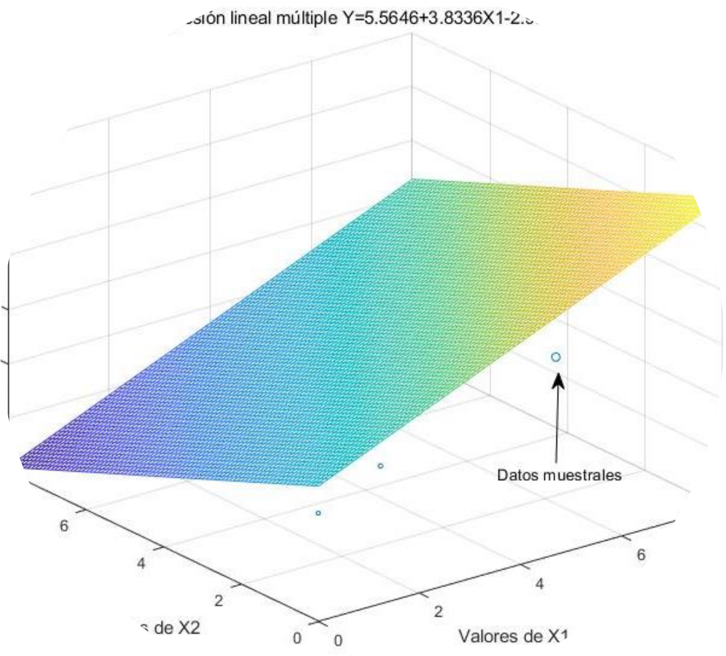
Universidad Autónoma del Estado de México

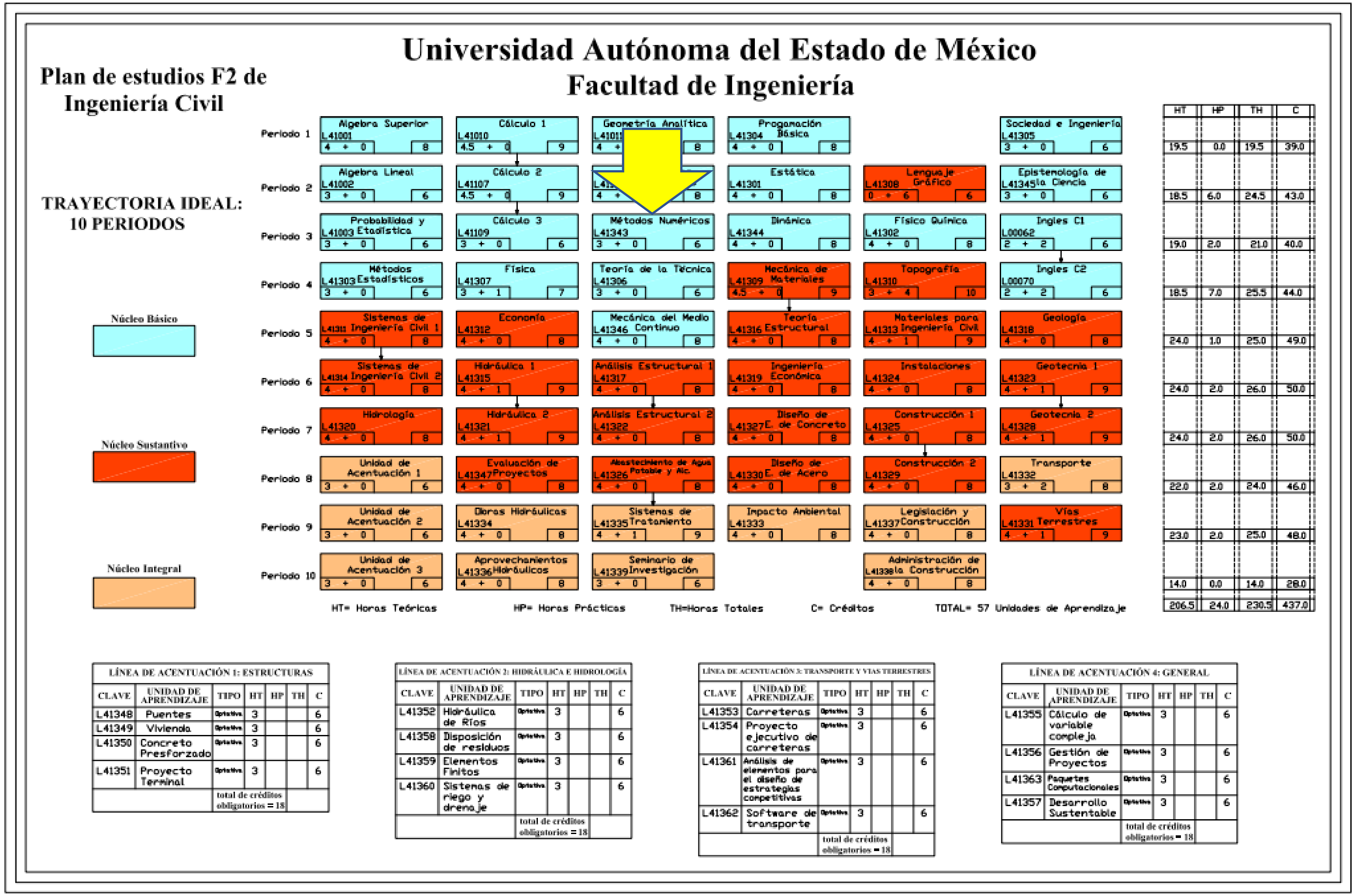
Facultad de Ingeniería



Licenciatura: *Ingeniería Civil*
Unidad de Aprendizaje: *Métodos Numéricos*
Unidad de competencia 3: *Ajuste de curvas*
Elaboró: M. en I. Ma. de Lourdes Najera López

Septiembre, 2019.

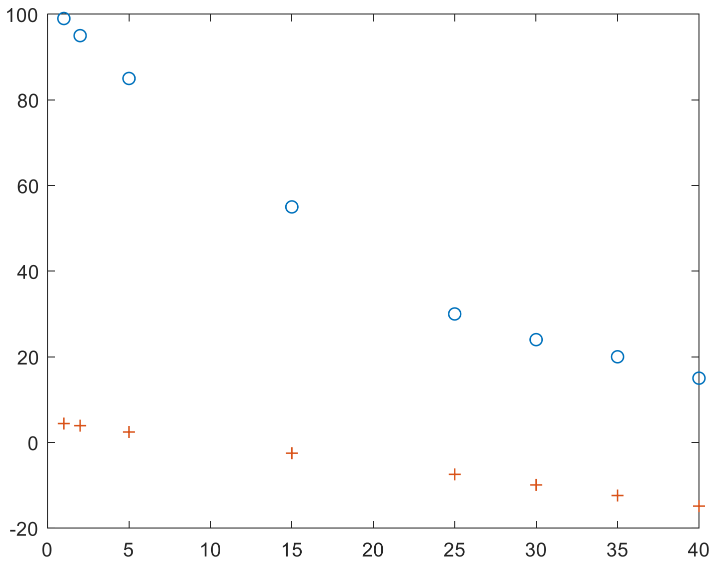
Ubicación de la asignatura de **Métodos Numéricos** dentro del programa de Ingeniería Civil



Unidad de competencia 3. Ajuste de curvas

OBJETIVO

Determinar las curvas de regresión por el método de los mínimos cuadrados, de manera manual y con el apoyo del desarrollo de software.



Contenido

3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados y confiabilidad del ajuste mediante evaluaciones gráficas y cuantitativas

Regresión lineal simple $y = a_0 + a_1 x + E$

3.2 Regresión lineal múltiple $y = a_0 + a_1 x_1 + \cdots a_n x_n + E$

3.3 Regresión polinomial $y = a_0 + a_1 x^1 + \cdots a_n x^n + E$

3.4 Regresión exponencial $y = ae^{bx}$

PRESENTACIÓN

En el campo profesional de la ingeniería se requiere utilizar modelos matemáticos para la predicción y explicación de ciertos fenómenos, por tal motivo, la unidad de aprendizaje de Métodos Numéricos es fundamental para la formación de profesionistas en la licenciatura de Ingeniería Civil, ya que son técnicas mediante las cuales es posible plantear soluciones a los problemas, a través de modelos matemáticos en conjunto con algoritmos para llevar a cabo un número necesario de cálculos.

PRESENTACIÓN

Para que los alumnos logren lo anterior, se utilizan las siguientes estrategias de aprendizaje:

1. Enseñanza directa: El profesor describe los conceptos fundamentales de la teoría de regresión lineal, múltiple, polinomial y exponencial.
2. El alumno junto con el profesor plantea los problemas y da solución en clase.
3. Se desarrollan algoritmos para la solución de problemas relacionados con ajuste de curvas.
4. El profesor propone series de ejercicios extra clase al alumno para su solución a mano y por medio de algoritmos en Matlab.

Introducción

Se debe estudiar métodos numéricos debido a que son algoritmos que establecen la secuencia de solución de sistemas de ecuaciones de gran tamaño, con características de ser no lineales y con geometrías complicadas, ya que así son los problemas reales y su solución es muy complicada por métodos analíticos y en ocasiones es imposible.

El futuro ingeniero debe saber pronosticar un fenómeno mediante un modelo de regresión lineal, múltiple, polinomial o exponencial, utilizando un software sofisticado que permita los cálculos numéricos en un intervalo de tiempo pequeño.

3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados y confiabilidad del ajuste mediante evaluaciones gráficas y cuantitativas

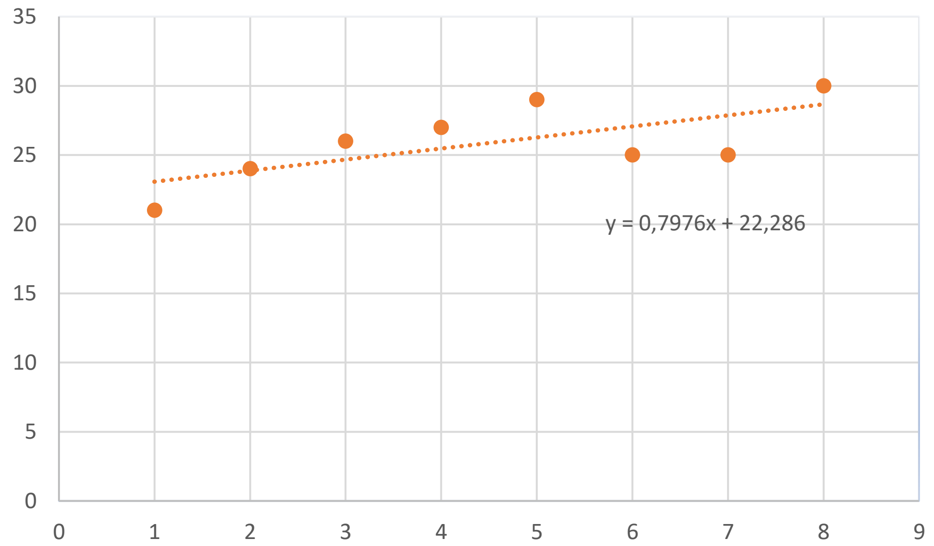
- El ajuste de curvas se utiliza cuando se tiene una serie de datos calculados y:
  - se desea conocer valores intermedios no conocidos
  - También en aquellos casos en que se desee una versión simplificada de una función que ajuste los datos
  - Para derivar o pronosticar nuevos valores

- El significado de mínimos cuadrados consiste en obtener la recta que ajuste a una serie de datos numéricos, con la condición que la suma de los cuadrados de los residuos sea la mínima posible.
- Residuo=distancia entre el punto ajustado al punto real

3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados

Se procede a obtener un modelo geométrico, que realice la suma de mínimos cuadrados de las distancias entre la curva y los puntos.

El modo más simple de ajustar una curva a un conjunto de datos, es trazar los puntos y unirlos por una línea recta.



3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados

Fundamentos matemáticos

$$Y = C_1 X + C_2 + \varepsilon \qquad (1)$$

Donde C_1 y C_2son coeficientes que interceptan al eje de las abscisas y ε es el error o residuo entre el modelo y las observaciones, con:

$$C_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \qquad (2)$$

$$C_2 = \frac{\sum Y_i}{n} - A \frac{\sum X_i}{n} \qquad (3)$$

$$\varepsilon = \sum (Y_i - C_2 - C_1 X_i)^2 \qquad (4)$$

3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados

Ejemplo: Hallar la línea de regresión que ajuste mejor la serie de datos siguiente:

n	X_i	Y_i	X_iY_i	X_i^2	Error
1	1.0	2.0	2.0	10.	0.0144
2	1.5	3.2	4.8	2.25	0.0169
3	2.0	4.1	8.2	4.0	0.0064
4	2.5	4.9	12.25	6.25	0.0049
5	3.0	5.9	17.7	9.0	0.0004
Total	10.0	20.10	44.95	22.50	0.0430

Con las expresiones (2) y (3), se obtiene C_1 y C_2, respectivamente:

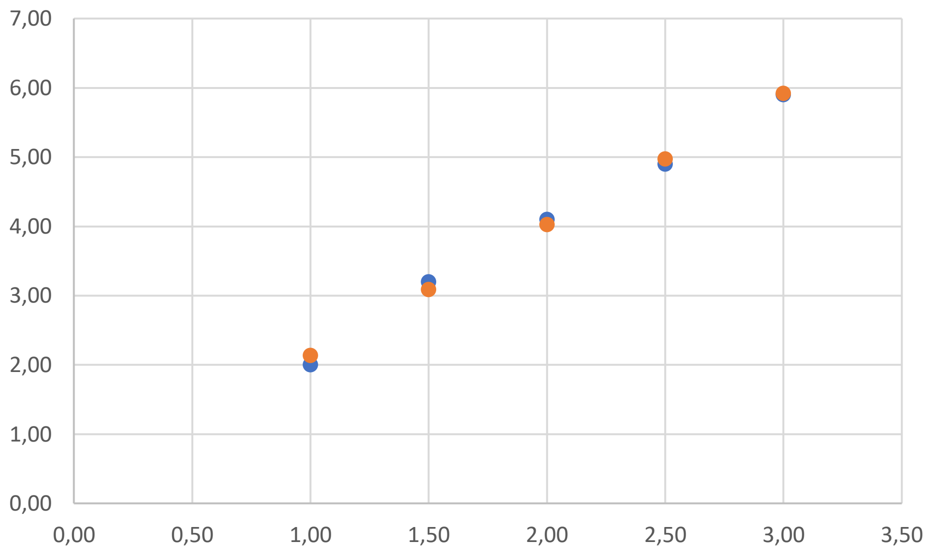
$$C_1 = \frac{5*44.95-10.00*20.10}{5*22.50-10^2}=1.90$$

$$C_2 = \frac{20.10}{5} - 1.90\frac{10.0}{5} = 0.22$$

$$\varepsilon = 0.0430$$

Finalmente la recta ajustada es:

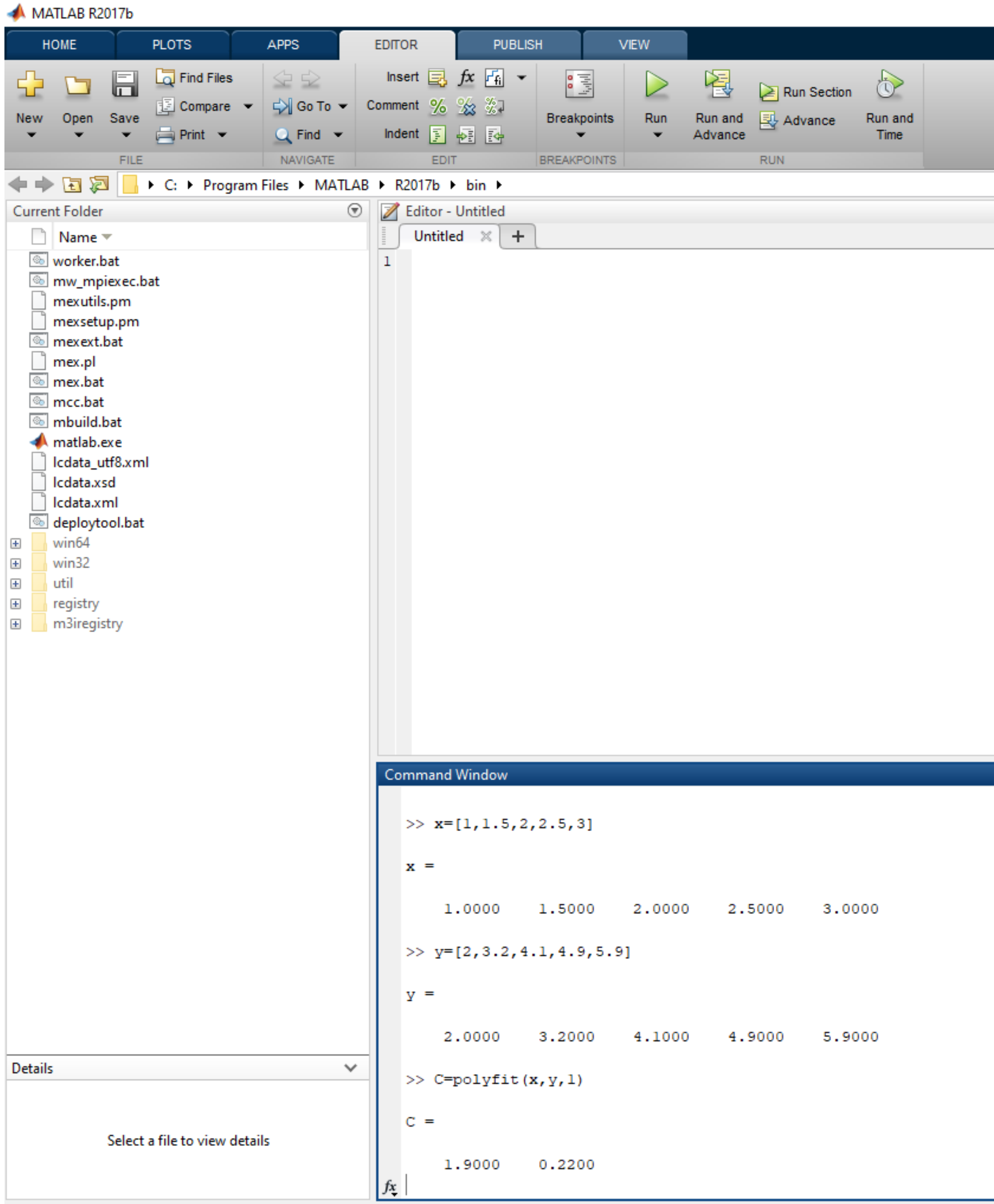
$$Y = 1.90X + 0.22 + \varepsilon$$



3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados

En Matlab la regresión se calcula usando la siguiente sintaxis:

C= $\boldsymbol{polyfit(x, y, 1)}$, con x y y son los vectores que contienen los datos que se desean ajustar



3.2 Regresión lineal múltiple

Cuando se tienen datos de n variables independientes y una dependiente, se usa un plano n-dimensional para hacer la aproximación, esto es:

$$Y = C_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \varepsilon \tag{5}$$

En Matlab

C=inv(A)*y

C=A\y

$$\underbrace{\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} \tag{6}$$

3.2 Regresión lineal múltiple

Utilizando las expresiones (6), se presenta la tabla y posteriormente los valores de A, y y C.

n	Y	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	X_1Y	X_2Y
1	6	0	0	0	0	0	0	0
2	8	2	1	4	1	2	16	8
3	9	2	2	4	4	4	18	18
4	1	1	3	1	9	3	1	3
5	3	4	6	16	36	24	12	18
6	27	7	2	49	4	14	189	54
SUMAS	**54**	**16**	**14**	**74**	**54**	**47**	**236**	**101**

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 14 \\ 16 & 74 & 47 \\ 14 & 47 & 54 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 54 \\ 236 \\ 101 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

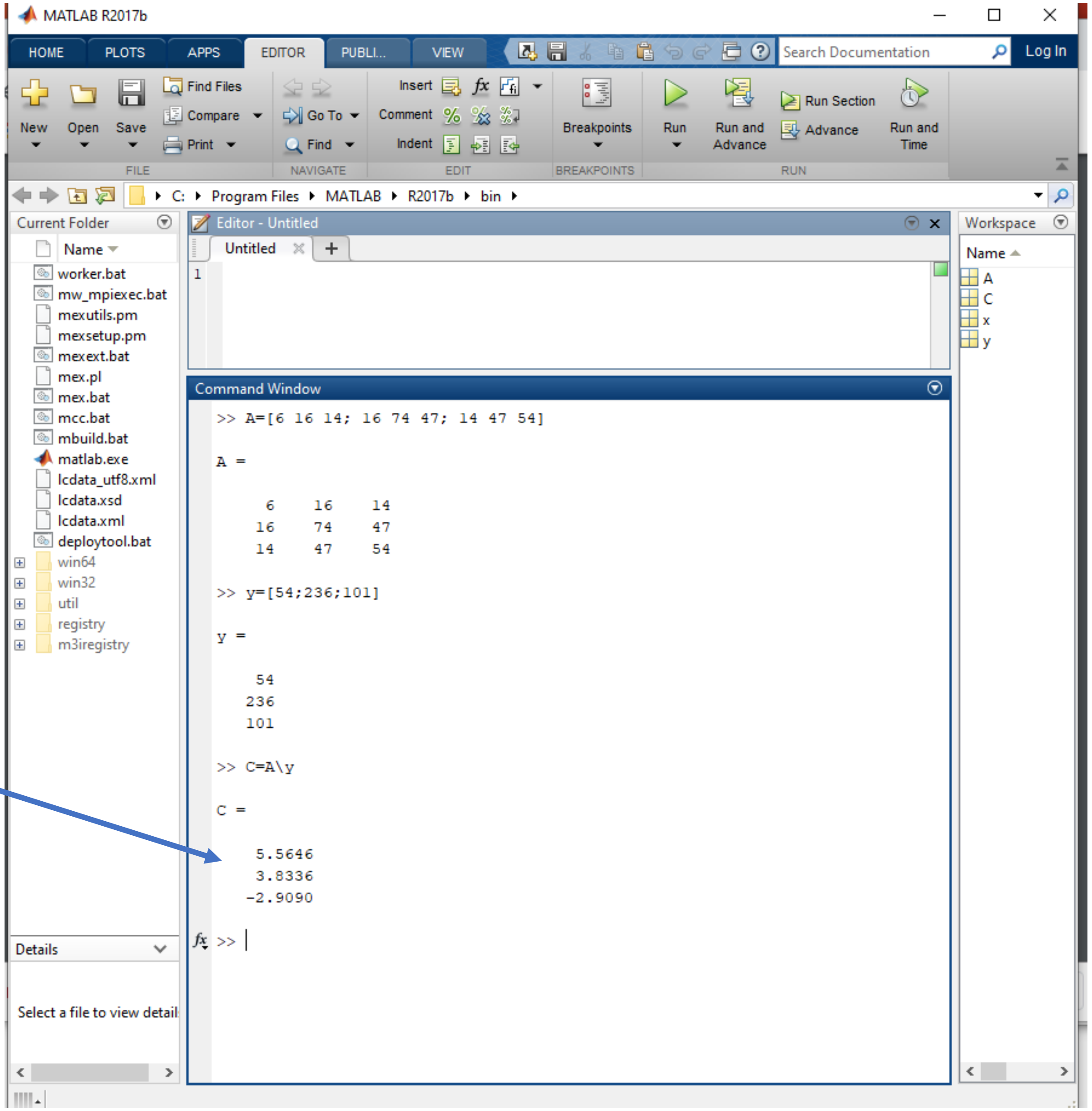
Finalmente:

$$C = A\backslash y = \begin{bmatrix} 5.5646 \\ 3.8336 \\ -2.9090 \end{bmatrix}$$

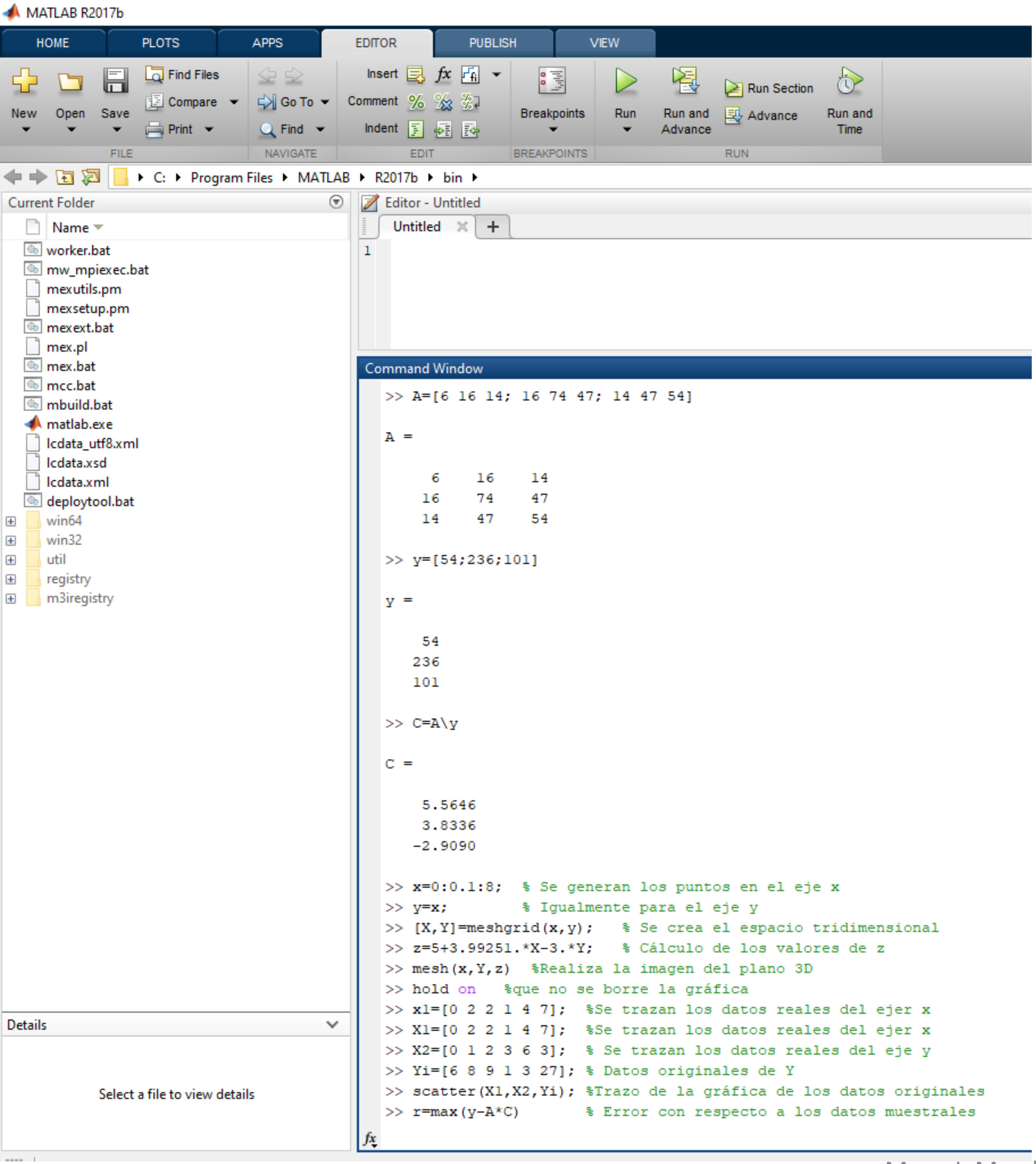
3.2 Regresión lineal múltiple

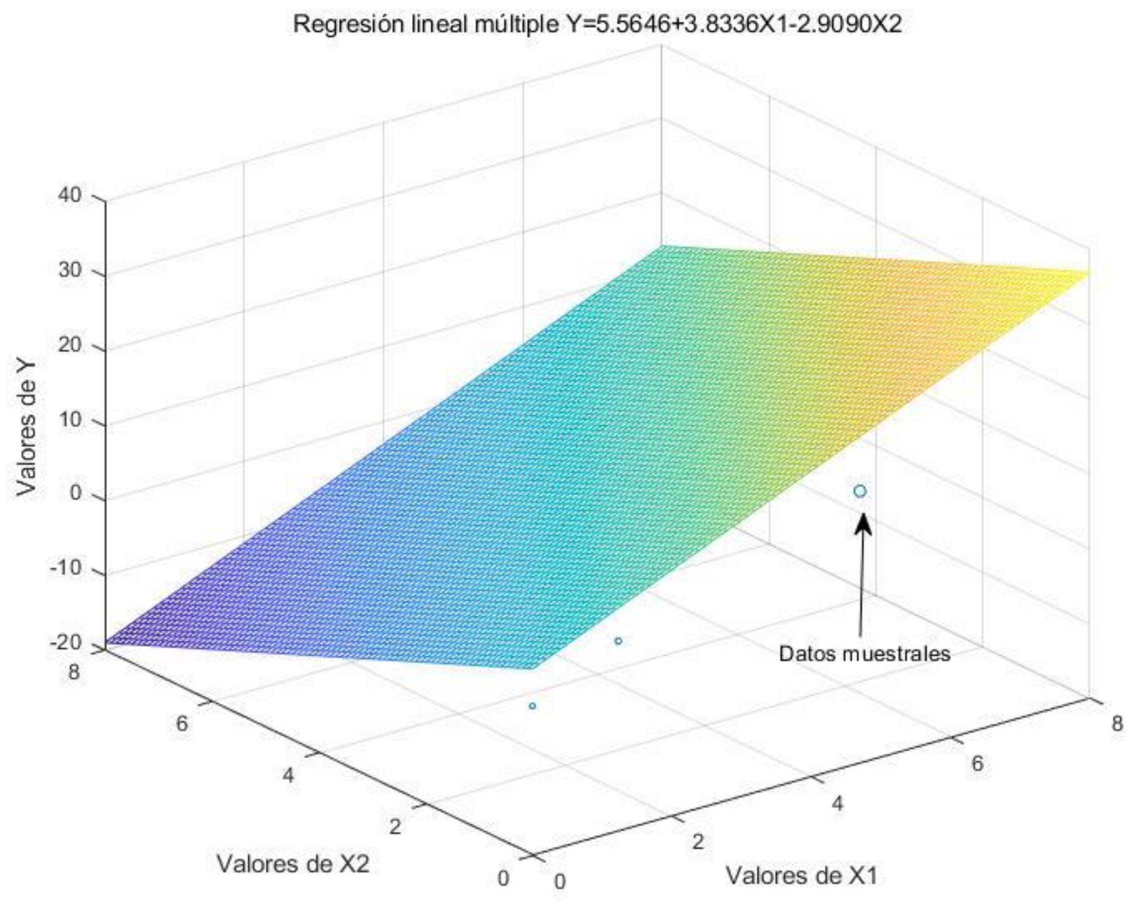
Calculo de los coeficientes en **Matlab**

$$C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$



3.2 Regresión lineal múltiple





3.3 Regresión polinomial

El caso más general es usar polinomios de $n - \acute{e}simo$ grado para aproximar la función deseada.

Se tiene el polinomio de grado n:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{7}$$

Para este caso se utiliza **Matlab**, para hacer el proceso más rápido y sencillo para la aproximación de una serie de puntos y calcular los coeficientes del polinomio.

3.3 Regresión polinomial

Proceso a seguir en Matlab

1. Crear dos vectores fila, uno para X y otro para y
2. Usar el comando C=polyfit(X,y,n)

3. Para calcular el polinomio de máximo grado podemos halla n con el comando length(X)-1

4. Utilizar el polinomio para evaluar nuevos valores de datos, ya sea dentro del rango con **Min(X)** y **Max(X)**, y fuera del intervalo con **polyval(C,xi)**

3.3 Regresión polinomial

Algoritmo en **Matlab:**

Ejemplo: Ajustar los siguientes datos a un polinomio

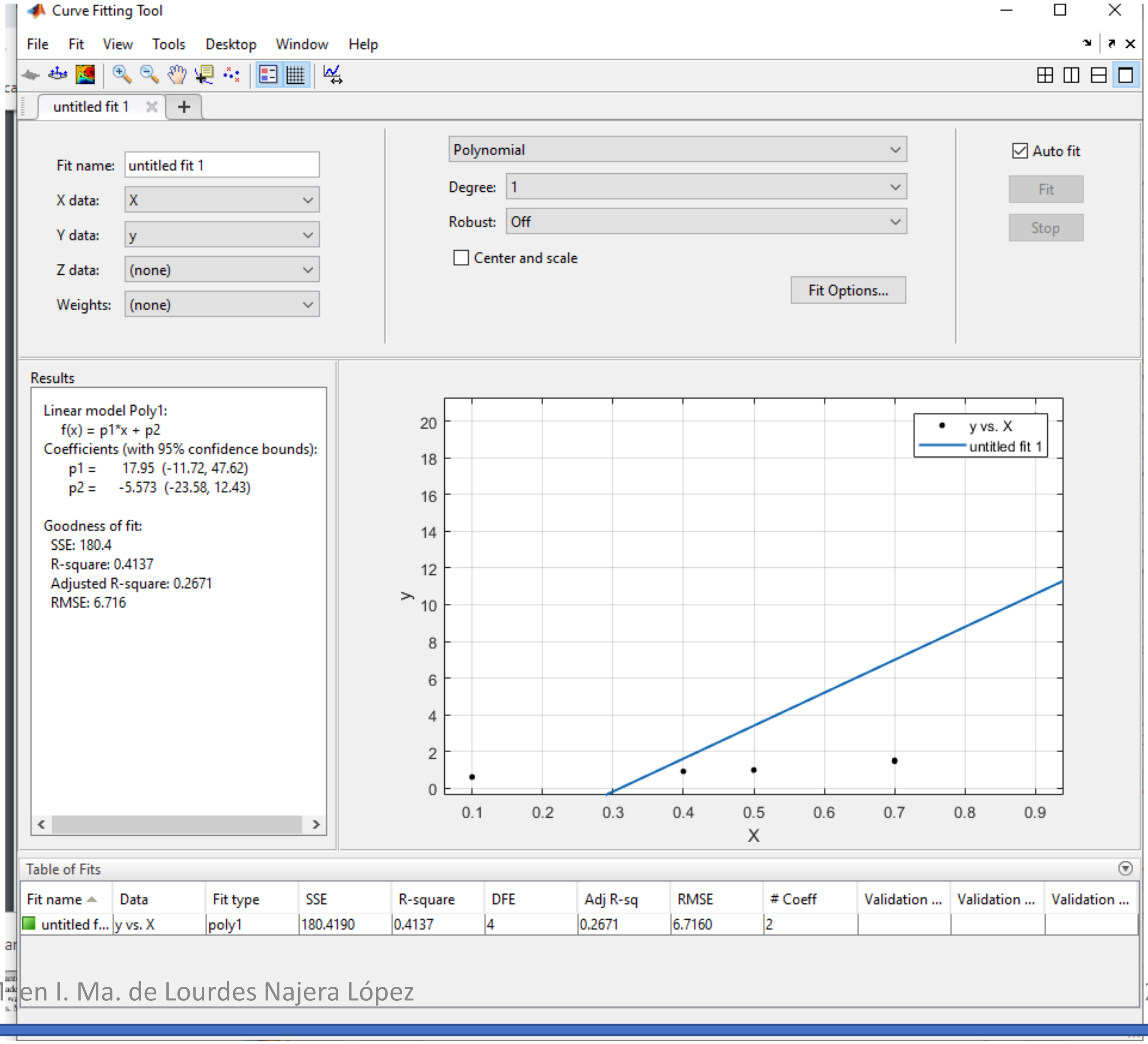
x	0.1	0.4	0.5	0.7	0.7	0.9
f(x)	0.61	0.92	0.99	1.52	1.47	2.03

Como se tienen 6 puntos, se puede ajustar a un polinomio de grado 5 o menor.

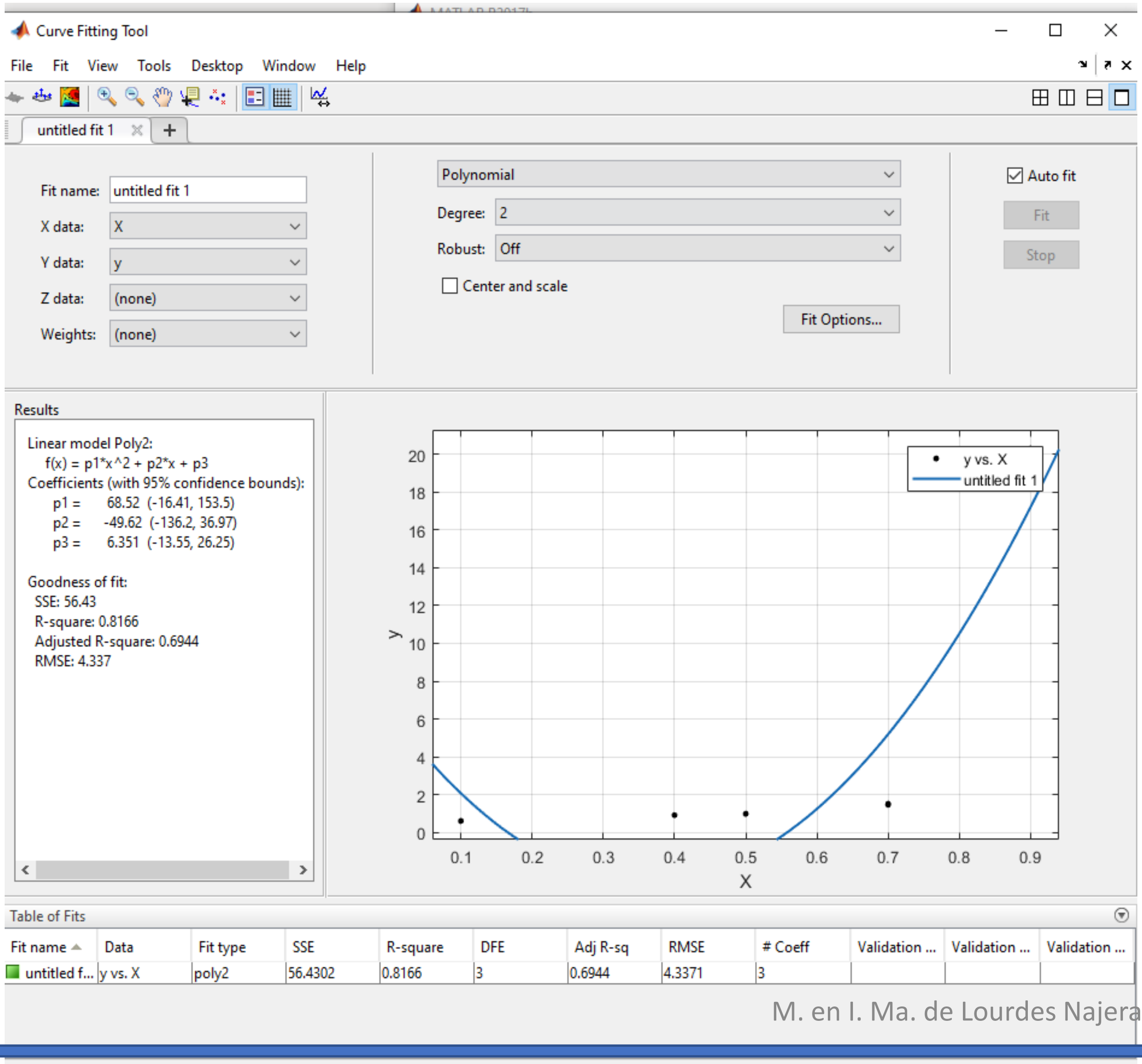
```
function [X y] =
regres_polinomial(inputArg1,inputArg2)

X=[0.1 0.4 0.5 0.7 0.7 0.9];
y=[0.61 0.92 0.99 1.52 1.47 20.3];
C=polyfit(X,y,3);
yi=polyval(C,X);
plot(X,y,'o',X,yi,'+')
plot(X,y,LineSpec)


end
```

3.3 Regresión polinomial

Primer grado

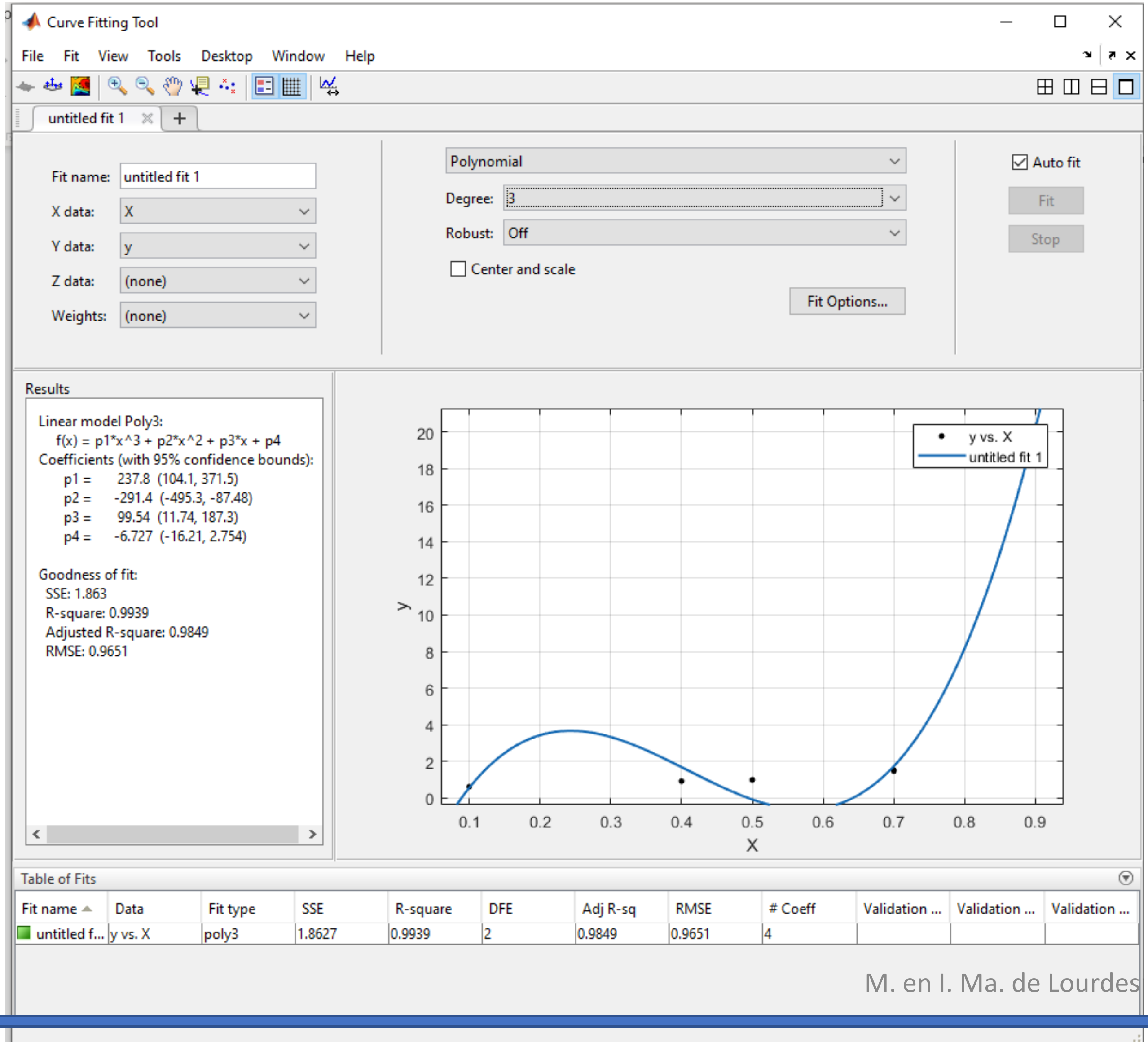


3.3 Regresión polinomial



Segundo grado

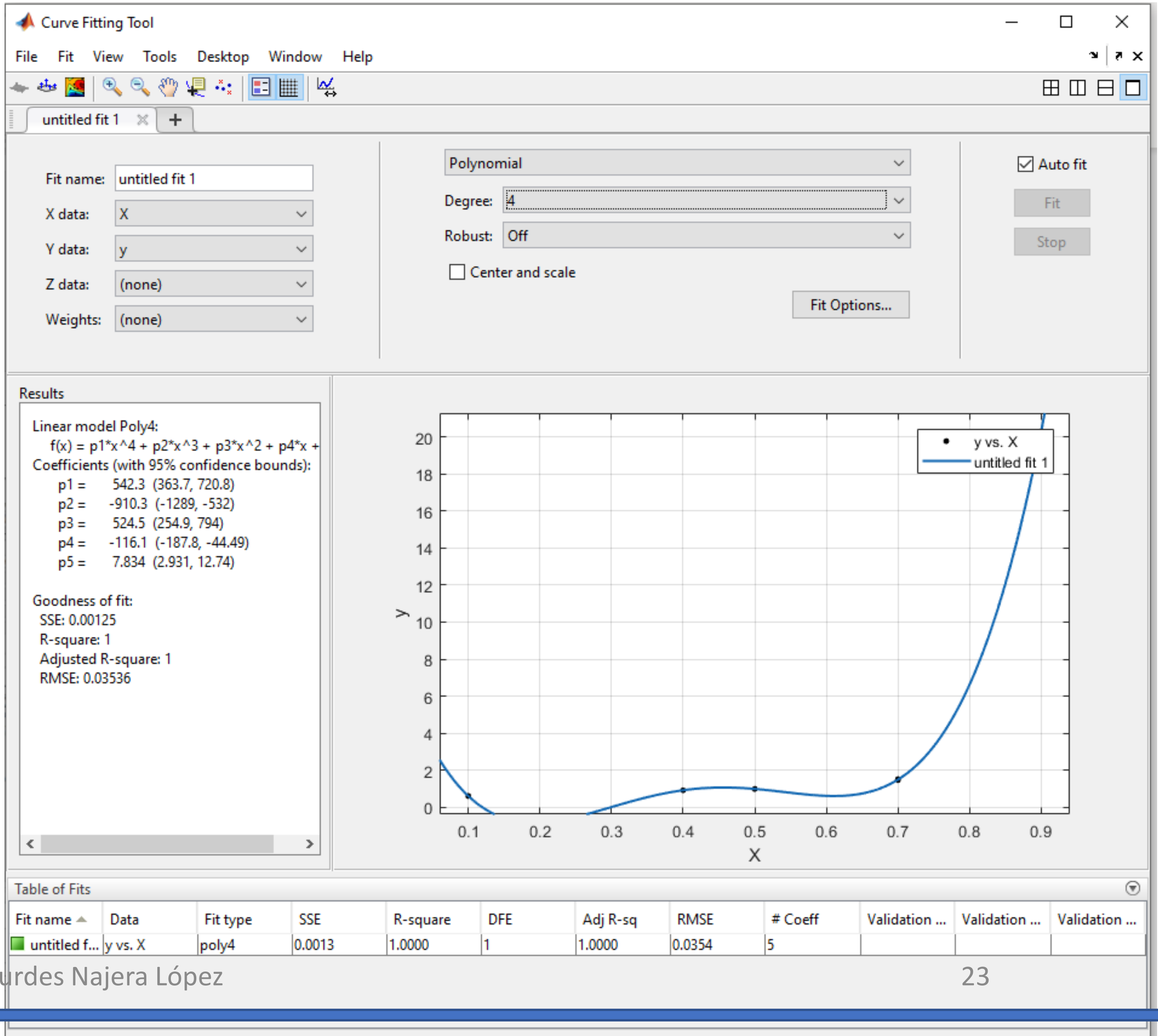
3.3 Regresión polinomial



Tercer grado

3.3 Regresión polinomial

Cuarto grado



3.4 Regresión exponencial

Cuando los datos observados no siguen comportamiento lineales, es conveniente ajustarlos por medio de funciones exponenciales, como se muestra a continuación:

$$y = \beta X^{\alpha} \tag{8}$$

Siendo β y α valores a determinar, por medio de las leyes de los logaritmos:

$$\ln(y) = \ln(\beta X^{\alpha})$$

$$\ln(y) = \ln(\beta) + \ln(X^{\alpha})$$

3.4 Regresión exponencial

$$\ln(y) = \ln(\beta) + \alpha \ln(X) \qquad (9)$$

$$H \;=\; A \;+\; Bx$$

Como se puede apreciar en la ecuación (9) y haciendo la semejanza de términos, entonces $H = A + Bx$ es la función de una recta, por lo tanto es semejante a la regresión lineal y el problema se resuelve por mínimos cuadrados, siendo:

$$(x, y) = (\log(x), \log(y)) \qquad (10)$$

3.4 Regresión exponencial

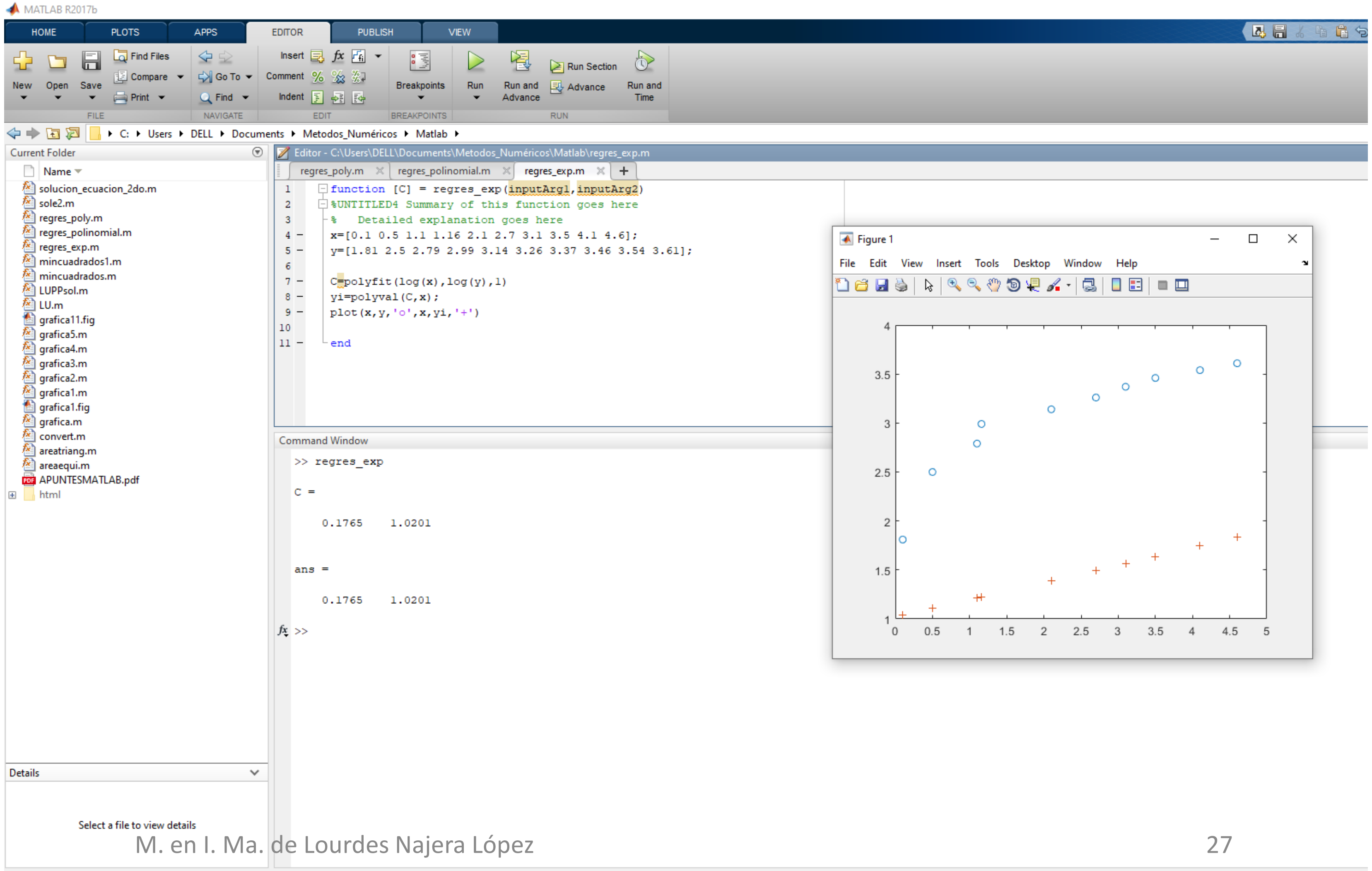
Para calcular los coeficientes en Matlab se procede de la siguiente manera:

C=polyfit(log(x),log(y),1), resultando que α=C(1) y β=exp(C(2))

3.4 Regresión exponencial

Ejercicio: Ajustar la serie siguiente, por medio de una de una regresión exponencial:

x	f(x)
0.1	1.81
0.5	2.5
1.1	2.79
1.16	2.99
2.1	3.14
2.7	3.26
3.1	3.37
3.5	3.46
4.1	3.54
4.6	3.61



3.4 Regresión exponencial

Ejercicio

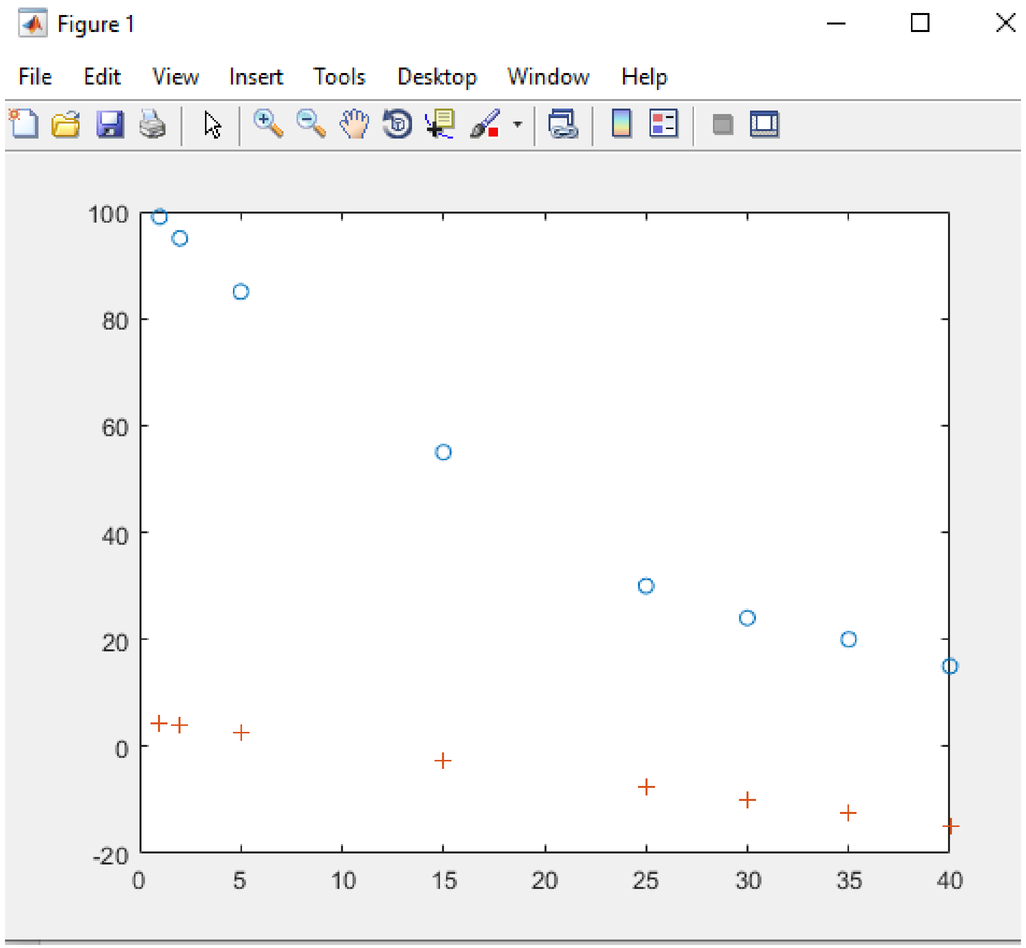
x	1	2	5	15	25	30	35	40
f(x)	99	95	85	55	30	24	20	15

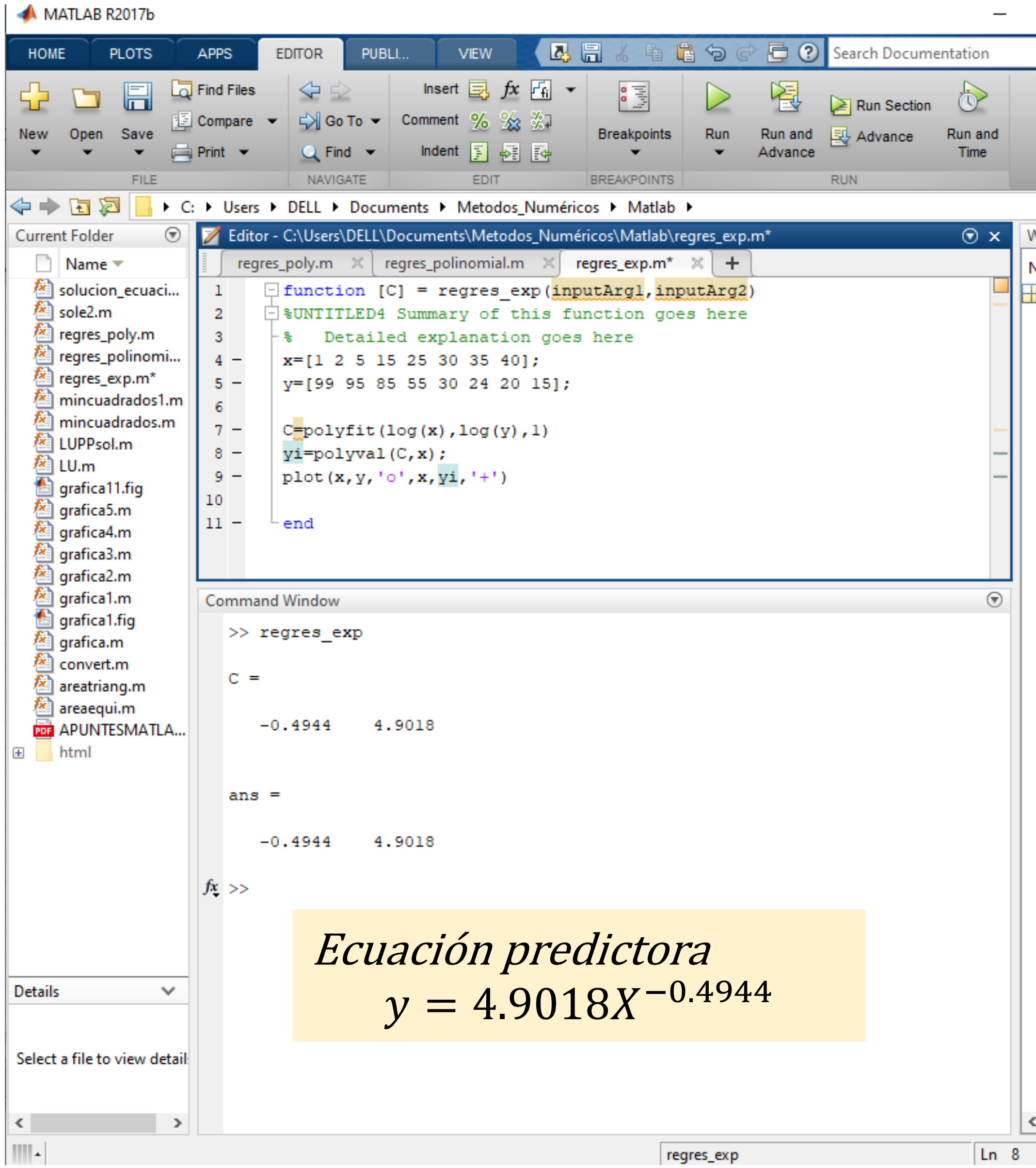
- Ajustar una curva exponencial aplicando el método de mínimos cuadrados.
- Calcular la ecuación predictora
- Graficar la ecuación predictora

Código **Matlab**

```
function [C] = 
regres_exp(inputArg1,inputArg2)
%Regresión exponencial
%
x=[1 2 5 15 25 30 35 40];
y=[99 95 85 55 30 24 20 15];

C=polyfit(log(x),log(y),1)
yi=polyval(C,x);
plot(x,y,'o',x,yi,'+')

end
```

3.4 Regresión exponencial





Ecuación predictora

$$y = 4.9018X^{-0.4944}$$

Bibliografía

C. Chapra Steven y P. Canale Raymond. (2006). Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales, 5ª. Edición. México, McGraw-Hill,

L. Burden Richard, (2002), Análisis Numérico, 7ª Edición. México. Thomson.

Nakamura Schoichiro. (1996). Métodos numéricos aplicados con software. México. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Nakamura Schoichiro. (1997). Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB. 1ª Edición. México. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Nieves Hurtado Antonio y Domínguez Sánchez Federico. (1995). Métodos numéricos aplicados a la ingeniería. 1ª Edición. México. Compañía editorial continental S.A. de C.V. (C.E.C.S.A).

Kincaid David. (1996). Análisis Numérico. México. Addison Wesley Iberoamericana, ,

J. Maron Melvin y J. López Robert. (1995). Análisis Numérico: Un enfoque práctico, 1ª Edición. México. Compañía editorial continental S.A. de C.V. (C.E.C.S.A).