

Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ingeniería

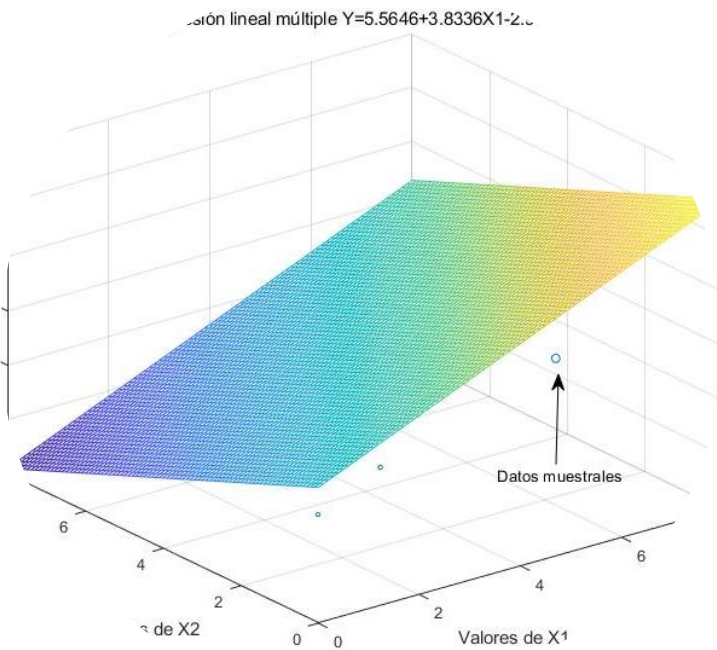
Licenciatura: *Ingeniería Civil*

Unidad de Aprendizaje: *Métodos Numéricos*

Unidad de competencia 3: *Ajuste de curvas*

Elaboró: M. en I. Ma. de Lourdes Najera López

Septiembre, 2019.



Ubicación de la asignatura de Métodos Numéricos dentro del programa de Ingeniería Civil

Universidad Autónoma del Estado de México Facultad de Ingeniería

Plan de estudios F2 de Ingeniería Civil

TRAYECTORIA IDEAL: 10 PERIODOS

Núcleo Básico

Núcleo Sustantivo

Núcleo Integral

Periodo	Asignatura	HT	HP	TH	C
1	Algebra Superior L41001 (4+0) 8	4.5	0	4.5	0
1	Cálculo 1 L41010 (4.5+0) 9	4.5	0	4.5	0
1	Geometría Analítica L41011 (4+0) 8	4	0	4	0
1	Progración Básica L41304 (4+0) 8	4	0	4	0
1	Sociedad e Ingeniería L41305 (3+0) 6	3	0	3	0
2	Algebra Lineal L41002 (3+0) 6	3	0	3	0
2	Cálculo 2 L41107 (4.5+0) 9	4.5	0	4.5	0
2	Estática L41301 (4+0) 8	4	0	4	0
2	Lenguaje Gráfico L41308 (0+6) 6	0	6	0	6
2	Epistemología de la Ciencia L41345 (3+0) 6	3	0	3	0
3	Probabilidad y Estadística L41003 (3+0) 6	3	0	3	0
3	Cálculo 3 L41109 (3+0) 6	3	0	3	0
3	Métodos Numéricos L41343 (3+0) 6	3	0	3	0
3	Dinámica L41344 (4+0) 8	4	0	4	0
3	Físico Químico L41302 (4+0) 8	4	0	4	0
3	Inglés C1 L00062 (2+2) 6	2	2	2	2
4	Métodos Estadísticos L41303 (3+0) 6	3	0	3	0
4	Física L41307 (3+1) 7	3	1	3	1
4	Teoría de la Técnica L41306 (3+0) 6	3	0	3	0
4	Mecánica de Materiales L41309 (4.5+0) 9	4.5	0	4.5	0
4	Topografía L41310 (3+4) 10	3	4	3	4
4	Inglés C2 L00070 (2+2) 6	2	2	2	2
5	Sistemas de Ingeniería Civil I L41310 (4+0) 8	4	0	4	0
5	Economía L41312 (4+0) 8	4	0	4	0
5	Mecánica del Medio L41306 (4+0) 8	4	0	4	0
5	Teoría Estructural L41316 (4+0) 8	4	0	4	0
5	Materiales para Ingeniería Civil L41313 (4+1) 9	4	1	4	1
5	Geología L41318 (4+0) 8	4	0	4	0
6	Sistemas de Ingeniería Civil II L41314 (4+0) 8	4	0	4	0
6	Hidráulica 1 L41315 (4+1) 9	4	1	4	1
6	Análisis Estructural I L41317 (4+0) 8	4	0	4	0
6	Ingeniería Económica L41319 (4+0) 8	4	0	4	0
6	Instalaciones L41324 (4+0) 8	4	0	4	0
6	Geotecnia 1 L41323 (4+1) 9	4	1	4	1
7	Hidrología L41320 (4+0) 8	4	0	4	0
7	Hidráulica 2 L41321 (4+1) 9	4	1	4	1
7	Análisis Estructural 2 L41322 (4+0) 8	4	0	4	0
7	Diseño de Concreto L41327 (4+0) 8	4	0	4	0
7	Construcción 1 L41329 (4+0) 8	4	0	4	0
7	Geotecnia 2 L41328 (4+1) 9	4	1	4	1
8	Unidad de Acentuación 1 L41347 (3+0) 6	3	0	3	0
8	Evaluación de Proyectos L41347 (4+0) 8	4	0	4	0
8	Asentamiento de Agua Potable y A.C. L41326 (4+0) 8	4	0	4	0
8	Diseño de Acero L41330 (4+0) 8	4	0	4	0
8	Construcción 2 L41329 (4+0) 8	4	0	4	0
8	Transporte L41332 (3+2) 8	3	2	3	2
9	Unidad de Acentuación 2 L41334 (3+0) 6	3	0	3	0
9	Obras Hidráulicas L41334 (4+0) 8	4	0	4	0
9	Sistemas de Tratamiento L41335 (4+1) 9	4	1	4	1
9	Impacto Ambiental L41333 (4+0) 8	4	0	4	0
9	Legislación y Construcción L41337 (4+0) 8	4	0	4	0
9	Vías Terrestres L41331 (4+1) 9	4	1	4	1
10	Unidad de Acentuación 3 L41336 (3+0) 6	3	0	3	0
10	Aprovechamientos Hidráulicos L41336 (4+0) 8	4	0	4	0
10	Seminario de Investigación L41339 (3+0) 6	3	0	3	0
10	Administración de la Construcción L41338 (4+0) 8	4	0	4	0

HT= Horas Teóricas

HP= Horas Prácticas

TH= Horas Totales

C= Créditos

TOTAL= 57 Unidades de Aprendizaje

HT	HP	TH	C
19.5	0.0	19.5	39.0
18.5	6.0	24.5	43.0
19.0	2.0	21.0	40.0
18.5	7.0	25.5	44.0
24.0	1.0	25.0	49.0
24.0	2.0	26.0	50.0
24.0	2.0	26.0	50.0
22.0	2.0	24.0	46.0
23.0	2.0	25.0	48.0
14.0	0.0	14.0	28.0
206.5	24.0	230.5	437.0

CLAVE	UNIDAD DE APRENDIZAJE	TIPO	HT	HP	TH	C
L41348	Puentes	Opcional	3		6	
L41349	Vivienda	Opcional	3		6	
L41350	Concreto Presforzado	Opcional	3		6	
L41351	Proyecto Terminal	Opcional	3		6	
			total de créditos obligatorios = 18			

CLAVE	UNIDAD DE APRENDIZAJE	TIPO	HT	HP	TH	C
L41352	Hidráulica de Ríos	Opcional	3		6	
L41358	Disposición de residuos	Opcional	3		6	
L41359	Elementos Físicos	Opcional	3		6	
L41360	Sistemas de riego y drenaje	Opcional	3		6	
			total de créditos obligatorios = 18			

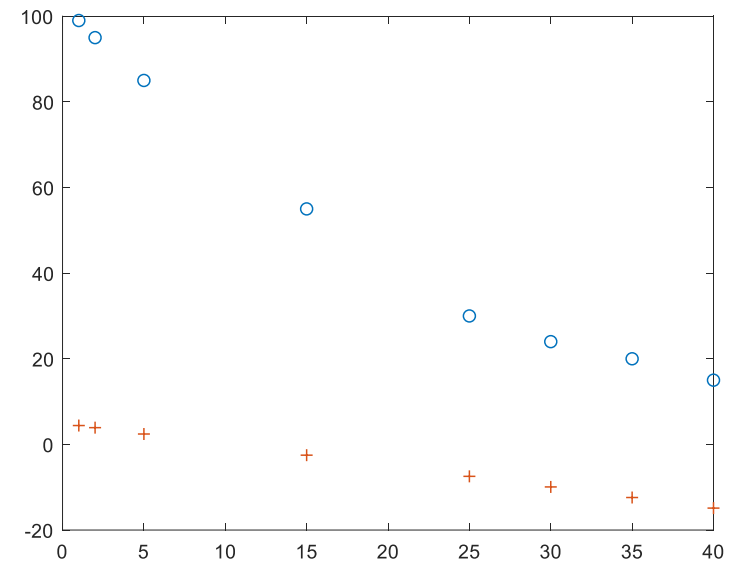
CLAVE	UNIDAD DE APRENDIZAJE	TIPO	HT	HP	TH	C
L41353	Carreteras	Opcional	3		6	
L41354	Proyecto ejecutivo de carreteras	Opcional	3		6	
L41361	Análisis de elementos para el diseño de estrategias competitivas	Opcional	3		6	
L41362	Software de transporte	Opcional	3		6	
			total de créditos obligatorios = 18			

CLAVE	UNIDAD DE APRENDIZAJE	TIPO	HT	HP	TH	C
L41355	Cálculo de variable compleja	Opcional	3		6	
L41356	Gestión de Proyectos	Opcional	3		6	
L41363	Paquetes Computacionales	Opcional	3		6	
L41357	Desarrollo Sustentable	Opcional	3		6	
			total de créditos obligatorios = 18			

Unidad de competencia 3. Ajuste de curvas

OBJETIVO

Determinar las curvas de regresión por el método de los mínimos cuadrados, de manera manual y con el apoyo del desarrollo de software.



Contenido

3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados y confiabilidad del ajuste mediante evaluaciones gráficas y cuantitativas

Regresión lineal simple $y = a_0 + a_1x + E$

3.2 Regresión lineal múltiple $y = a_0 + a_1x_1 + \cdots a_nx_n + E$

3.3 Regresión polinomial $y = a_0 + a_1x^1 + \cdots a_nx^n + E$

3.4 Regresión exponencial $y = ae^{bx}$

PRESENTACIÓN

En el campo profesional de la ingeniería se requiere utilizar modelos matemáticos para la predicción y explicación de ciertos fenómenos, por tal motivo, la unidad de aprendizaje de Métodos Numéricos es fundamental para la formación de profesionistas en la licenciatura de Ingeniería Civil, ya que son técnicas mediante las cuales es posible plantear soluciones a los problemas, a través de modelos matemáticos en conjunto con algoritmos para llevar a cabo un número necesario de cálculos.

PRESENTACIÓN

Para que los alumnos logren lo anterior, se utilizan las siguientes estrategias de aprendizaje:

1. Enseñanza directa: El profesor describe los conceptos fundamentales de la teoría de regresión lineal, múltiple, polinomial y exponencial.
2. El alumno junto con el profesor plantea los problemas y da solución en clase.
3. Se desarrollan algoritmos para la solución de problemas relacionados con ajuste de curvas.
4. El profesor propone series de ejercicios extra clase al alumno para su solución a mano y por medio de algoritmos en Matlab.

Introducción

Se debe estudiar métodos numéricos debido a que son algoritmos que establecen la secuencia de solución de sistemas de ecuaciones de gran tamaño, con características de ser no lineales y con geometrías complicadas, ya que así son los problemas reales y su solución es muy complicada por métodos analíticos y en ocasiones es imposible.

El futuro ingeniero debe saber pronosticar un fenómeno mediante un modelo de regresión lineal, múltiple, polinomial o exponencial, utilizando un software sofisticado que permita los cálculos numéricos en un intervalo de tiempo pequeño.

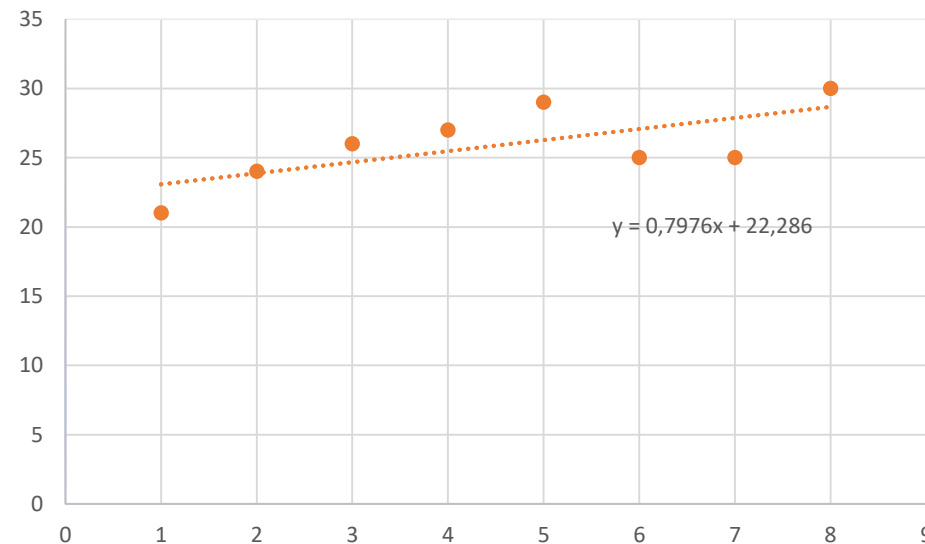
3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados y confiabilidad del ajuste mediante evaluaciones gráficas y cuantitativas

- El **ajuste de curvas** se utiliza cuando se tiene una serie de datos calculados y:
 - se desea conocer valores intermedios no conocidos
 - También en aquellos casos en que se desee una versión simplificada de una función que ajuste los datos
 - Para derivar o pronosticar nuevos valores
- El significado **de mínimos cuadrados** consiste en obtener la recta que ajuste a una serie de datos numéricos, con la condición que la suma de los cuadrados de los residuos sea la mínima posible.
- Residuo=distancia entre el punto ajustado al punto real

3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados

Se procede a obtener un modelo geométrico, que realice la suma de mínimos cuadrados de las distancias entre la curva y los puntos.

El modo más simple de ajustar una curva a un conjunto de datos, es trazar los puntos y unirlos por una línea recta.



3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados

Fundamentos matemáticos

$$Y = C_1X + C_2 + \varepsilon \quad (1)$$

Donde C_1 y C_2 son coeficientes que interceptan al eje de las abscisas y ε es el error o residuo entre el modelo y las observaciones, con:

$$C_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (2)$$

$$C_2 = \frac{\sum Y_i}{n} - A \frac{\sum X_i}{n} \quad (3)$$

$$\varepsilon = \sum (Y_i - C_2 - C_1 X_i)^2 \quad (4)$$

3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados

Ejemplo: Hallar la línea de regresión que ajuste mejor la serie de datos siguiente:

n	X_i	Y_i	$X_i Y_i$	X_i^2	Error
1	1.0	2.0	2.0	10.	0.0144
2	1.5	3.2	4.8	2.25	0.0169
3	2.0	4.1	8.2	4.0	0.0064
4	2.5	4.9	12.25	6.25	0.0049
5	3.0	5.9	17.7	9.0	0.0004
Total	10.0	20.10	44.95	22.50	0.0430

Con las expresiones (2) y (3), se obtiene C_1 y C_2 , respectivamente:

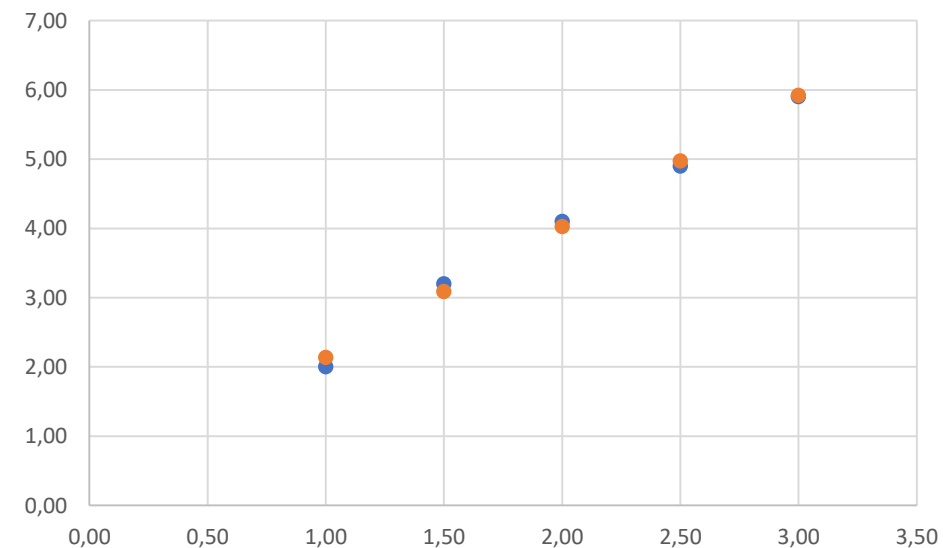
$$C_1 = \frac{5 \cdot 44.95 - 10.00 \cdot 20.10}{5 \cdot 22.50 - 10^2} = 1.90$$

$$C_2 = \frac{20.10}{5} - 1.90 \frac{10.0}{5} = 0.22$$

$$\varepsilon = 0.0430$$

Finalmente la recta ajustada es:

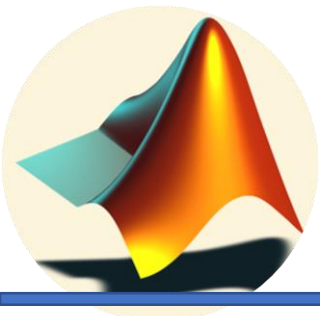
$$Y = 1.90X + 0.22 + \varepsilon$$



3.1 Regresión lineal por mínimos cuadrados

En **Matlab** la regresión se calcula usando la siguiente sintaxis:

$C = \text{polyfit}(x, y, 1)$, con x y y son los vectores que contienen los datos que se desean ajustar



The screenshot displays the MATLAB R2017b environment. The top menu bar includes HOME, PLOTS, APPS, EDITOR, PUBLISH, and VIEW. The toolbar contains icons for New, Open, Save, Find Files, Compare, Go To, Find, Insert, Comment, Indent, Breakpoints, Run, Run and Advance, Run Section, Advance, and Run and Time. The current folder is C:\Program Files\MATLAB\R2017b\bin, showing files like worker.bat, mw_mpiexec.bat, mexutils.pm, mexsetup.pm, mexext.bat, mex.pl, mex.bat, mcc.bat, mbuild.bat, matlab.exe, lcdata_utf8.xml, lcdata.xsd, lcdata.xml, and deploytool.bat. The editor window is titled 'Editor - Untitled' and shows a single line of code. The command window shows the following execution:

```
>> x=[1,1.5,2,2.5,3]
x =
    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000
>> y=[2,3.2,4.1,4.9,5.9]
y =
    2.0000    3.2000    4.1000    4.9000    5.9000
>> C=polyfit(x,y,1)
C =
    1.9000    0.2200
```

3.2 Regresión lineal múltiple

Cuando se tienen datos de n variables independientes y una dependiente, se usa un plano n -dimensional para hacer la aproximación, esto es:

$$Y = C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \varepsilon \quad (5)$$

En Matlab

$C = \text{inv}(A) * y$

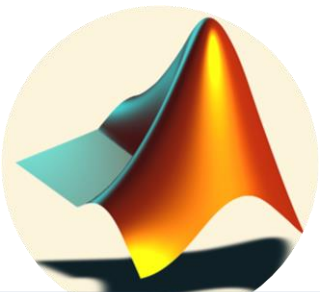
$C = A \backslash y$

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

A

C

y



3.2 Regresión lineal múltiple

Utilizando las expresiones (6), se presenta la tabla y posteriormente e los valores de A , y y C .

n	Y	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	X_1Y	X_2Y
1	6	0	0	0	0	0	0	0
2	8	2	1	4	1	2	16	8
3	9	2	2	4	4	4	18	18
4	1	1	3	1	9	3	1	3
5	3	4	6	16	36	24	12	18
6	27	7	2	49	4	14	189	54
SUMAS	54	16	14	74	54	47	236	101

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 14 \\ 16 & 74 & 47 \\ 14 & 47 & 54 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 54 \\ 236 \\ 101 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

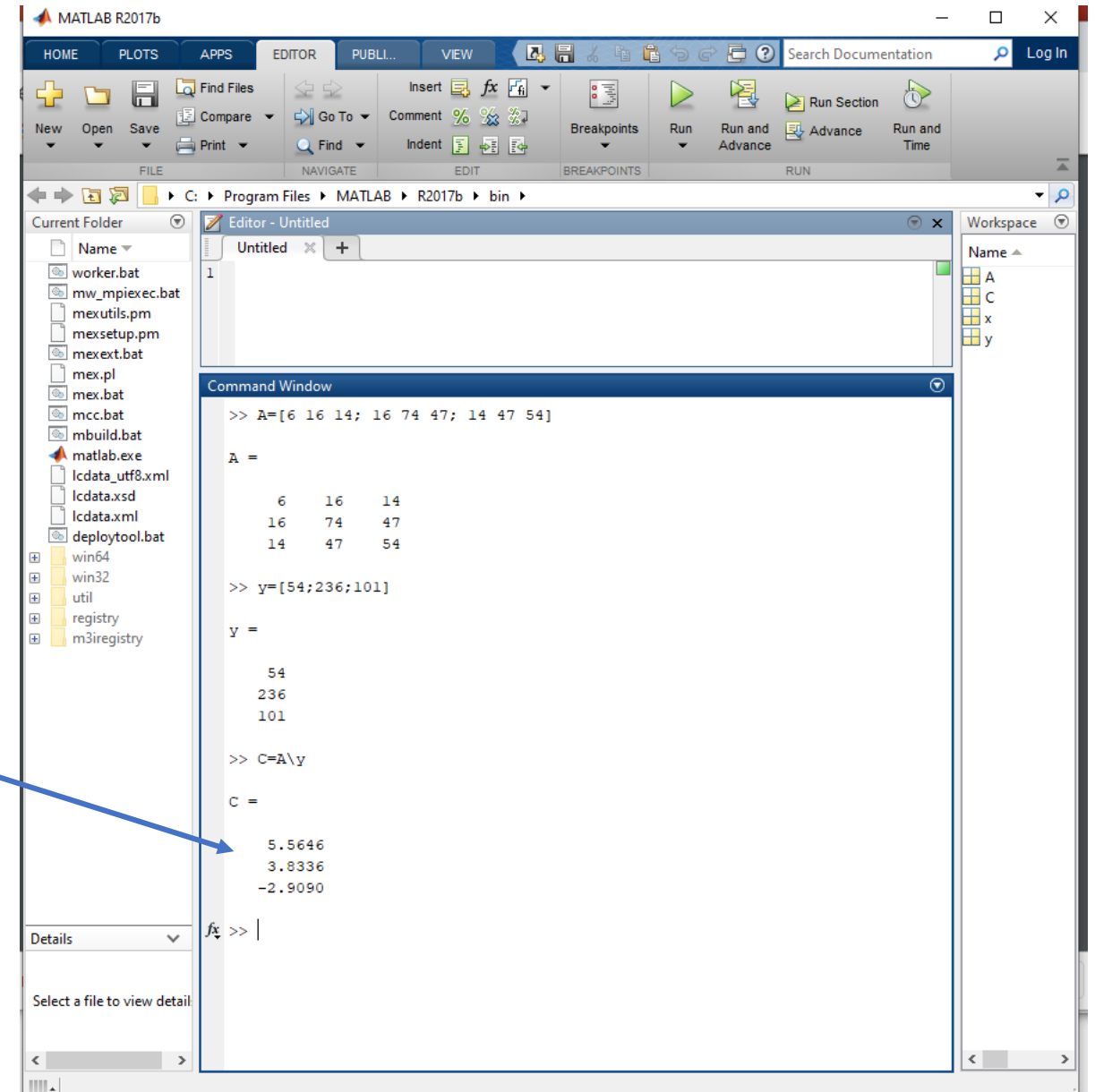
Finalmente:

$$C = A \setminus y = \begin{bmatrix} 5.5646 \\ 3.8336 \\ -2.9090 \end{bmatrix}$$

3.2 Regresión lineal múltiple

Calculo de los coeficientes en **Matlab**

$$C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$



The screenshot shows the MATLAB R2017b environment. The Command Window contains the following code and output:

```
>> A=[6 16 14; 16 74 47; 14 47 54]
A =
     6    16    14
    16    74    47
    14    47    54

>> y=[54;236;101]
y =
     54
    236
    101

>> C=A\y
C =
     5.5646
     3.8336
    -2.9090

fx >> |
```

The Workspace window on the right shows variables A, C, x, and y. A blue arrow points from the matrix C in the equation to the output of the MATLAB calculation.

MATLAB R2017b

HOME PLOTS APPS EDITOR PUBLISH VIEW

Insert fx f1
Comment %
Indent

Breakpoints Run Run and Advance Run Section Advance Run and Time

FILE NAVIGATE EDIT BREAKPOINTS RUN

C:\Program Files\MATLAB\R2017b\bin

Current Folder

Editor - Untitled

Untitled x +

1

Command Window

```
>> A=[6 16 14; 16 74 47; 14 47 54]

A =

     6    16    14
    16    74    47
    14    47    54

>> y=[54;236;101]

y =

    54
   236
   101

>> C=A\y

C =

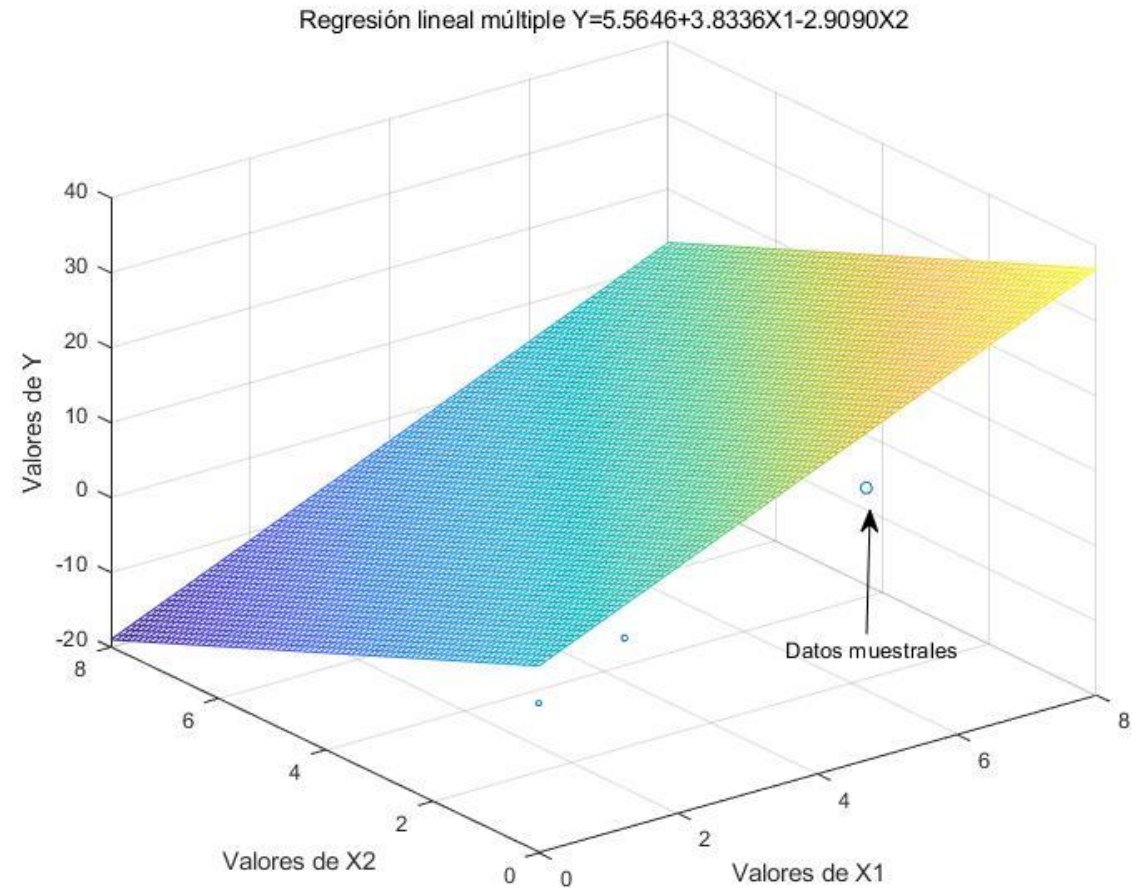
    5.5646
    3.8336
   -2.9090

>> x=0:0.1:8; % Se generan los puntos en el eje x
>> y=x; % Igualmente para el eje y
>> [X,Y]=meshgrid(x,y); % Se crea el espacio tridimensional
>> z=5+3.99251.*X-3.*Y; % Cálculo de los valores de z
>> mesh(x,Y,z) %Realiza la imagen del plano 3D
>> hold on %que no se borre la gráfica
>> x1=[0 2 2 1 4 7]; %Se trazan los datos reales del eje x
>> X1=[0 2 2 1 4 7]; %Se trazan los datos reales del eje x
>> X2=[0 1 2 3 6 3]; % Se trazan los datos reales del eje y
>> Y1=[6 8 9 1 3 27]; % Datos originales de Y
>> scatter(X1,X2,Y1); %Trazo de la gráfica de los datos originales
>> r=max(y-A*C) % Error con respecto a los datos muestrales
```

Details

Select a file to view details

3.2 Regresión lineal múltiple



3.3 Regresión polinomial

El caso más general es usar polinomios de n –ésimo grado para aproximar la función deseada.

Se tiene el polinomio de grado n :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (7)$$

Para este caso se utiliza **Matlab**, para hacer el proceso más rápido y sencillo para la aproximación de una serie de puntos y calcular los coeficientes del polinomio.

3.3 Regresión polinomial

Proceso a seguir en Matlab

1. Crear dos vectores fila, uno para X y otro para y
2. Usar el comando `C=polyfit(X,y,n)`
3. Para calcular el polinomio de máximo grado podemos hallar n con el comando `length(X)-1`
4. Utilizar el polinomio para evaluar nuevos valores de datos, ya sea dentro del rango con `Min(X)` y `Max(X)`, y fuera del intervalo con `polyval(C,xi)`

3.3 Regresión polinomial

Ejemplo: Ajustar los siguientes datos a un polinomio

x	0.1	0.4	0.5	0.7	0.7	0.9
f(x)	0.61	0.92	0.99	1.52	1.47	2.03

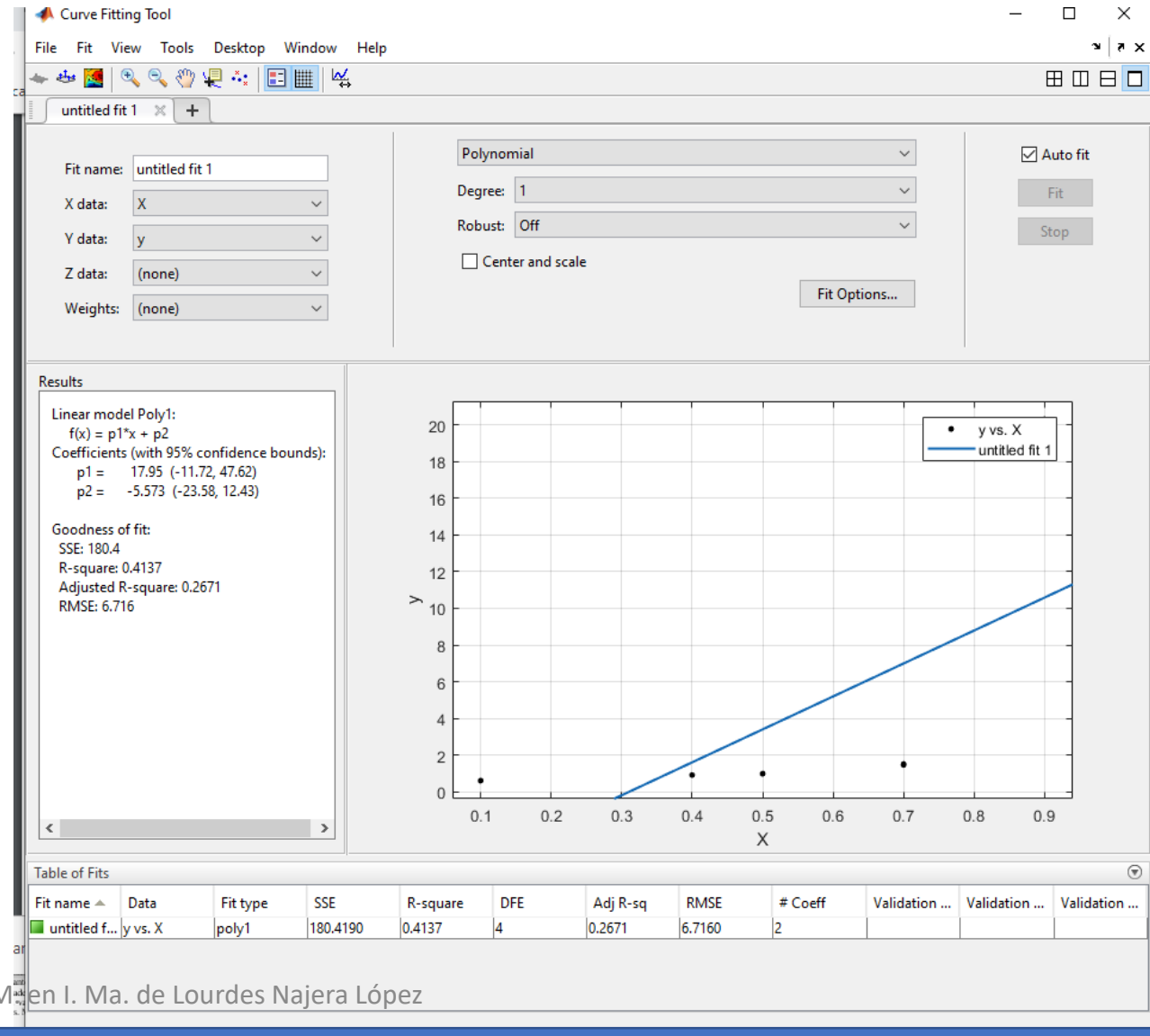
Como se tienen 6 puntos, se puede ajustar a un polinomio de grado 5 o menor.

Algoritmo en **Matlab:**

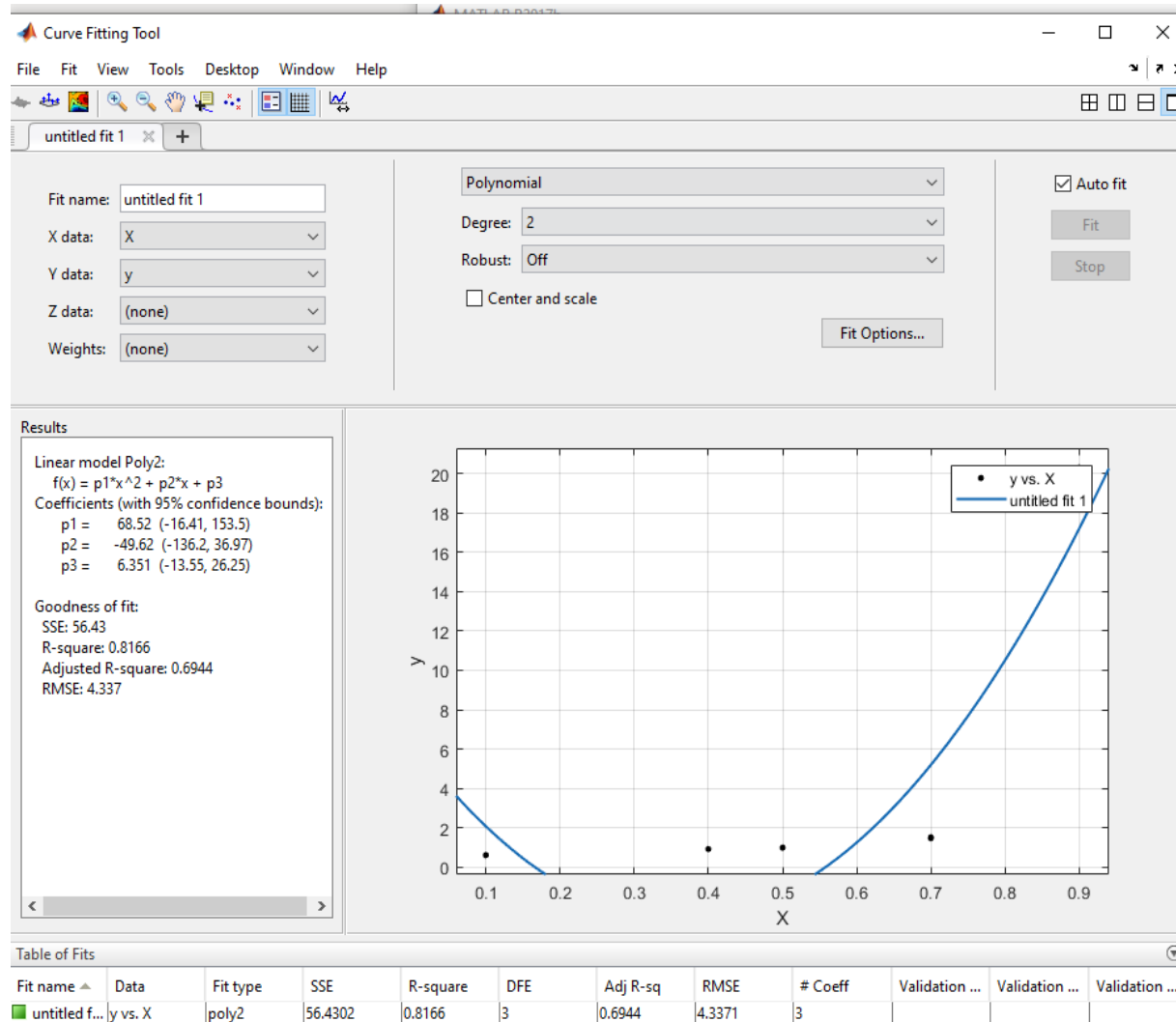
```
function [X y] =  
regres_polinomial(inputArg1,inputArg2)  
  
X=[0.1 0.4 0.5 0.7 0.7 0.9];  
y=[0.61 0.92 0.99 1.52 1.47 20.3];  
C=polyfit(X,y,3);  
yi=polyval(C,X);  
plot(X,y,'o',X,yi,'+')  
plot(X,y,LineStyle)  
  
end
```

3.3 Regresión polinomial

Primer grado

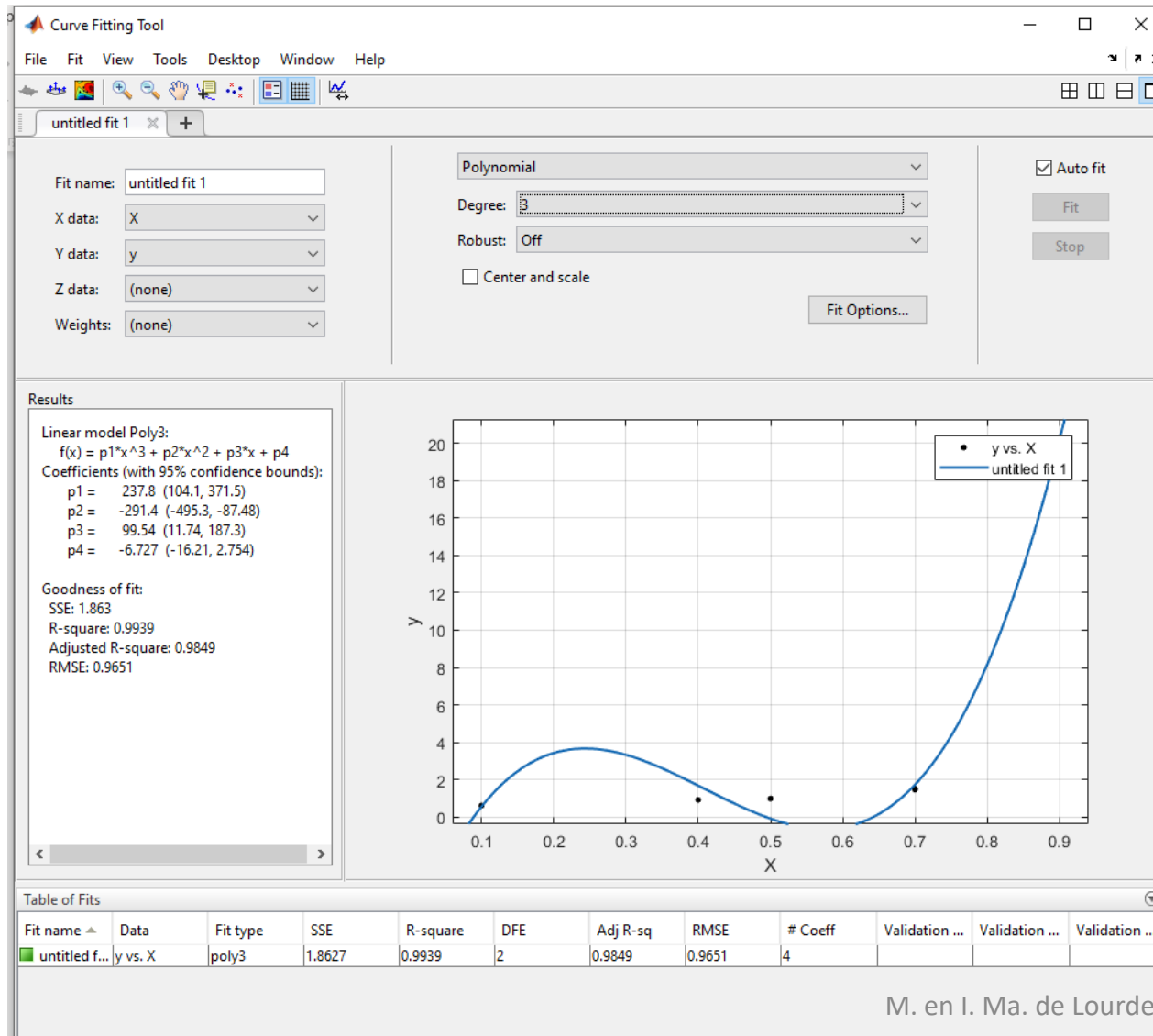


3.3 Regresión polinomial



Segundo grado

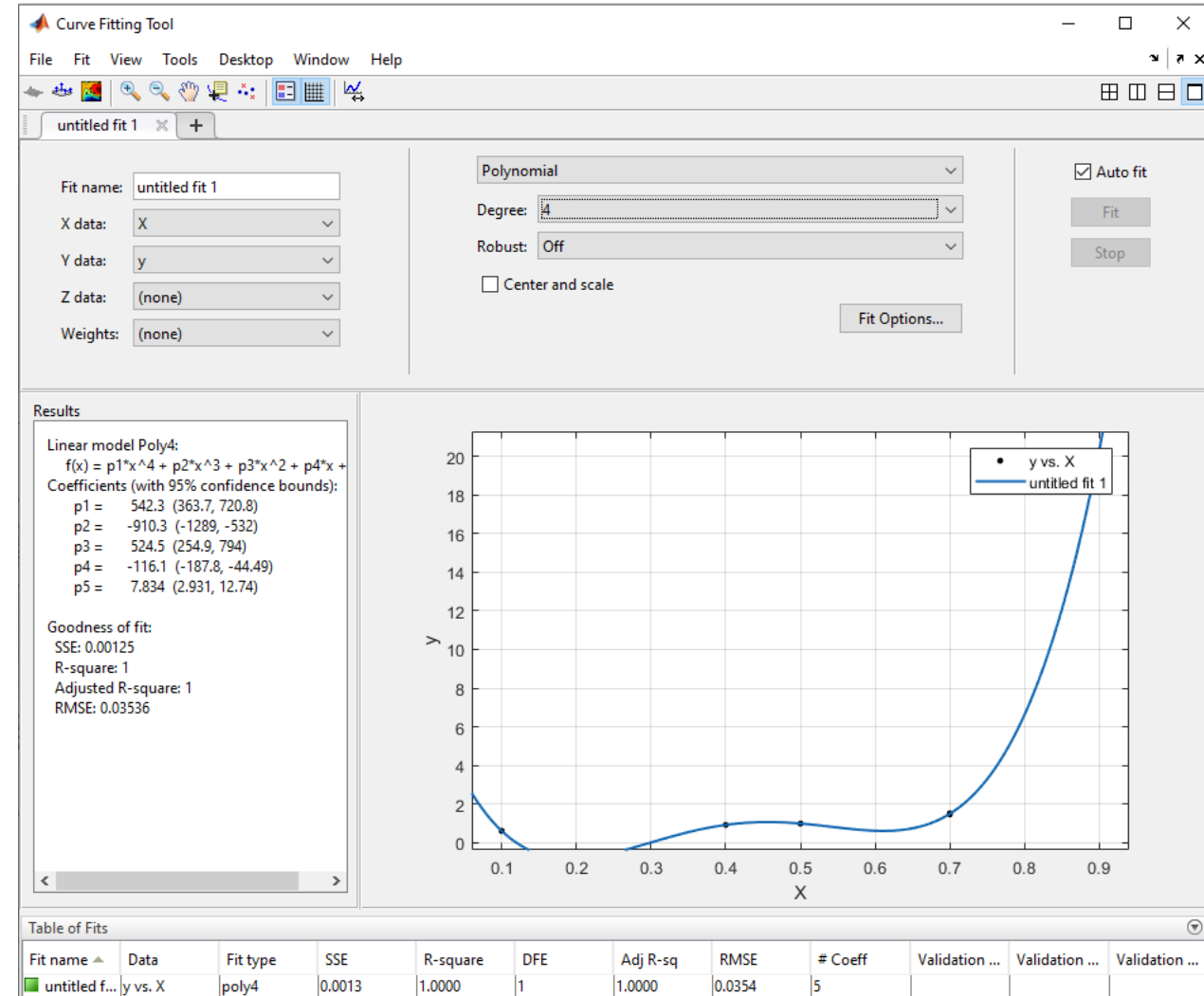
3.3 Regresión polinomial



Tercer grado

3.3 Regresión polinomial

Cuarto grado



3.4 Regresión exponencial

Cuando los datos observados no siguen comportamiento lineales, es conveniente ajustarlos por medio de funciones exponenciales, como se muestra a continuación:

$$y = \beta X^\alpha \quad (8)$$

Siendo β y α valores a determinar, por medio de las leyes de los logaritmos:

$$\ln(y) = \ln(\beta X^\alpha)$$

$$\ln(y) = \ln(\beta) + \ln(X^\alpha)$$

3.4 Regresión exponencial

$$\ln(y) = \ln(\beta) + \alpha \ln(X) \quad (9)$$

$$H = A + Bx$$

Como se puede apreciar en la ecuación (9) y haciendo la semejanza de términos, entonces $H = A + Bx$ es la función de una recta, por lo tanto es semejante a la regresión lineal y el problema se resuelve por mínimos cuadrados, siendo:

$$(x, y) = (\log(x), \log(y)) \quad (10)$$

3.4 Regresión exponencial

Para calcular los coeficientes en **Matlab** se procede de la siguiente manera:

$C = \text{polyfit}(\log(x), \log(y), 1)$, resultando que $\alpha = C(1)$ y $\beta = \exp(C(2))$

3.4 Regresión exponencial

Ejercicio: Ajustar la serie siguiente, por medio de una de una regresión exponencial:

x	f(x)
0.1	1.81
0.5	2.5
1.1	2.79
1.16	2.99
2.1	3.14
2.7	3.26
3.1	3.37
3.5	3.46
4.1	3.54
4.6	3.61

The image shows the MATLAB R2017b environment. The Editor window displays the following code for the `regres_exp` function:

```
function [C] = regres_exp(inputArg1, inputArg2)
% Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
x=[0.1 0.5 1.1 1.16 2.1 2.7 3.1 3.5 4.1 4.6];
y=[1.81 2.5 2.79 2.99 3.14 3.26 3.37 3.46 3.54 3.61];
C=polyfit(log(x), log(y), 1)
yi=polyval(C, x);
plot(x, y, 'o', x, yi, '+')
```

The Command Window shows the execution of the function:

```
>> regres_exp
C =
    0.1765    1.0201
ans =
    0.1765    1.0201
fx >>
```

The Figure 1 window displays a plot of the data points (blue circles) and the fitted exponential curve (red plus signs). The x-axis ranges from 0 to 5, and the y-axis ranges from 1 to 4.

3.4 Regresión exponencial

Ejercicio

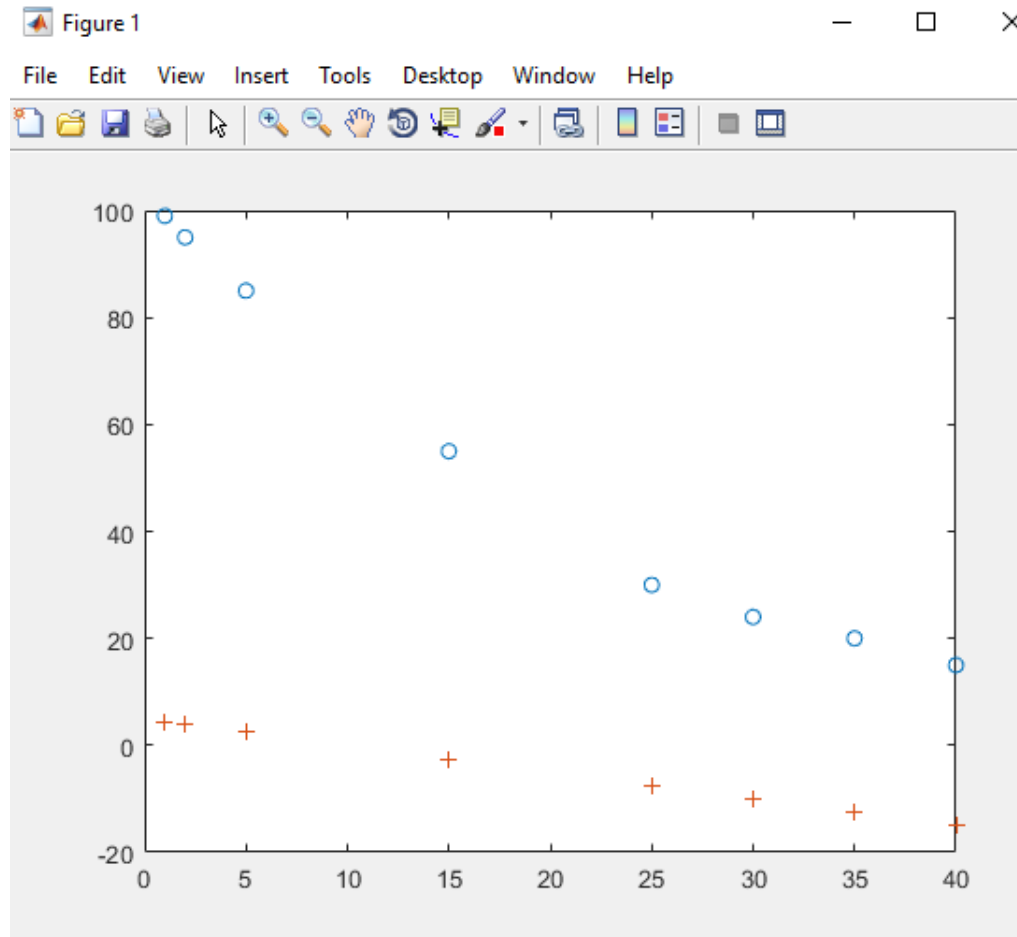
x	1	2	5	15	25	30	35	40
f(x)	99	95	85	55	30	24	20	15

- ❖ Ajustar una curva exponencial aplicando el método de mínimos cuadrados.
- ❖ Calcular la ecuación predictora
- ❖ Graficar la ecuación predictora

Código **Matlab**

```
function [C] =  
regres_exp(inputArg1,inputArg2)  
%Regresión exponencial  
%  
x=[1 2 5 15 25 30 35 40];  
y=[99 95 85 55 30 24 20 15];  
  
C=polyfit(log(x),log(y),1)  
yi=polyval(C,x);  
plot(x,y,'o',x,yi,'+')  
  
end
```

3.4 Regresión exponencial



```
function [C] = regres_exp(inputArg1, inputArg2)
%UNTITLED4 Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
x=[1 2 5 15 25 30 35 40];
y=[99 95 85 55 30 24 20 15];
C=polyfit(log(x),log(y),1)
yi=polyval(C,x);
plot(x,y,'o',x,yi,'+')
end
```

Command Window

```
>> regres_exp
C =
    -0.4944    4.9018
ans =
    -0.4944    4.9018
fx >>
```

Ecuación predictora
 $y = 4.9018X^{-0.4944}$

Bibliografía

- C. Chapra Steven y P. Canale Raymond. (2006). Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales, 5ª. Edición. México, McGraw-Hill,
- L. Burden Richard, (2002), Análisis Numérico, 7ª Edición. México. Thomson.
- Nakamura Schoichiro. (1996). Métodos numéricos aplicados con software. México. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Nakamura Schoichiro. (1997). Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB. 1ª Edición. México. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Nieves Hurtado Antonio y Domínguez Sánchez Federico. (1995). Métodos numéricos aplicados a la ingeniería. 1ª Edición. México. Compañía editorial continental S.A. de C.V. (C.E.C.S.A).
- Kincaid David. (1996). Análisis Numérico. México. Addison Wesley Iberoamericana, ,
- J. Maron Melvin y J. López Robert. (1995). Análisis Numérico: Un enfoque práctico, 1ª Edición. México. Compañía editorial continental S.A. de C.V. (C.E.C.S.A).