Problema de Generación de Columnas

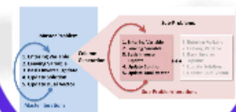
Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

Introducción

Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe



Ejemplo

Cierre de la clase

¿Preguntas?

Problema de Generación de Columnas

Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

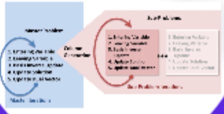
Presentación del material

Introducción

Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe



Ejemplo

Cierre de la clase

¿Preguntas?

Presentación del material

UNIDAD DE APRENDIZAJE:
TÓPICOS DE OPTIMIZACIÓN
(Tema: Problema de Generación de columnas)
CLAVE: MSU113

PROGRAMA: **MAESTRÍA EN INGENIERÍA DE LA CADENA DE SUMINISTRO**

TIPO DE MATERIAL: **VISUAL**

ORGANISMO EN QUE SE IMPARTE: **FACULTAD DE INGENIERÍA**

FECHA DE ELABORACIÓN: **2019-B**

ELABORÓ: **DR. JAVIER GARCÍA GUTIÉRREZ**

JUSTIFICACIÓN

El presente material se elaboró con la intención de apoyar al docente al impartir el tema de **Generación de Columnas** de la Unidad de Aprendizaje de **Tópicos de Optimización**, y así cumplir con una de las competencias genéricas de esta Unidad de Aprendizaje. El material visual permite a los estudiantes facilitar su aprendizaje y aprovechar el tiempo dentro del salón de clases.

PRESENTACIÓN

Debido a que las técnicas de Optimización facilitan la solución de problemas asociados a la mejor administración de los recursos, se utilizan las diversas herramientas de este campo para dar soporte y mejor visión a la toma de decisiones en el ámbito industrial, empresarial y en el sector público.

PROPÓSITO GENERAL DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Analizar y precisar las principales técnicas de formulación de modelos de optimización entera y los principales enfoques generales para resolver problemas de optimización entera y combinatoria.

COMPETENCIAS GENÉRICAS DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al concluir el curso, el alumno podrá:

- Formular problemas reales de optimización entera y combinatoria dentro del ámbito de la Cadena de Suministro.
- Utilizar los principales enfoques algorítimos generales exactos y heurísticos para dar solución a problemas de optimización entera y combinatoria.
- Utilizar los solvers más eficientes implementados en software de optimización para encontrar respuestas en un margen de tiempo razonable para distintos entornos de decisiones.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- Bertsimas, D.; Weismantel, R. (2005). **Optimization over Integers**, Dynamic Ideas.
- Blum, C.; Roli, A.; Sampels, M. (2010). **Hybrid Metaheuristics: An Emerging Approach to Optimization** (Studies in Computational Intelligence), Springer.
- Chen, D.-S.; Batson, R.G.; Dang, Y. (2010). **Applied Integer Programming: Modeling and Solution**, Wiley.
- Cook, W.J.; Cunningham, W.H.; Pulleyblank, W.R.; Schrijver, A. (1998). **Combinatorial Optimization**, Wiley-Interscience.
- Maniezzo, V.; Stützle, T.; Voß, S. (2009). **Matheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming** (Annals of Information Systems), Springer.
- Martin, R.K. (1998). **Large Scale Linear and Integer Optimization: A Unified Approach**, Springer.
- Nowak, I. (2005). **Relaxation and Decomposition Methods for Mixed Integer Nonlinear Programming** (International Series of Numerical Mathematics), Birkhäuser.

Introducción

Objetivos de la sesión

1. Motivación y entorno del problema de generación de cortes
2. Problema de patrón de cortes, y su caracterización
3. Formulación matemática
4. Algoritmo de generación de columnas (Dantzing-Wolf)
5. Resolución de un ejemplo a optimalidad

Introducción

Problema de Generación de Columnas

Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

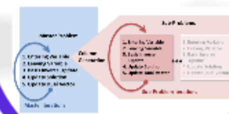

Presentación del material

Introducción

Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe



Ejemplo

Cierre de la clase

¿Preguntas?

Ejemplo motivación

Ejemplo

En la edificación de un elemento estructural de concreto en una obra civil, en la explosión de insumos se lograron identificar 6 tipos de patrones de varillas, requiriéndose lo siguiente:

1. Corte de 1.0 m de largo, 220 piezas
2. Corte de 1.5 m de largo, 140 piezas
3. Corte de 3 m de largo, 90 piezas
4. Corte de 4.5 m de largo, 75 piezas
5. Corte de 5.5 m de largo, 65 piezas
6. Corte de 7.5 m de largo, 48 piezas

Ejemplo motivación

Problema de Generación de Columnas

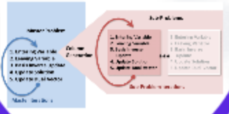
Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

Introducción

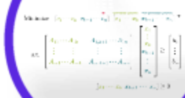
Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe



Ejemplo

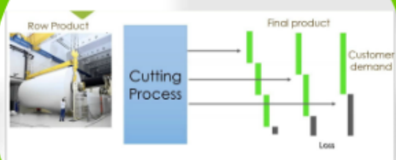


Cierre de la clase

¿Preguntas?

Problema de patrón de cortes

Problema de cortes



Leonid Vitálievich Kantoróvich


MATHEMATICAL METHODS OF ORGANIZING AND PLANNING PRODUCTION*†

L. V. KANTOROVICH

L. V. Kantorovich. Mathematical methods of organizing and planning production. Management Science, 6:363–422, 1960.

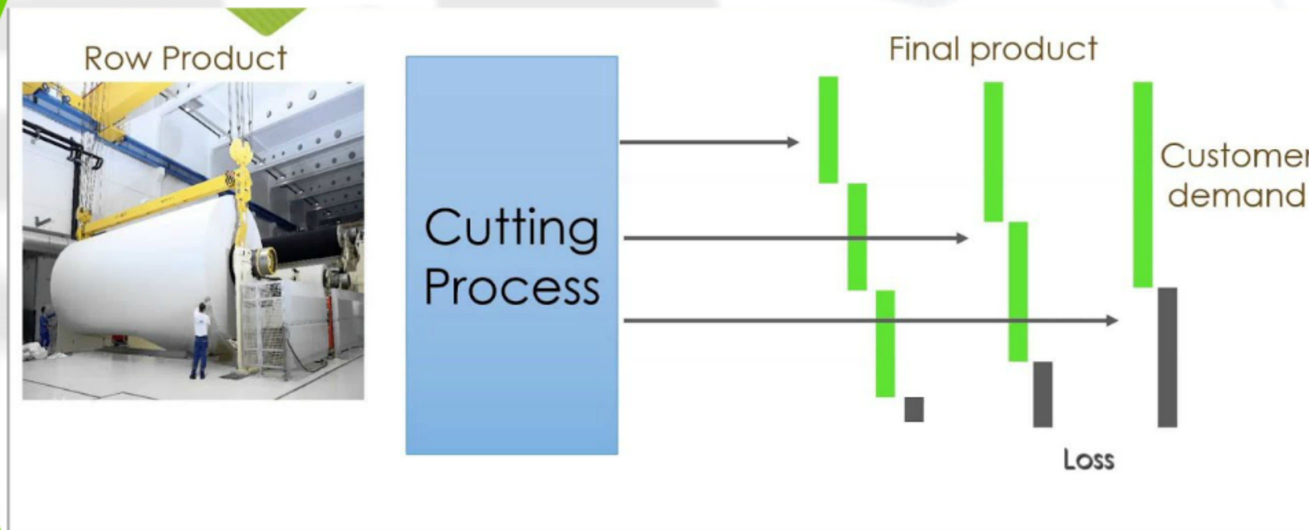
Contexto de aplicación

Es útil en cualquier proceso donde se corta material de dimensiones estándar, en piezas de tamaños y formas requeridas, buscando minimizar el desperdicio y otros costos asociados al proceso.

Este problema es computacionalmente difícil de resolver.

El problema de patrones de corte fue formulado inicialmente por el economista Kantorovich (1939), y posteriormente Kantorovich y Zalgaller (1951) propusieron una metodología de solución por medio del método de generación de columnas.

Problema de cortes



Leonid Vitálievich Kantoróvich

MATHEMATICAL METHODS OF ORGANIZING AND PLANNING PRODUCTION*†

L. V. KANTOROVICH

Leningrad State University

1939

Contents

L. V. Kantorovich. Mathematical methods of organizing and planning production. Management Science, 6:363–422, 1960.

Contexto de aplicación

Es útil en cualquier proceso donde se corta material de dimensiones estándar, en piezas de tamaños y formas requeridas, buscando minimizar el desperdicio y otros costos asociados al proceso.

Este problema es computacionalmente difícil de resolver.

El problema de patrones de corte fue formulado inicialmente por el economista Kantorovich (1939), y posteriormente Kantorovich y Zalgaller (1951) propusieron una metodología de solución por medio del método de generación de columnas.

Problema de patrón de cortes

Problema de Generación de Columnas

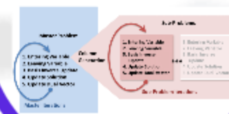
Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

Introducción

Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe

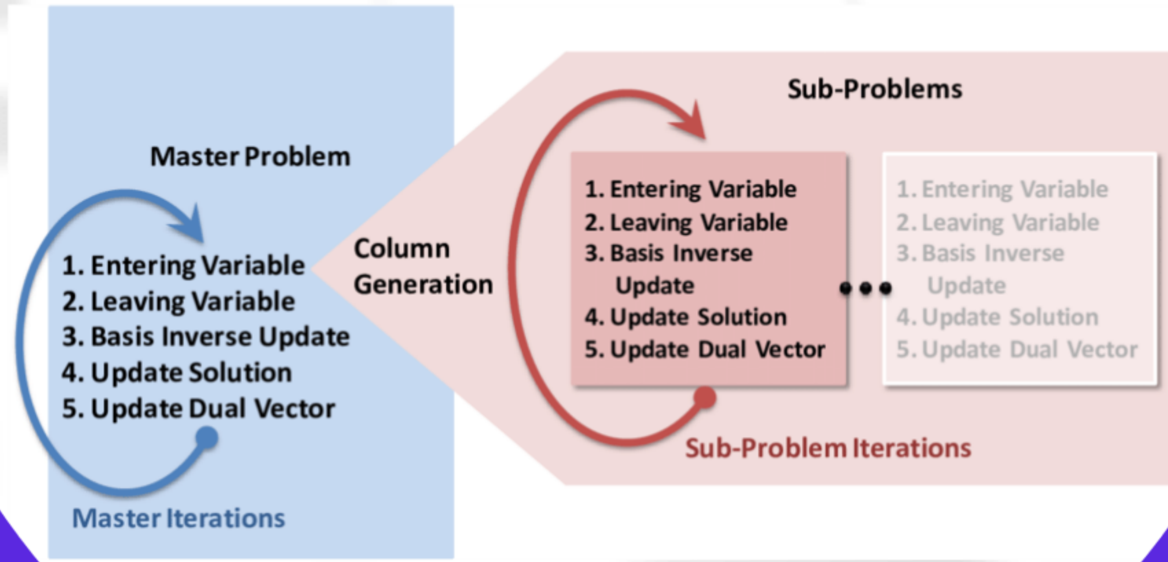


Ejemplo

Cierre de la clase

¿Preguntas?

Descomposición de Dantzing-Wolfe



OPERATIONS RESEARCH

Decomposition Principle for Linear Programs

George B. Dantzig, Philip Wolfe

Published Online: 1 Feb 1960 | https://doi.org/10.1287/opre.8.1.101

Abstract

A technique is presented for the decomposition of a linear program that permits the problem to be solved by alternate solutions of linear sub-programs representing its several parts and a coordinating program that is obtained from the parts by linear transformations. The coordinating program generates at each cycle new objective forms for each part, and each part generates in turn (from its optimal basic feasible solutions) new activities (columns) for the interconnecting program. Viewed as an instance of a "generalized programming problem" whose columns are drawn freely from given convex sets, such a problem can be studied by an appropriate generalization of the duality theorem for linear programming, which permits a sharp distinction to be made between those constraints that pertain only to a part of the problem and those that connect its parts. This leads to a generalization of the Simplex Algorithm, for which the decomposition procedure becomes a special case. Besides holding promise for the efficient computation of large-scale systems, the principle yields a certain rationale for the "decentralized decision process" in the theory of the firm. Formally the prices generated by the coordinating program cause the manager of each part to look for a "pure" sub-program analogue of pure strategy in game theory, which he proposes to the coordinator as best he can do. The coordinator finds the optimum "mix" of pure sub-programs (using new proposals and earlier ones) consistent with over-all demands and supply, and thereby generates new prices that again generates new proposals by each of the parts, etc. The iterative process is finite.

Volume 8, Issue 1

January-February 1960

Pages 1-157

Article Information

Metrics

Information

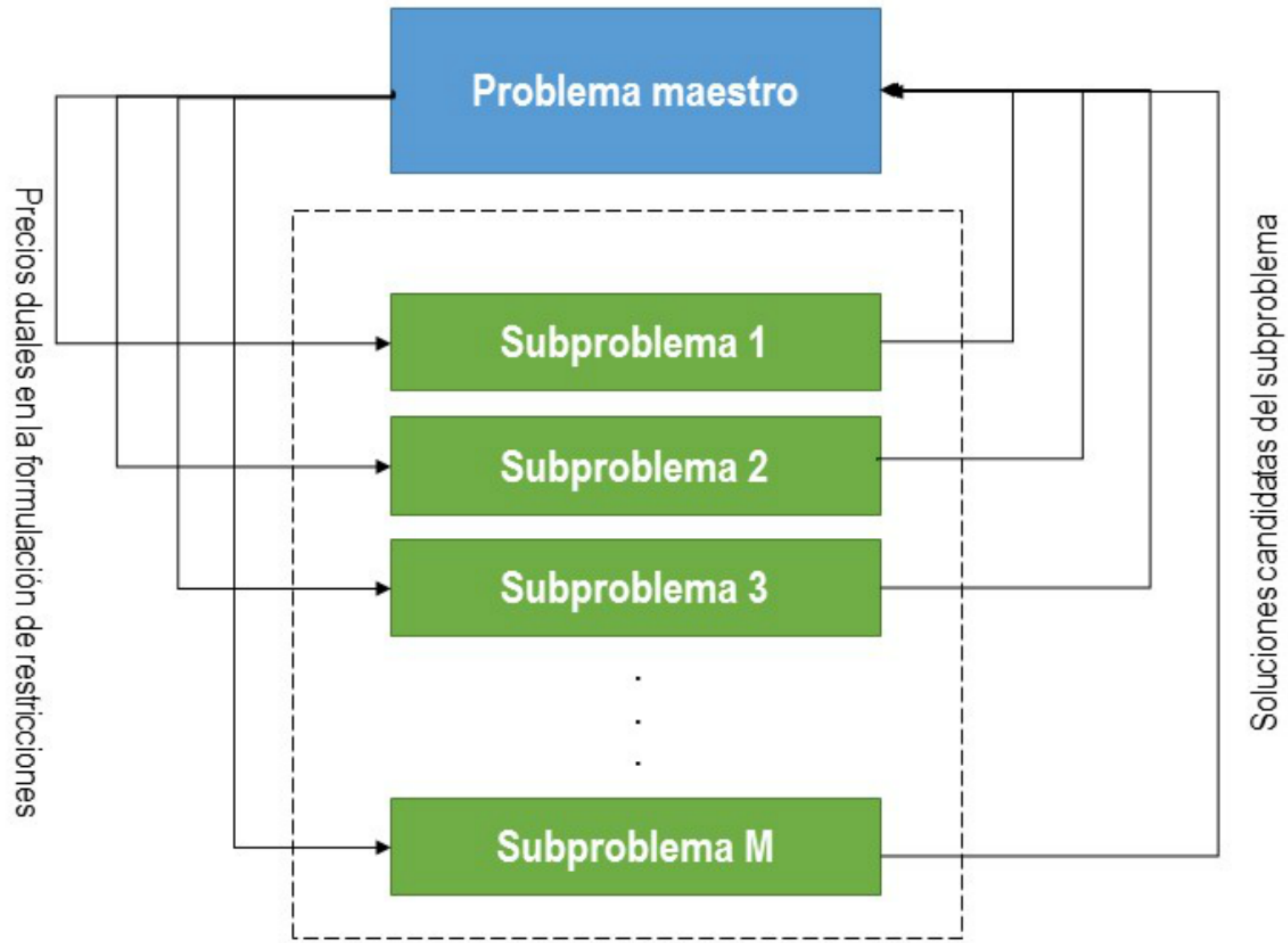
Published Online: February 01, 1960

https://doi.org/10.1287/opre.8.1.101

Title: Decomposition Principle for Linear Programs

Authors:

George B. Dantzig, Philip Wolfe



Problema maestro
Subproblema 1
Subproblema 2
Subproblema 3
Subproblema M
Precios duales en la formulación de restricciones
Soluciones candidatas del subproblema

La formulación estándar del problema de patrones de corte comienza con un listado de m órdenes, cada uno requiriendo qj piezas, donde j = 1,... , m.

Se construye entonces un listado de todas las posibles combinaciones de patrones. Sea n el número de esos patrones, se asocia una variable entera positiva xi que representa cuántas veces el patrón i es usado, donde i = 1,... , n. El problema entero es:

Minimizar $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq q_j \quad \forall\, j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \text{entero}$$

Donde aij es el número de veces que la orden j aparece en el patrón i y ci es el costo (generalmente el desperdicio) del patrón i. Esta formulación involucra restricciones de órdenes mínimas, es decir, al menos una cierta cantidad de patrones deben ser satisfechas/producidas.

En esta misma formulación, cuando ci = 1, la función objetivo busca minimizar el número de objetos grandes a partir de los cuales se generan los cortes.

DANTZIG-WOLFE DECOMPOSITION WITH GAMS

ERWIN KALVELAGEN

ABSTRACT. This document illustrates the Dantzig-Wolfe decomposition algorithm using GAMS.

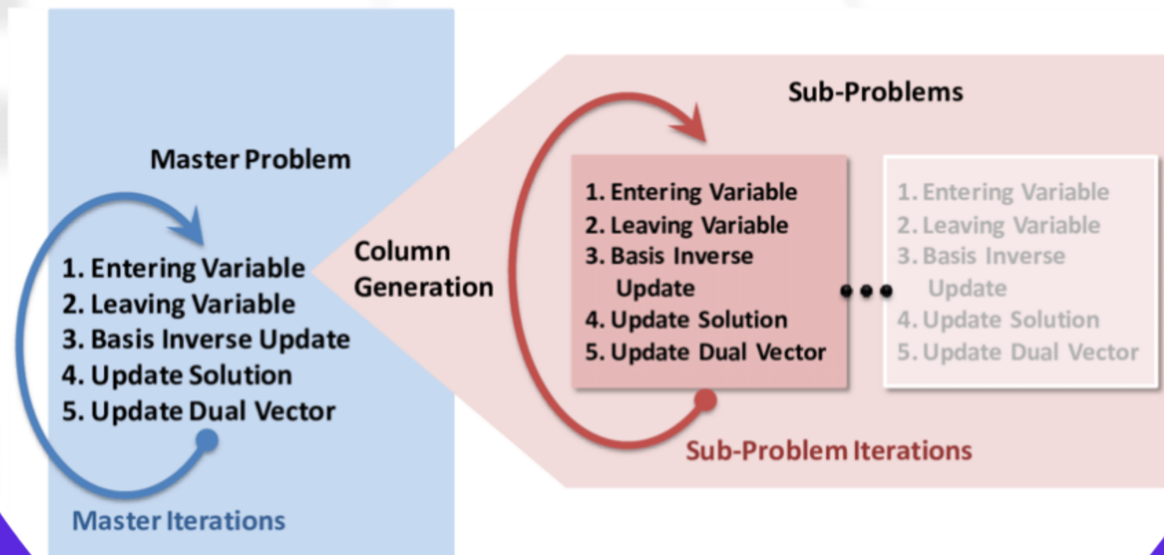
1. INTRODUCTION

Dantzig-Wolfe decomposition [2] is a classic solution approach for structured linear programming problems. In this document we will illustrate how Dantzig-Wolfe decomposition can be implemented in a GAMS environment. The GAMS language is rich enough to be able to implement fairly complex algorithms as is illustrated by GAMS implementations of Benders Decomposition [10], Cutting Stock Column Generation [11] and branch-and-bound algorithms [12].

Dantzig-Wolfe decomposition has been an important tool to solve large structured models that could not be solved using a standard Simplex algorithm as they exceeded the capacity of those solvers. With the current generation of simplex and interior point LP solvers and the enormous progress in standard hardware (both in terms of raw CPU speed and availability of large amounts of memory) the Dantzig-Wolfe algorithm has become less popular.

Implementations of the Dantzig-Wolfe algorithm have been described in [5, 6, 7]. Some renewed interest in decomposition algorithms was inspired by the availability of parallel computer architectures [8, 13]. A recent computational study is [16]. [9] discusses formulation issues when applying decomposition on multi-commodity network problems. Many textbooks on linear programming discuss the principles of the Dantzig-Wolfe decomposition [1, 14].

Descomposición de Dantzing-Wolfe



Problema de Generación de Columnas

Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

Presentación del material

Introducción

Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe

Ejemplo

Cierre de la clase

¿Preguntas?

Ejemplo

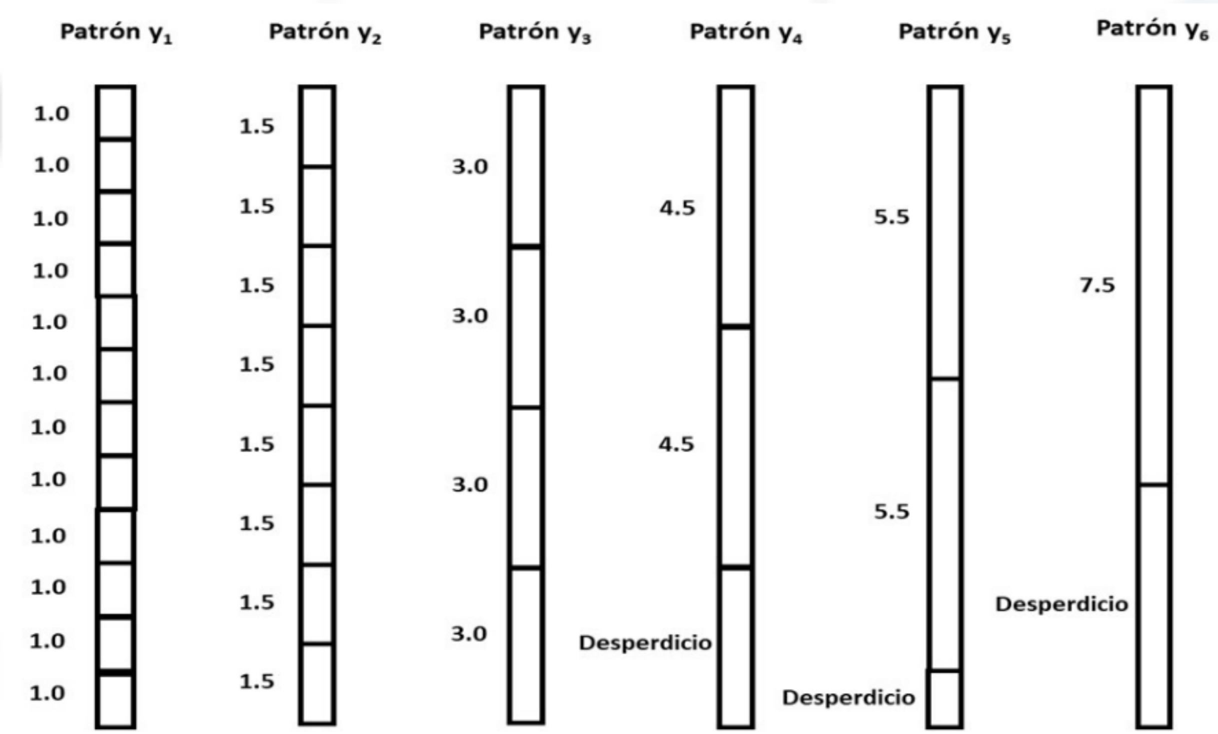
$$\text{Minimize} \quad [c_1 \cdots c_k \;\; c_{k+1} \cdots c_n] \, [\overset{\text{Generated Columns}}{x_1 \cdots x_k} \;\; \overset{\text{Non-generated Columns}}{x_{k+1} \cdots x_n}]^T$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1k} & A_{1,k+1} \cdots A_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{m1} \cdots A_{mk} & A_{m,k+1} \cdots A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

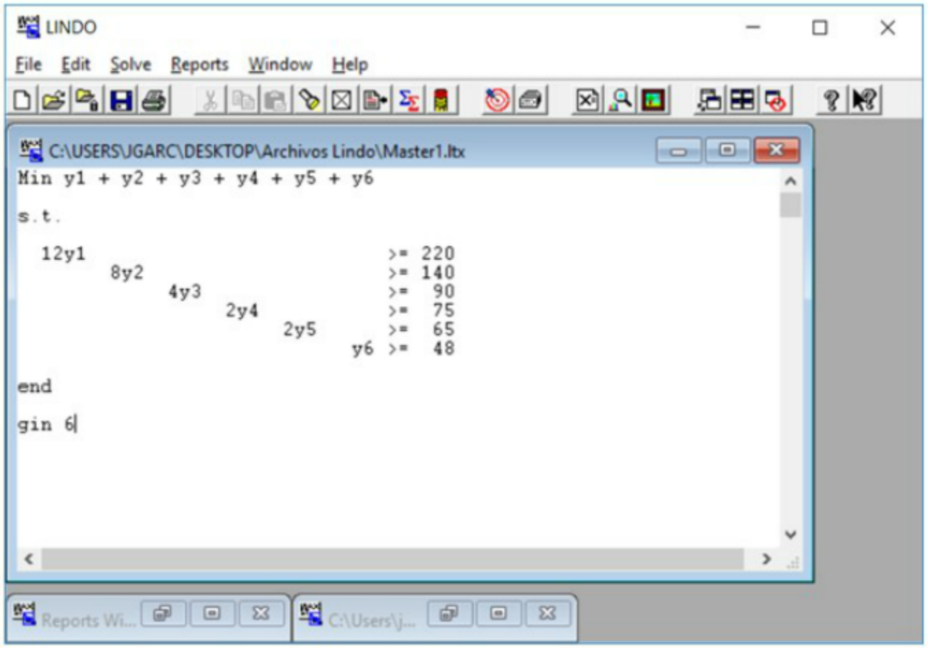
$$[x_1 \cdots x_k \;\; x_{k+1} \cdots x_n] \geq 0$$

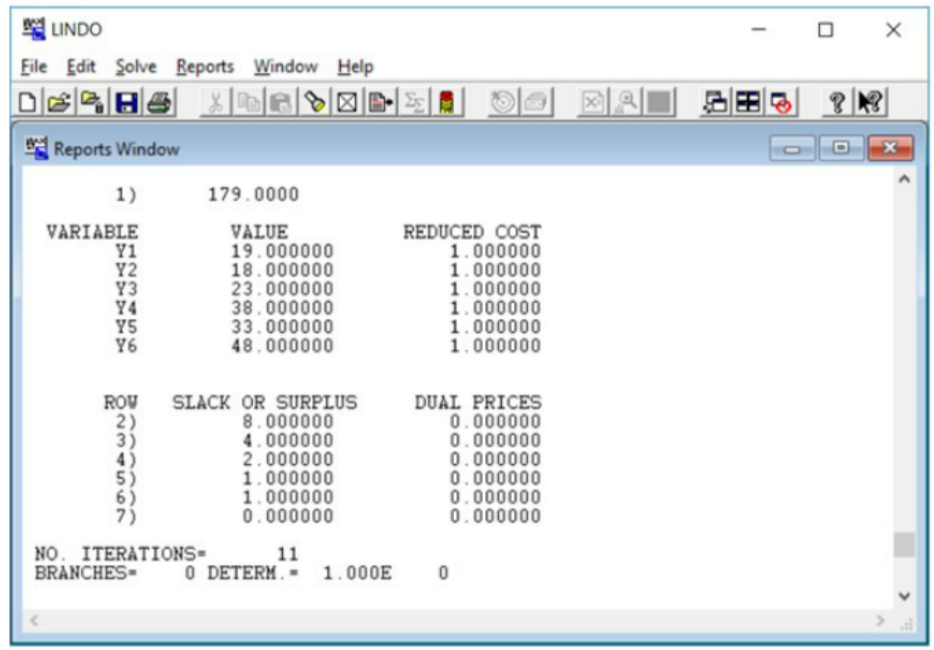
Se busca minimizar el número total de varillas utilizadas para acomodar los cortes requeridos.

Se inicializa con una solución inicial (trivial), donde en cada patrón se utilice el máximo número de patrones que puedan acomodar.

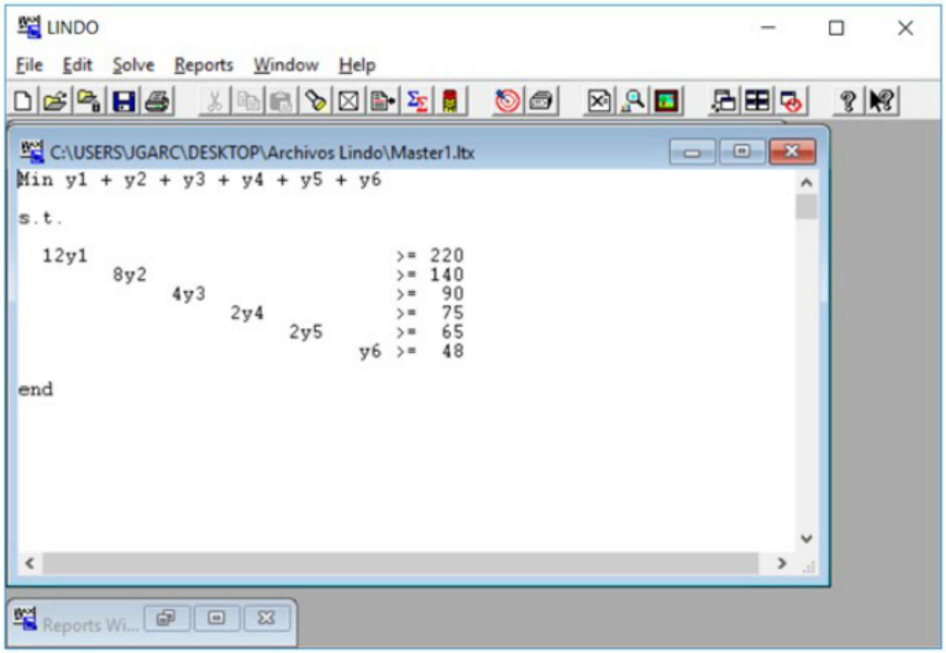


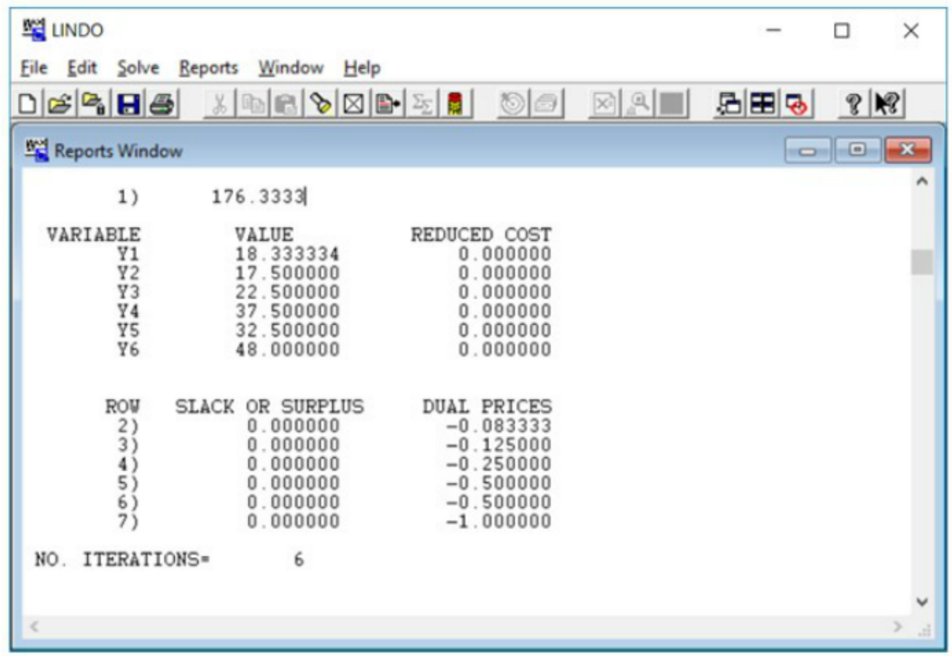
Apoyo computacional (LINDO)

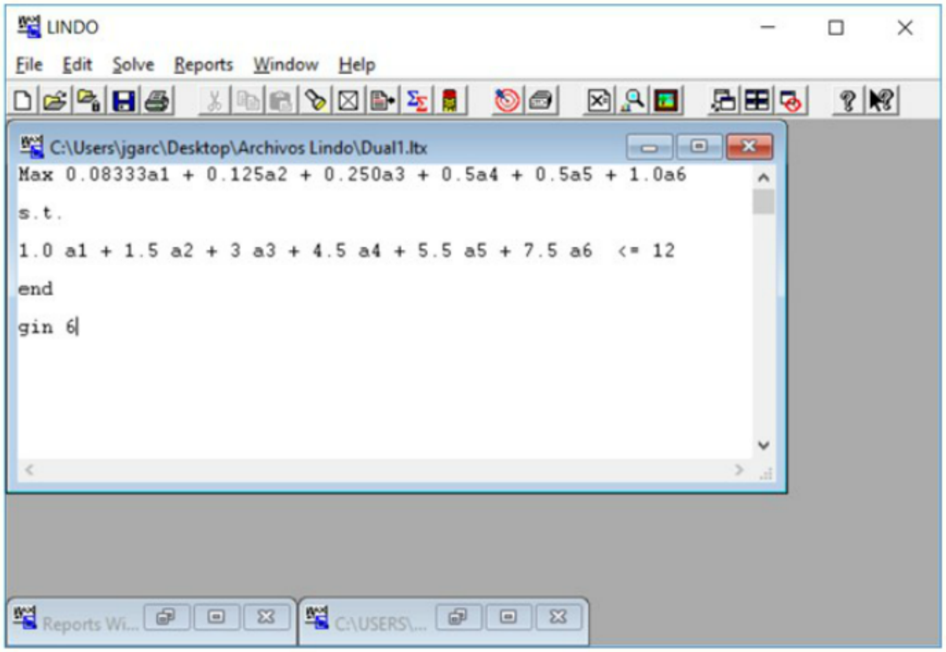




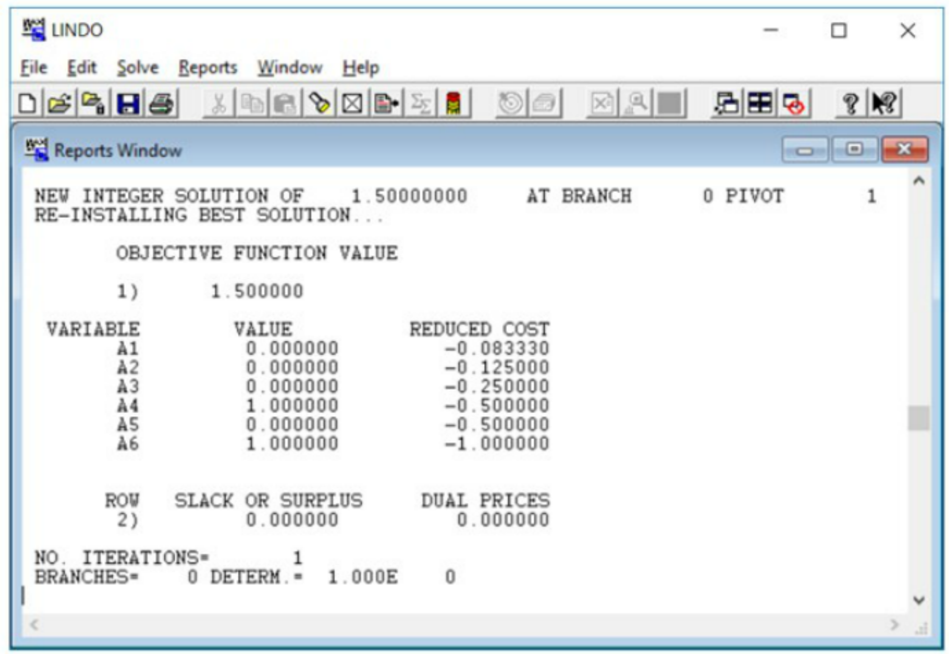
a. Generación de la primera nueva columna (patrón y7)



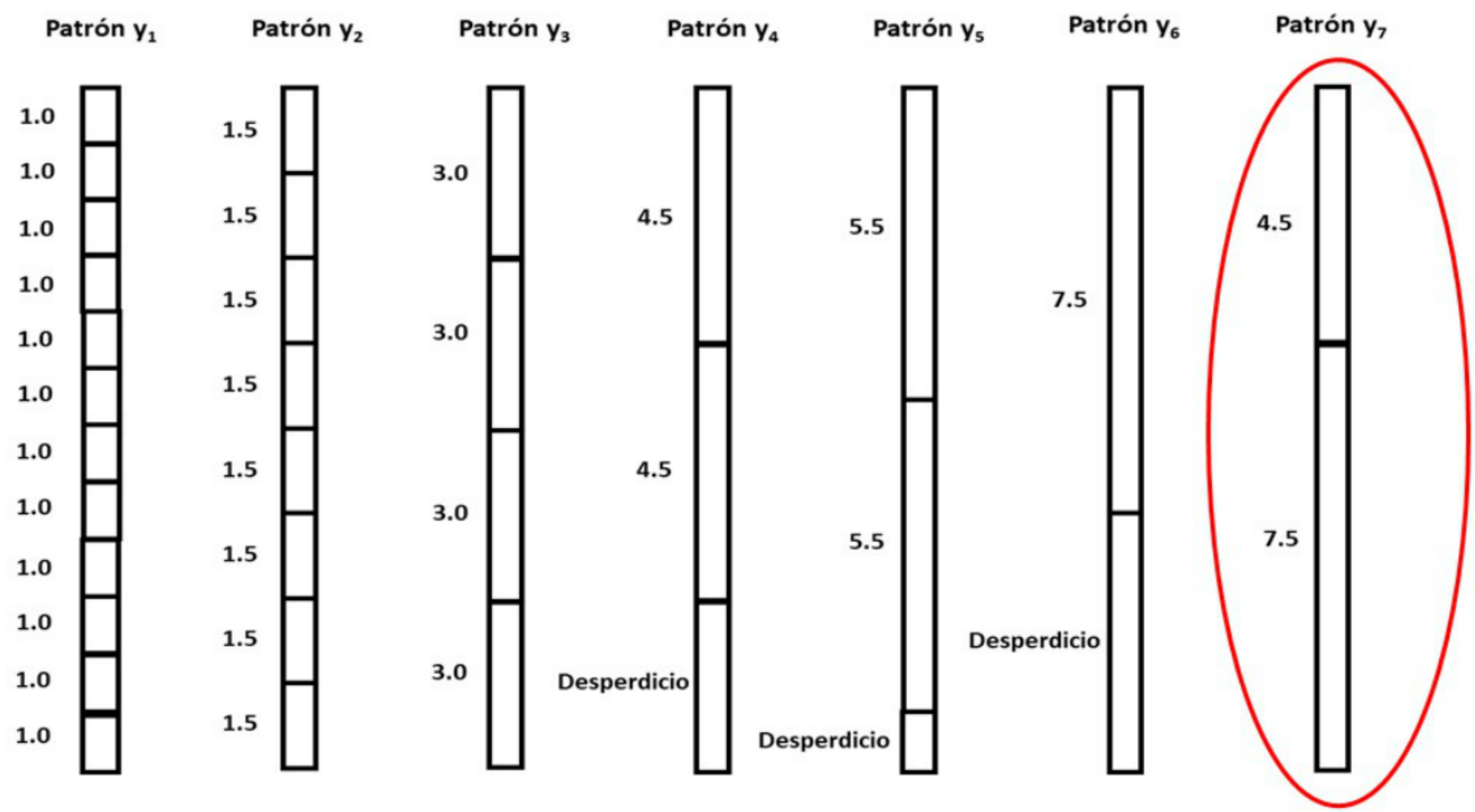




LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
C:\Users\jgarc\Desktop\Archivos Lindo\Dual1.ltx
Max 0.08333a1 + 0.125a2 + 0.250a3 + 0.5a4 + 0.5a5 + 1.0a6
s.t.
1.0 a1 + 1.5 a2 + 3 a3 + 4.5 a4 + 5.5 a5 + 7.5 a6 <= 12
end
gin 6
Reports Wi...
C:\USERS\...

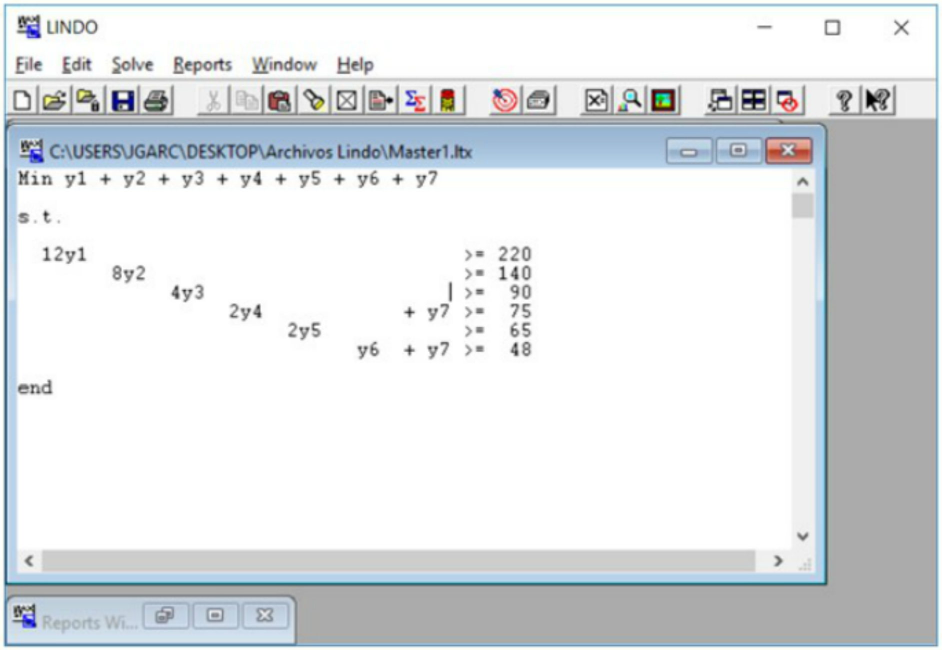


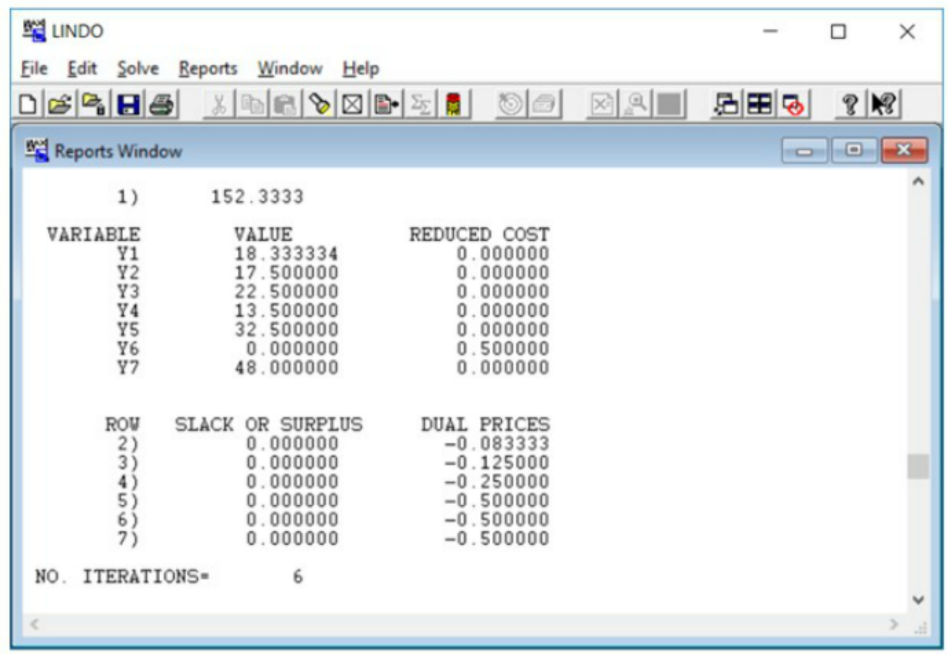
LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
Reports Window
NEW INTEGER SOLUTION OF 1.50000000 AT BRANCH 0 PIVOT 1
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 1.500000
VARIABLE VALUE REDUCED COST
A1 0.000000 -0.083330
A2 0.000000 -0.125000
A3 0.000000 -0.250000
A4 1.000000 -0.500000
A5 0.000000 -0.500000
A6 1.000000 -1.000000
ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES
2) 0.000000 0.000000
NO. ITERATIONS= 1
BRANCHES= 0 DETERM.= 1.000E 0

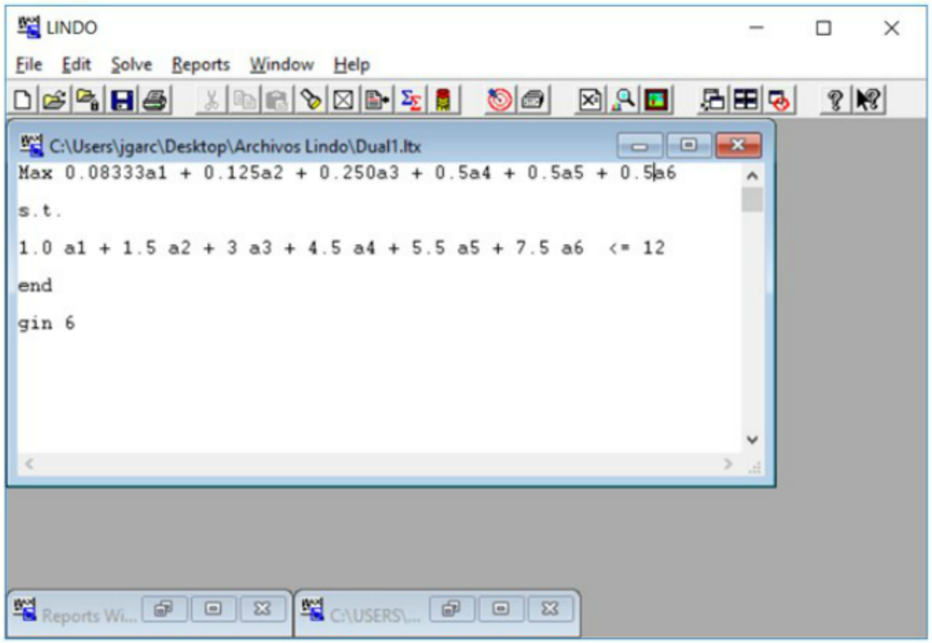


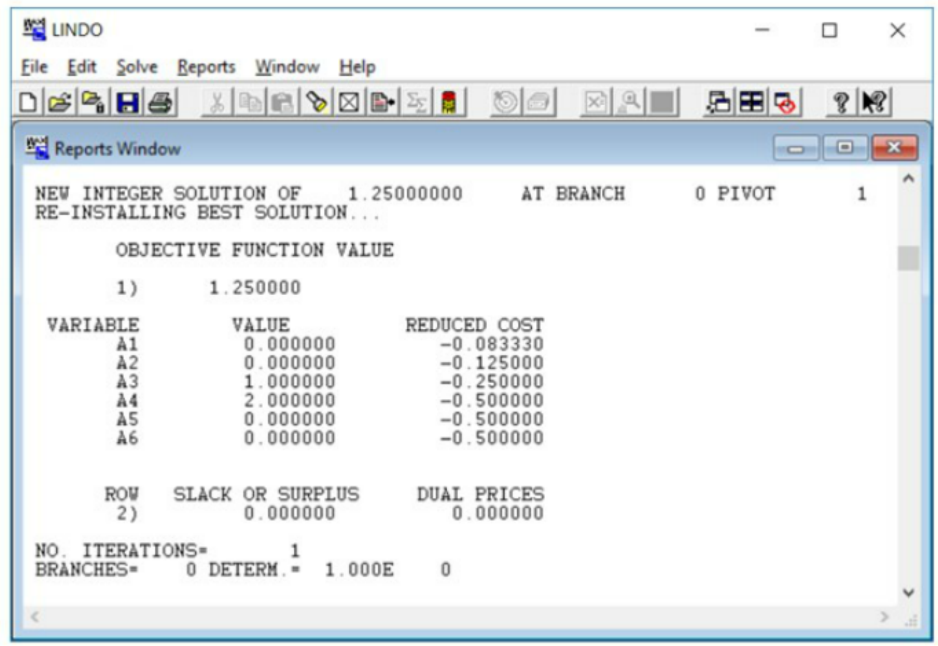
Patrón y_1
Patrón y_2
Patrón y_3
Patrón y_4
Patrón y_5
Patrón y_6
Patrón y_7
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
3.0
3.0
3.0
3.0
4.5
4.5
Desperdicio
5.5
5.5
Desperdicio
7.5
Desperdicio
4.5
7.5

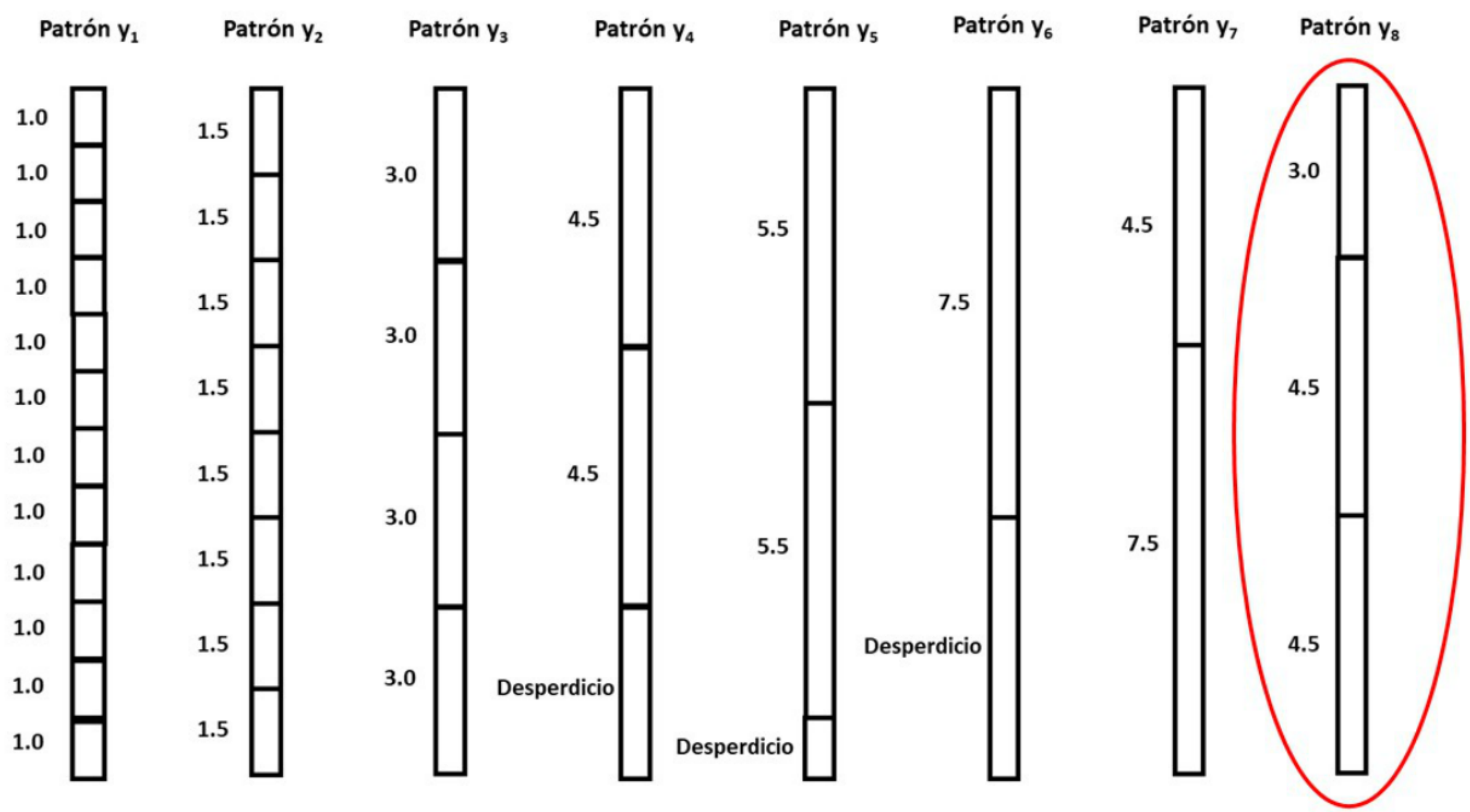
b. Generación de la segunda nueva columna (patrón y8)





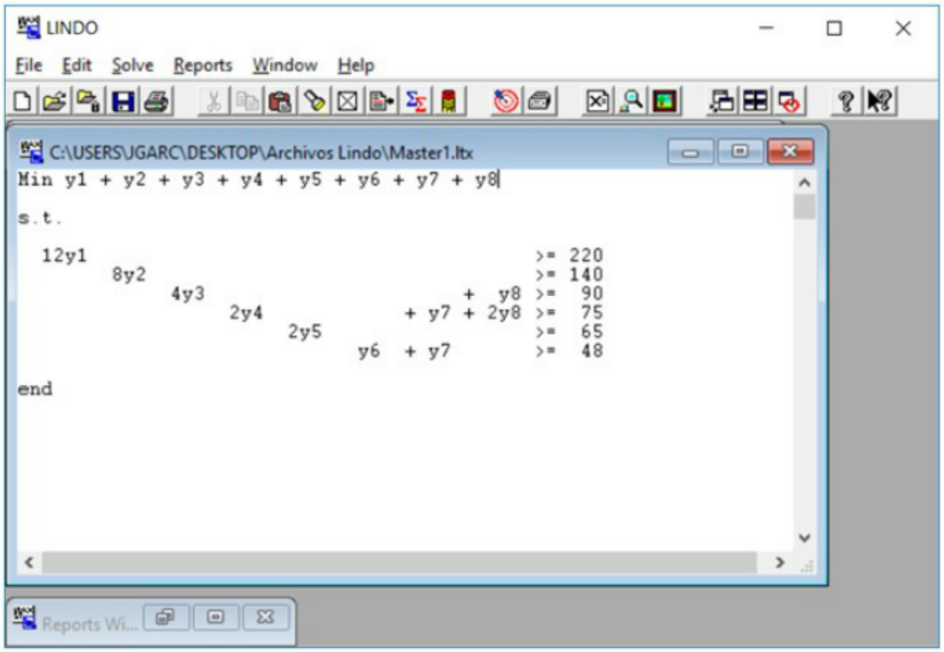

LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
C:\Users\jgarc\Desktop\Archivos Lindo\Dual1.ltx
Max 0.08333a1 + 0.125a2 + 0.250a3 + 0.5a4 + 0.5a5 + 0.5a6
s.t.
1.0 a1 + 1.5 a2 + 3 a3 + 4.5 a4 + 5.5 a5 + 7.5 a6 <= 12
end
gin 6
Reports Wi...
C:\USERS\...

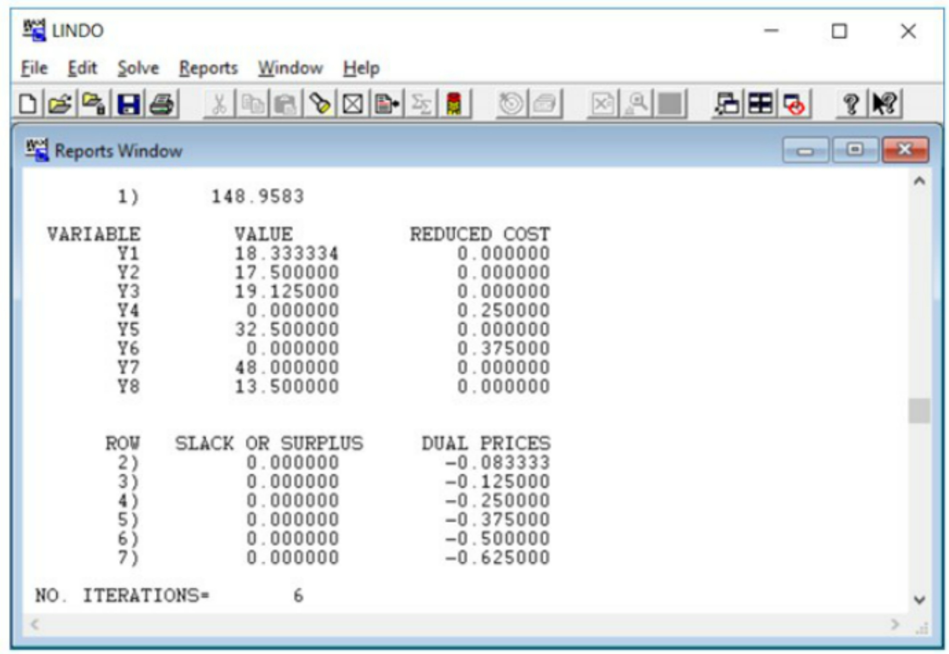

LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
Reports Window
NEW INTEGER SOLUTION OF 1.25000000 AT BRANCH 0 PIVOT 1
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 1.250000
VARIABLE VALUE REDUCED COST
A1 0.000000 -0.083330
A2 0.000000 -0.125000
A3 1.000000 -0.250000
A4 2.000000 -0.500000
A5 0.000000 -0.500000
A6 0.000000 -0.500000
ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES
2) 0.000000 0.000000
NO. ITERATIONS= 1
BRANCHES= 0 DETERM.= 1.000E 0

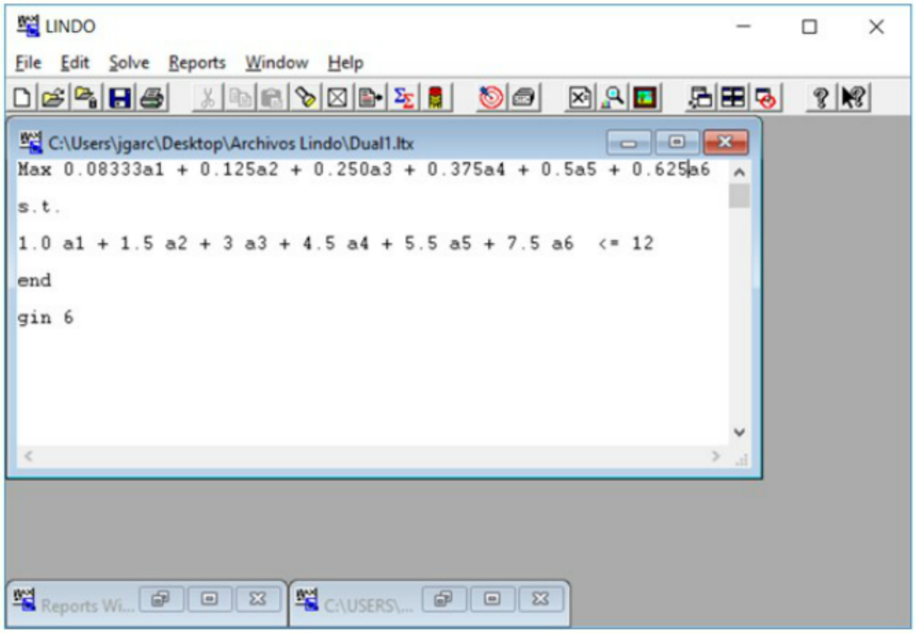


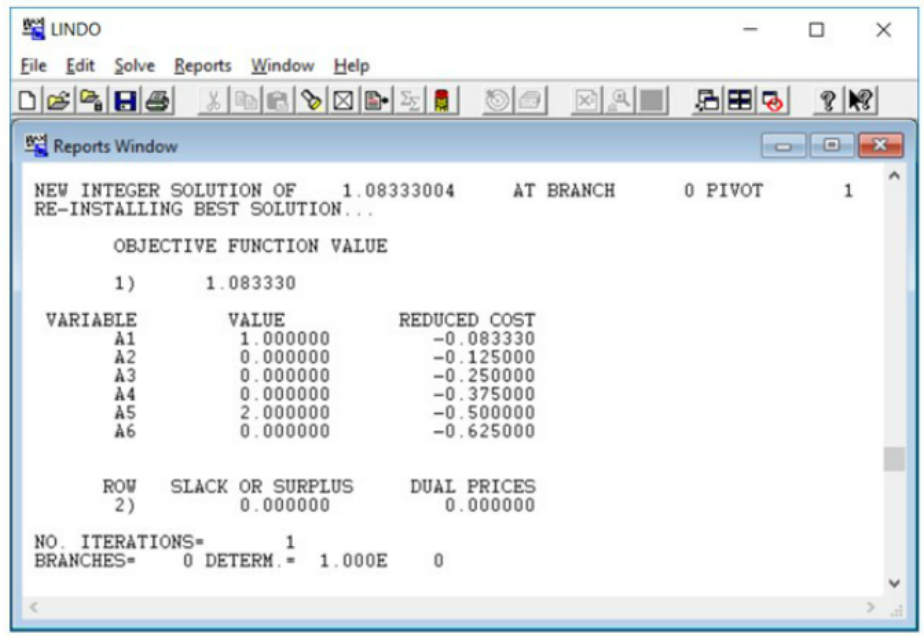
Patrón y_1
Patrón y_2
Patrón y_3
Patrón y_4
Patrón y_5
Patrón y_6
Patrón y_7
Patrón y_8
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
3.0
3.0
3.0
3.0
4.5
4.5
Desperdicio
5.5
5.5
Desperdicio
7.5
Desperdicio
4.5
7.5
3.0
4.5
4.5

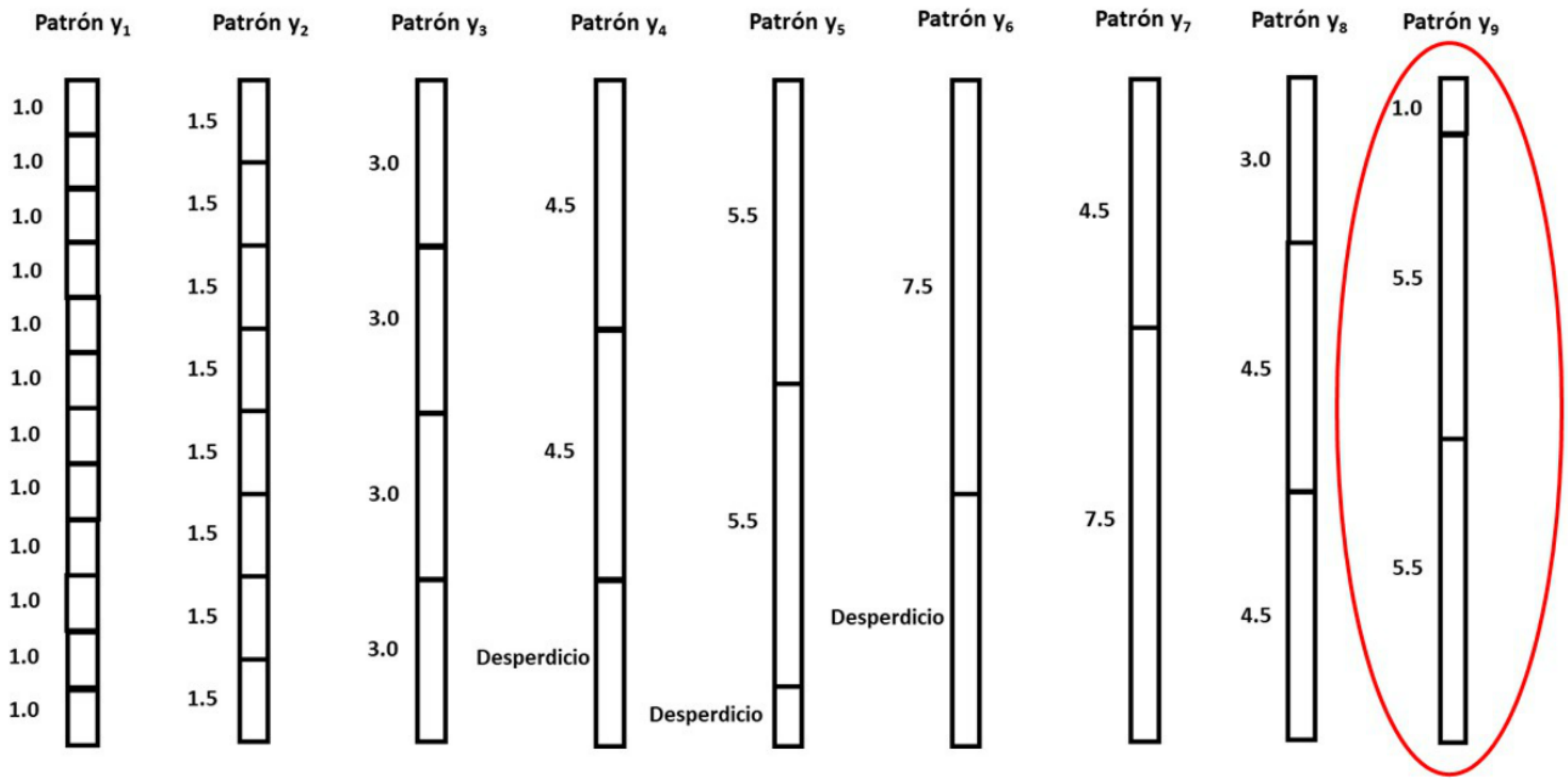
c. Generación de la segunda nueva columna (patrón y9)





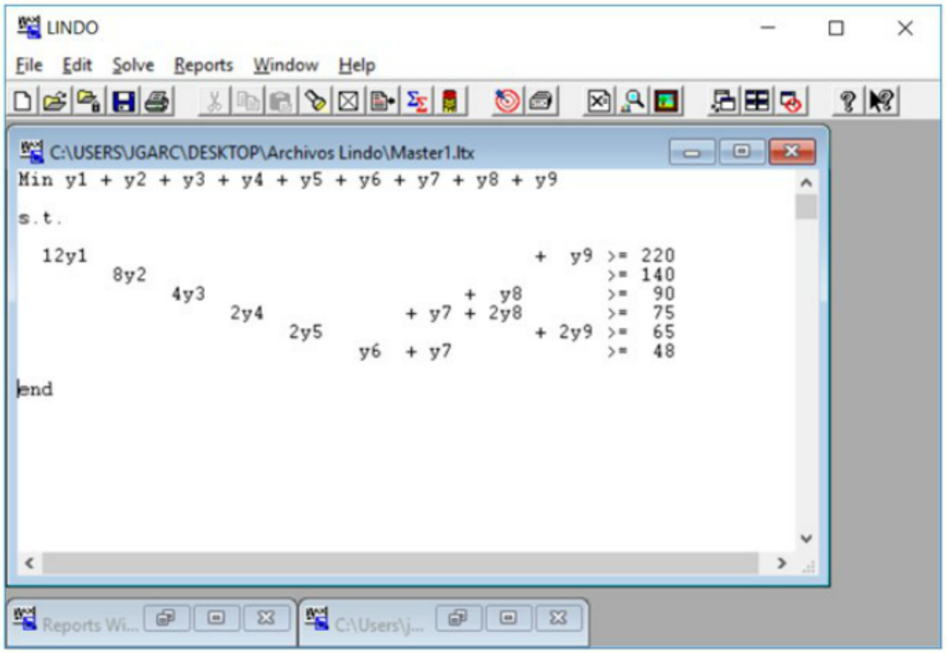

LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
C:\Users\jgarc\Desktop\Archivos Lindo\Dual1.ltx
Max 0.08333a1 + 0.125a2 + 0.250a3 + 0.375a4 + 0.5a5 + 0.625a6
s.t.
1.0 a1 + 1.5 a2 + 3 a3 + 4.5 a4 + 5.5 a5 + 7.5 a6 <= 12
end
gin 6
Reports Wi...
C:\USERS\...

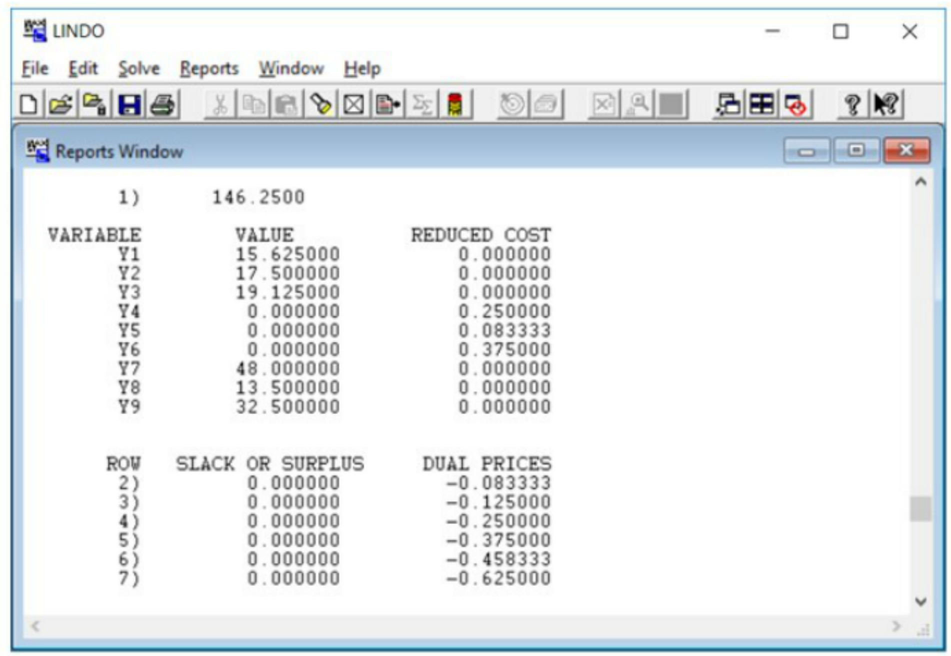

LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
Reports Window
NEW INTEGER SOLUTION OF 1.08333004 AT BRANCH 0 PIVOT 1
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 1.083330
VARIABLE VALUE REDUCED COST
A1 1.000000 -0.083330
A2 0.000000 -0.125000
A3 0.000000 -0.250000
A4 0.000000 -0.375000
A5 2.000000 -0.500000
A6 0.000000 -0.625000
ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES
2) 0.000000 0.000000
NO. ITERATIONS= 1
BRANCHES= 0 DETERM.= 1.000E 0

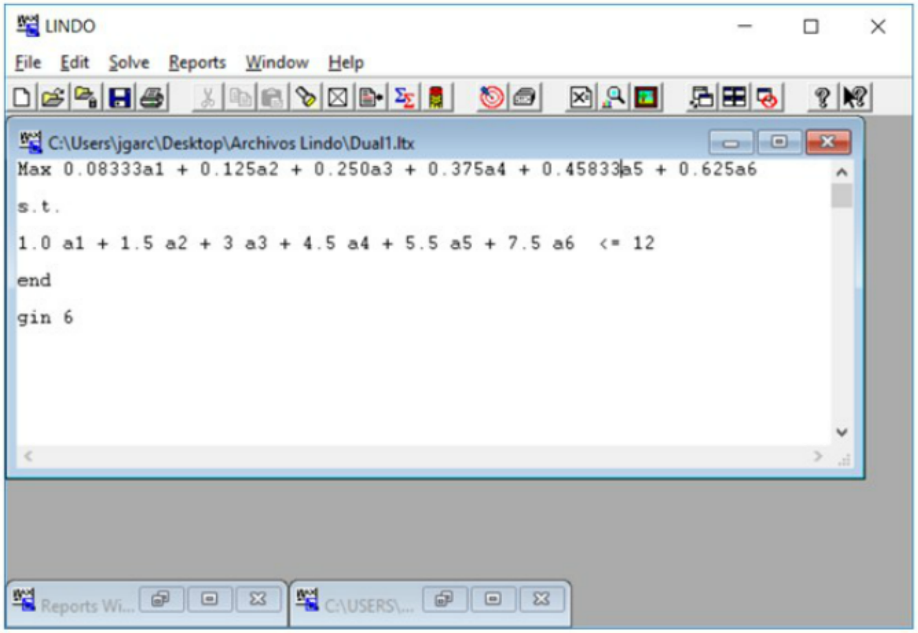


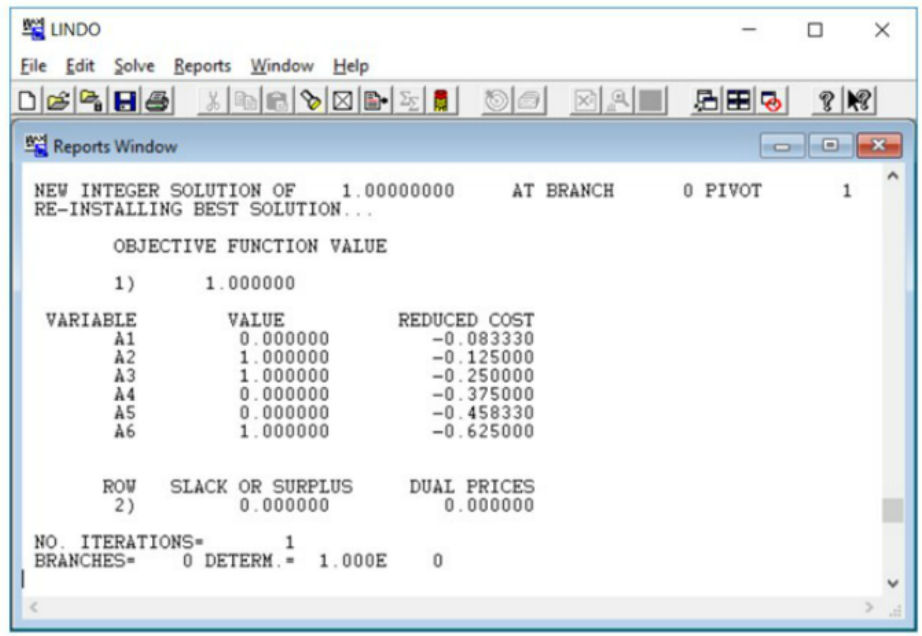
Patrón y_1
Patrón y_2
Patrón y_3
Patrón y_4
Patrón y_5
Patrón y_6
Patrón y_7
Patrón y_8
Patrón y_9
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
3.0
3.0
3.0
3.0
4.5
4.5
Desperdicio
5.5
5.5
Desperdicio
7.5
Desperdicio
4.5
7.5
3.0
4.5
4.5
1.0
5.5
5.5

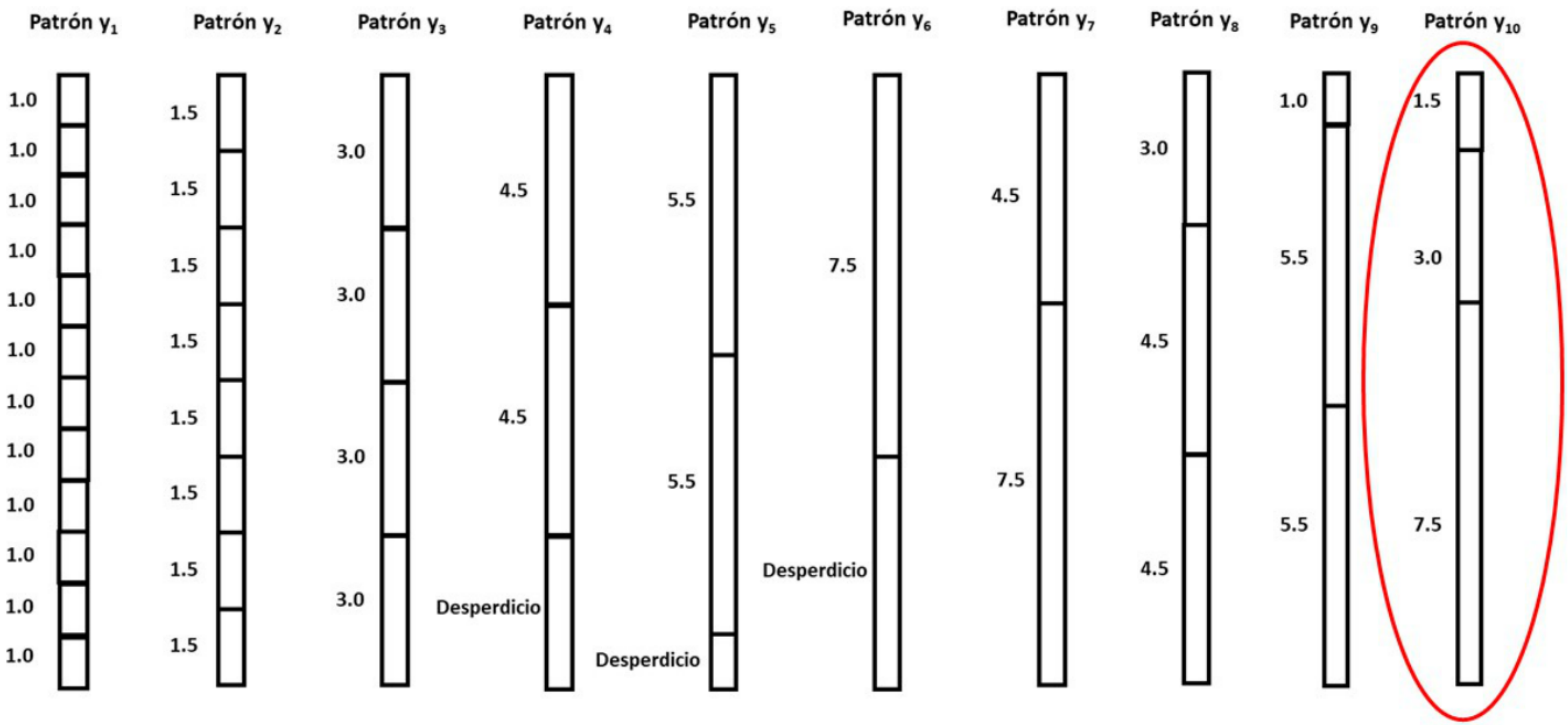
d. Generación de la tercera nueva columna (patrón y10)





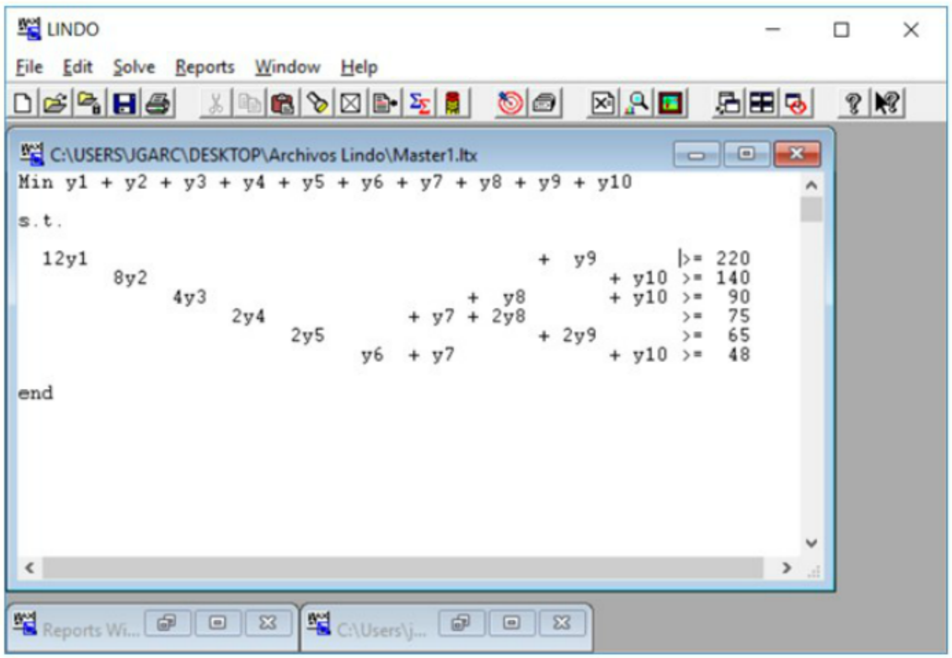

LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
C:\Users\jgarc\Desktop\Archivos Lindo\Dual1.ltx
Max 0.08333a1 + 0.125a2 + 0.250a3 + 0.375a4 + 0.45833a5 + 0.625a6
s.t.
1.0 a1 + 1.5 a2 + 3 a3 + 4.5 a4 + 5.5 a5 + 7.5 a6 <= 12
end
gin 6
Reports Wi...
C:\USERS\...

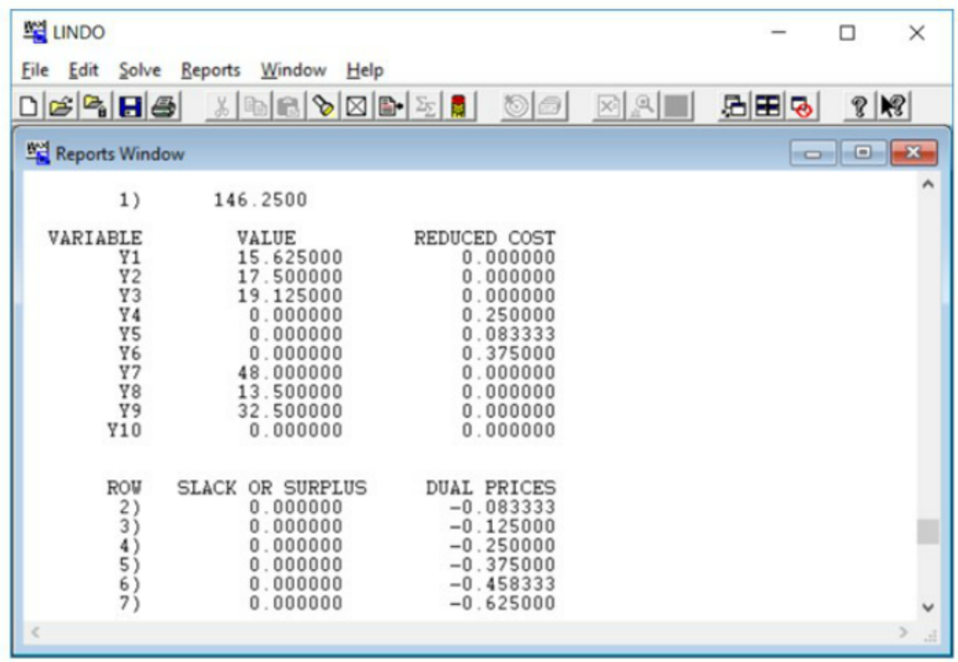

LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
Reports Window
NEW INTEGER SOLUTION OF 1.00000000 AT BRANCH 0 PIVOT 1
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 1.000000
VARIABLE VALUE REDUCED COST
A1 0.000000 -0.083330
A2 1.000000 -0.125000
A3 1.000000 -0.250000
A4 0.000000 -0.375000
A5 0.000000 -0.458330
A6 1.000000 -0.625000
ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES
2) 0.000000 0.000000
NO. ITERATIONS= 1
BRANCHES= 0 DETERM.= 1.000E 0

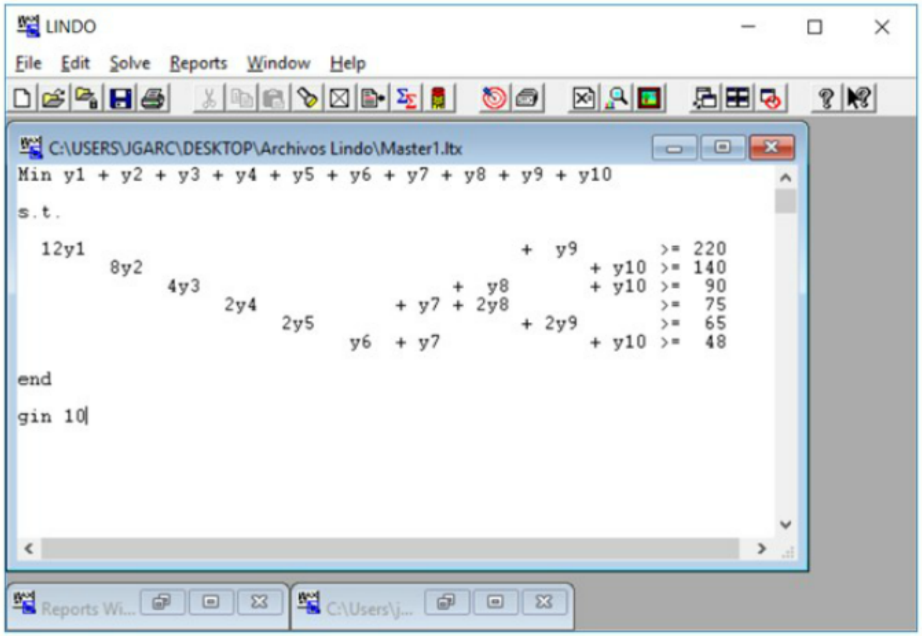


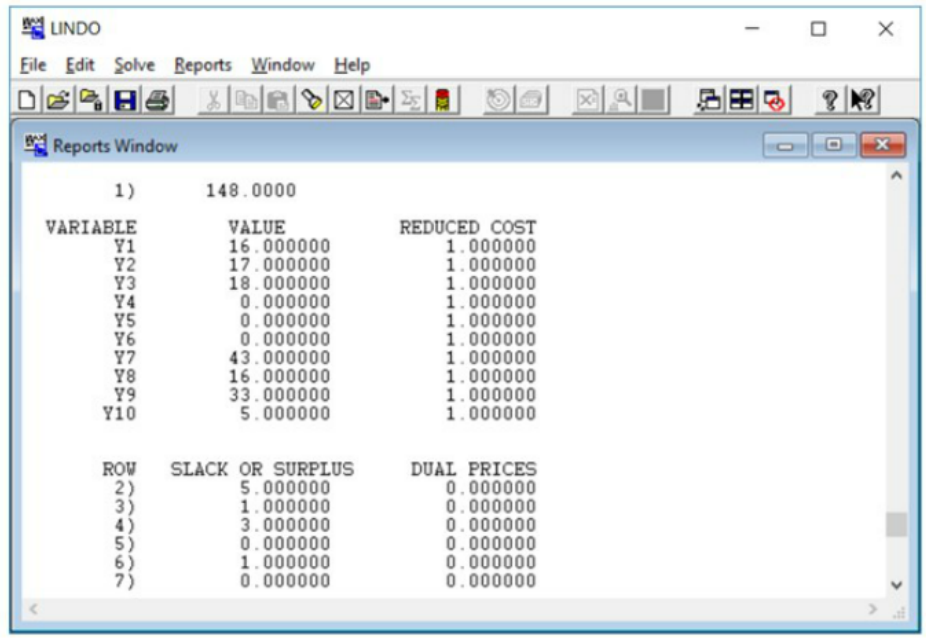
Patrón y_1
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
Patrón y_2
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
1.5
Patrón y_3
3.0
3.0
3.0
3.0
Patrón y_4
4.5
4.5
Desperdicio
Patrón y_5
5.5
5.5
Desperdicio
Patrón y_6
7.5
Desperdicio
Patrón y_7
4.5
7.5
Patrón y_8
3.0
4.5
4.5
Patrón y_9
1.0
5.5
5.5
Patrón y_{10}
1.5
3.0
7.5

e. Conclusión del problema









1. Escenario inicial, 6 patrones, 179 varillas.
2. Escenario final, 10 patrones, 148 varillas.

Reduccion del 17.3% de la solucion inicial

Ejemplo

Generated Columns Non-generated Columns

$$\text{Minimize} \quad \begin{bmatrix} c_1 \cdots c_k & c_{k+1} \cdots c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \cdots x_k & x_{k+1} \cdots x_n \end{bmatrix}^T$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1k} & A_{1,k+1} \cdots A_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{m1} \cdots A_{mk} & A_{m,k+1} \cdots A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \cdots x_k & x_{k+1} \cdots x_n \end{bmatrix} \geq 0$$

Problema de Generación de Columnas

Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

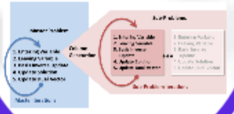
Presentación del material

Introducción

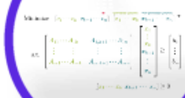
Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe



Ejemplo



Cierre de la clase

¿Preguntas?

Cierre de la clase

Resumen de la clase

1. Motivación y entorno del problema de generación de cortes

2. Problema de patrón de cortes, y su caracterización

3. Formulación matemática

4. Algoritmo de generación de columnas (Dantzing-Wolf)

5. Resolución de un ejemplo a optimalidad

¿Objetivos cumplidos?

1. Motivación y entorno del problema de generación de cortes

2. Problema de patrón de cortes, y su caracterización

3. Formulación matemática

4. Algoritmo de generación de columnas (Dantzing-Wolf)

5. Resolución de un ejemplo a optimalidad

Cierre de la clase

Problema de Generación de Columnas

Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

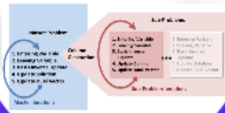
Presentación del material

Introducción

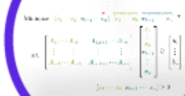
Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe



Ejemplo



Cierre de la clase

¿Preguntas?

¿Preguntas?

Problema de Generación de Columnas

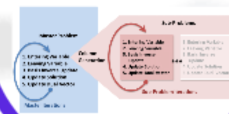
Tópicos de Optimización
Dr. Javier García Gutiérrez

Introducción

Ejemplo motivación

Problema de patrón de cortes

Descomposición de Dantzing-Wolfe



Ejemplo

Cierre de la clase

¿Preguntas?