribución de probabilidad de X, el número de artículos con alguna característica se escribe como

$$b\left(x; 3, \frac{1}{4}\right) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3,$$

(Navidi, 2006) (Hines et al, 2006)(Montgomery, 2016)

Distribución binomial - ejemplo

- La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es de 3/4. Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se prueben

$$b\left(2;4,\frac{3}{4}\right)=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{4!}{2!\,2!}\right)\left(\frac{3^2}{4^4}\right)=\frac{27}{128}$$

Distribución binomial - ejercicio

- Se lanza al aire una moneda cargada 8 veces, de tal manera que la probabilidad de que aparezca águila es de 2/3, mientras que la probabilidad de que aparezca sello es de 1/3, Determine la probabilidad de que en el último lanzamiento aparezca un águila.

x = 8 lanzamientos necesarios para que aparezca por primera vez un águila
p = 2/3 probabilidad de que aparezca un águila
q = 1/3 probabilidad de que aparezca un sello

$$\mathbf{p(x=8)=}\quad (1/3)^{8-1}(2/3) = 0.0003048$$

Distribución multinomial

- Si un ensayo dado puede producir los k resultados E_1, E_2,..., E_k con probabilidades p_1, p_2,…, p_k, entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias X_1, X_2,..., X_k, que representa el número de ocurrencias para resultados E_1, E_2,..., E_k en n ensayos independientes, es:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k},$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \text{ y } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

(Hines et al, 2006)(Montgomery, 2016)

Distribución multinomial - ejemplo

- La complejidad de las llegadas y las salidas de los aviones en un aeropuerto es tal que a menudo se utiliza la simulación por computadora para modelar las condiciones "ideales". Para un aeropuerto específico que tiene tres pistas se sabe que, en el escenario ideal, las probabilidades de que las pistas individuales sean utilizadas por un avión comercial que llega aleatoriamente son las siguientes:
  - Pista 1: p1 = 2/9
  - Pista 2: p2 = 1/6
  - Pista 3: p3 = 11/18
- ¿Cuál es la probabilidad de que 6 aviones que llegan al azar se distribuyan de la siguiente manera?
  - Pista 1: 2 aviones
  - Pista 2: 1 avión
  - Pista 3: 3 aviones

$$f\left(2, 1, 3; \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{11}{18}, 6\right) = \binom{6}{2, 1, 3} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{11}{18}\right)^3$$

$$= \frac{6!}{2!1!3!} \cdot \frac{2^2}{9^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{11^3}{18^3} = 0.1127.$$

Distribución multinomial - ejercicio

- Las probabilidades de que un delegado llegue a cierta convención en avión, autobús, automóvil o tren son de 0.4, 0.2, 0.3 y 0.1, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que, de 9 delegados que asisten a esta convención seleccionados al azar, 3 lleguen en avión, 3 en autobús, 1 en automóvil y 2 en tren?

$$\frac{9!}{3!3!1!2!}(0.4)^3(0.2)^3(0.3)^1(0.1)^2 = 7.74\text{x}10^{-3}$$

- 4 por aire, 1 en autobús y 2 en auto

$$\frac{9!}{4!1!2!2!}(0.4)^4(0.2)^1(0.3)^2(0.1)^2 = 0.01741$$

- 5 en auto

$$\frac{9!}{5!4!}(0.3)^5(0.7)^4 = 0.73$$

Distribución hipergeométrica

- La distribución de probabilidad de la variable aleatoria hipergeométrica X, el número de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n que se selecciona de N artículos, en los que k se denomina éxito y N – k fracaso, es

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{máx}\{0, n-(N-k)\} \le x \le \text{mín}\{n, k\}.$$

El rango de x puede determinarse mediante los tres coeficientes binomiales en la definición, donde x y n – x no son más que k y N – k; respectivamente; y ambos no pueden ser menores que 0. Por lo general, cuando tanto k (el número de éxitos) como N – k (el número de fracasos) son mayores que el tamaño de la muestra n, el rango de una variable aleatoria hipergeométrica será x = 0, 1,..., n.

(Hines et al, 2006)(Montgomery, 2016)

Distribución hipergeométrica - ejemplo

- Lotes con 40 componentes cada uno que contengan 3 o más defectuosos se consideran inaceptables. El procedimiento para obtener muestras del lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que, en la muestra, se encuentre exactamente un componente defectuoso, si en todo el lote hay 3 defectuosos?

Si utilizamos la distribución hipergeométrica con n = 5, N = 40, k = 3 y x = 1, encontramos que la probabilidad de obtener un componente defectuoso es

$$h(1;40,5,3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0.3011.$$

sólo 30% de las veces detecta un lote malo (con 3 componentes defectuosos)

Distribución hipergeométrica – ejercicio

- Para evitar la detección en la aduana, un viajero coloca 6 comprimidos con narcóticos en una botella que contiene 9 píldoras de vitamina que aparentemente son similares. Si el oficial de la aduana selecciona 3 de las tabletas al azar para su análisis, ¿cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de narcóticos?

Si utilizamos la distribución hipergeométrica con n = 3, N = 15, k = 6 y x = 1,2,3 encontramos que la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de narcóticos

$$= p(x = 1,2ó3\,tabletas; n = 3) = \frac{{}_6C_1 * {}_9C_2}{{}_{15}C_3} + \frac{{}_6C_2 * {}_9C_1}{{}_{15}C_3} + \frac{{}_6C_3 * {}_9C_0}{{}_{15}C_3} =$$

$$= \frac{(6)(36)}{455} + \frac{(15)(9)}{455} + \frac{(20)(1)}{455} = \frac{216+135+20}{455} = \frac{371}{455} = 0.81538$$

- **¿Cuál es la probabilidad de que no sea arrestado por posesión de narcóticos?**

$$= p(x = 0; n = 3) = \frac{{}_6C_0 * {}_9C_3}{{}_{15}C_3} =$$

$$= \frac{(1)(84)}{455} = 0.184615$$

Distribución hipergeométrica generalizada

- Si N artículos se pueden dividir en las k celdas $A_1, A_2, \ldots, A_k$ con $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elementos, respectivamente, entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$, que representan el número de elementos que se seleccionan de $A_1, A_2, \ldots, A_k$ en una muestra aleatoria de tamaño n, es:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; a_1, a_2, \ldots, a_k, N, n) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}},$$

con $$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \text{ y } \sum_{i=1}^{k} a_i = N.$$

(Hines et al, 2006)(Montgomery, 2016)

Distribución hipergeométrica generalizada - ejemplo

- Se usa un grupo de 10 individuos para un estudio de caso biológico. El grupo contiene 3 personas con sangre tipo O, 4 con sangre tipo A y 3 con tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 5 contenga 1 persona con sangre tipo O, 2 personas con tipo A y 2 personas con tipo B?

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; a_1, a_2, \ldots, a_k, N, n) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}},$$

$$f(1, 2, 2; 3, 4, 3, 10, 5) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{3}{14}$$

Distribución hipergeométrica generalizada - ejercicio

- **De un lote de 10 proyectiles, 4 se seleccionan al azar y se disparan. Si el lote contiene 3 proyectiles defectuosos que no explotarán, ¿cuál es la probabilidad de que , a) los 4 exploten?, b) al menos 2 no exploten?**

a) Si utilizamos la distribución hipergeométrica con n = 4, N = 10, k = 4 y x = 4

$$p(x=4; n=4) = \frac{{}_7C_4 * {}_3C_0}{{}_{10}C_4} = \frac{(35)(1)}{210} = \frac{35}{210} = 0.16667$$

b) Si utilizamos la distribución hipergeométrica con n = 4, N = 10, k = 4 y x = 2,3

$$= \frac{{}_3C_2 * {}_7C_2 + {}_3C_3 * {}_7C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{(3)(21)+(1)(7)}{210} = \frac{63+7}{210} = \frac{70}{210} = 0.333333$$

Distribución geométrica

- Si pruebas independientes repetidas pueden tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad q = 1 – p, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número de la prueba en el que ocurre el primer éxito, es

$$g(x;p) = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

(Hines et al, 2006)(Montgomery, 2016)

Distribución geométrica - ejemplo

- Se sabe que en cierto proceso de fabricación uno de cada 100 artículos, en promedio, resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto artículo que se inspecciona, en un grupo de 100, sea el primer defectuoso que se encuentra?

$$g(5; 0.01) = (0.01)(0.99)^4 = 0.0096$$

Distribución geométrica - ejercicios

- En “momentos ajetreados” un conmutador telefónico está muy cerca de su límite de capacidad, por lo que los usuarios tienen dificultad para hacer sus llamadas. Sería interesante saber cuántos intentos serían necesarios para conseguir un enlace telefónico. Suponga que la probabilidad de conseguir un enlace durante un momento ajetreado es $p = 0.05$. Nos interesa conocer la probabilidad de que se necesiten 5 intentos para enlazar con éxito una llamada

  Si utilizamos la distribución geométrica con $x = 5$ y $p = 0.05$, obtenemos

$$P(X = x) = g(5;0.05) = (0.05)(0.95)^4 = 0.041.$$

- Del salón el 60% de los alumnos son hombres, calcular probabilidad de extraer el 1er hombre a la cuarta ocasión que extraemos un alumno.

  Definir éxito: sea hombre. $x=4$ $p = 0.60$ $q = 0.40$

$$P(X=4) = (0.40)^{4-1}(0.60)= (0.40)^3 (0.60) = 0.0384$$

- Calcular la probabilidad de que salga el No. 5 a la tercera vez que lanzamos un dado.

  Definir éxito: sale No. 5 $x=3$ $p = 1/6 = 0.1666$ $q = (1 - 0.16660) = 0.8333$

$$P(X=3) = (0.8333)^{3-1}(0.1666)= (0.8333)^2 (0.1666) = 0.1157$$

Distribución poisson

- La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X, la cual representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o región específicos y se denota con t, donde λ es el número promedio de resultados por unidad de tiempo, distancia, área o volumen y e = 2.71828… , es

$$p(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

(Navidi, 2006) (Hines et al, 2006)(Montgomery, 2016)

Distribución poisson - ejemplo

- Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo dado?

Al usar la distribución de Poisson con x = 6 y λt = 4,

$$p(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \qquad p(6;4) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = 0.1042$$

y al remitirnos a la tabla A.2, tenemos que

$$p(6;4) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = \sum_{x=0}^{6} p(x;4) - \sum_{x=0}^{5} p(x;4) = 0.8893 - 0.7851 = 0.1042.$$

Distribución poisson - tabla

Tabla A.2 Sumas de probabilidad de Poisson $\sum_{x=0}^{r} p(x; \mu)$

	μ								
r	0.1	0.2	0.30	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

	μ								
r	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

Distribución poisson - ejercicio

- En promedio, hay 50 incendios serios cada año en el país. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún incendio mañana?

Solución:

El número medio de incendios por día es 50/365 ≈ 0.137. Luego, la probabilidad de cero incendios mañana es

$$\frac{0{,}137^0 e^{-0{,}137}}{0!} \approx 0{,}872$$

Distribución poisson - ejercicio

- En una clínica el promedio de atención es 16 pacientes por 4 horas, encuentre la probabilidad que en 30 minutos se atiendan menos de 3 personas y que en 180 minutos se atiendan 12 pacientes

$P(X=x) = \exp(-\lambda) * \lambda\text{^}x / x!$

la probabilidad que en 30 minutos se atiendan menos de 3 personas

λ=16 pacientes en 4 horas

λ=4 pacientes/hora

λ=2 pacientes/media hora

debemos calcular $P(x<3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$P(x=0) = e^{(-2)} * 2^0 / 0! = 0.1353$

$P(x=1) = e^{(-2)} * 2^1 / 1! = 0.2707$

$P(x=2) = e^{(-2)} * 2^2 / 2! = 0.2707$

$P(x<3) = 0.6767$

en 180 minutos se atiendan 12 pacientes λ=16 pacientes en 4 horas

λ=4 pacientes/hora

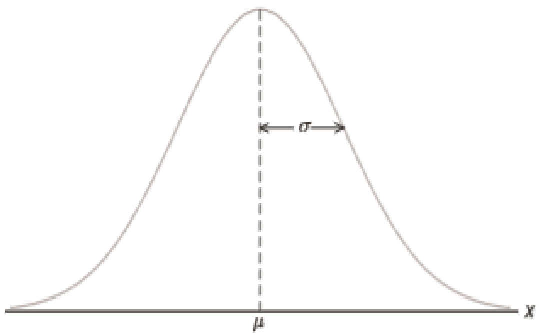
180 minutos = 3 horas

λ=3*4=12 pacientes/cada 180 minutos

$P(x=12) = e^{(-12)} * 12^{12} / 12! = 0.1144$

Distribución normal

La distribución de probabilidad continua más importante en todo el campo de la estadística es la **distribución normal**. Su gráfica, denominada **curva normal**, es la curva con forma de campana



La densidad de la variable aleatoria normal X, con media μ y varianza σ^2, es

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},\qquad -\infty<x<\infty$$

Donde $\pi = 3.14159\ldots$ y $e = 2.71828\ldots$

La curva de cualquier distribución continua de probabilidad o función de densidad se construye de manera que el área bajo la curva limitada por las dos ordenadas $x = x_1$ y $x = x_2$ sea igual a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor entre $x = x_1$ y $x = x_2$. Por consiguiente:

$$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx,$$

(Navidi, 2006)

Aproximación de la normal a al binomial

Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros n y p. Para una n grande, X tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq = np(1 - p)$ y

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0} b(k; n, p)$$

≈ área bajo la curva normal a la izquierda de x + 0.

$$= P\left(Z \leq \frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

y la aproximación será buena si np y n(1 – p) son mayores que o iguales a 5

(Navidi, 2006)

Distribución exponencial

La variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial, con parámetro β, si su función de densidad es dada por

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

La media y la varianza de la distribución exponencial son

$$\mu = \beta \text{ y } \sigma^2 = \beta^2$$

(Navidi, 2006)

Conclusiones

Existen diferentes distribuciones de probabilidad, dependiendo del tipo de variable aleatoria. Además, existen aproximaciones entre las distribuciones de probabilidad continuas y discretas. La utilización de una u otra depende de las características del problema además del tipo de variable.

Bibliografía

- Devore, J. (2016). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, Cengace learning.
- Hines, W., Montgomery, D., Goldsman, D. & Borror, C. (2006). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. México. Mc. Graw-Hill.
- Miller, I. y Freund, J. (2004). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. México. Editorial Reverté, S.A.
- Montgomery, P. (2016). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*, Mc. Graw-Hill interamericana.
- Navidi, W. (2006). *Estadística para Ingenieros y Científicos*. México D.F. McGraw-Hill.
- Ross, S. (2002). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. México. Editorial McGraw-Hill.
- Walpole, R., Myers, R., Myers, S. & Ye, K. (2007). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. México. Pearson Educación.