UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PSEUDO-CONTRACTIBILIDAD EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M AT E M Á T I C O

PRESENTA:

Miguel Angel Gasca Rivera.

DIRECTORES DE
TESIS:

Dr. Félix Capulín Pérez
Dra. Mónica Sánchez Garrido

Cerrillo Piedras Negras, 18 de Noviembre de 2021.

Introducción.

Sean X y Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Diremos que f es pseudo-homotópica a g si existen un continuo C, dos puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : X \times C \to Y$ tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$. La función H es llamada una pseudo-homotopía entre f y g y el continuo C es llamado espacio factor. Un espacio topológico X se dice ser pseudo-contráctil si la función identidad id_X es pseudo-homotópica a una función constante en X. Claramente estos conceptos generalizan a los conceptos de homotopía y contractibilidad, respectivamente. De estos últimos existen una gran variedad de resultados y artículos relacionados con el tema.

R. H. Bing introdujo la noción de pseudo-contractibilidad; sin embargo, fue W. Kuperberg el primer matemático que probó que las nociones de pseudo-contractibilidad y contractibilidad son diferentes (véase [19]). Por la naturaleza del ejemplo que él dió, el cual, en apariencia es más complejo de escribir y similar a la curva del topólogo $sen\ \frac{1}{x}$, preguntó lo siguiente: ¿Será la curva del topólogo pseudo-contráctil? En esta línea, H. Katsuura probó en [15] que la curva del topólogo no es pseudo-contráctil con espacio factor él mismo. En su mismo artículo probó que si Y es un continuo indescomponible no degenerado tal que cada una de sus composantes es arco-conexa y X es continuo que tiene arco-componentes densas, entonces X no es pseudo-contráctil con factor Y.
Otras preguntas relacionadas con el tema son las siguientes:
Pregunta 1. ([15, Question 1, p. 1136]) ¿Es la curva del topólogo pseudo-contráctil con espacio factor el pseudoarco?
Pregunta 2. ([19, Problem 118]) ¿Es el pseudoarco pseudo-contráctil con espacio factor el pseudoarco?

W. Debski probó en [10] que la curva del topólogo no es pseudo-contráctil. Por otra parte, M. Sobolewsky en [24] mostró que el único continuo encadenable pseudo-contráctil es el arco, con esto se responde negativamente a la pregunta 2, pues como se sabe el pseudo-arco es un continuo encadenable. Lo publicado hasta el momento sobre el tema se puede consultar en [2], [6], [13], [15], [19] and [24]. Actualmente en [6] se probó que en hiperespacios como 2^X, $C(X)$, entre otros, los conceptos de pseudo-contractibilidad y contractibilidad coinciden. Realmente esto es parte de un problema general, a saber: determinar en que tipo de espacios topológicos los conceptos de pseudo-contractibilidad y contractibilidad coinciden.

Este trabajo de tesis está basado principalmente en el artículo [5] en donde desarrollaremos a medida de lo posible, sin salirnos mucho del tema, todos aquellos resultados citados relacionados y los que aperecen en él. La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1, se mencionan algunas definiciones y resultados que usaremos en algunas partes de la tesis, muchos de los cuales no se demostrarán y que están escritos en la mayor parte de los libros de topología general, sin embargo se dejará la referencia de algunos que no son muy conocidos para su consulta. En el Capítulo 2, mostraremos resultados relacionados al espacio de funciones continuas entre dos espacios topológicos concepto que está intimamente ligado a la teoría de (pseudo-)homotopías. En el Capítulo 3, daremos propiedades básicas en relación a pseudo-homotopías. El Capítulo 4 está dedicado al estudio de la pseudo-contractibilidad de espacios topológicos. En el Capítulo 5 damos la definición de “pseudo-contractibilidad con respecto a” y resultados relacionados a dicho concepto. En el Capítulo 6 relacionamos la pseudo-contractibilidad con espacios pseudo-homotópicamente equivalentes. En el Capítulo 7 relacionamos la pseudo-contractibilidad de un espacio con su forma trivial. Finalmente, en el Capı́tulo 8 damos resultados que son consecuencia de la pseudo-contractibilidad, principalmente nos enfocamos cuando los espacios son continuos.

Capítulo 1

Preliminares

Nuestro trabajo está inmerso en el área de Topología. En este capítulo se darán algunas definiciones y propiedades básicas que se usarán a lo largo de este trabajo. De algunos resultados, no tan comunes, se dejará una referencia, para su consulta. Omitiremos la definición de topología y propiedades básicas, pues suponemos que el lector tiene conocimientos básicos de ello. Algunos de los espacios topológicos con los que trabajaremos son los espacios métricos. A continuación lo definiremos y veremos algunas cosas básicas que usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.1. Una *métrica o una distancia* en un conjunto no vacío X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $x, y, z \in X$:

i. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

ii. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetría)*, y

iii. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(desigualdad del triángulo).*

En donde $\mathbb{R}^+$ denota el conjunto de los números reales positivos. A la pareja (X, d) le llamaremos *espacio métrico.*

Definición 1.2. Sean (X, d) un espacio métrico.

1. Sean $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Llamaremos al conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, r) < r\}$ la *bola abierta con centro en x y radio r.*

2. Sean $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$. Definimos *la distancia de x a A* como $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y)|\ y \in A\}$.

3. Sean A, B subconjuntos no vacíos de X. Definimos *la distancia de A a B* como $d(A, B) = \text{ínf}\{d(x, y)|\ x \in A,\ y \in B\} = \text{ínf}\{d(x, B)|\ x \in A\} = \text{ínf}\{d(A, y)|\ y \in B\}$.

4. Sea $A \subseteq X$ no vacío. Definimos *el diámetro* de A como $\textit{diám}(A) = \sup\{d(x, y)|\ x, y \in A\}$.

Definición 1.3. Dado un espacio métrico (X, d), la colección $\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X|\ E \text{ es unión de bolas abiertas}\}$ es una topología en X y la llamaremos la *topología en X inducida por la métrica d.*

Definición 1.4. Sea X un conjunto, y sean d_1, d_2 dos métricas en X. Diremos que son *métricas equivalentes* si inducen la misma topología en X.

Definición 1.5. Decimos que un espacio topológico (X, τ) es *metrizable* si existe una métrica d en X tal que la topología inducida por d coincide con τ.

En relación a la continuidad mencionaremos lo siguiente.

Definición 1.6. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x_0 \in X$. Diremos que f es *continua en el punto* x_0, si para cualquier subconjunto abierto V de Y que contiene a $f(x_0)$, existe un subconjunto abierto U de X que contiene a x_0 que satisface $f(U) \subseteq V$. Se dice que f es *continua* en X, si f es continua en cada uno de sus puntos.

Teorema 1.7. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *f es continua.*
2. *Para cualquier conjunto abierto V de Y, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X.*
3. *Para cualquier conjunto cerrado F de Y, $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X.*
4. *Para cualquier elemento B subbásico (básico) de una subbase (base) para Y, se tiene que $f^{-1}(B)$ es un conjunto abierto en X.*

En muchas ocasiones estaremos usando la equivalencia 4, sin siquiera hacer mención a ella.

Proposición 1.8. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Si f y g son continuas, entonces $f \circ g$ también es continua.*

Una forma de definir una función continua, es hacerlo por partes; es decir, a partir de varias funciones que sean continuas en subconjuntos de un conjunto dado y "pegándolas" adecuadamente. A este proceso se le conoce como Lema de continuidad o Lema del pegado.

Lema del Pegado *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos y $\{F_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{P}(X)$, tales que F_i es cerrado para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, donde $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Si para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene que $f_i : (F_i, \tau_{F_i}) \to (Y, \tau_Y)$ es una función continua y $f_i|_{F_i \cap F_{i+1}} = f_{i+1}|_{F_i \cap F_{i+1}}$ para $i = 1, 2, ..., n-1$, entonces $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ definida por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in F_i$, es una función continua.*

Demostración. Lo demostraremos sólo para el caso $n = 2$, ya que para el caso finito de cerrados se puede demostrar a partir del caso $n = 2$. Tenemos que f así definida es una función ya que $f_i|_{F_i \cap F_{i+1}} = f_{i+1}|_{F_i \cap F_{i+1}}$ para $i = 1, 2, ..., n-1$. Ahora, sea $C \subset Y$ cerrado. Notemos que

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap X = f^{-1}(C) \cap (F_1 \cup F_2) = (f^{-1}(C) \cap F_1) \cup (f^{-1}(C) \cap F_2) = f_1^{-1}(C) \cup f_2^{-1}(C).$$

Como f_1 y f_2 son continuas, tenemos que $f_1^{-1}(C)$ y $f_2^{-1}(C)$ son conjuntos cerrados en F_1 y F_2 respectivamente. Dado que F_1 y F_2 son cerrados en X, entonces $f_1^{-1}(C)$ y $f_2^{-1}(C)$ son cerrados en X. Así, $f^{-1}(C)$ es cerrado en X. Por lo tanto, f es continua. $\square$

Definición 1.9. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función.

1. Decimos que f es un *homeomorfismo* si es biyectiva, continua y su función inversa es continua.

2. Los espacios X y Y serán llamados *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos. En cuyo caso se denotará por $X \approx Y$.

3. Decimos que f es un *encaje*, si es un homeomorfismo sobre su imagen.

Definición 1.10. Sea P una propiedad.

1. Diremos que es una *propiedad topológica* si cada vez que un espacio X tiene la propiedad P, también la posee cualquier espacio topológico homeomorfo a X.

2. Diremos que es una *propiedad hereditaria*, si dado un espacio topológico X que tiene la propiedad P, entonces cualquier subespacio de X también la tiene.

Definición 1.11. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es una *función abierta (cerrada)* si la imagen bajo f de cualquier subconjunto abierto (cerrado) de X es un subconjunto abierto (cerrado) en Y.

Proposición 1.12. *Si f es una función biyectiva entre los espacios topológicos X y Y, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *f^{-1} es continua.*

2. *f es abierta.*

3. *f es cerrada.*

En particular, una función biyectiva y continua $f : X \to Y$ es un homeomorfismo si satisface alguna de las condiciones anteriores.

Proposición 1.13. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a x_0, entonces $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.*

Con respecto a los axiomas de separación mencionaremos definiciones y algunos resultados básicos.

Definición 1.14. Sea X un espacio topológico.

1. X es un *espacio* T_1, si para cualesquiera par de puntos distintos x y y de X, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.

2. X es un *espacio de Hausdorff* ó T_2, si para cualesquiera par de puntos distintos x y y de X, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

3. X es un *espacio regular* o T_3 si satisface las siguientes condiciones:

a) X es un espacio T_1;

b) para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existen subconjuntos abiertos ajenos U y V de X tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

4. X es un *espacio normal* o T_4 si tiene las siguientes propiedades:

a) X es un espacio T_1; y

b) para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos F_1 y F_2 de X, existen subconjuntos abiertos ajenos A_1 y A_2 de X tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$.

Teorema 1.15. *Un espacio topológico X es T_1 si y sólo si para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un subconjunto cerrado en X.*

Corolario 1.16. *Un espacio topológico X es T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es un subconjunto cerrado.*

Teorema 1.17. *La propiedad de ser de Hausdorff es una propiedad topológica y hereditaria.*

Proposición 1.18. *Sea X un espacio topológico T_1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es regular.*

2. *Para cualquier punto $x \in X$ y cualquier abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq cl(V) \subseteq U$.*

Proposición 1.19. *Sea X un espacio T_1. El espacio X es un espacio normal si y sólo si para todo subconjunto cerrado F de X y para cada subconjunto abierto A de X tal que $F \subseteq A$, existe un abierto B de X tal que $F \subseteq B \subseteq cl(B) \subseteq A$.*

Teorema 1.20. *La propiedad de normalidad es una propiedad topológica.*

De espacios producto necesitaremos lo siguiente.

Definición 1.21. Sea $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos. Se define el *producto cartesiano* de la familia $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in J}$ como

$$\prod_{\alpha \in J} Z_\alpha = \{f : J \to \bigcup_{\alpha \in J} Z_\alpha \mid f(\alpha) \in Z_\alpha \text{ para cada } \alpha \in J\}.$$

Para cada $\beta \in J$ definimos la *β-ésima proyección* del producto cartesiano como la función

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} Z_\alpha \to Z_\beta \text{ dada por } \pi_\beta((z_\alpha)_{\alpha \in J}) = z_\beta.$$

Definición 1.22. Sea $\{(Z_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios topológicos. El espacio producto en $\prod_{\alpha \in J} Z_\alpha$ es aquel que tiene como subbase todos los conjuntos de la forma $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, donde $U_\beta \in \tau_\beta$ para toda $\beta \in J$.

Teorema 1.23. *Sea $\{(Z_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios topológicos. Entonces para cada $\beta \in J$ fija, la proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} Z_\alpha \to Z_\beta$ es continua, abierta y suprayectiva.*

Teorema 1.24. *Sean* $\{(Z_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ *una familia de espacios topológicos, un espacio topológico* X *y* $f : X \to \prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ *una función. Entonces,* f *es continua si y sólo si* $\pi_\beta \circ f$ *es continua para cada* $\beta \in J$.

Corolario 1.25. *Sean* X *un espacio topológico fijo y* $\{(Z_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ *una familia de espacios topológicos. Asumamos que para cada* $\alpha \in J$ *se tiene definida una función* $f_\alpha : X \to Z_\alpha$. *Definimos* $f : X \to \prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ *dada por* $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$. *Entonces,* f *es continua si y sólo si* f_α *lo es para cada* $\alpha \in J$.

Teorema 1.26. *Sean* $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *familias de espacios topológicos y sea* $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ *una función para cada* $\alpha \in J$. *Definimos* $\prod f_\alpha : \prod_\alpha X_\alpha \to \prod_\alpha Y_\alpha$ *dada por* $\prod f_\alpha((x_\alpha)_{\alpha\in J}) = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in J}$. *Entonces, si cada* f_α *es continua, entonces también, lo es* $\prod f_\alpha$.

Proposición 1.27. *Sean* X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z *espacios topológicos,* $f : X_1 \to Y_1$, $g : X_2 \to Y_2$ *y* $F : Y_1 \times Y_2 \to Z$ *funciones continuas. Las siguientes funciones son continuas.*

1. $F_f : X_1 \times Y_2 \to Z$ *dada por* $F_f(x,t) = F(f(x), t)$.
2. $F^g : Y_1 \times X_2 \to Z$ *dada por* $F^g(x,t) = F(x, g(t))$.
3. $\overline{F}_f : X_1 \times X_2 \to Y_1$ *dada por* $\overline{F}_f(x,t) = f(x)$.
4. $\overline{F}^g : X_1 \times X_2 \to Y_2$ *dada por* $\overline{F}^g(x,t) = g(t)$.
5. $H : Y_1 \times [0,1] \to Z$ *dada por* $H(x,t) = F(x, 1-t)$ *y* $Y_2 = [0,1]$.

Demostración.

1. Definimos $G_f : X_1 \times Y_2 \to Y_1 \times Y_2$ la función dada por $G_f(x,t) = (f(x), t)$. Por el Teorema 1.26, G_f es continua. Además se tiene que $F_f = F \circ G_f$. Por lo tanto, F_f es continua.
2. Definimos $G^g : Y_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ la función dada por $G^g(x,t) = (x, g(t))$. De igual forma, por Teorema 1.26, G^g es continua, además $F^g = F \circ G^g$. Por lo tanto, F^g es continua.
3. Como $(\overline{F}_f)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times X_2$ para cada $A \subset Y_1$, de la continuidad de f se sigue que $\overline{F}_f$ es continua.
4. Como $(\overline{F}^g)^{-1}(A) = X_1 \times g^{-1}(A)$ para cada $A \subset Y_2$, de la continuidad de g se sigue que $\overline{F}^g$ es continua.
5. Definimos $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ como $\gamma(t) = 1-t$. Tenemos que γ es un homeomorfismo, por tanto continua. Nótese que si $X_2 = [0,1]$, por lo ya demostrado en el inciso (2), se tiene que $H = F^\gamma$. Por lo tanto, H es continua.

□

En relación a la compacidad consideramos lo siguiente.

Definición 1.28. Sea X un espacio topológico.

1. Una colección $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de subconjuntos de X es una *cubierta de* X si $X = \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$. Si además cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, entonces a $\mathcal{U}$ le llamaremos *cubierta abierta de* X. Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X y $\mathcal{V} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in K}$ con $K \subseteq J$ es una subcolección de $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta de* $\mathcal{U}$, si $X = \bigcup_{\alpha\in K} U_\alpha$.

2. X es un espacio *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Diremos que un subconjunto F de un espacio topológico X es compacto si al ser considerado con la topología relativa, es un compacto.

Proposición 1.29. *Sean X un espacio compacto y F un subespacio cerrado de X, entonces F es compacto.*

Proposición 1.30. *Sean X, Y espacios topológicos. Si X es compacto y $f : X \to Y$ es una función continua tal que $f[X] = Y$, entonces Y es compacto.*

Teorema 1.31. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Si X es de Hausdorff y K_1, K_2 subespacios compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, entonces existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $K_1 \subseteq U$ y $K_2 \subseteq V$.*

2. *Si X es regular, $F \subseteq X$ es cerrado y $K \subseteq X$ es compacto tales que $F \cap K = \emptyset$, entonces existen abiertos ajenos U y V en X tales que $F \subseteq U$ y $K \subseteq V$.*

Corolario 1.32. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Si X es de Hausdorff y K es un subespacio compacto de X, entonces K es cerrado en X.*

2. *Si X es compacto y de Hausdorff, entonces X es normal.*

Lema 1.33. *[22, Lema 3.2, p. 37] Si un espacio de Hausdorff es una imagen continua de un espacio métrico compacto, entonces es metrizable.*

Definición 1.34. Diremos que X un espacio topológico es *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.

Teorema 1.35. *Sea X un espacio topológico. Si X es métrico compacto, entonces es segundo numerable. Por lo tanto es separable.*

Con respecto a la conexidad mencionaremos lo siguiente.

Definición 1.36. Un espacio X se dice ser *conexo* si no puede expresarse como la unión de dos subconjuntos abiertos (cerrados) ajenos no vacíos. De lo contrario, se dirá que X es *disconexo*. Un subconjunto A de un espacio X se dirá que es *conexo* si lo es con la topología relativa.

Proposición 1.37. *Sea X un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es conexo, entonces Y es un espacio conexo.*

Teorema 1.38. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos cerrados-abiertos de X son X y $\emptyset$.*

Proposición 1.39. *Supongamos que X es un espacio topológico tal que cualesquiera dos de sus elementos están contenidos en algún subespacio conexo de X. Entonces X es conexo.*

Proposición 1.40. *Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$ conexo. Si $Z \subset X$ es tal que $Y \subset Z \subset cl(Y)$, entonces Z es conexo. En particular, la cerradura de un subconjunto conexo es un subconjunto conexo.*

Proposición 1.41. *Sea $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio X.*

1. *Si existe $j_0 \in J$ tal que $A_{j_0} \cap A_j \neq \emptyset$ para todo $j \in J$, entonces $\displaystyle\bigcup_{j\in J} A_j$ es conexo.*

2. *Si $\displaystyle\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$, entonces $\displaystyle\bigcup_{j\in J} A_j$ es conexo.*

Teorema 1.42. *Sean $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de espacios topológicos y $\displaystyle\prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ el espacio producto dotado con la topología producto. Entonces*

1. *$\displaystyle\prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ es compacto si y sólo si Z_α es compacto para toda $\alpha \in J$.*

2. *$\displaystyle\prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ es conexo si y sólo si Z_α es conexo para toda $\alpha \in J$.*

3. *Si $\displaystyle\prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ es métrico, entonces Z_α es métrico para cada $\alpha \in J$.*

4. *Si Z_α es métrico para cada $\alpha \in J$ y J es a lo más numerable, entonces $\displaystyle\prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ es métrico.*

5. *$\displaystyle\prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ es de Hausdorff si y sólo si Z_α es de Hausdorff para toda $\alpha \in J$.*

6. *$\displaystyle\prod_{\alpha\in J} Z_\alpha$ es regular si y sólo si Z_α es regular para toda $\alpha \in J$.*

Definición 1.43. Se dice que un espacio X es *localmente conexo*, si para cada $x \in X$ podemos encontrar un sistema básico de abiertos $\mathscr{B}(x)$ de x cuyos elementos son conexos. Equivalentemente, X es localmente conexo si y sólo si para cada $x \in X$ y cualquier abierto U de X que contiene a x, existe un abierto conexo V de X que contiene a x tal que $V \subseteq U$.

Definición 1.44. Dado un punto x en un espacio X, podemos considerar la colección de todos los subcojuntos conexos de X que contienen a x. La unión de todos ellos es un espacio conexo que denotaremos por C_x (Proposición 1.41). El conjunto C_x es el mayor subespacio conexo de X que contiene a x, al cual llamaremos *componente conexa* de x en X.

Definición 1.45. Un espacio X es *conexo por trayectorias* si para cualesquiera $x, y \in X$, existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. A tal función se le llama una *trayectoria* que va de x a y.

Teorema 1.46. *Cualquier espacio conexo por trayectorias es conexo.*

Definición 1.47. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto no vacío de X. Decimos que A es un *arco* si existe un homeomorfismo $\varphi : [0,1] \to A$.

Definición 1.48. Un espacio X es *arco-conexo* o *conexo por arcos* si para cualesquiera par de puntos $a, b \in X$ existe un arco $A \subset X$ tal que $a, b \in A$. Un espacio X es *localmente arco-conexo* en el punto $x_0 \in X$ si para cada abierto U de X que contiene x_0 existe un abierto arco-conexo V de X que contiene a x_0 tal que $V \subseteq U$.

Teorema 1.49. *[25, Corolario 31.6, p. 222] Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces, X es conexo por trayectorias si y sólo si es arco-conexo.*

Teorema 1.50. *[18, Teorema 1, p. 252] Si X es localmente arco-conexo en un punto $x_0 \in X$, entonces es localmente conexo en x_0.*

Teorema 1.51. *[18, Teorema 2, p. 253] Si X es conexo y localmente arco-conexo, entonces X es arco-conexo. Más aún, toda región (abierto conexo) de un espacio localmente arco-conexo es arco-conexa. En particular toda componente conexa de un espacio localmente arco-conexo, es arco-conexa.*

En cuestión de retracciones consideraremos las siguientes definiciones y resultados básicos.

Definición 1.52. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un *retracto* de X, si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$, es decir, $r|_A = id_X$. La función r se llama *retracción de X en A*.

Definición 1.53. Sea $n \in \mathbb{N}$ y el espacio métrico $\mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica usual (euclidiana). Definimos la *esfera n-dimensional* S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$ como $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$. Una *n-esfera* es un espacio el cual es homeormorfo a la esfera n-dimensional. Así, S^1 se llama la *esfera unidimensional* y a la *1-esfera* se le llama *curva cerrada simple.*

Ejemplo 1.54. Sea $X = S^1 \times \mathbb{R}$, entonces $A = S^1 \times \{0\}$ es un retracto de X.

Demostración. Notemos que la función $r : X \to A$ dada por $r(s, z) = (s, 0)$ es en efecto una retracción. □

Ejemplo 1.55. Sea $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. La esfera n-dimensional $A = S^n$ es un retracto de X.

Demostración. Notemos que la función $r : X \to A$ dada por $r(x) = \frac{1}{||x||}x$ es en efecto una retracción de X en A. □

Teorema 1.56. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ no vacío. Entonces, A es un retracto de X si y sólo si para cada espacio Y y cada función continua $f : A \to Y$, existe una función continua $f^* : X \to Y$ tal que $f^*|_A = f$.*

Demostración. Sean Y un espacio topológico y $f : A \to Y$ una función continua. Supongamos que A es un retracto de X, entonces existe una retracción $r : X \to A$. Definamos $f^* = f \circ r$. De aquí tenemos que $f^* : X \to Y$ es continua y además $f^*(a) = (f \circ r)(a) = f(r(a)) = f(a)$ para cada $a \in A$. Por lo tanto, $f^*|_A = f$.

Recíprocamente, como para cada espacio Y y cada función continua $f : A \to Y$ existe una función $f^* : X \to Y$ tal que $f^*|_A = f$. Tomando $Y = A$ y $f = id_A$ tenemos que $f^*|_A = id_A$, es decir, f^* es una retracción de X en A. Por lo tanto, A es un retracto de X. □

A la función f^* del Teorema 1.56 se le conoce como una *extensión continua de la función f*.

Notemos que en la definición de retracto no se le piden condiciones al subconjunto A de X. Si pedimos condiciones al espacio X y tenemos una retracción $r : X \to A$, entonces A resulta ser cerrado.

Teorema 1.57. *Sea X un espacio de Hausdorff y A un subespacio no vacío de X. Si A es un retracto de X, entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que A es un retracto de X y sea $r : X \to A$ una retracción de X en A. Si $A = X$, entonces A es cerrado en X. Supongamos que $A \neq X$. Demostremos que $X \setminus A$ es abierto en X. Sea $x_0 \in X \setminus A$, demostremos que x_0 es punto interior de $X \setminus A$. Como $r(x_0) \neq x_0$ y X es de Hausdorff, entonces existen dos abiertos ajenos U y V en X tales que $x_0 \in U$ y $r(x_0) \in V$. Como r es continua se tiene que $r^{-1}(V)$ es abierto en X tal que $x_0 \in r^{-1}(V)$.
Sea $W = U \cap r^{-1}(V)$, entonces W es un abierto en X tal que $x_0 \in W$ y $W \cap r(W) = \emptyset$; esto último se debe a que $W \subset U$ y $r(W) = r(U \cap r^{-1}(V)) \subset r(U) \cap r(r^{-1}(V)) = r(U) \cap V$ ya que r es suprayectiva. Así, $r(W) \subset V$, pero $U \cap V = \emptyset$. Finalmente, demostremos que $W \subset (X \setminus A)$, dicho de otra manera, $W \cap A = \emptyset$. Supongamos que $W \cap A \neq \emptyset$. Sea $a \in W \cap A$, como $a \in A$ entonces $r(a) = a$ y como $a \in W$ tenemos que $r(a) \in W$. Por lo que $a \in W \cap r(W)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x_0 \in W \subset (X \setminus A)$. Así, A es cerrado en X. □

Definición 1.58. Sea X un espacio métrico separable no vacío.

1. Sea A un subespacio no vacío de X. Decimos que A es un *retracto de vecindad* de X si existen un abierto U de X tal que $A \subset U$ y una retracción $r : U \to A$.

2. Decimos que X es un *retracto absoluto* si para cada espacio Z y cada encaje $h : X \to Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z, se tiene que $h(X)$ es un retracto de Z. Si X es un retracto absoluto lo denotaremos por *AR (Absolute Retract).*

3. Decimos que X es un *retracto absoluto de vecindad* si para cada espacio Z y cada encaje $h : X \to Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z, se tiene que $h(X)$ es un retracto de vecindad de Z. Si X es un retracto absoluto de vecindad lo denotaremos por *ANR (Absolute Neighbourhood Retract).*

De manera análoga se tienen las siguientes definiciones.

Definición 1.59. Sea X un espacio métrico separable no vacío.

1. Decimos que X es un *extensor absoluto* si para cada espacio Z, cada subconjunto cerrado no vacío A de Z y toda función continua $f : A \to X$, existe una función continua $F : Z \to X$ tal que $F|_A = f$.

2. Decimos que X es un *extensor absoluto de vecindad* si para cada espacio Z, cada subconjunto cerrado no vacío A de Z y toda función continua $f : A \to X$, existen un subconjunto abierto U de Z tal que $A \subset U$ y una función continua $F : U \to X$ tal que $F|_A = f$.

Notemos que en la definición anterior la función F es una extensión continua de la función f, es decir, $F = f^*$. Además que todo AR es un ANR, así como todo extensor absoluto es un extensor absoluto de vecindad. Los recíprocos no son ciertos. Se colocarán los siguientes resultados con respecto a las definiciones anteriores en una forma ordenada por así decirlo, ya que de esta manera aparecen en [20]. Uno de nuestros propósitos será usar el Corolario 1.66 en el Capítulo 7.

Teorema 1.60. *[20, Teorema 3.12, p. 157] El ser un extensor absoluto y un extensor de vecindad absoluto son propiedades topológicas.*

Teorema 1.61. *[20, Teorema 3.13, p. 157] Sea X un espacio métrico separable y no vacío. Entonces*

1. *X es AR si y sólo si X es un extensor absoluto.*

2. *X es un ANR si y sólo si X es un extensor absoluto de vecindad.*

Corolario 1.62. *[20, Corolario 3.14, p. 158] El ser un AR y un ANR son propiedades topológicas.*

Teorema 1.63. *[20, Teorema 3.16, p. 158] Las siguientes proposiciones son ciertas:*

1. *Todo retracto de un AR es un AR.*

2. *Todo retracto de un ANR es un ANR.*

3. *El producto de una familia a lo más numerable de espacios métricos, separables y no vacíos es un AR si y sólo si cada espacio factor es un AR.*

4. *El producto de una familia finita de ANR es un ANR.*

Corolario 1.64. *[20, Corolario 3.17, p. 160] Los siguientes espacios son AR: $\mathbb{R}^n$, $[0,1]^n$, con $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^\infty$, el cubo de Hilbert $Q = \prod_{k=1}^{\infty} [0,1]_k$.*

Teorema 1.65. *[20, Teorema 3.18, p. 160] Todo retracto de vecindad de un ANR es un ANR.*

Corolario 1.66. *[20, Corolario 3.19, p. 160] Para cada $n \in \mathbb{N}$, S^n es un ANR.*

Proposición 1.67. *[18, Ejemplo (iii), p. 339] Todo espacio X ANR es localmente arco-conexo.*

De los espacios topológicos llamados continuos consideramos lo siguiente.

Definición 1.68. Un *continuo* X es un espacio topológico no vacío, métrico, compacto y conexo. Un *subcontinuo* de un continuo X es un subespacio de X que también es un continuo.

Definición 1.69. Decimos que dos continuos C_1 y C_2 son continuamente equivalentes siempre que existan dos funciones continuas suprayectivas $f : C_1 \to C_2$ y $g : C_2 \to C_1$.

Definición 1.70. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *conexo por continuos* si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe un continuo C en X tal que $a, b \in C$.

Posteriormente en el Capítulo 8 se definirán continuos con propiedades muy particulares.

En relación a espacios cociente usaremos lo siguiente.

Definición 1.71. Sean Y un conjunto, X un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función suprayectiva. La *identificación topológica* en Y determinada por f es la familia $\tau_f = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$.

Teorema 1.72. *1. La familia τ_f es una topología en Y.*

2. La función $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_f)$ es continua, y τ_f es la mayor topología en Y que satisface esta propiedad.

3. τ_f es la única topología en Y que satisface la siguiente propiedad.

Para cualquier espacio topológico Z, una función $g : Y \to Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.

Definición 1.73. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función continua suprayectiva $f : X \to Y$ es llamada *una identificación* si la topología en Y es exactamente τ_f.

Como ejemplo particular de esto tenemos el siguiente caso. Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $\mathfrak{D} = \{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una partición de X. Sea $\tau_{\mathfrak{D}} = \{\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in K} \subseteq \mathfrak{D} \mid \bigcup_{\alpha \in K} \mathcal{D}_\alpha \in \tau_X \text{ con } K \subseteq J\}$. Se sabe que $\tau_{\mathfrak{D}}$ es una topología para X llamada la *topología cociente o la topología de identificación*, esto último justificado por lo siguiente.

Sea $p : X \to \mathfrak{D}$ la función definida como $p(x) = \mathcal{D}$ donde $\mathcal{D}$ es el elemento de la partición que contiene a x. Se sabe que p es una identificación, esto es $\tau_{\mathfrak{D}} = \tau_p$. Dicho de otra manera si $\mathcal{U} = \{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in K}$ con $K \subseteq J$, entonces $\mathcal{U} \in \tau_{\mathfrak{D}}$ si y sólo si $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{\alpha \in K} \mathcal{D}_\alpha \in \tau_X$.

Como una partición $\mathfrak{D}$ en X determina una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ y viceversa, se suele denotar al conjunto $\mathfrak{D}$ por $X/\mathcal{R}$. Por lo tanto el conjunto $X/\mathcal{R}$ con la identificación $p : X \to X/\mathcal{R}$ definida anteriormente es llamado *espacio cociente* o de *identificación.*

Un espacio cociente muy usado es aquel que resulta de tener la partición $\mathfrak{D} = \{\{x\} \mid x \notin A\} \bigcup \{A\}$ donde A es un conjunto cerrado de X. A tal conjunto se le denota por X/A.

Por otra parte, el proceso de "adjuntar" un espacio X a un espacio Y por medio de una función continua f es de gran importancia en la topología moderna. Este proceso esta íntimamente ligado a los espacios cociente. Para esto comenzamos con la siguiente definición.

Definición 1.74. Sean X y Y espacios topológicos ajenos. Se define la *unión libre* de X y Y como el espacio topológico (W, τ), donde $W = X \cup Y$ y $\tau = \{U \subset W \mid U \cap X$ es abierto en X y $U \cap Y$ es abierto en $Y\}$. A la unión libre de X y Y la denotamos por $X + Y$.

Definición 1.75. Sean X, Y espacios topológicos ajenos, A un subconjunto cerrado en X y $f : A \to Y$ una función continua. Si en $X + Y$ generamos la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ dada por $a\mathcal{R}f(a)$ para cada $a \in A$, al espacio cociente $(X + Y)/\mathcal{R}$ se le conoce como *"X adjuntado a Y por f"* ó *"espacio de adjunción* de X a Y por f" ó simplemente *"espacio de adjunción"*. Se le denota por $X \cup_f Y$ y f es llamada *una adjunción.*

Intuitivamente los espacios X y Y son vistos juntos a lo largo de A identificando cada $a \in A$ con su imagen $f(a) \in Y$.

Obsevación 1.76. *Notemos que el espacio de adjunción de X a Y por f lo podemos ver de la siguiente manera con respecto a sus clases de equivalencia.*

$$X \cup_f Y = \left\{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(A)\right\} \bigcup \{\{x\} : x \in (X + Y) \setminus [A \cup f(A)]\}$$

Teorema 1.77. *[22, Teorema 3.19, p. 43] Si X y Y son espacios métricos compactos no vacíos ajenos, entonces $X \cup_f Y$ es un espacio métrico compacto no vacío.*

Teorema 1.78. *[22, Teorema 3.20, p. 43] Si X y Y son continuos ajenos, entonces $X \cup_f Y$ es un continuo.*

Al espacio de adjunción $X \cup_f Y$ lo llamaremos *continuo de adjunción.*

Finalmente consideraremos en algún momento los llamados límites inversos. Veamos como se definen.

Definición 1.79. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función continua. Entonces la sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios métricos y funciones es llamada *sucesión inversa.* Las funciones f_n^{n+1} son llamadas *funciones de ligadura.*

$$X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \longleftarrow \cdots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{f_{n-1}^n} X_n \xleftarrow{f_n^{n+1}} X_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

.

Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > m$, entonces se denota $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^n$ y $f_n^n = id_{X_n}$ donde id_{X_n} denota la función identidad en X_n.

Definición 1.80. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa de espacios métricos. Definimos *el límite inverso* de $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ denotado por $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ o X_∞, como el subespacio del espacio producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ dado por

$$\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Proposición 1.81. *[22, Teorema 2.4, p. 19] Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa de espacios métricos.*

1. *Si X_n es un espacio métrico compacto no vacío para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X_∞ es métrico compacto no vacío.*

2. *Si X_n es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X_∞ es un continuo.*

Se puede ver fácilmente que si las funciones de ligadura son suprayectivas entonces X_∞ es no vacío.

Definición 1.82. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa de arcos (i.e. para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es un arco) con funciones ligadura suprayectivas. Entonces a el límite inverso X_∞ de $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se le llama *continuo tipo arco.*

Definición 1.83. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa de curvas cerradas simples (i.e. para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es una curva cerrada simple) con funciones ligadura suprayectivas. Entonces a el límite inverso X_∞ de $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se le llama *continuo tipo círculo.*

Definición 1.84. Sea X un espacio métrico compacto. Una *cadena* $\mathcal{U}$ en X es una sucesión finita $U_1, U_2, ..., U_n$ de subconjuntos de X tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ para cada $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. A cada U_j se le conoce como *eslabón* de $\mathcal{U}$. Si cada eslabón de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto, entonces a $\mathcal{U}$ se le llama *cadena abierta.* Si $\varepsilon > 0$, y $\mathcal{U}$ es una cadena abierta tal que la *malla*$(\mathcal{U}) < \varepsilon$, entonces a $\mathcal{U}$ se le llama *ε-cadena*, donde *malla*$(\mathcal{U}) = \text{máx}\{\textit{diám}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Definición 1.85. Un continuo X se dice que es *encadenable* si para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena que cubre a X. Si $x_1, x_2 \in X$, entonces X *es encadenable desde* x_1 *hasta* x_2 si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena $\mathcal{U}_\varepsilon$ que cubre a X tal que x_1 pertenece al primer eslabón y x_2 pertenece al último eslabón.

Definición 1.86. Sea X un espacio métrico compacto. Una *cadena circular* $\mathcal{U}$ en X es una sucesión finita $U_0, U_1, ..., U_n$ de subconjuntos de X tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ ó $i, j \in \{1, n\}$. A cada U_j se le llama *eslabón de* $\mathcal{U}$. Si cada eslabón de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto, entonces a $\mathcal{U}$ se le llama *cadena circular abierta*. Si $\varepsilon > 0$, y $\mathcal{U}$ es una cadena circular abierta tal que la *malla*$(\mathcal{U}) < \varepsilon$, entonces a $\mathcal{U}$ se le llama ε-*cadena circular*.

Definición 1.87. Un continuo X se dice que es *circularmente encadenable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena circular que cubre a X.

Más adelante veremos algunos resultados relacionados a límites inversos que se usarán para nuestros fines, no se demostrarán pero se dejará referencia para su consulta.

Capítulo 2

Topología compacto-abierta.

Sean X, Y espacios topológicos. Definimos el siguiente conjunto $Y^X = \{f : X \to Y \mid f \text{ es una función}\}$. A tal conjunto lo dotaremos de una topología llamada *topología compacto-abierta* que definiremos a continuación.

Definición 2.1. Para cada par de conjuntos $A \subseteq X,\ B \subseteq Y$ sea

$$[A, B] = \{f \in Y^X \mid f(A) \subseteq B\}$$

La *topología compacto-abierta* en Y^X es aquella que tiene como subbase a todos los conjuntos $[A, V]$, donde $A \subseteq X$ es compacto y $V \subseteq Y$ es abierto. A esta topología la denotaremos por τ_k.

El espacio (Y^X, τ_k) con ésta topología tiene varios subespacios interesantes. Para el estudio de este trabajo nos fijaremos en el siguiente conjunto $C(X, Y) = \{f \in Y^X \mid f \text{ es continua}\}$.

Proposición 2.2. *Para cada $y \in Y$ sea $c_y : X \to Y$ dada por $c_y(x) = y$. La función $j : Y \to C(X, Y)$ dada por $j(y) = c_y$ es un homeomorfismo de Y sobre un subespacio de $C(X, Y)$. Así, Y es encajado en $C(X, Y)$.*

Demostración. Tenemos que j es inyectiva. En efecto, para esto, sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $j(y_1) = j(y_2)$, entonces $c_{y_1} = c_{y_2}$, es decir, $c_{y_1}(x) = c_{y_2}(x)$ para cada $x \in X$. Por lo tanto, $y_1 = y_2$.

Sea $[A, V]$ un subbásico de la topología compacto-abierta en $C(X, Y)$ que contiene al punto c_y. Ahora, como $c_y \in [A, V]$ si y sólo si $c_y(A) \subset V$ si y sólo si $y \in V$, entonces del Teorema 1.7, se sigue que la función j es continua. De igual forma por el mismo Teorema 1.7, la función $j^{-1} : j(Y) \to Y$ es continua. Por lo tanto, de la Proposición 1.12, la función j es un homeomorfismo en su imagen. □

En relación a los axiomas de separación tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *$C(X, Y)$ es de Hausdorff si y sólo si Y es Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que $C(X, Y)$ es de Hausdorff. Por la Proposición 2.2 tenemos que Y es homeomorfo a un subespacio Z de $C(X, Y)$. Así, Z es de Hausdorff ya que ser de Hausdorff es una propiedad hereditaria y al ser también una propiedad topológica, Y es de Hausdorff.

Recíprocamente, sean $f, g \in C(X,Y)$ tales que $f \neq g$. Entonces, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Como Y es de Hausdorff, existen abiertos ajenos U y V en Y tales que $f(x_0) \in U$ y $g(x_0) \in V$. De aquí, los conjuntos $[\{x_0\}, U]$ y $[\{x_0\}, V]$ son abiertos básicos ajenos en $C(X,Y)$ tales que $f \in [\{x_0\}, U]$ y $g \in [\{x_0\}, V]$. Por lo tanto, $C(X,Y)$ es de Hausdorff. $\square$

Teorema 2.4. *Sean X un espacio de Hausdorff y compacto, y Y un espacio topológico. Si $w : C(X,Y) \times X \to Y$ es la función dada por $w(f,x) = f(x)$ para toda $(f,x) \in C(X,Y) \times X$, entonces w es continua.*

Demostración. Queremos demostrar que para todo abierto H en Y, el conjunto $w^{-1}(H)$ es un abierto en $C(X,Y) \times X$. Nótese primero que

$$w^{-1}(H) = \{(f,x) \in C(X,Y) \times X \mid w(f,x) \in H\} = \{(f,x) \in C(X,Y) \times X \mid f(x) \in H\}.$$

Basta mostrar que para todo punto $(f,x) \in w^{-1}(H)$ existe un abierto Q en $C(X,Y) \times X$ tal que $(f,x) \in Q \subset w^{-1}(H)$. Lo cual es equivalente a que si $(f,x) \in Q$, entonces $f(x) \in H$.

Sea H un abierto en Y y sea $(f_0, x_0) \in w^{-1}(H)$. Como $f_0 \in C(X,Y)$ y X es regular por ser de Hausdorff y compacto, entonces se sigue de la Proposición 1.18, que existe un abierto G en X que contiene a x_0 tal que $f_0(cl(G)) \subset H$, ya que $f_0(x_0) \in H$. Como X es compacto, entonces $cl(G) \subset X$ es compacto. Por lo tanto, $f_0 \in [cl(G), H]$.

Sea $Q = [cl(G), H] \times G$. Tenemos que Q es un abierto en $C(X,Y) \times X$ tal que $(f_0, x_0) \in Q$. Solo falta demostrar que $Q \subset w^{-1}(H)$. Si $(f,x) \in Q$, entonces $(f,x) \in [cl(G), H] \times G$, es decir, $f \in [cl(G), H]$ con $x \in G$. De donde $f(cl(G)) \subset H$ y $x \in G$. Así, $f(G) \subset H$. Por tanto $f(x) \in H$, es decir, $(f,x) \in w^{-1}(H)$. Por lo que $Q \subset w^{-1}(H)$. Esto implica que $w^{-1}(H)$ es un abierto en $C(X,Y) \times X$. Así, concluimos que la función w es continua. $\square$

Proposición 2.5. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f \in C(X,Y)$ y $g \in C(Y,Z)$. Definimos la función $T : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$ dada por $T(f,g) = g \circ f$. Entonces,*

1. *La función $T_1 : C(Y,Z) \to C(X,Z)$ dada por $T_1(g) = g \circ f_1$ es continua para cada $f_1 \in C(X,Y)$ fijo.*
2. *La función $T_2 : C(X,Y) \to C(X,Z)$ dada por $T_2(f) = g_2 \circ f$ es continua para cada $g_2 \in C(Y,Z)$ fijo.*

Demostración.

1. Sea $[A,V]$ un subbásico en $C(X,Z)$ que contiene a $g \circ f_1$. Notemos que $g \circ f_1 \in [A,V]$ si y sólo si $(g \circ f_1)(A) \subset V$ si y sólo si $g \in [f_1(A), V]$. Como $f_1(A)$ es compacto en Y tenemos que $[f_1(A), V]$ es un subbásico en $C(Y,Z)$ que contiene a g y además $T_1([f_1(A), V]) = [A,V]$. Así, T_1 es continua.
2. Análogamente, sea $[A,V]$ un subbásico en $C(X,Z)$ que contiene a $g_2 \circ f$. Notemos que $g_2 \circ f \in [A,V]$ si y sólo si $(g_2 \circ f)(A) \subset V$ si y sólo si $g_2(f(A)) \subset V$ si y sólo si $f(A) \subset g_2^{-1}(V)$ si y sólo si $f \in [A, g_2^{-1}(V)]$. Como $g_2^{-1}(V)$ es un abierto en Y, tenemos que $[A, g_2^{-1}(V)]$ es un subbásico en $C(X,Y)$ que contiene a f. Por lo tanto $T_2([A, g_2^{-1}(V)]) = [A,V]$. Por lo que T_2 es continua.

$\square$

Ahora, sean X, Y y Z espacios topológicos. Veamos la relación existente entre los espacios $C(X \times Z, Y)$ y $C(Z, C(X,Y))$. Sea $g : X \times Z \to Y$ una función y denotemos $f_z(x) = g(x,z)$. Podemos definir para cada $z \in Z$ una función $f : Z \to C(X,Y)$ dada por $f(z) = f_z$. Las funciones $g : X \times Z \to Y$ y $f : Z \to C(X,Y)$ relacionadas por la fórmula $f_z(x) = g(x,z)$ son llamadas *funciones asociadas.* Tomando esto en cuenta tenemos el siguiente teorema, el cual será de gran utilidad para un resultado importante en el siguiente capítulo, especialmente en el Teorema 3.21.

Teorema 2.6. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Sean $g : X \times Z \to Y$ y $f : Z \to C(X,Y)$ funciones asociadas por medio de la relación $f_z(x) = g(x,z)$, donde $f(z) = f_z$. Si g es continua, entonces f es continua. Es decir, si $g \in C(X \times Z, Y)$, entonces $f \in C(Z, C(X,Y))$.*

Demostración. Sea Q un abierto en $C(X,Y)$. Vamos a demostrar que $f^{-1}(Q)$ es un abierto en Z. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que Q es un subbásico, es decir, $Q = [C,H]$. Notemos lo siguiente:

$z \in f^{-1}(Q)$ si y sólo si $f_z \in Q$ si y sólo si $f_z(x) \in H$ para cada $x \in C$. (1)

Sea $z_0 \in f^{-1}(Q)$. Entonces, $f_{z_0}(x) = g(x,z_0) \in H$ para cada $x \in C$, es decir, $C \times \{z_0\} \subset g^{-1}(H)$. Como g es continua, se tiene que $g^{-1}(H)$ es abierto en $X \times Z$. Así, $g^{-1}(H)$ es unión de abiertos de la forma $G_r \times U_r$, donde G_r y U_r son abiertos en X y Z respectivamente; esto implica que

$$g^{-1}(H) = \bigcup_{r \in J} (G_r \times U_r).$$

Dado que $C \times \{z_0\}$ es un conjunto compacto contenido en $g^{-1}(H)$, la familia $\{G_r \times U_r\}_{r \in J}$ es una cubierta abierta de $C \times \{z_0\}$. Por lo que, existe una subcubierta finita, esto es,

$$C \times \{z_0\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (G_{r_i} \times U_{r_i}).$$

Nótese que $z_0 \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{r_i}$, el cual es un abierto en Z. Mostremos que $U \subset f^{-1}(Q)$. Para esto, sea $z \in U$. Como $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{r_i}$, se tiene que para cada $x \in C$, $(x,z) \in \bigcup_{i=1}^{n} (G_{r_i} \times U_{r_i}) \subset g^{-1}(H)$. De aquí $g(x,z) \in H$. Así, $f_z(x) \in H$ y de (1) tenemos que $z \in f^{-1}(Q)$ como se quería. Por lo tanto, f es continua. $\square$

Teorema 2.7. *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $g : X \times Z \to Y$ y $f : Z \to C(X,Y)$ funciones asociadas por medio de la fórmula $f_z(x) = g(x,z)$ donde $f(z) = f_z$. Si X regular localmente compacto y f es continua, entonces g es continua.*

Demostración. Sea H un abierto en Y. Demostremos que $g^{-1}(H)$ es un abierto en $X \times Z$.
Sea $(x_0, z_0) \in g^{-1}(H)$. Como $f_{z_0} \in C(X,Y)$ y $f_{z_0}(x_0) = g(x_0,z_0) \in H$, entonces existe un abierto G_0 en X tal que $x_0 \in G_0$ y $f_{z_0}(G_0) \subset H$. Como X es regular y localmente compacto, existe un abierto G tal que $x_0 \in G$, $cl(G)$ es compacto y $cl(G) \subset G_0$. De esto último se sigue que $f_{z_0}(cl(G)) \subset f_{z_0}(G_0) \subset H$; es decir, $f_{z_0} \in [cl(G), H]$. Sea $U = f^{-1}([cl(G),H])$. Entonces $z \in U$ si y sólo si $f_z \in [cl(G),H]$.

Como f es continua y $[cl(G),H]$ es un abierto en $C(X,Y)$, entonces U es abierto en Z. Por lo anterior se tiene que $z_0 \in U$. De esta manera $G \times U$ es un abierto en $X \times Z$ tal que $(x_0,z_0) \in G \times U$. Ahora mostraremos que $G \times U \subset g^{-1}(H)$, para esto, sea $(x,z) \in G \times U$. Dado que $z \in U$ se tiene que $f_z \in [cl(G),H]$. Como $[cl(G),H] \subset [G,H]$, se tiene que $f_z \in [G,H]$, es decir, $f_z(x) \in H$ para cada $x \in G$. De donde $g(x,z) = f_z(x) \in H$ para cada $(x,z) \in G \times U$. Luego $(x,z) \in g^{-1}(H)$ para cada $(x,z) \in G \times U$. Por lo tanto, $g^{-1}(H)$ es abierto. $\square$

Sean (Y,d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Para cada $f \in Y^X$ y cada $\varepsilon > 0$ definamos el conjunto $B(f,\varepsilon)$ como la colección de funciones $g : X \to Y$ cuya gráfica $G_g \subset X \times Y$ no se separa de la gráfica de f en más de una cantidad $0 < \delta < \varepsilon$; es decir,

$$B(f,\varepsilon) = \{g : X \to Y \mid \exists\, \delta < \varepsilon,\ \ d(f(x), g(x)) < \delta \quad \forall\, x \in X\}.$$

Se sabe que la colección $\mathcal{B} = \{B(f,\varepsilon) \mid f \in Y^X, \varepsilon > 0\}$ forman una base para una topología en Y^X. A esta topología en Y^X y a su restricción en $C(X,Y)$, la denotaremos por τ_d y la llamaremos *topología de la convergencia uniforme* con respecto a la métrica d. Recordemos la siguiente definición.

Definición 2.8. Una métrica d en un espacio Y se dice que es *acotada* si existe un número natural $M > 0$ tal que $d(y_1,y_2) < M$ para cualesquiera $y_1, y_2 \in Y$. Lo cual es equivalente a decir que el $diam(Y)$ es finito.

No es difícil demostrar que si d es una métrica en el espacio Y, entonces la métrica

$$d^* : Y \times Y \to \mathbb{R}^+ \ \text{ definida por } \ d^*(y_1,y_2) = \text{mín}\{1, d(y_1,y_2)\}$$

es una métrica acotada en Y y equivalente a d. Dicho así, toda métrica d en Y es equivalente a una métrica acotada.

Sean X un espacio topológico y (Y,d) un espacio métrico tal que d es acotada. Definimos la siguiente función

$$\hat{d} : Y^X \times Y^X \to \mathbb{R}^+ \ \text{ dada por } \ \hat{d}(f,g) = \sup_{x \in X}\{d(f(x),g(x))\}.$$

Tenemos así, el siguiente resultado.

Teorema 2.9. *Sea X un espacio topológico. Si (Y,d) es un espacio métrico, entonces (Y^X, τ_d) es metrizable. Y como consecuencia $C(X,Y)$ es métrico.*

Demostración. Demostremos que $\hat{d}$ es una métrica para Y^X. Dado que d es acotada, tenemos que $\hat{d}$ está bien definida. Se sigue inmediatamente de la definición de $\hat{d}$ que

i) $\hat{d}(f,g) \geqslant 0$ para cualesquiera $f, g \in Y^X$.

ii) $\hat{d}(f,g) = \hat{d}(g,f)$ para cualesquiera $f, g \in Y^X$.

iii) $\hat{d}(f,g) = 0$ si y sólo si $\sup_{x \in X}\{d(f(x),g(x))\} = 0$ si y sólo si $d(f(x),g(x)) = 0$ para toda $x \in X$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ para toda $x \in X$ si y sólo si $f = g$.

iv) Para demostrar la desigualdad del triángulo, sean $f, g, h \in Y^X$. Entonces

$$\hat{d}(f,g) + \hat{d}(g,h) = \sup_{x \in X}\{d(f(x),g(x))\} + \sup_{x \in X}\{d(g(x),h(x))\} \geqslant$$

$$\sup_{x \in X}\{d(f(x),g(x)) + d(g(x),h(x))\} \geqslant \sup_{x \in X}\{d(f(x),h(x))\} = \hat{d}(f,h).$$

Lo cual implica que

$$\hat{d}(f,h) \leqslant \hat{d}(f,g) + \hat{d}(g,h) \ \text{ para toda } f,g,h \in Y^X.$$

Por lo tanto $\hat{d}$ es una métrica para Y^X. A esta métrica se le conoce como *la métrica del supremo en* Y^X y a la topología generada por ésta métrica se le conoce como *topología del supremo* para Y^X.

Sean $f \in Y^X$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la bola con centro en f y radio ε con respecto a la métrica $\hat{d}$ como

$$\hat{B}(f,\varepsilon) = \{g \in Y^X \mid \hat{d}(f,g) < \varepsilon\}$$

Solo falta demostrar que $\tau_{\hat{d}} = \tau_d$. Veamos que $\tau_{\hat{d}} \subseteq \tau_d$ y $\tau_{\hat{d}} \supseteq \tau_d$.

$\subseteq$) Sean $f \in Y^X$, $\varepsilon > 0$ y $\hat{B}(f,\varepsilon) \in \tau_{\hat{d}}$. Basta con mostrar que $B(f,\varepsilon) \subseteq \hat{B}(f,\varepsilon)$. Sea $g \in B(f,\varepsilon)$. Entonces existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $d(f(x),g(x)) < \delta$ para toda $x \in X$. De esta manera δ es una cota superior del conjunto $\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$. Por lo tanto $\sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\} \leqslant \delta$, es decir, $\hat{d}(f,g) \leqslant \delta < \varepsilon$, luego $g \in \hat{B}(f,\varepsilon)$. De aquí, $B(f,\varepsilon) \subseteq \hat{B}(f,\varepsilon)$. Lo que implica que $\tau_{\hat{d}} \subseteq \tau_d$.

$\supseteq$) Sean $f \in Y^X$, $\varepsilon > 0$ y $B(f,\varepsilon) \in \tau_d$. Basta con mostrar que $\hat{B}(f,\varepsilon) \subseteq B(f,\frac{3}{2}\varepsilon)$. Sea $g \in \hat{B}(f,\varepsilon)$. Entonces $\hat{d}(f,g) < \varepsilon$. Como $d(f(x),g(x)) \leqslant \hat{d}(f,g)$ para toda $x \in X$. Esto implica que $d(f(x),g(x)) < \frac{3}{2}\varepsilon$ para toda $x \in X$. Luego, $g \in B(f,\frac{3}{2}\varepsilon)$. De aquí, $\hat{B}(f,\varepsilon) \subseteq B(f,\frac{3}{2}\varepsilon)$. Lo que implica que $\tau_d \subseteq \tau_{\hat{d}}$.

De ambas partes se tiene que $\tau_{\hat{d}} = \tau_d$. Por lo que Y^X es metrizable. □

El siguiente resultado muestra la relación existente entre la topología compacto-abierta y la topología del supremo en el subespacio $C(X,Y)$ de Y^X. Hacemos notar que varios de los resultados enunciados en este trabajo están demostrados con base a la topología compacto-abierta.

Teorema 2.10. *Sean X un espacio compacto y Y un espacio métrico. Entonces la topología del supremo coincide con la topología compacto-abierta en $C(X,Y)$, es decir, $\tau_{\hat{d}} = \tau_k$.*

Demostración. Notemos que una base para la topología del supremo está dada por los siguientes conjuntos,

$$B(f,\varepsilon) = \{\ g \in C(X,Y) \mid \hat{d}(f,g) < \varepsilon\ \} \ \text{ con } \ f \in C(X,Y) \ \text{ y } \ \varepsilon > 0.$$

Sean $h \in C(X,Y)$ y $\varepsilon > 0$. Probaremos que cada $B(h,\varepsilon) \in \tau_{\hat{d}}$ contiene un abierto de la topología compacto-abierta que contiene a h. De la compacidad de X y de la continuidad de h, existen un número finito de abiertos no vacíos $U_1, U_2, ..., U_n$ en X que cubren a X, es decir, $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ tales que $diam(h(U_i)) < \varepsilon/2$ para cada $i = 1,2,...,n$. Tomemos $x_i \in U_i$ para cada $i = 1,2,...,n$. Sean $K_i = cl(U_i)$ y $V_i = B(h(x_i),\varepsilon/2) = \{\ y \in Y \mid d(h(x_i),y) < \varepsilon/2\ \}$. Notemos que K_i es compacto en X y V_i es un abierto en Y para cada $i = 1,2,...,n$. Como $diam(h(K_i)) \leq \varepsilon/2$, tenemos que $d(h(x),h(x_i)) \leq \varepsilon/2$ para cada $x \in K_i$ y para toda $i = 1,2,...,n$. Por lo tanto $h(x) \in V_i$ para toda $i = 1,2,...,n$, es decir, $h \in [K_i,V_i]$ para toda $i = 1,2,...,n$. Así, $h \in \bigcap_{i=1}^{n}[K_i,V_i]$. Notemos que $\bigcap_{i=1}^{n}[K_i,V_i] \in \tau_k$. Además, si $g \in \bigcap_{i=1}^{n}[K_i,V_i]$, entonces $g \in [K_i,V_i]$, es decir, $g(K_i) \subset V_i$ para toda $i = 1,2,...,n$. De aquí, para cada $x \in K_i$ se tiene que $g(x) \in V_i$ para toda $i = 1,2,...,n$. De donde, $d(g(x),h(x_i)) < \varepsilon/2$ para cada $x \in K_i$ y para

toda $i = 1, 2, ..., n$.
Como $diam(h(K_i)) \leq \varepsilon/2$, se sigue de la desigualdad del triángulo que

$$d(g(x), h(x)) \leqslant d(g(x), h(x_i)) + d(h(x_i), h(x)) < \varepsilon. \text{ Con lo cual } g \in B(h, \varepsilon).$$

Por lo tanto, $h \in \bigcap_{i=1}^{n} [K_i, V_i] \subset B(h, \varepsilon)$.

Por otro lado, sean $[K, V] \in \tau_k$ y $h \in [K, V]$. El hecho de que $h(K) \subset V$ implica que $h(K) \bigcap (Y \setminus V) = \emptyset$ y dado que $h(K)$ es compacto y $Y \setminus V$ es cerrado tenemos de [12, Teorema 4.4, p 234] que $d(h(K), Y \setminus V) > 0$. Definamos $\varepsilon = d(h(K), Y \setminus V)$. Sea $g \in B(h, \varepsilon/2) \in \tau_{\hat{d}}$. Supongamos que $g \notin [K, V]$. Entonces existe un $x_0 \in K$ tal que $g(x_0) \notin V$, esto implica que $g(x_0) \in Y \setminus V$. Por lo tanto,

$$\varepsilon = d(h(K), Y \setminus V) \leqslant d(h(x_0), Y \setminus V) \leqslant d(h(x_0), g(x_0)) < \varepsilon.$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se debe tener que $g \in [K, V]$. Así, $B(h, \varepsilon/2) \subset [K, V]$. Hemos demostrado que cada abierto $[K, V] \in \tau_k$ tal que $h \in [K, V]$ contiene un abierto $B(h, \varepsilon/2) \in \tau_{\hat{d}}$.

Concluimos que $\tau_{\hat{d}} = \tau_k$ en $C(X, Y)$. □

Con respecto a la topología de la convergencia uniforme, se sabe de [12, Teorema 8.4 (1), p. 271] lo siguiente.

Teorema 2.11. *Sean X espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $C(X, Y)$ converge a f en $(C(X, Y), \tau_{\hat{d}})$ si y sólo si converge uniformemente a f, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y para todo $n \geq n_0$.*

Teorema 2.12. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio métrico y $C(X, Y)$ con la topología compacto-abierta. Entonces Y es un retracto de $C(X, Y)$.*

Demostración. Notemos primero que por la Proposición 2.2, tenemos que Y puede ser encajado en $C(X, Y)$. Así, podemos identificar al espacio Y con la familia de las funciones constantes que pertenecen a $C(X, Y)$. Sea $x_0 \in X$. Definimos $r : C(X, Y) \to Y$ como $r(f) = f(x_0)$ para cada $f \in C(X, Y)$, afirmamos que r es una retracción de $C(X, Y)$ sobre Y. Sea $f_{y_0} \in C(X, Y)$ dada por $f_{y_0}(t) = y_0$ para toda $x \in X$, entonces $r(f_{y_0}) = f_{y_0}(x_0) = y_0$

Como X es compacto y Y métrico por Teorema 2.10, se tiene que $\tau_k = \tau_{\hat{d}}$. Además, del Teorema 2.11, tenemos que r es continua ya que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ si y solo si } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ para todo } x \in X$$

$$\text{luego } \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0), \text{ es decir, } \lim_{n\to\infty} r(f_n) = r(f).$$

Además $r|_Y = id_{C(X,Y)}$. Por lo tanto, Y es un retracto de $C(X, Y)$. □

Teorema 2.13. *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. El espacio $C(X, Y)$ es ANR si y sólo si el espacio Y es ANR.*

Demostración. Supongamos que $C(X,Y)$ es un ANR. Por el Teorema 2.12, tenemos que Y es un retracto de $C(X,Y)$. Se sigue del Teorema 1.63 (2) que Y es ANR.

Recíprocamente, sean Z un espacio topológico, $F \subset Z$ cerrado y $f : F \to C(X,Y)$ una función continua. De esta manera para cada $z \in F$, f asigna una función continua en $C(X,Y)$, dada por $f(z) = f_z$ donde $f_z : X \to Y$.

Definimos $g : X \times F \to Y$ dada por $g(x,z) = f_z(x)$ para cada $(x,z) \in X \times F$. Como f_z es continua y X es métrico compacto (por tanto regular y localmente compacto), se tiene por el Teorema 2.7 que g es continua. Como Y es ANR, entonces por el Teorema 1.61, Y es un extensor absoluto de vecindad. Así, existe un abierto $U \subset Z$ tal que $F \subset U$ y $g^* : X \times U \to Y$ es continua donde $g^*|_{X \times F} = g$. Por lo que, existe una función continua $f^* : U \to C(X,Y)$ tal que $f^*_z(x) = g^*(x,z)$. Dado que $f^*|_F = f$, el espacio $C(X,Y)$ es un extensor absoluto de vecindad. Por lo tanto, del Teorema 1.61, $C(X,Y)$ es ANR. $\square$

Capítulo 3

Pseudo-homotopías en espacios topológicos.

En este capítulo se introduce la noción de pseudo-homotopía y se dan resultados básicos y generales en torno a esto. Comencemos con la siguiente definición ya muy conocida.

Definición 3.1. Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Diremos que f es *homotópica* a g (o bién que f y g son *homotópicas*), si existe una función continua

$$H : X \times [0,1] \to Y \text{ tal que } H(x,0) = f(x) \text{ y } H(x,1) = g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

A la función H se le llama una *homotopía* entre f y g. Si f y g son homotópicas lo denotaremos por $f \simeq g$.

Intuitivamente dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ son homotópicas si podemos deformar la imagen de f continuamente en la imagen de g dentro del espacio Y (ver Figura 3.1). Sea $t \in [0,1]$. Definimos $F_t : X \to Y$ dada por $F_t(x) = H(x,t)$, donde H es la homotopía entre f y g. Notemos que F_t es continua. De esta manera dada la homotopía H podemos definir una familia $\{F_t\}_{t\in[0,1]}$ de funciones continuas de X en Y. Generalmente el parámetro t se piensa como el tiempo, así una homotopía puede ser vista como el proceso de deformación continua de la imagen de f en Y en cierta unidad de tiempo t. Notemos que en el intervalo $[0,1]$ el parámetro t se comporta de una forma, por así decirlo, "muy bien", ya que hay un orden natural establecido, pero ¿qué pasaría si se cambiara de parámetros en donde no hay un orden establecido como en $[0,1]$? Para esto consideremos la siguiente definición.

Definición 3.2. Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Diremos que f es *pseudo-homotópica* a g (o bién f y g son *pseudo-homotópicas*), si existen un continuo C, puntos $a, b \in C$ y una función continua

$$H : X \times C \to Y \text{ tal que } H(x,a) = f(x) \text{ y } H(x,b) = g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Al continuo C se le llama *espacio factor* y a la función H se le llama *pseudo-homotopía* entre f y g. Usaremos la siguiente notación $f \simeq_C g$ para decir que f y g son pseudo-homotópicas con espacio factor C.

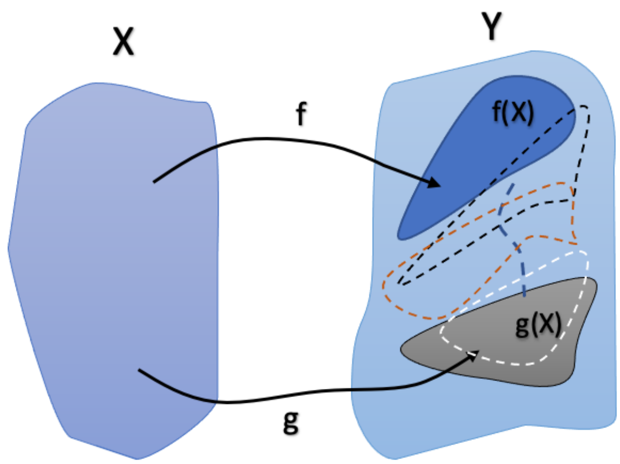

Figura 3.1: Funciones homotópicas

De acuerdo a la definición anterior para que dos funciones continuas resulten ser pseudo-homotópicas, dependen de la existencia del espacio factor C, así también de los puntos especiales a, b. Veamos los siguientes resultados en los cuales se toman en cuenta algunas propiedades del espacio factor dentro de la pseudo-homotopía.

Proposición 3.3. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Si $f \simeq_C g$ y existe un continuo K, y una función continua y suprayectiva $\phi : K \to C$, entonces $f \simeq_K g$.*

Demostración. Sean $H : X \times C \to Y$ la pseudo-homotopía entre f y g; $a, b \in C$ tales que

$$H(x, a) = f(x) \text{ y } H(x, b) = g(x) \text{ para cada } x \in X.$$

Como ϕ es suprayectiva, existen $u, v \in K$, tales que $\phi(u) = a$ y $\phi(v) = b$. Definamos:

$$F : X \times K \to Y \text{ dada por } F(x, k) = H(x, \phi(k)) \text{ para cada } (x, k) \in X \times K.$$

Note que F es continua, ya que $F = H \circ G$, donde $G : X \times K \to X \times C$ está definida por la función continua $G(x, k) = (x, \phi(k))$. Además,

$$F(x, u) = H(x, \phi(u)) = H(x, a) = f(x) \text{ y } F(x, v) = H(x, \phi(v)) = H(x, b) = g(x) \text{ para toda } x \in X.$$

Por lo tanto $f \simeq_K g$. □

Corolario 3.4. *Sean X, Y espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ funciones continuas tales que $f \simeq_C g$ y los puntos $a, b \in C$ que satisfacen la definición de que las funciones f y g sean pseudo-homotópicas. Si existen un continuo K' y una función continua suprayectiva $\varphi : K' \to C'$ donde C' es un subcontinuo de C tal que $a, b \in C'$, entonces $f \simeq_{K'} g$.*

Proposición 3.5. *Sean* X*,* Y *espacios topológicos,* $f, g : X \to Y$ *funciones continuas y* C, D *continuos continuamente equivalentes. Entonces* $f \simeq_C g$ *si y sólo si* $f \simeq_D g$*.*

Demostración. Como C y D son continuos continuamente equivalentes, se tiene por la Definición 1.69 que existen dos funciones continuas suprayectivas $\phi : C \to D$ y $\varphi : D \to C$. Supongamos que $f \simeq_C g$ y como $\phi : C \to D$ es continua y suprayectiva. Por la Proposición 3.3 obtenemos que $f \simeq_D g$.

Recíprocamente se puede demostrar que si $f \simeq_D g$, entonces $f \simeq_C g$. □

Corolario 3.6. *Sean* X*,* Y *espacios topológicos,* $f, g : X \to Y$ *funciones continuas y* C_1*,* C_2 *continuos tales que* C_1 *es homeomorfo a* C_2*. Entonces* $f \simeq_{C_1} g$ *si y sólo si* $f \simeq_{C_2} g$*.*

Proposición 3.7. *Sean* X*,* Y *espacios topológicos,* $f, g : X \to Y$ *funciones continuas tales que* $f \simeq_C g$ *y los puntos* $a, b \in C$ *que satisfacen la definición de que las funciones* f *y* g *sean pseudo-homotópicas. Si* K *es un subcontinuo de* C *tal que* $a, b \in K$*, entonces* $f \simeq_K g$*.*

Demostración. Sea $H : X \times C \to Y$ una pseudo-homotopía entre f y g. Sea $F = H|_{X\times K}$. De la continuidad de H se tiene la continuidad de F. Además se tiene que:

$$F(x, a) = H|_{X\times K}(x, a) = H(x, a) = f(x) \text{ y } F(x, b) = H|_{X\times K}(x, b) = H(x, b) = g(x) \text{ para cada } x \in X.$$

Por lo tanto $f \simeq_K g$. □

Notemos que de acuerdo a la Proposición 3.7, si C es el espacio factor de la pseudo-homotopía existente y $a, b \in C$ son los puntos que cumplen la definición, podríamos pensar en un subcontinuo de C "más pequeño" que contenga a tales puntos. Para ello consideremos la siguiente definición.

Definición 3.8. Sea C un continuo.

1. Sea A subconjunto de C. Diremos que C es *irreducible sobre* A si no existe un subcontinuo propio de C que contiene a A.

2. C se dice ser *irreducible*, si C es irreducible sobre $\{a, b\}$ para algunos $a, b \in C$ distintos, en tal caso diremos que C es *irreducible entre* a y b, y lo denotaremos por C_{ab}.

El siguiente teorema se puede consultar en [25, Teorema 28.4, p. 204] el cual garantiza la existencia de continuos irreducibles.

Teorema 3.9. *Si* C *es un continuo, entonces cada subconjunto* A *de* X *pertenece a algún subcontinuo* K *irreducible sobre* A*.*

Corolario 3.10. *Sean* X*,* Y *espacios topológicos,* $f, g : X \to Y$ *funciones continuas tales que* $f \simeq_C g$ *y los puntos* $a, b \in C$ *que satisfacen la definición de que las funciones* f *y* g *sean pseudo-homotópicas. Si* K_{ab} *es un continuo irreducible entre* a *y* b *contenido en* C*, entonces* $f \simeq_{K_{ab}} g$*.*

Demostración. De la Definición 3.8 (2) se tiene que $a, b \in K_{ab}$. Dado que $K_{a,b}$ es un subcontinuo de C, se sigue de la Proposición 3.7 que $f \simeq_{K_{ab}} g$. □

Corolario 3.11. *Sean X, Y espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ funciones continuas tales que $f \simeq_{K_{ab}} g$ y los puntos $a, b \in C$ que satisfacen la definición de que las funciones f y g sean pseudo-homotópicas. Si K_{ab} es un arco de a a b, entonces $f \simeq g$.*

Demostración. Como K_{ab} es un arco, entonces K_{ab} es homeomorfo a I. Así por el Corolario 3.6 tenemos que $f \simeq_I g$, es decir, $f \simeq g$. □

Corolario 3.12. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas tales que $f \simeq_C g$ y los puntos $a, b \in C$ que satisfacen la definición de que las funciones f y g sean pseudo-homotópicas. Si C es arco-conexo, entonces $f \simeq g$.*

Demostración. Como C es arco-conexo, sea A un arco contenido en C tal que $a, b \in A$. Dado que A es un subcontinuo de C, entonces $f \simeq_A g$. Como A es homeomorfo a I, entonces $f \simeq_I g$, es decir, $f \simeq g$. □

De la Definición 3.2 tenemos que, si dos funciones son homotópicas, entonces son pseudo-homotópicas. El recíproco no siempre es cierto, daremos un ejemplo más adelante. Sin embargo, si en la pseudo-homotopía el espacio factor C es un arco de a a b o bien arco-conexo o simplemente hay un arco en C que contiene a a y b donde los puntos $a, b \in C$ son aquellos que satisfacen la definición de que las funciones sean pseudo-homotópicas, entonces la proposición inversa se cumple.

Definición 3.13. Sean X, Y espacios topológicos y $f, g \in C(X, Y)$. Definimos en $C(X, Y)$ la siguiente relación $\simeq_*$. Decimos que f está relacionada con g si y sólo si existe un continuo K tal que $f \simeq_K g$, es decir, $f \simeq_* g$ si y sólo si f es pseudo-homotópica a g con algún espacio factor K.

Teorema 3.14. *La relación $\simeq_*$ es una relación de equivalencia en $C(X, Y)$.*

Demostración. Veamos que $\simeq_*$ es reflexiva.

En efecto, sean $f \in C(X, Y)$ y C un continuo cualquiera. Definamos $H : X \times C \to Y$ dada por $H(x, c) = f(x)$ para cada $x \in X$ y para cada $c \in C$. Tenemos que H es continua, pues f lo es. Además existen $a, b \in C$, tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = f(x)$ para cada $x \in X$. Por lo tanto, $f \simeq_* f$.

Ahora probemos que $\simeq_*$ es simétrica.

Sean $f, g \in C(X, Y)$ tales que $f \simeq_* g$. Entonces existe un continuo K tal que $f \simeq_K g$. Por definición, existen $a, b \in K$ y $H : X \times K \to Y$ continua, tal que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$, esto es equivalente a que $g \simeq_K f$, pues es indistinto quien sea a o b en la definición de pseudo-homotopía. Así, $g \simeq_* f$.

Finalmente veamos que $\simeq_*$ es transitiva.

Sean $f, g, h \in C(X, Y)$ tales que $f \simeq_* g$ y $g \simeq_* h$. Esto implica que existen continuos C_1 y C_2 tales que $f \simeq_{C_1} g$ y $g \simeq_{C_2} h$. Así, existen puntos $a_1, b_1 \in C_1$, $a_2, b_2 \in C_2$ y funciones continuas $H_1 : X \times C_1 \to Y$, $H_2 : X \times C_2 \to Y$, tales que

$$H_1(x, a_1) = f(x),\ H_1(x, b_1) = g(x),\ H_2(x, a_2) = g(x) \text{ y } H_2(x, b_2) = h(x) \text{ para cada } x \in X$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Se sabe que $\{b_1\}$ es un subconjunto cerrado de C_1. Consideremos la función $j : \{b_1\} \to C_2$ dada por $j(b_1) = a_2$. Sea $D = C_1 \cup_j C_2$ el continuo de adjunción determinado por la unión disjunta de $C_1 \cup C_2$ y la función j. Definimos la función $H : X \times D \to Y$ dada por

$$H(x,\overline{d}) = \begin{cases} H_1(x,d) & \text{si} \quad \overline{d} \in \mathscr{C}_1 \setminus \{\{b_1,a_2\}\} \\ \\ H_2(x,d) & \text{si} \quad \overline{d} \in \mathscr{C}_2 \setminus \{\{b_1,a_2\}\} \\ \\ H_1(x,b_1) = H_2(x,a_2) & \text{si} \quad \overline{d} = \{b_1,a_2\} \end{cases}$$

donde $\mathscr{C}_1 \setminus \{\{b_1,a_2\}\} = \{\{d\} |\ d \in C_1 \setminus \{b_1\}\}$ y $\mathscr{C}_2 \setminus \{\{b_1,a_2\}\} = \{\{d\} |\ d \in C_2 \setminus \{a_2\}\}$.

Tenemos que H está bien definida, pues si $\overline{d} \in \mathscr{C}_1 \bigcup \mathscr{C}_2 \setminus \{\{a_1,b_1\}\}$ se tiene $\overline{d} = \{d\}$, y si $\overline{d} = \{b_1, j(b_1)\} = \{b_1,a_2\}$, entonces $H(x,\overline{b_1}) = g(x) = H(x,\overline{a_2})$. Por lo tanto, Del Lema del pegado tenemos que H es continua. Más aún,

$$H(x,\overline{a_1}) = H_1(x,a_1) = f(x) \ \text{ y } \ H(x,\overline{b_2}) = H_2(x,b_2) = h(x) \ \text{ para toda } \ x \in X.$$

Por lo tanto, H es una pseudo-homotopía entre f y h, así $f \simeq_* h$. □

Las clases de equivalencia en $C(X,Y)$ bajo la relación $\simeq_*$ son llamadas *clases pseudo-homotópicas*. Denotaremos por $[f]_*$ a la clase pseudo-homotópica de f para cada $f \in C(X,Y)$.

De forma análoga se tiene que la relación $\simeq$ definida sobre $C(X,Y)$ es una relación de equivalencia. Se puede apreciar que las definiciones de homotopía y pseudo-homotopía son semejantes en este sentido.

A continuación, mostraremos una serie de resultados relacionados a pseudo-homotopías y que tienen sus análogos para homotopías. Los marcaremos con un asterisco para no repetir todo el enunciado. Con respecto a funciones continuas restringidas a un conjunto tenemos lo siguiente.

Proposición 3.15. **Sean X, Y espacios topológicos, $f,g : X \to Y$ funciones continuas. Si f es pseudo-homotópica a g y Z un subconjunto de X, entonces $f|_Z$ es pseudo-homotópica a $g|_Z$.*

Demostración. Como f es pseudo-homotópica a g, entonces existen un continuo C, puntos $a,b \in C$ y $H : X \times C \to Y$ una función continua tal que $H(x,a) = f(x)$ y $H(x,b) = g(x)$ para todo $x \in X$. Definimos a

$$F = H|_{Z\times C} : Z \times C \to Y.$$

Puesto que H es continua, entonces H es continua en la restricción a $Z \times C$. Así, F es continua. Además tenemos que:

$$F(z,a) = H|_{Z\times C}(z,a) = H(z,a) = f(z) \quad \text{y} \quad F(z,b) = H|_{Z\times C}(z,b) = H(z,b) = g(z) \ \text{ para todo } \ z \in Z.$$

Por lo tanto $f|_Z \simeq_C g|_Z$. □

De acuerdo a la composición de funciones tenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.16. **Sean W,X,Y y Z espacios topológicos, y sean $k \in C(W,X)$, $f,g \in C(X,Y)$ y $h \in C(Y,Z)$. Si $f \simeq_C g$, entonces $h \circ f \simeq_C h \circ g$ y $f \circ k \simeq_C g \circ k$.*

Demostración. Como $f \simeq_C g$, entonces existen puntos $a, b \in C$ y $H : X \times C \to Y$ una función continua tal que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para toda $x \in X$.

Demostremos primero que $h \circ f \simeq_C h \circ g$. Para esto, definamos $G : X \times C \to Z$ dada por $G(x, c) = (h \circ H)(x, c)$, la cual es continua por ser composición de funciones continuas. Notemos que

$$G(x, a) = h(H(x, a)) = h(f(x)) = (h \circ f)(x) \text{ y } G(x, b) = h(H(x, b)) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) \text{ para cada } x \in X.$$

De donde, $h \circ f \simeq_C h \circ g$.

Para demostrar que $f \circ k \simeq_C g \circ k$ definamos primero la función $P : W \times C \to X \times C$ dada por $P(w, c) = (k(w), c)$. Ahora bien, sea $F : W \times C \to Y$ definida por $F(w, c) = H(k(w), c)$. Nótese que $F = H \circ P$. Dado que P y H son continuas, F es continua. Además,

$$F(w, a) = H(k(w), a) = f(k(w)) = (f \circ k)(w) \text{ y } F(w, b) = H(k(w), b) = g(k(w)) = (g \circ k)(w) \text{ para cada } w \in W.$$

Lo cual implica que $f \circ k \simeq_C g \circ k$. □

Del Teorema 3.16 podemos ver que si dos funciones continuas son pseudo-homotópicas con espacio factor C, entonces sus composiciones ya sea por la derecha o bién por la izquierda son pseudo-homotópicas con el mismo espacio factor C.

Obsevación 3.17. Notemos que en la demostración del Teorema 3.16, la existencia del espacio factor C solo se uso para poder dar una definición explícita de las pseudo-homotopías involucradas. Sin embargo, se pudo haber escrito de la siguiente manera: si $f \simeq_* g$, entonces $h \circ f \simeq_* h \circ g$ y $f \circ k \simeq_* g \circ k$ en donde no necesariamente tenemos el mismo factor en cada pseudo-homotopía.

Teorema 3.18. **Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f, f' \in C(X, Y)$ y $g, g' \in C(Y, Z)$. Si $f \simeq_{C_1} f'$ y $g \simeq_{C_2} g'$, entonces $g \circ f \simeq_* g' \circ f'$.*

Demostración. Como $f \simeq_{C_1} f'$ y $g \simeq_{C_2} g'$, entonces existen puntos $a_1, b_1 \in C_1$, $a_2, b_2 \in C_2$ y funciones continuas $H_1 : X \times C_1 \to Y$, $H_2 : Y \times C_2 \to Z$ tales que

$$H_1(x, a_1) = f(x) \text{ y } H_1(x, b_1) = f'(x) \text{ para toda } x \in X \text{ y}$$

$$H_2(y, a_2) = g(y) \text{ y } H_2(y, b_2) = g'(y) \text{ para toda } y \in Y.$$

Consideremos el continuo $C = C_1 \times C_2$ y los puntos $\hat{a}_0 = (a_1, a_2)$, $\hat{b}_0 = (b_1, b_2) \in C_1 \times C_2$. Definamos la función

$$F : X \times (C_1 \times C_2) \to Z \text{ dada por } F(x, (c_1, c_2)) = H_2(H_1(x, c_1), c_2).$$

Notemos que

$$F = H_2 \circ G, \text{ donde } G : (X \times C_1) \times C_2 \to Y \times C_2 \text{ definida por } G((x, c_1), c_2) = (H_1(x, c_1), c_2).$$

De aquí, F es continua. Además

$$F(x, \hat{a}_0) = F(x, (a_1, a_2)) = H_2(H_1(x, a_1), a_2) = H_2(f(x), a_2) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \text{ para toda } x \in X$$

$$\text{y } F(x, \hat{b}_0) = F(x, (b_1, b_2)) = H_2(H_1(x, b_1), b_2) = H_2(f'(x), a_2) = g'(f'(x)) = (g' \circ f')(x) \text{ para toda } x \in X.$$

Por lo tanto, $g \circ f \simeq_* g' \circ f'$. $\square$

Observemos algo interesante, si usamos el Teorema 3.16 se puede dar otra demostración del Teorema 3.18 de la siguiente manera; ya que si $f \simeq_{C_1} f'$ y $g \simeq_{C_2} g'$, entonces $g \circ f \simeq_{C_1} g \circ f'$ y $g \circ f' \simeq_{C_2} g' \circ f'$. Por el Teorema 3.14 tenemos que $g \circ f \simeq_D g' \circ f'$, donde el continuo puede estar dado por $D = C_1 \cup_j C_2$ y que no necesariamente es el continuo $C_1 \times C_2$. ¿Existe una relación entre ellos?

Del Teorema 3.16 obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.19. *Sean* $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *una familia de espacios topológicos y* $f, g \in C\left(X, \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha\right)$. *Si* $f \simeq_* g$, *entonces* $\pi_\alpha \circ f \simeq_* \pi_\alpha \circ g$ *para toda* $\alpha \in J$.

Demostración. Sea $\alpha_0 \in J$. Como $f \simeq_* g$ y dado que $\pi_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha \to Y_{\alpha_0}$ es una función continua, entonces por el Teorema 3.16 tenemos que $\pi_{\alpha_0} \circ f \simeq_* \pi_{\alpha_0} \circ g$. Como α_0 es arbitrario tenemos que $\pi_\alpha \circ f \simeq_* \pi_\alpha \circ g$ para toda $\alpha \in J$. $\square$

Corolario 3.20. *Sean* $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una familia numerable de espacios topológicos y* $f, g \in C\left(X, \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right)$. *Entonces* $f \simeq_* g$ *si y sólo si* $\pi_n \circ f \simeq_* \pi_n \circ g$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para la necesidad basta hacer $J = \mathbb{N}$ en la Proposición 3.19. Para la suficiencia, sean $f, g \in C\left(X, \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right)$ tales que $\pi_n \circ f \simeq_* \pi_n \circ g$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen continuos C_n, puntos $a_n, b_n \in C_n$ y $H_n : X \times C_n \to Y_n$ funciones continuas tales que

$$H_n(x, a_n) = (\pi_n \circ f)(x) \text{ y } H_n(x, b_n) = (\pi_n \circ g)(x) \text{ para toda } x \in X.$$

Notemos que $C = \prod_{n \in \mathbb{N}} C_n$ es un continuo. Sean $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $a_n, b_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos la función

$$H : X \times C \to \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n \text{ por } H(x, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (H_n(x, c_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

La función H es continua dado que cada H_n lo es. Más aún,

$$H(x, \mathbf{a}) = H(x, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (H_n(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}} = ((\pi_n \circ f)(x))_{n \in \mathbb{N}} = f(x) \text{ para toda } x \in X$$

$$\text{y } H(x, \mathbf{b}) = H(x, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (H_n(x, b_n))_{n \in \mathbb{N}} = ((\pi_n \circ g)(x))_{n \in \mathbb{N}} = g(x) \text{ para toda } x \in X.$$

Por lo tanto $f \simeq_C g$. $\square$

Notemos que si en la Proposición 3.19, J no necesariamente es numerable, no se podría garantizar que $C = \prod_{\alpha \in J} C_\alpha$ sea métrico.

Ahora veamos que si damos algunas propiedades a X ó a Y, entonces el espacio $C(X, Y)$ tendría propiedades especificas. Unos de los principales resultados son los siguientes.

Teorema 3.21. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g \in C(X,Y)$. Si $f \simeq_* g$ y Y es de Hausdorff, entonces existe un continuo en $C(X,Y)$ que contiene a f y g.*

Demostración. Supongamos que $f \simeq_* g$, luego existe un continuo C tal que $f \simeq_C g$, además, existen puntos $a, b \in C$, y una función continua $H : X \times C \to Y$ tal que $H(x,a) = f(x)$ y $H(x,b) = g(x)$ para toda $x \in X$. Para cada $c \in C$. Definimos $h_c : X \to Y$ dada por $h_c(x) = H(x,c)$ la cual es continua. Además,

$$h_a(x) = H(x,a) = f(x) \text{ y } h_b(x) = H(x,b) = g(x) \text{ para cada } x \in X.$$

Por el Teorema 2.6, la función $G : C \to C(X,Y)$ dada por $G(c) = h_c$ es continua. Como Y es de Hausdorff, tenemos por la Proposición 2.3 que $C(X,Y)$ es de Hausdorff, por lo que $G(C)$ también lo es. Dado que C es métrico compacto, G continua, y $G(C)$ es de Hausdorff, entonces por el Lema 1.33, $G(C)$ es metrizable. Así, $G(C)$ es compacto, conexo y métrico, por lo tanto $G(C)$ es un continuo tal que $G(a) = h_a = f$ y $G(b) = h_b = g$, es decir $f, g \in G(C)$. □

De lo anterior se puede decir que cuando el espacio Y es de Hausdorff, cada clase pseudo-homotópica es conexa por continuos y por lo tanto conexa.

Teorema 3.22. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g \in C(X,Y)$. Si X es compacto y de Hausdorff, y existe un continuo en $C(X,Y)$ que contiene a f y g, entonces $f \simeq_* g$.*

Demostración. Sean $f, g \in C(X,Y)$ y H un continuo de $C(X,Y)$ tal que $f, g \in H$. Definamos la función $F : X \times H \to Y$ dada por $F(x,h) = h(x)$. Notemos que F está bien definida y dado que X es compacto y de Hausdorff, entonces por el Teorema 2.4, F es continua. Además, $F(x,f) = f(x)$ y $F(x,g) = g(x)$ para toda $x \in X$, luego F es una pseudo-homotopía entre f y g. Por lo tanto $f \simeq_* g$. □

Notemos que para determinar la relación de equivalencia $\simeq_*$ no se pidió ninguna condición a los espacios topológicos. Cuando damos condiciones adicionales a X y Y, el espacio $C(X,Y)$ tiene propiedades importantes implicadas por la relación de equivalencia y viceversa.

En el Teorema 3.21 sólo bastó que el espacio Y sea de Hausdorff para concluir que cada clase pseudo-homotópica resulte ser conexa por continuos.

En el Teorema 3.22 si el espacio X es compacto y de Hausdorff y $f \in C(X,Y)$, entonces para todo continuo K en $C(X,Y)$ que contiene a f se tiene que $K \subseteq [f]_*$.

Si hacemos una combinamos de lo Teoremas 3.21 y 3.22, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.23. *Sean X espacio compacto y de Hausdorff y Y espacio de Hausdorff. Cada par de funciones $f, g \in C(X,Y)$ son pseudo-homotópicas si y sólo si el espacio $C(X,Y)$ es conexo por continuos.*

Los siguientes teoremas se asemejan en mucho a los anteriores, pero solo nos limitaremos a las funciones constantes. Los teoremas junto con sus corolarios respectivos serán de gran ayuda para comprender las definiciones que se darán en el siguiente capítulo.

Teorema 3.24. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g \in C(X,Y)$ funciones constantes, es decir $f(x) = c_1$ y $g(x) = c_2$ para cada $x \in X$, con $c_1, c_2 \in Y$. Si $f \simeq_* g$ y Y es de Hausdorff, entonces existe un continuo K en Y tal que $c_1, c_2 \in K$.*

Demostración. Supongamos que f y g son pseudo-homotópicas, entonces existe un continuo C, puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : X \times C \to Y$ tal que $H(x, a) = f(x) = c_1$ y $H(x, b) = g(x) = c_2$ para cada $x \in X$.

Sea $x \in X$ fija. Definamos $h_x : C \to Y$ dada por $h_x(c) = H(x, c)$, la cual es continua. Además como C es métrico compacto y $h_x(C)$ es de Hausdorff, entonces por el Lema 1.33, $h_x(C)$ es metrizable. Así, $h_x(C)$ es métrico compacto y conexo, por lo tanto es un continuo en Y. Si $K = h_x(C)$ tenemos que $a, b \in K$ pues $h_x(a) = H(x, a) = c_1 \in K$ y $h_x(b) = H(x, b) = c_2 \in K$. $\square$

Teorema 3.25. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g \in C(X, Y)$ funciones constantes, es decir, $f(x) = c_1$ y $g(x) = c_2$ para cada $x \in X$, con $c_1, c_2 \in Y$. Si existe un continuo K en Y tal que $c_1, c_2 \in K$, entonces $f \simeq_* g$.*

Demostración. Supongamos que existe un continuo $K \subset Y$ tal que $c_1, c_2 \in K$. Definamos $F : X \times K \to Y$ dada por $F(x, k) = k$. F está bien definida y es continua. Además, cumple con $F(x, c_1) = c_1 = f(x)$ y $F(x, c_2) = c_2 = g(x)$ para toda $x \in X$. Por lo tanto f y g son pseudo-homotópicas. $\square$

Corolario 3.26. *Sean X, Y espacios topológicos. Si Y es conexo por continuos, entonces todo par de funciones constantes en $C(X, Y)$ son pseudo-homotópicas, esto es, todas las funciones constantes están en una misma clase pseudo-homotópica.*

Veamos que si le pedimos una condición adicional a Y tenemos que el inverso al Corolario 3.26 se cumple.

Teorema 3.27. *Sean X, Y espacios topológicos. Si cada par de funciones constantes en $C(X, Y)$ son pseudo-homotópicas y Y es de Hausdorff, entonces el espacio Y es conexo por continuos.*

Corolario 3.28. *Sean X un espacio topológico y Y un espacio de Hausdorff. Cada par de funciones constantes en $C(X, Y)$ son pseudo-homotópicas si y sólo si Y es conexo por continuos.*

Veamos que el siguiente teorema es análogo al Corolario 3.23.

Teorema 3.29. *Sean X un espacio métrico compacto, Y un espacio métrico y $f, g \in C(X, Y)$. Las funciones f y g son homotópicas si y sólo si existe un arco (o un continuo localmente conexo) en $C(X, Y)$ que contiene a f y g.*

Corolario 3.30. *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. Cada par de funciones $f, g \in C(X, Y)$ son homotópicas si y sólo si el espacio $C(X, Y)$ es arco-conexo.*

De igual manera el siguiente teorema es análogo al Corolario 3.28.

Teorema 3.31. *Sean X un espacio topológico y Y un espacio métrico. Cada par de funciones constantes en $C(X, Y)$ son homotópicas si y sólo si el espacio Y es arco-conexo.*

Capítulo 4

Pseudo-contractibilidad.

Como vimos, intuitivamente dos funciones continuas f, g de un espacio X en un espacio Y son homotópicas o pseudo-homotópicas si, la imagen de X bajo f se puede deformar de manera continua en la imagen de X bajo g dentro del espacio Y, de manera que cada punto $f(x)$ se lleva al punto $g(x)$ de manera continua para cada $x \in X$. Ahora bien, si hacemos $Y = X$ y nos fijamos en el espacio $C(X, X)$ donde la topología usada tanto en el dominio como en el codomino es la misma, tenemos que el espacio $C(X, X)$ es no vacío, pues al menos contiene la función id_X. El espacio $C(X, Y)$ también contiene al subespacio de todas funciones constantes, que por la Proposición 2.2, es homeomorfo a X. Si la función id_X y alguna función constante en $C(X, X)$ resultan ser homotópicas o pseudo-homotópicas, significa que podemos deformar al espacio X continuamente hasta llevarlo a un punto (ver Figura 4.1). En el transcurso de este capítulo veremos condiciones bajo las cuales es posible hacer esto, para ello comenzamos con las siguientes definiciones.

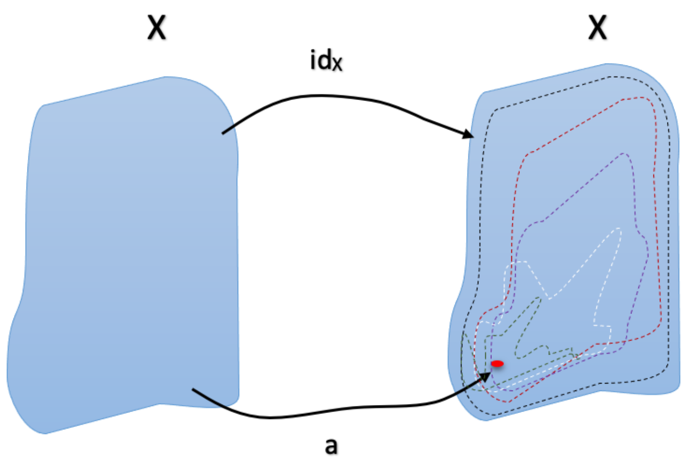

Figura 4.1: $id_X \simeq_* \mathbf{a}$

Definición 4.1. Un espacio topológico X es *contráctil* si su función identidad id_X es homotópica a una función constante $\mathbf{c}$ en X. A la homotopía entre la id_X y la función constante le llamaremos *contraccción*.

Definición 4.2. Un espacio topológico es *pseudo-contráctil* si su función identidad id_X es pseudo-homotópica a una función constante $\mathbf{c}$ en X. A la pseudo-homotopía entre id_X y la función constante le llamaremos *pseudo-contracción*.

Obsevación 4.3. Como vemos, las definiciones anteriores tienen como base la función identidad, debido a esto solo se toma una topología en el espacio X, pues se sabe que si τ_1 y τ_2 son dos topologías definidas sobre el conjunto X, entonces $id_X \in C(X, X)$ si y sólo si τ_1 es *más fina* que τ_2. Por tal motivo en los resultados siguientes sólo se usará una topología en el conjunto X.

Primero veamos algunos resultados relacionados con la pseudo-contractibilidad y los espacios factor. Para ello primero daremos una definición previa y un resultado ya conocido que no se demostrará, pero se puede consultar en [22, Teorema 8.23, p. 130].

Definición 4.4. Sea Y un espacio métrico. Se dice que Y es un *espacio de Peano* si para cada $p \in Y$ y cada vecindad N de p, existe un subconjunto abierto y conexo V de Y tal que $p \in V \subset N$. Si Y es un continuo, a tal espacio se le llama *continuo de Peano*.

Dicho de otra manera, un espacio Y es de Peano si y sólo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Teorema 4.5. *[22, Teorema 8.23, p. 130] Todo continuo de Peano (no degenerado) es arco-conexo.*

Teorema 4.6. *Sea X un espacio topológico. Si X es pseudo-contráctil con (continuo de Peano) continuo arco-conexo como espacio factor, entonces X es contráctil.*

Demostración. Veamos primero el caso cuando el espacio factor C es un continuo arco-conexo. Por el Corolario 3.12, se tiene que $id_X \simeq \mathbf{k}$, por lo tanto X es contráctil.

Ahora, si el espacio factor C es un continuo de Peano, entonces es arco-conexo. Por el Corolario 3.12, se tiene que $id_X \simeq \mathbf{k}$. Así, X es contráctil. □

Los siguientes dos corolarios son consecuencia de la Proposición 3.3 y de la Proposición 3.5, respectivamente.

Corolario 4.7. *Si X es pseudo-contráctil con espacio factor C y $\varphi \in C(C', C)$ es suprayectiva con C' un continuo, entonces X es pseudo-contráctil con espacio factor C'.*

Corolario 4.8. *Sean C_1 y C_2 continuos continuamente equivalentes. Entonces X es pseudo-contráctil con espacio factor C_1 si y sólo si X es pseudo-contráctil con espacio factor C_2.*

Ahora como todo espacio factor es un continuo, entonces es métrico. Así, de los axiomas de separación se tiene que es normal. Tomando en cuenta esto, haremos uso del siguiente resultado para relacionar la contractibilidad y la pseudo-contractibilidad con los espacios factor.

Lema de Urysohn. *Sea Y un espacio normal. Supongamos que F y G son subconjuntos cerrados ajenos de Y. Entonces existe una función continua y suprayectiva $\varphi : Y \to [0, 1]$ tal que $\varphi[F] \subseteq \{0\}$ y $\varphi[G] \subseteq \{1\}$.*

Teorema 4.9. *Si un espacio topológico X es contráctil, entonces X es pseudo-contráctil con cualquier continuo como espacio factor.*

Demostración. Sean C un continuo no degenerado y $a, b \in C$ distintos. Dado que C es métrico, entonces es T_1, por lo tanto los conjuntos ajenos $F = \{a\}$ y $G = \{b\}$ son cerrados en C. Como C es normal, entonces por el Lema de Urysohn existe $\varphi : C \to [0,1]$ continua tal que $\varphi[F] \subseteq \{0\}$ y $\varphi[G] \subseteq \{1\}$, lo que implica que $\varphi(a) = 0$ y $\varphi(b) = 1$

Como X es contráctil existe una función continua $H : X \times [0,1] \to X$ tal que $H(x,0) = id_X(x)$ y $H(x,1) = \mathbf{k}(x)$ para toda $x \in X$.

Definamos la siguiente función $H_2 : X \times C \to X$ dada por $H_2(x,c) = H(x,\varphi(c))$. Notemos que H_2 es continua y cumple que

$$H_2(x,a) = H(x,\varphi(a)) = H(x,0) = id_X(x) \text{ y } H_2(x,b) = H(x,\varphi(b)) = H(x,1) = \mathbf{k}(x) \text{ para cada } x \in X.$$

Por lo tanto, $id_X \simeq_C \mathbf{k}$, es decir, X es pseudo-contráctil con C como espacio factor. Nótese que no hay restricción en la toma de los puntos a, b para definir una homotopía que satisfaga lo requerido. $\square$

De acuerdo a lo anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.10. *Sea X un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es contráctil.*
2. *X es pseudo-contráctil con cualquier continuo C como espacio factor.*
3. *X es pseudo-contráctil con cualquier continuo C localmente conexo como espacio factor.*
4. *X es pseudo-contráctil con algún continuo C localmente conexo como espacio factor.*
5. *X es pseudo-contráctil con algún continuo C arco-conexo como espacio factor.*
6. *X es pseudo-contráctil con cualquier continuo C arco-conexo como espacio factor.*
7. *X es pseudo-contráctil con algún espacio factor C tal que $a, b \in C$ pertenezcan a un arco $A \subset C$ y a, b sean los puntos que se dan en la definición de pseudo-homotopía.*

Demostración. Por el Teorema 4.9 se tiene que 1) implica $2), 3), 4), 5), 6)$ y 7).
Para $2) \Rightarrow 1)$, basta tomar el continuo $I = [0,1]$.
Por el Teorema 4.6 se tiene que $3) \Rightarrow 1), 4) \Rightarrow 1), 5) \Rightarrow 1)$ y $6) \Rightarrow 1)$.
Para $7) \Rightarrow 1)$, supongamos que X es pseudo-contráctil con espacio factor C. Entonces existen puntos $a, b \in C$, un punto $x_0 \in X$ y una función $H : X \times C \to X$ continua tal que $H(x,a) = x$ y $H(x,b) = x_0$ para cada $x \in X$. Sean $\mathbf{k} \in C(X,X)$ tal que $\mathbf{k}(x) = x_0$ para toda $x \in X$ y $A \subset C$ un arco tal que $a, b \in A$. Como $id_X \simeq_C \mathbf{k}$ y A es un subcontinuo de C que contiene a los puntos a, b, entonces por la Proposición 3.7 se tiene que $id_X \simeq_A \mathbf{k}$. Dado que $A \approx I$, tenemos del Corolario 3.11 que $id_X \simeq \mathbf{k}$, es decir, X es contráctil. $\square$

Se sigue inmediatamente de las Definiciónes 4.1 y 4.2 que todo espacio contráctil es pseudo-contráctil. Surge entonces la siguiente pregunta: ¿Si un espacio es pseudo-contráctil, entonces es contráctil? Para dar respuesta a esta pregunta primero veamos un resultado ya conocido con respecto a la contractibilidad.

Teorema 4.11. *Sea X un espacio topológico. Si X es contráctil, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Como X es contráctil, entonces $id_X \simeq \mathbf{a}$ con $\mathbf{a}$ función constante. Entonces existe

$H : X \times I \to X$ una función continua tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = a_1$ donde $\mathbf{a}(x) = a_1$ para cada $x \in X$.

Sea $p \in X$. Definimos $f_p : I \to X$ como $f_p(t) = H(p,t)$. Se tiene que f_p es continua, además que $f_p(0) = p$ y $f_p(1) = a_1$. Por lo tanto f_p es una trayectoria que une el punto a_1 con el punto p. $\square$

Ejemplo 4.12. El espacio $X = \{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\} \cup \{\{0\} \times [-1,1]\}$ no es contráctil.

Demostración. Vamos a mostrar que si una trayectoria tiene origen en el segmento $\{0\}\times[-1,1]$, entonces la continuidad impide que esa trayectoria tome valores en $\{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\}$. Supongamos que $\alpha : [0,1] \to X$ es una trayectoria con punto inicial $\alpha(0) = (0,1) \in X$. Demostraremos que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1]) = [0,1]$. Por la conexidad del intervalo $I = [0,1]$ sólo bastará probar que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es un abierto y cerrado no vacío en I.

Por un lado, como $\{0\} \times [-1,1]$ es cerrado y α es continua, se tiene que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es cerrado en I, además es no vacío ya que $0 \in \alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ pues $\alpha(0) = (0,1)$.

Por otro lado, probaremos que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es abierto en I. Sean $t_0 \in I$, tal que $\alpha(t_0) = (0, y_0) \in \{0\} \times [-1,1]$. La familia $\mathcal{U}_{t_0} = \{B(\alpha(t_0), \delta) \cap X \mid \delta > 0\}$ es una base local de vecindades para $\alpha(t_0)$ en X y $\mathcal{V}_{t_0} = \{B(t_0, \varepsilon) \cap I \mid \varepsilon > 0\}$ es una base local de vecindades para t_0 en I. Como α es continua, tenemos que para todo $U = B(\alpha(t_0), \delta_0) \cap X$ en X existe un $V_{\varepsilon_0} = B(t_0, \varepsilon_0) \cap I$ en I tal que $\alpha(V_{\varepsilon_0}) \subset U$. Note que las componentes conexas de U son partes de la curva $\{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\}$ y el segmento vertical que quedan dentro del disco como se muestra en la Figura 4.2. Ahora, como V_{ε_0} es conexo en I, entonces $\alpha(V_{\varepsilon_0})$ es un conexo en X que contiene a $\alpha(t_0)$. Lo cual implica que $\alpha(V_{\varepsilon_0}) \subset \{0\} \times [-1,1]$. De aquí que $t_0 \in V_{\varepsilon_0} \subset \alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$. Por lo tanto $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es abierto en I.

Entonces $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es un abierto y cerrado no vacío en I. De acuerdo al Teorema 1.38 (2), se tiene que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1]) = I$ como se quería. De esta manera X no puede ser conexo por trayectorias y por lo tanto no es contráctil. $\square$

De esta manera si se quiere saber si un espacio no es contráctil es más fácil ver que no es conexo por trayectorias.

El siguiente ejemplo muestra que no todo espacio conexo por trayectorias es contráctil.

Ejemplo 4.13. El espacio S^1 es conexo por trayectorias, pero no es contráctil.

Posteriormente se dará una prueba que S^1 no es contráctil.

Notemos aquí que ambos espacios S^1 y $sen(1/x)$ son continuos, pero se sabe que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ convexo y no necesariamente compacto, entonces A es contráctil. Por ejemplo, no es díficil ver que $A = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n\}$ es convexo por tanto es contráctil, luego conexo por trayectorias, pero no es compacto.

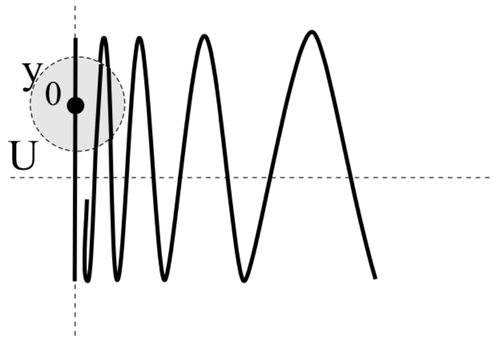

Figura 4.2: $X = \overline{\{(x, sen(1/x))|0 < x \leqslant 1\}}$

Veamos ahora que la pseudo-contractibilidad y la contractibilidad son conceptos diferentes. W. Kuperberg dió el primer ejemplo donde demuestra que estos conceptos son diferentes. Muestra un espacio pseudo-contráctil que no es contráctil.

Ejemplo 4.14. Sean $\mathbb{C}$ el plano complejo, $X_0 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{t+2}{t+1}e^{it} \text{ con } t \in [0, \infty)\right\}$ la espiral que se aproxima al círculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid ||z|| = 1\}$ y $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid ||z|| \leqslant 1\}$. Definamos $X = X_0 \cup D^2$ (ver Figura 4.3). Notemos que X es un continuo que no es contráctil, pues no es conexo por trayectorias. En efecto, veamos que no podemos tener una trayectoria con punto inicial $(1, 0) \in D^2$ y punto final $w \in X_0$. Veamos que si $\alpha : I \to X$ es una trayectoria tal que $\alpha(0) = (1, 0)$, entonces $\alpha^{-1}(D^2) = I$. Para esto primero notemos que D^2 es cerrado en X y como α es continua, entonces $\alpha^{-1}(D^2)$ es cerrado en I y es no vacío ya que $0 \in \alpha^{-1}(D^2)$. De manera análoga al Ejemplo 4.12 se tiene que $\alpha^{-1}(D^2)$ es abierto en I. De la conexidad de I, los únicos abiertos y cerrados de I son él mismo y el vacío. Lo cual implica que $\alpha^{-1}(D^2) = I$. Lo que lleva a que no es posible unir un punto de D^2 con un punto de la espiral X_0 por medio de una trayectoria. Por lo tanto, X no es contráctil.

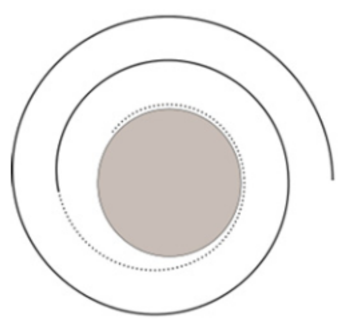

Figura 4.3: Continuo X

Queremos demostrar que el espacio X es pseudo-contráctil, para esto tenemos que encontrar un continuo C, puntos

$a, b \in C$, un punto $z_0 \in X$ y una función continua $H : X \times C \to X$ tal que $H(z, a) = z$ y $H(z, b) = z_0$ para todo $z \in X$. Construyamos el continuo C.

Sea $C = X_0 \cup S^1 \cup X_1$, donde $X_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) = 0 \text{ y } 0 \leqslant Re(z) \leqslant 1\}$ (ver Figura 4.4).

Podemos así definir las siguientes funciones:

1. Sea $H_1 : X_0 \times X_0 \to X_0$ dada por $H_1\left(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, \frac{t'+2}{t'+1}e^{it'}\right) = \frac{t+t'+2}{t+t'+1}e^{i(t+t')}$. Notemos que H_1 es continua.

   Dado que $[0, \infty) \approx X_0$, tenemos que existe un homeomorfismo $f : [0, \infty) \to X_0$ dado por $f(t) = \frac{t+2}{t+1}e^{it}$. Así, para cada $z \in X_0$ existe un único $t \in [0, \infty)$ tal que $f(t) = z$. Definimos $F : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ por $F(t, t') = t + t'$. Observemos que $H_1(z, c) = f(F(f^{-1}(z), f^{-1}(c)))$ para cada $z, c \in X_0$. Además, la continuidad de las funciones f, f^{-1} y de F implican la continuidad de H_1.

   De forma similar se puede demostrar que las siguientes funciones son continuas.

2. Sea $H_2 : D^2 \times X_0 \to D^2$ dada por $H_2\left(z, \frac{t+2}{t+1}e^{it}\right) = ze^{it}$.

3. Sea $H_3 : D^2 \times (S^1 \cup X_1) \to D^2$ dada por $H_3(z, w) = zw$.

4. Sea $H_4 : X_0 \times (S^1 \cup X_1) \to D^2$ dada por $H_4\left(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, w\right) = we^{it}$.

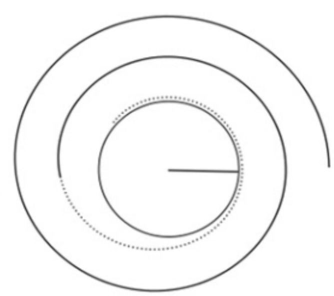

Figura 4.4: Continuo C

Por lo tanto podemos definir la siguiente función $H : X \times C \to X$ dada por:

$$H(z,c) = \begin{cases} H_1(z,c) & \text{si} \quad (z,c) \in X_0 \times X_0 \\ \\ H_2(z,c) & \text{si} \quad (z,c) \in D^2 \times X_0 \\ \\ H_3(z,c) & \text{si} \quad (z,c) \in D^2 \times (S^1 \cup X_1) \\ \\ H_4(z,c) & \text{si} \quad (z,c) \in X_0 \times (S^1 \cup X_1) \end{cases}$$

La continuidad de H_1, H_2, H_3 y H_4 implican la continuidad de H.

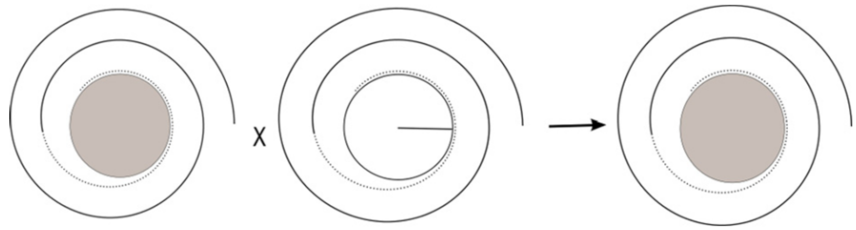

Figura 4.5: Pseudo-homotopía H

Además, se tiene que si $t = 0$, entonces $f(0) = (2, 0) \in C$, luego $H_1(z, f(0)) = z$ y $H_2(z, f(0)) = z$ para toda $z \in X$. Por lo tanto, $H(z, f(0)) = z$ para toda $z \in X$.
Y por otro lado, si hacemos $c = (0, 0) \in C$, entonces $H_3(z, c) = (0, 0)$ y $H_4(z, c) = (0, 0)$ para toda $z \in X$. Así, $H(z, c) = (0, 0)$ para toda $z \in X$.
En resumen, si hacemos $\mathbf{a} \in C(X, X)$ dada por $\mathbf{a}(z) = z_0$ donde $z_0 = (0, 0)$ y hacemos $a = (2, 0), b = (0, 0) \in C$, tenemos que $id_X \simeq_C \mathbf{a}$, es decir, X es pseudo-contráctil.

Proposición 4.15. **Sea X un espacio topológico. Entonces, X es pseudo-contráctil si y sólo si para cada $f \in C(X, X)$ se tiene que f es pseudo-homotópica a una función constante en X.*

Demostración. Sea $f \in C(X, X)$. Entonces $id_X \simeq_* \mathbf{c}$ con $\mathbf{c} \in C(X, X)$ constante. Por el Teorema 3.16, $f \circ id_X \simeq_* f \circ \mathbf{c}$. Dado que $f \circ id_X = f$ y $f \circ \mathbf{c} = \mathbf{k}$ es una función constante, entonces $f \simeq_* \mathbf{k}$.

Recíprocamente, supongamos que para toda $f \in C(X, X)$ tenemos que f es pseudo-homotópica a una función constante, entonces en partícular se cumple para la función id_X. Por lo tanto X es pseudo-contráctil. $\square$

Proposición 4.16. **Sea X un espacio topológico. Entonces, X es pseudo-contráctil si y sólo si el espacio $C(X, X)$ consta de una sola clase pseudo-homotópica.*

Demostración. Supongamos que $id_X \simeq_* \mathbf{c}$ con $\mathbf{c} \in C(X, X)$ constante. Sean $f, g \in C(X, X)$. Por el Teorema 3.16, tenemos que $f = id_X \circ f \simeq_* \mathbf{c} \circ f = \mathbf{c}$ y $g = id_X \circ g \simeq_* \mathbf{c} \circ g = \mathbf{c}$. Esto implica que $f \simeq_* g$, es decir, f y g están en la misma clase pseudo-homotópica.

La suficiencia es inmediata ya que la función id_X está relacionada con cualquier función, en particular con una función constante. Por lo tanto X es pseudo-contráctil. $\square$

Corolario 4.17. **Si X es un espacio de Hausdorff pseudo-contráctil, entonces $C(X, X)$ es conexo.*

Demostración. Como X es pseudo-contráctil, entonces sólo existe una clase pseudo-homotópica en $C(X, X)$, es decir, para cada par de funciones $f, g \in C(X, X)$ se tiene que $f \simeq_* g$. Luego por el Teorema 3.21, existe un continuo K en $C(X, X)$ tal que $f, g \in K$. Como K es conexo, se sigue de la Proposición 1.39 que $C(X, X)$ es conexo. $\square$

Hagamos notar aquí que la pseudo-contráctibilidad de X implica la conexidad de $C(X, X)$, no sabemos si el recíproco es cierto. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.18. *Sea X espacio compacto y de Hausdorff. Entonces, X es pseudo-contráctil si y sólo si $C(X,X)$ es conexo por continuos.*

Demostración. Supongamos que X es pseudo-contráctil y sean $f,g \in C(X,Y)$. Entonces, por la Proposición 4.16 tenemos que $f \simeq_* g$, luego por el Teorema 3.21, existe un continuo en $C(X,X)$ que contiene a f y g.

Recíprocamente, supongamos que $C(X,X)$ es conexo por continuos y sean $id_X, \mathbf{a} \in C(X,X)$ con $\mathbf{a}$ constante. Entonces existe un continuo K en $C(X,X)$ que contiene a id_X y a $\mathbf{a}$. Del Teorema 3.22, tenemos que $id_X \simeq_* \mathbf{a}$, lo cual implica que X es pseudo-contráctil. $\square$

El siguiente teorema es análogo al Teorema 4.18.

Teorema 4.19. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, X es contráctil si y sólo si $C(X,X)$ es arco-conexo.*

El siguiente teorema que es análogo al Teorema 4.11, es de gran utilidad para descartar de forma inmediata la pseudo-contractibilidad de un espacio.

Teorema 4.20. *Si X es pseudo-contráctil y de Hausdorff, entonces X es conexo por continuos, y por lo tanto conexo.*

Demostración. Como X es pseudo-contráctil, se sigue del Teorema 4.16 que todo par de funciones constantes son pseudo-homotópicas. Como X es de Hausdorff, del Corolario 3.28 se tiene que X es conexo por continuos. $\square$

Corolario 4.21. *Todo espacio métrico compacto pseudo-contráctil es un continuo.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto pseudo-contráctil. Como métrico implica Hausdorff, entonces por el Teorema 4.20 X es conexo por continuos, y por lo tanto es conexo. Por lo que X es un continuo. $\square$

El recíproco no es cierto, los espacios S^1 y $sen(1/x)$ son continuos pero no son pseudo-contráctiles. Para la no pseudo-contractibilidad de $sen(1/x)$ se puede consultar [10] o [19].

Tenemos así que, si queremos saber si un espacio es pseudo-contráctil, checamos si es o no conexo por continuos aparte de ser espacio de Hausdorff, si resulta no ser conexo por continuos entonces no puede ser pseudo-contráctil.

Se sabe que la contractibilidad de un espacio no es una propiedad hereditaria, para esto basta ver que el espacio $D^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \leqslant 1\}$ es contráctil, pero el espacio $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\} \subset D^1$ no lo es. Nos gustaría decir lo mismo acerca de la pseudo-contractibilidad, pero aún nos faltan herramientas para hacerlo. Sin embargo, lo que si se sabe es que la contractibilidad de un espacio se preserva bajo retracciones, veamos que lo mismo pasa con la pseudo-contractibilidad.

Teorema 4.22. **Sea X un espacio topológico. Si X es pseudo-contráctil, y A es un retracto de X, entonces A es pseudo-contráctil.*

Demostración. Como X es pseudo-contráctil, existen un continuo C, puntos $a,b \in C$, $x_0 \in X$ y una función continua $H : X \times C \to X$ tal que

$$H(x,a) = x \;\text{ y }\; H(x,b) = x_0 \;\text{ para toda }\; x \in X.$$

Como A es un retracto de X, entonces existe una retracción $r : X \to A$. Sea $a_0 = r(x_0)$ y consideremos la función $i : A \times C \to X \times C$ dada por $i(y, c) = (y, c)$ la cual es continua por ser la función inclusión.
Para demostrar que A es pseudo-contráctil, definamos $G : A \times C \to A$ dada por $G(y, c) = (r \circ H \circ i)(y, c)$. Nótese que G es continua por ser composición de funciones continuas. Además se cumple que

$$G(y, a) = (r \circ H \circ i)(y, a) = r(H(i(y, a))) = r(H(y, a)) = r(y) = y, \text{ para toda } y \in A$$

$$\text{y } G(y, b) = (r \circ H \circ i)(y, b) = r(H(i(y, b))) = r(H(y, b)) = r(x_0) = a_0, \text{ para toda } y \in A$$

Por lo tanto $id_A \simeq_C \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es una función constante en $C(A, A)$ dada por $\mathbf{a}(y) = a_0$, luego A es pseudo-contráctil. □

Obsevación 4.23. Nótese que si X, Y, Z y W son espacios topológicos, $f : X \to Y$, $\mathbf{k} : Y \to Z$ y $g : Z \to W$ son funciones continuas tales que $\mathbf{k}(y) = z_0$ es constante para toda $y \in Y$, entonces $g \circ \mathbf{k}$ y $\mathbf{k} \circ f$ también son funciones constantes. En muchas ocasiones se usará este hecho sin hacer mención explicita de esta observación.

Veamos ahora que la pseudo-contractibilidad se preserva bajo homeomorfismos.

Teorema 4.24. **La pseudo-contractibilidad es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos y $\phi : X \to Y$ un homeomorfismo entre ellos. Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces $id_X \simeq_* \mathbf{k}$ con $\mathbf{k} \in C(X, X)$ constante, por el Teorema 3.16 se tienen las siguientes equivalencias

$$id_X \simeq_* \mathbf{k} \iff \phi \circ id_X \circ \phi^{-1} \simeq_* \phi \circ \mathbf{k} \circ \phi^{-1} \iff \phi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \phi^{-1} \simeq_* \phi \circ \mathbf{k}\phi^{-1} \iff id_Y \simeq_* \phi \circ \mathbf{k}\phi^{-1}.$$

Por la Observación 4.23, $\phi \circ \mathbf{k} \circ \phi^{-1}$ es una función constante en $C(Y, Y)$. Por lo tanto, Y es pseudo-contráctil. □

Teorema 4.25. **Sean X y Y espacios topológicos. Si X o Y es pseudo-contráctil, entonces cualquier función continua $f : X \to Y$ es pseudo-homotópica a una constante.*

Demostración. Primero supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces $id_X \simeq_* \mathbf{a}$ con $\mathbf{a} \in C(X, X)$ constante. Así, $f \circ id_X \simeq_* f \circ \mathbf{a}$, es decir, $f \simeq_* f \circ \mathbf{a}$. Como $f \circ \mathbf{a} \in C(X, Y)$ es constante, entonces f es pseudo-homotópica a una constante.

Ahora supongamos que Y es pseudo-contráctil, entonces $id_Y \simeq_* \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \in C(Y, Y)$. De donde, $id_X \circ f \simeq_* \mathbf{b} \circ f$, es decir, $f \simeq_* \mathbf{b} \circ f$. Dado que $\mathbf{b} \circ f \in C(X, Y)$ es constante, se tiene que f es pseudo-homotópica a una constante. □

Teorema 4.26. *Sean X, Y espacios topológicos. Si X es pseudo-contráctil y Y es un espacio conexo por continuos y de Hausdorff, entonces $C(X, Y)$ es conexo por continuos.*

Demostración. Sean $f, g \in C(X, Y)$. Como X es pseudo-contráctil, entonces por el Teorema 4.25, $f \simeq_* \mathbf{a}$ y $g \simeq_* \mathbf{b}$ con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C(X, Y)$ constantes. Ahora, como Y es conexo por continuos se sigue del Corolario 3.26 que $\mathbf{a} \simeq_* \mathbf{b}$. Por lo tanto, $f \simeq_* g$. Como Y es de Hausdorff, se sigue del Teorema 3.21 que existe un continuo K en $C(X, Y)$ tal que $f, g \in K$. □

Analicemos ahora la pseudo-contractibilidad con respecto a espacios producto.

Teorema 4.27. **Sean X y Y espacios topológicos. El espacio producto $X \times Y$ es pseudo-contráctil si y sólo si los espacios X y Y son pseudo-contráctiles.*

Demostración. Supongamos que $X \times Y$ es pseudo-contráctil. Sea $(x_0, y_0) \in X \times Y$ tal que $id_{X\times Y} \simeq_* \mathbf{k}$ donde $\mathbf{k}(x,y) = (x_0, y_0)$ para toda $(x,y) \in X \times Y$. Nótese que $X \times \{y_0\} \approx X$ y $\{x_0\} \times Y \approx Y$. Como $X \times \{y_0\}$ y $\{x_0\} \times Y$ son retractos de $X \times Y$, se sigue del Teorema 4.22 que $X \times \{y_0\}$ y $\{x_0\} \times Y$ son pseudo-contráctiles. Luego del Teorema 4.24 tenemos que X y Y son pseudo-contráctiles.

Recíprocamente, supongamos que X y Y son pseudo-contráctiles. Entonces por definición existen continuos C_1, C_2, puntos $a_1, b_1 \in C_1$, $a_2, b_2 \in C_2$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y funciones continuas $H_1 : X \times C_1 \to X$, $H_2 : Y \times C_2 \to Y$ que cumplen

$$H_1(x, a_1) = x, \ \ H_1(x, b_1) = x_0 \ \text{ para cada } x \in X \ \text{ y } \ H_2(y, a_2) = y, \ \ H_2(y, b_2) = y_0 \ \text{ para cada } \ y \in Y.$$

Consideremos el continuo $C_1 \times C_2$ y los puntos (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in C_1 \times C_2$. Definamos la función

$$H : (X \times Y) \times (C_1 \times C_2) \to (X \times Y) \ \text{ dada por } \ H((x,y),(c_1,c_2)) = (H_1(x,c_1), H_2(y,c_2)).$$

La continuidad de H_1 y H_2 implican la continuidad de H. Además, H cumple que

$$H((x,y),(a_1,a_2)) = (H_1(x,a_1), H_2(y,a_2)) = (x,y) \ \text{ para todo } \ (x,y) \in X \times Y$$

$$\text{y} \ \ H((x,y),(b_1,b_2)) = (H_1(x,b_1), H_2(y,b_2)) = (x_0,y_0) \ \text{ para todo } \ (x,y) \in X \times Y.$$

Por lo tanto $id_{X\times Y} \simeq_{C_1\times C_2} \mathbf{a}$ con $\mathbf{a} \in C(X \times Y, X \times Y)$ función constante dada por $\mathbf{a}(x,y) = (x_0, y_0)$ para cada $(x,y) \in X \times Y$. Así $X \times Y$ es pseudo-contráctil. $\square$

Corolario 4.28. **Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de espacios topológicos. Entonces, para todo $J_0 \subseteq J$ finito el espacio $\prod_{\alpha\in J_0} X_\alpha$ es pseudo-contráctil si y sólo si X_α es pseudo-contráctil para cada $\alpha \in J_0$.*

Proposición 4.29. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de espacios topológicos. Si $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ es pseudo-contráctil, entonces X_α es pseudo-contráctil para cada $\alpha \in J$.*

Demostración. Sea $(x^0_\alpha)_{\alpha\in J} \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ la imagen de la función constante a la cual es pseudo-homotópica la función identidad del espacio $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$. Se tiene que $X_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha}\{x^0_\beta\} \approx X_\alpha$ y como $X_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha}\{x^0_\beta\}$ es un retracto del espacio $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$, para cada $\alpha \in J$, tenemos de los Teoremas 4.22 y 4.24, que X_α es pseudo-contráctil para cada $\alpha \in J$. $\square$

Finalmente veamos el caso particular cuando la familia es infinita numerable.

Proposición 4.30. **Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos. El espacio X_n es pseudo-contráctil para toda $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si el espacio $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es pseudo-contráctil.*

Demostración. Supongamos que X_n es pseudo-contráctil para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de continuos, y para cada $n \in \mathbb{N}$ existen puntos $a_n, b_n \in C_n$, $x_n^0 \in X_n$ y existen funciones continuas

$$H_n : X_n \times C_n \to X_n \text{ tales que } H_n(x, a_n) = x \text{ y } H_n(x, b_n) = x_n^0 \text{ para cada } x \in X.$$

Consideremos el continuo $C = \prod_{n\in\mathbb{N}} C_n$ y los puntos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$. Definamos la siguiente función

$$H : (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n) \times C \to \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ dada por } H((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (H_n(x_n, c_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dado que H_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces del Teorema 1.26 se sigue que la función H es continua. Notemos que.

$$H((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (H_n(x_n, a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } H((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (H_n(x_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$$

para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Por lo tanto H es una pseudo-homotopía entre la función identidad y la función constante cuya imagen es $(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, es decir, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es pseudo-contráctil.

Recíprocamente supongamos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es pseudo-contráctil, es decir, su función identidad es pseudo-homotópica a una función constante en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Sea $(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ la imagen de tal función constante. Notemos que $X_n \times \prod_{j\neq n} \{x_j^0\} \approx X_n$ y como $X_n \times \prod_{j\neq n} \{x_j^0\}$ es un retracto del espacio $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos de los Teoremas 4.22 y 4.24, que X_n es pseudo-contráctil para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 4.31. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *X es pseudo-contráctil.*
2. *X^n es pseudo-contráctil para cada $n \in \mathbb{N}$.*
3. *X^n es pseudo-contráctil para algún $n \in \mathbb{N}$.*
4. *$X \times Y$ es pseudo-contráctil para cualquier espacio topológico Y pseudo-contráctil.*
5. *$\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es pseudo-contráctil, donde $X_n = X$ para cada $n \in \mathbb{N}$*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos tal que $X_\alpha = X$ para toda $\alpha \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos por definición que $X^n = \prod_{\alpha=1}^{n} X_\alpha$. Como el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ es finito, se sigue del Corolario 4.28 que X^n es pseudo-contráctil.

2) $\Rightarrow$ 3) Es inmediato.

3) $\Rightarrow$ 4) Supongamos que X^n es pseudo-contráctil para algún $n \in \mathbb{N}$.

i. Si $n = 1$, como el espacio Y es pseudo-contráctil, se sigue del Teorema 4.27 que el espacio $X \times Y$ es pseudo-contráctil.

ii. Si $n \neq 1$, como $X^n = X^{n-1} \times X$, se sigue del Teorema 4.27 que X es pseudo-contráctil. Nuevamente, por el Teorema 4.27 se tiene que $X \times Y$ es pseudo-contráctil.

4) $\Rightarrow$ 5) Como $X \times Y$ es pseudo-contráctil, se sigue del Teorema 4.27 que X es pseudo-contráctil. Luego $X_n = X$ es pseudo-contráctil para cada $n \in \mathbb{N}$. Así de la Proposición 4.30 tenemos que $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es pseudo-contráctil.

5) $\Rightarrow$ 1) Como $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es pseudo-contráctil, entonces por la Proposición 4.30, X_n es pseudo-contráctil para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $X_n = X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto X es pseudo-contráctil. $\square$

Capítulo 5

Pseudo-contractibilidad con respecto a.

En el capítulo anterior vimos que, un espacio topológico X es pseudo-contractil si y sólo si el espacio $C(X, X)$ sólo tiene una clase pseudo-homotópica. Si ahora tomamos X y Y espacios topológicos y nos fijamos en $C(X, Y)$, entonces podemos preguntarnos: ¿Qué pasa si el espacio $C(X, Y)$ tiene una clase pseudo-homotópica? ¿Qué podemos decir de los espacios X y Y? Para tratar de responder a esas preguntas, definamos primero lo siguiente.

Definición 5.1. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que X es *(pseudo-)contráctil con respecto a* Y si cada función continua $f : X \to Y$ es (pseudo-)homotópica a una función constante.

Intuitivamente significa que la imagen de una función $f : X \to Y$ se puede deformar continuamente hasta llevarla a un punto (ver Figura 5.1). Dicho de otra manera, un espacio X es pseudo-contráctil con respecto a Y si y sólo si cada clase pseudo-homotópica de $C(X, Y)$ contiene una función constante. Por lo tanto, existen a lo más *card* (Y) clases pseudo-homotópicas. Con esto podría pasar que existan dos funciones constantes en $C(X, Y)$ que no sean pseudo-homotópicas.

Definición 5.2. Sea Z un subespacio de X, se dice que Z es *(pseudo-)contráctil en* X, si la función inclusión de Z en X es (pseudo-)homotópica a una función constante.

Obsevación 5.3. Observemos que si $Z \subset X$ y Z es (pseudo-)contráctil con respecto a X, entonces toda función continua $g : Z \to X$ es (pseudo)-homotópica a una función constante. En particular, la función inclusión $i_Z : Z \to X$. Así, Z es (pseudo-)contráctil en X. Por otra parte, notemos que como X es un subespacio de él mismo y que la función inclusión i_X resulta ser la función identidad en X, entonces X es (pseudo)-contráctil, lo cual es equivalente a decir que X es (pseudo)-contráctil en X o bien X es (pseudo)-contráctil con respecto a X.

Inmediatamente de la Definición 5.1 y de la relación $\simeq_*$, tenemos lo siguiente.

Proposición 5.4. **Sean X y Y espacios topológicos. Si el espacio $C(X, Y)$ consiste de una sola clase pseudo-homotópica, entonces X es pseudo-contráctil con respecto a Y.*

Demostración. Sea $f \in C(X, Y)$. Como sólo hay una clase pseudo-homotópica, tenemos que $[f]_* = C(X, Y)$. Así, f está relacionada con cualquier elemento de $C(X, Y)$. En particular, con una constante. Luego, f es pseudo-homotópica a una constante. Por lo tanto, X es pseudo-contráctil con respecto a Y. $\square$

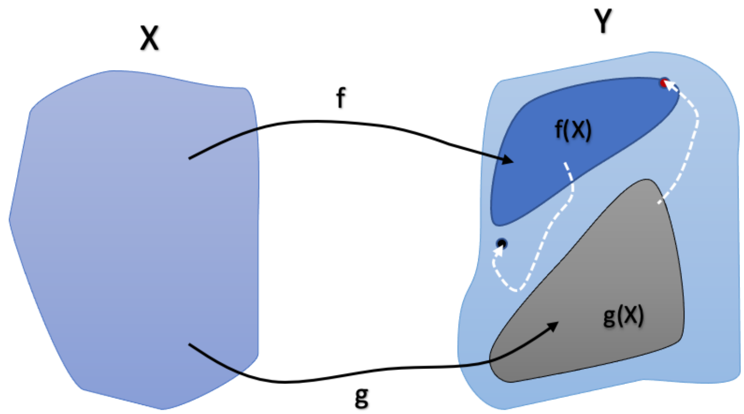

Figura 5.1: X pseudo-contráctil con respecto a Y

Relacionando el concepto anterior y la pseudo-contractibilidad tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.5. **Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es pseudo-contráctil.*
2. *Para cada espacio topológico Y, se tiene que X es pseudo-contráctil con respecto a Y.*
3. *Para cada espacio topológico Z, se tiene que Z es pseudo-contráctil con respecto a X.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ y $(1) \Rightarrow (3)$ son consecuencia del Teorema 4.25.

$(2) \Rightarrow (1)$. Basta tomar $Y = X$ y por la Observación 5.3.

$(3) \Rightarrow (1)$. Basta tomar $Z = X$ y nuevamente por la Observación 5.3. □

Teorema 5.6. *Si X es pseudo-contráctil con respecto a Y y Y es conexo por continuos, entonces cada par de funciones continuas de X en Y son pseudo-homotópicas. En particular, esto se cumple si X es pseudo-contráctil con respecto a Y y Y es un continuo. Dicho de otra manera, el espacio $C(X, Y)$ es conexo por continuos.*

Demostración. Sean $f, g \in C(X, Y)$. Como X es pseudo-contráctil con respecto a Y, entonces existen continuos C_1, C_2, puntos $a_1, b_1 \in C_1$; $a_2, b_2 \in C_2$; $y_1, y_2 \in Y$ y funciones continuas $H_1 : X \times C_1 \to Y$ y $H_2 : X \times C_2 \to Y$ tales que

$$H_1(x, a_1) = f(x), \quad H_1(x, b_1) = y_1 \text{ para toda } x \in X$$

$$\text{y } \; H_2(x, a_2) = g(x), \quad H_2(x, b_2) = y_2 \text{ para toda } x \in X.$$

Como Y es conexo por continuos, entonces existe un continuo $K \subset Y$ que contiene a los puntos y_1, y_2.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los continuos C_1, C_2 y K son ajenos a pares. Sean $j : \{b_1\} \to K$ y $l : \{y_2\} \to C_2$ las funciones dadas por $j(b_1) = y_1$ y $l(y_2) = b_2$, las cuales son continuas.

Sea $C = C_1 \cup_j K \cup_l C_2$ el continuo de adjunción. Por la Observación 1.76 el continuo C se puede representar de la siguiente manera $C = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{M}_1 \cup \mathscr{K} \cup \mathscr{M}_2 \cup \mathscr{C}_2$, donde $\mathscr{C}_1 = \{\overline{c} \in C |\ c \in C_1 \setminus \{b_1\}\}$, $\mathscr{M}_1 = \{\{b_1, y_1\}\}$, $\mathscr{K} = \{\overline{c} \in C |\ c \in K \setminus \{y_1, y_2\}\}$, $\mathscr{M}_2 = \{\{y_2, b_2\}\}$ y $\mathscr{C}_2 = \{\overline{c} \in C |\ c \in C_2 \setminus \{b_2\}\}$. Notemos que la unión es disjunta. Como $X \times C = X \times (\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{M}_1 \cup \mathscr{K} \cup \mathscr{M}_2 \cup \mathscr{C}_2) = (X \times \mathscr{C}_1) \cup (X \times \mathscr{M}_1) \cup (X \times \mathscr{K}) \cup (X \times \mathscr{M}_2) \cup (X \times \mathscr{C}_2)$.

Definimos la siguiente función $F : X \times C \to Y$ dada por

$$F(x, \overline{c}) = \begin{cases} H_1(x, c) & \text{si} \quad \overline{c} \in \mathscr{C}_1 \\ \\ y_1 & \text{si} \quad \overline{c} \in \mathscr{M}_1 \\ \\ c & \text{si} \quad \overline{c} \in \mathscr{K} \\ \\ y_2 & \text{si} \quad \overline{c} \in \mathscr{M}_2 \\ \\ H_2(x, c) & \text{si} \quad \overline{c} \in \mathscr{C}_2 \end{cases}$$

Tenemos por el Lema del Pegado que F es continua para cada $(x, \overline{c}) \in X \times C$. Además

$$F(x, \overline{a_1}) = H_1(x, a_1) = f(x) \ \text{ y } \ F(x, \overline{a_2}) = H_2(x, a_2) = g(x) \ \text{ para toda } \ x \in X.$$

Por lo tanto, $f \simeq_C g$.

Ahora bien, si Y es un continuo, entonces es conexo por continuos, y Y es de Hausdorff ya que es métrico. Se sigue del Teorema 3.21 que $C(X, Y)$ es conexo por continuos. $\square$

Lo hermoso de las matemáticas es cuando tienes las herramientas necesarias y se saben usar y permiten mostrar resultados con mayor elegancia. A continuación daremos una demostración más simple del mismo teorema.

Demostración. Sean $f, g \in C(X, Y)$. Como X es pseudo-contráctil con respecto a Y, entonces $f \simeq_* \mathbf{a}$ y $g \simeq_* \mathbf{b}$ con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C(X, Y)$ constantes. Ahora, como Y es conexo por continuos se sigue del Corolario 3.26 que $\mathbf{a} \simeq_* \mathbf{b}$. Dado que la relación $\simeq_*$ es de equivalencia, se concluye que $f \simeq_* g$. $\square$

Corolario 5.7. *Sean X un espacio compacto de Hausdorff y Y un espacio de Hausdorff conexo por continuos o un continuo. Entonces, X es pseudo-contráctil con respecto a Y si y sólo si el espacio $C(X, Y)$ es conexo por continuos.*

Demostración. Sean $f, g \in C(X, Y)$. Del Teorema 5.6 tenemos que $f \simeq_* g$. Como Y es de Hausdorff, se sigue del Teorema 3.21 que existe un continuo $K \subset C(X, Y)$ tal que $f, g \in K$. Por lo tanto $C(X, Y)$ es conexo por continuos.

Recíprocamente, sean $f, \mathbf{a} \in C(X, Y)$ tal que $\mathbf{a}$ es una función constante. Como $C(X, Y)$ es conexo por continuos, existe un continuo $K \subset C(X, Y)$, tal que $f, \mathbf{a} \in K$. Dado que X es compacto de Hausdorff del Teorema 3.22 se sigue que $f \simeq_* \mathbf{a}$, es decir, toda $f \in C(X, Y)$ es pseudo-homotópica a una función constante. Por lo tanto, X es pseudo-contráctil con respecto a Y. $\square$

Compare con el Corolario 3.23. Observemos que si en la prueba anterior las funciones dadas $f, \mathbf{a} \in C(X,Y)$, $\mathbf{a}$ es fija, tendríamos que toda función f es pseudo-homotópica a $\mathbf{a}$, esto implicaría que sólo hay una clase pseudo-homotópica en $C(X,Y)$.

Obsevación 5.8. Notemos que, si X es un espacio de Hausdorff y pseudo-contráctil, entonces por el Teorema 3.21 $C(X,X)$ es conexo por continuos y por lo tanto conexo, debido a la Proposición 1.39. Sin embargo, no estamos diciendo que la condición de que $C(X,X)$ es conexo implique que X es pseudo-contráctil.

Finalmente veamos como se comporta la pseudo-contractibilidad de un espacio con respecto a otro, en cuestión de retractos.

Teorema 5.9. **Sean X y Y espacios topológicos. Si X es pseudo-contráctil con respecto a Y y A es un retracto de X, entonces A es pseudo-contráctil con respecto a Y.*

Demostración. Sean $f \in C(A,Y)$ y $r : X \to A$ una retracción de X en A. Entonces $f \circ r \in C(X,Y)$. Del hecho que X es pseudo-contráctil con respecto a Y, tenemos que $f \circ r \simeq_* \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \in C(X,Y)$ constante. Por la Proposición 3.15, se tiene que $(f \circ r)|_A \simeq_* \mathbf{b}|_A$. Observemos que $(f \circ r)|_A = f$ pues $r(a) = a$ para toda $a \in A$, y $\mathbf{b}|_A \in C(A,Y)$ es constante, es decir, f es pseudo-homotópica a una constante. Por lo tanto A es pseudo-contráctil con respecto a Y. $\square$

Teorema 5.10. **Sean X y Y espacios topológicos. Si X es pseudo-contráctil con respecto a Y y B es un retracto de Y, entonces X es pseudo-contráctil con respecto a B.*

Demostración. Sea $f \in C(X,B)$. Como $C(X,B) \subseteq C(X,Y)$, se sigue $f \simeq_* \mathbf{a}$ con $\mathbf{a} \in C(X,Y)$ función constante. Sea $r : Y \to B$ una retracción de de Y en B. Tenemos así que $r \circ f \simeq_* r \circ \mathbf{a}$, pero $r \circ f = f$ y $r \circ \mathbf{a} \in C(X,B)$ es una función constante. Así, $f \simeq_* r \circ \mathbf{a}$. Por lo tanto, X es pseudo-contráctil con respecto a B. $\square$

Capítulo 6

Pseudo-homotópicamente equivalente y pseudo-contractibilidad.

Hemos visto que dados dos espacios topológicos X y Y podemos obtener el espacio $C(X,Y)$ dotado con la topología compacta abierta y comparar sus elementos por medio de una relación de equivalencia $\simeq_*$, obteniendo así una partición del mismo. Después se analizó el caso cuando $Y = X$ y se vio cuando el espacio $C(X,X)$ consiste de una sola clase pseudo-homotópica, obteniendo de esta manera una equivalencia al concepto de pseudo-contractibilidad usando el espacio de funciones continuas. Un resultado importante es también el Teorema 4.24, que afirma que si X es homeomorfo a Y y uno de ellos es pseudo-contráctil, entonces el otro también. También vimos como se pueden comparar dos espacios X y Y uno pseudo-contráctil con respecto a otro. Uno de los objetivos de este capítulo es definir una relación en la clase de todos los espacios topológicos que resulte ser de equivalencia. Tomaremos un representante de alguna clase de equivalencia de tal forma que si este es pseudo-contráctil, los elementos relacionados en dicha clase también lo son. Para esto empezamos con las siguientes definiciones.

Definición 6.1. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que Y es *semi-homotópicamente equivalente* a X, si existen dos funciones continuas

$$g : Y \to X \ \text{ y } \ f : X \to Y \ \text{ tales que } \ f \circ g \simeq id_Y .$$

Cuando esto pase lo denotaremos por $Y \approx^{SE} X$. A la función g se le llama *homotopía inversa derecha* de f, y a f *homotopía inversa izquierda* de g.

Definición 6.2. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que Y es *semi-pseudo-homotópicamente equivalente* a X, si existen un continuo C y dos funciones continuas

$$g : Y \to X \ \text{ y } \ f : X \to Y \ \text{ tales que } \ f \circ g \simeq_C id_Y .$$

Cuando esto suceda lo denotaremos por $Y \approx^{SE}_P X$. A la función g se le llama *inversa pseudo-homotópica derecha* de f, y a f *inversa pseudo-homotópica izquierda* de g.

Obsevación 6.3. Sean X y Y espacios topológicos tales que $Y \approx_P^{SE} X$, es decir, existe un continuo C y dos funciones $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ continuas, tales que $f \circ g \simeq_C id_Y$. Si además se tiene que C es homeomorfo a I, entonces por el Corolario 3.6 tenemos que $f \circ g \simeq_I id_Y$. Así $f \circ g \simeq id_Y$, es decir $Y \approx^{SE} X$. Por otra parte es claro que $Y \approx^{SE} X$ implica $Y \approx_P^{SE} X$.

Teorema 6.4. **Sean X y Y espacios topológicos. Si Y es semi-pseudo-homotópicamente equivalente a X y X es pseudo-contráctil, entonces Y es pseudo-contráctil.*

Demostración. Como X es pseudo-contráctil, entonces $id_X \simeq_* \mathbf{a}$, con $\mathbf{a} \in C(X, X)$ constante. Además como $Y \approx_P^{SE} X$, existen un continuo K y dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $f : X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq_K id_Y$, es decir, $f \circ g \simeq_* id_Y$.

Luego del Teorema 3.16 se tiene que $f = f \circ id_X \simeq_* f \circ \mathbf{a}$. De forma análoga tenemos que $f \circ g \simeq_* (f \circ \mathbf{a}) \circ g$, donde $(f \circ \mathbf{a}) \circ g \in C(Y, Y)$ es constante.

De $f \circ g \simeq_* id_Y$ y de la transitividad de la relación $\simeq_*$, se tiene $id_Y \simeq_* f \circ \mathbf{a} \circ g$, es decir la función id_Y es pseudo-homotópica a una constante. Por lo tanto Y es pseudo-contráctil. □

Teorema 6.5. **Sean X, Y y Z espacios topológicos. Si $Z \approx_P^{SE} X$ y X es pseudo-contráctil con respecto a Y, entonces Z es pseudo-contráctil con respecto a Y.*

Demostración. Sea $h \in C(Z, Y)$. Dado que $Z \approx_P^{SE} X$, existen un continuo K y funciones continuas $f : Z \to X$ y $g : X \to Z$ tales que $g \circ f \simeq_K id_Z$.

Por un lado, de la Observación 3.16 se tiene que $h \circ (g \circ f) \simeq_* h \circ id_Z = h$.

Por otro lado, como X es pseudo-contráctil con respecto a Y y $h \circ g \in C(X, Y)$, entonces $h \circ g \simeq_* \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \in C(X, Y)$ constante. La Observación 3.16 implica que $(h \circ g) \circ f \simeq_* \mathbf{b} \circ f$, con $\mathbf{b} \circ f \in C(Z, Y)$ constante.

Así, se obtiene que $h \circ (g \circ f) \simeq_* h$ y $(h \circ g) \circ f \simeq_* \mathbf{b} \circ f$, y por la transitividad tenemos que $h \simeq_* \mathbf{b} \circ f$. Así, la función h es pseudo-homotópica a una constante, por lo tanto Z es pseudo-contráctil con respecto a Y. □

Teorema 6.6. **Sean X, Y y Z espacios topológicos. Si X es pseudo-contráctil con respecto a Y y $Z \approx_P^{SE} Y$, entonces X es pseudo-contráctil con respecto a Z.*

Demostración. Sea $h \in C(X, Z)$. Como $Z \approx_P^{SE} Y$, existen funciones continuas $f : Z \to Y$ y $g : Y \to Z$ tales que $g \circ f \simeq_* id_Z$. De esto, tenemos que $(g \circ f) \circ h \simeq_* id_Z \circ h = h$. Por otra parte, como X es pseudo-contráctil con respecto a Y y $f \circ h \in C(X, Y)$, entonces $f \circ h \simeq_* \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \in C(X, Y)$ constante. Por lo tanto $g \circ (f \circ h) \simeq_* g \circ \mathbf{b}$, con $g \circ \mathbf{b}$ constante en $C(X, Z)$.

Así tenemos que $h \simeq_* g \circ \mathbf{b}$. Por lo tanto X es pseudo-contráctil con respecto a Z. □

Vemos que con la definición de semi-pseudo-homotópicamente es posible comparar espacios topológicos, pero no es suficiente ya que la relación en la clase de espacios topológicos podría no ser de equivalencia. Sin embargo, para garantizar la equivalencia se introduce la siguiente definición.

Definición 6.7. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que X y Y son *homotópicamente equivalentes* (o que tienen *el mismo tipo de homotopía*) denotado por $X \approx^E Y$ si existen dos funciones continuas

$$f : X \to Y \ \text{ y } \ g : Y \to X \ \text{ tales que } \ f \circ g \simeq id_Y \ \text{ y } \ g \circ f \simeq id_X.$$

Definición 6.8. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que X y Y son *pseudo-homotópicamente equivalentes* (o que tienen *el mismo tipo de pseudo-homotopía*) denotado por $X \approx_P^E Y$, si existen dos funciones continuas

$$f : X \to Y,\ g : Y \to X \ \text{ y dos continuos } K \text{ y } C \text{ tales que } \ f \circ g \simeq_K id_Y \ \text{ y } \ g \circ f \simeq_C id_X.$$

Obsevación 6.9. Se sigue del Corolario 3.6 que cuando los espacios factor K y C son homeomorfos a el continuo $I = [0, 1]$, tenemos que $X \approx_P^E Y$ implica $X \approx^E Y$. No es díficil ver que $X \approx^E Y$ implica $X \approx_P^E Y$.

Definición 6.10. Sea $\Im$ la clase de todos los espacios topológicos y sean $X, Y \in \Im$. Diremos que X está relacionado con Y denotado por $X \sim Y$ si y sólo si $Y \approx_P^E X$.

Proposición 6.11. **La relación* $\sim$ *es una relación de equivalencia en* $\Im$.

Demostración. Veamos que:

$\sim$ es reflexiva.

En efecto, $X \approx_P^E X$ para toda X en $\Im$. Para ello basta tomar $f = g = id_X$.

$\sim$ es simétrica.

Sean $X, Y \in \Im$ tales que $X \sim Y$. Notemos que $X \sim Y$ si y sólo si $Y \approx_P^E X$, existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $f \circ g \simeq_* id_Y$ y $g \circ f \simeq_* id_X$. De donde $X \approx_P^E Y$ lo cual implica que $Y \sim X$.

$\sim$ es transitiva.

Sean $X, Y, Z \in \Im$ tales que $X \sim Y$ y $Y \sim Z$, entonces $Y \approx_P^E X$ y $Z \approx_P^E Y$.

Como $Y \approx_P^E X$, existen continuos C, D, funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ continuas tales que $f \circ g \simeq_C id_Y$ y $g \circ f \simeq_D id_X$.

También, como $Z \approx_P^E Y$, existen continuos E, F, funciones $h : Z \to Y$ y $j : Y \to Z$ continuas tales que $j \circ h \simeq_E id_Z$ y $h \circ j \simeq_F id_Y$.

Sean $H : Z \to X$ y $G : X \to Z$ las funciones dadas por $H(z) = (g \circ h)(z)$ y $G(x) = (j \circ f)(x)$. La continuidad de f, g, h y j implican la continuidad de H y G.

Como $h \circ j \simeq_F id_Y$, entonces por el Teorema 3.16, $(h \circ j) \circ f \simeq_F id_Y \circ f = f$. Luego $g \circ ((h \circ j) \circ f) \simeq_F g \circ f$. Como $g \circ f \simeq_D id_X$, entonces por el Teorema 3.14 existe un continuo M tal que $(g \circ h) \circ (j \circ f) = g \circ ((h \circ j) \circ f) \simeq_M id_X$, es decir, $H \circ G \simeq_M id_X$.

Análogamente como $f \circ g \simeq_C id_Y$, entonces por el Teorema 3.16, $f \circ g \circ h \simeq_C id_Y \circ h$. Así, $j \circ f \circ g \circ h \simeq_C j \circ h$, es decir, $G \circ H \simeq_C j \circ h$. Dado que $j \circ h \simeq_E id_Z$, entonces por el Teorema 3.14 $G \circ H \simeq_* id_Z$. Esto implica que $X \sim Z$.

Por lo tanto $\sim$ es una relación de equivalencia en $\Im$. □

Corolario 6.12. **Sean* X *y* Y *espacios topológicos. Si* $X \approx_P^E Y$ *y uno de ellos es pseudo-contráctil, entonces el otro también lo es.*

Demostración. Nótemos que $X \approx_P^E Y$ implica $X \approx_P^{SE} Y$. Si Y es pseudo-contráctil, entonces del Teorema 6.4 se tiene que X es pseudo-contráctil.

Análogamente, si $X \approx_P^E Y$ y X es pseudo-contráctil, entonces de la simetría de la relación $\sim$ se tiene que $Y \approx_P^E X$ esto implica que $Y \approx_P^{SE} X$. Ahora, del Teorema 6.4 se tiene que Y es pseudo-contráctil. □

Corolario 6.13. **Sean* X *y* Y *espacios topológicos. Si* $X \approx_P^E Y$ *y uno de ellos es pseudo-contráctil, entonces* $X \times Y$ *es pseudo-contráctil.*

Demostración. Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces del Corolario 6.12, se sigue que Y es pseudo-contráctil. Luego del Teorema 4.27, se tiene que el espacio $X \times Y$ es pseudo-contráctil. $\square$

Teorema 6.14. **Sean* X, Y *espacios topológicos. Si* X *es homeomorfo a* Y*, entonces tienen el mismo tipo de pseudo-homotopía, es decir* $X \approx_P^E Y$.

Demostración. Como X es homeomorfo a Y, existe $\varphi : X \to Y$ un homeomorfismo. Como se tiene que $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_Y$ y $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_X$. Por lo tanto de la reflexividad de la relación $\simeq_*$ se sigue que $\varphi \circ \varphi^{-1} \simeq_* id_Y$ y $\varphi^{-1} \circ \varphi \simeq_* id_X$. Por lo tanto $X \approx_P^E Y$. $\square$

El recíproco no es cierto, para esto tenemos los siguiente ejemplos.

Ejemplo 6.15. Tenemos que $\mathbb{R}^n \approx^E \{\mathbf{0}\}$.
En efecto, sean $f : \mathbb{R}^n \to \{\mathbf{0}\}$ y $g : \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n$ dadas por $f(x) = \mathbf{0}$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, respectivamente. Tenemos que $(g \circ f)(x) = \mathbf{0}$ para toda $x \in X$. Sea $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ dada por $H(x,t) = tx$. Notemos que H es continua y además $H(x,0) = \mathbf{0}$ y $H(x,1) = x$ para toda $x \in X$. Por lo tanto $id_{\mathbb{R}^n} \simeq g \circ f$. Por otra parte, se tiene que $(f \circ g)(\mathbf{0}) = f(g(\mathbf{0})) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = id_{\{\mathbf{0}\}}(\mathbf{0})$, es decir, $f \circ g = id_{\{\mathbf{0}\}}$. Luego $f \circ g \simeq id_{\{\mathbf{0}\}}$. Por lo tanto $\mathbb{R}^n \approx^E \{\mathbf{0}\}$. Así, $\mathbb{R}^n \approx_P^E \{\mathbf{0}\}$. Sin embargo, se sabe que $\mathbb{R}^n \not\approx \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo 6.16. Sabemos que $I = [0,1]$ es contráctil, por lo tanto pseudo-contráctil y el espacio de Kuperberg $X = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{t+2}{t+1} e^{it} \text{ con } t \in [0,\infty) \right\} \cup \{ z \in \mathbb{C} \mid ||z|| \leqslant 1\}$ es pseudo-contráctil. Por lo tanto tienen el mismo tipo de pseudo-homotopía, sin embargo no son homeomorfos.

Este es en realidad un teorema muy interesante, pues sabemos que la propiedad de ser homeomorfos es en sí una relación de equivalencia en $\Im$, la cual se denota por $\approx$. Por lo tanto cada clase de equivalencia en $\Im$ bajo la relación $\sim$, es particionada por la relación $\approx$.

Teorema 6.17. **Sea* X *un espacio topológico. Entonces,* X *es pseudo-contráctil si y sólo si* X *tiene el mismo tipo de pseudo-homotópia a un punto* p.

Demostración. Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces $id_X \simeq_* \mathbf{c}$ con $\mathbf{c} \in C(X,X)$ constante, es decir, $\mathbf{c}(x) = p$ para toda $x \in X$ y $p \in X$. Definamos ahora las siguientes funciones,

$$f : X \to \{p\} \text{ dada por } f(x) = p \text{ para toda } x \in X \text{ y } g : \{p\} \to X \text{ dada por } g(p) = p$$

ambas funciones son continuas y

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(p) = p = id_{\{p\}}(y) \text{ es decir } f \circ g = id_{\{p\}} \simeq_* id_{\{p\}}.$$

$$\text{Además} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(p) = p = \mathbf{c}(x), \text{ es decir, } g \circ f = \mathbf{c} \simeq_* id_X$$

Por lo tanto, $X \approx_P^E \{p\}$.

Por otra parte, sea $Y = \{p\}$. Supongamos que $X \approx_P^E \{p\}$. Entonces existen continuos M y N y funciones continuas

$$f : X \to Y \ \text{ y } \ g : Y \to X, \text{ tales que } \ f \circ g \simeq_M id_Y \ \text{ y } \ g \circ f \simeq_Y id_X$$

Notemos que f es constante en $C(X,Y)$, por lo tanto $g \circ f$ es constante en $C(X,X)$. Así, id_X es pseudo-homotópica a una constante, es decir, X es pseudo-contráctil. □

Corolario 6.18. **Sean X, Y espacios topológicos. Si X y Y son pseudo-contráctiles, entonces tienen el mismo tipo de pseudo-homotopía, es decir, $X \approx_P^E Y$.*

Con respecto a producto de espacios topológicos tenemos los siguientes resultados.

Corolario 6.19. **Sean X, Y espacios topológicos. Si $X \times Y$ es pseudo-contráctil, entonces $X \approx_P^E Y$.*

Demostración. Como $X \times Y$ es pseudo-contráctil, entonces por el Teorema 4.27 X y Y son pseudo-contráctiles, luego por el Corolario 6.18 $X \approx_P^E Y$. □

Proposición 6.20. **Sean X, Y espacios topológicos. Si $X \approx_P^E Y$, entonces $X \times Z \approx_P^E Y \times Z$ para cada espacio topológico Z.*

Demostración. Como $X \approx_P^E Y$, entonces existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $f \circ g \simeq_* id_Y$ y $g \circ f \simeq_* id_X$. Sean Z un espacio topológico, $\hat{\mathbf{f}} : X \times Z \to Y \times Z$ y $\hat{\mathbf{g}} : Y \times Z \to X \times Z$ funciones dadas por $\hat{\mathbf{f}}(x,z) = (f(x), z)$ y $\hat{\mathbf{g}}(y,z) = (g(y), z)$ respectivamente. Se sigue del Teorema 1.26 que las funciones $\hat{\mathbf{f}}$ y $\hat{\mathbf{g}}$ son continuas. Además,

$$(\hat{\mathbf{g}} \circ \hat{\mathbf{f}})(x,z) = \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{f}}(x,z)) = \hat{\mathbf{g}}(f(x), z) = (g(f(x)), z) = ((g \circ f)(x), z) \ \text{ para cada } \ (x,z) \in X \times Z$$

$$\text{y } \ (\hat{\mathbf{f}} \circ \hat{\mathbf{g}})(y,z) = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{g}}(y,z)) = \hat{\mathbf{f}}(g(y), z) = (f(g(y)), z) = ((f \circ g)(y), z) \ \text{ para cada } \ (y,z) \in Y \times Z$$

Demostremos que $\hat{\mathbf{g}} \circ \hat{\mathbf{f}} \simeq_* id_{X \times Z}$. Como $g \circ f \simeq_* id_X$, entonces existen un continuo C, puntos $c_1, c_2 \in C$ y una función continua $H : X \times C \to X$, tal que $H(x, c_1) = (g \circ f)(x)$ y $H(x, c_2) = x$ para cada $x \in X$. Definimos

$$\hat{\mathbf{H}} : (X \times Z) \times C \to (X \times Z) \ \text{ dada por } \ \hat{\mathbf{H}}((x,z), c) = (H(x,c), z).$$

La continuidad de H implica la continuidad de $\hat{\mathbf{H}}$. Además,

$$\hat{\mathbf{H}}((x,z), c_1) = (H(x, c_1), z) = ((g \circ f)(x), z) = (\hat{\mathbf{g}} \circ \hat{\mathbf{f}})(x,z) \ \text{ para cada } \ (x,z) \in X \times Z$$

$$\text{y } \quad \hat{\mathbf{H}}((x,z), c_2) = (H(x, c_2), z) = (x,z) = id_{X \times Z}(x,z) \ \text{ para cada } \ (x,z) \in X \times Z.$$

Por lo tanto, $\hat{\mathbf{g}} \circ \hat{\mathbf{f}} \simeq_* id_{X \times Z}$.

Por otra parte, como $f \circ g \simeq_* id_Y$, entonces existen un continuo K, puntos $k_1, k_2 \in K$ y $G : Y \times K \to Y$ una función continua tal que $G(y, k_1) = (f \circ g)(y)$ y $G(y, k_2) = y$ para cada $y \in Y$. Definimos

$$\hat{\mathbf{G}} : (Y \times Z) \times K \to (Y \times Z) \ \text{ dada por } \ \hat{\mathbf{G}}((y,z), k) = (G(x,k), z).$$

La continuidad de G implica la continuidad de $\hat{\mathbf{G}}$. Además,

$$\hat{\mathbf{G}}((y,z), k_1) = (H(y, k_1), z) = ((f \circ g)(y), z) = (\hat{\mathbf{f}} \circ \hat{\mathbf{g}})(y,z) \ \text{ para cada } \ (y,z) \in Y \times Z$$

$$\text{y } \quad \hat{\mathbf{G}}((y,z), k_2) = (H(y, k_2), z) = (y,z) = id_{Y \times Z}(y,z) \ \text{ para cada } \ (y,z) \in Y \times Z$$

Por lo tanto $\hat{\mathbf{f}} \circ \hat{\mathbf{g}} \simeq_* id_{Y\times Z}$. De esta manera $X \times Z \approx_P^E Y \times Z$. □

Proposición 6.21. **Sea X un espacio topológico. Si X es pseudo-contráctil entonces $X\times Y \approx_P^E Y$ para cada espacio topológico Y.*

Demostración. Como X es pseudo-contráctil, entonces por la Proposición 6.17, $X \approx_P^E \{p\}$. De la Proposición 6.20, tenemos que $X \times Y \approx_P^E \{p\} \times Y$, pero $\{p\} \times Y$ es homeomorfo a Y. Por lo tanto, $X \times Y \approx_P^E Y$. □

Proposición 6.22. **Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familias numerables de espacios topológicos. Si $X_n \approx_P^E Y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n \approx_P^E \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} Y_n$.*

Demostración. Para mayor comodidad definamos $X = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y $Y = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} Y_n$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n \approx_P^E Y_n$, entonces existen continuos C_n y D_n y funciones continuas

$$f_n : X_n \to Y_n \text{ y } g_n : Y_n \to X_n \text{ tales que } f_n \circ g_n \simeq_{C_n} id_{Y_n} \text{ y } g_n \circ f_n \simeq_{D_n} id_{X_n}.$$

De aquí, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen puntos $a_n, b_n \in C_n$, $a'_n, b'_n \in D_n$ y funciones continuas G_n y H_n tales que

$$G_n : Y_n \times C_n \to Y_n,\ G_n(y, a_n) = (f_n \circ g_n)(y) \text{ y } G_n(y, b_n) = id_{Y_n}(y) = y \text{ para cada } y \in Y_n$$

$$\text{y } H_n : X_n \times D_n \to X_n,\ H_n(x, a'_n) = (g_n \circ f_n)(x) \text{ y } H_n(x, b'_n) = id_{X_n}(x) = x \text{ para cada } x \in X_n.$$

Sean

$$f : X \to Y \text{ y } g : Y \to X \text{ dadas por } f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } g((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (g_n(y_n))_{n\in\mathbb{N}}, \text{ respectivamente.}$$

Se sigue del Teorema 1.26 que las funciones f y g son continuas.

Afirmamos que $f \circ g \simeq_* id_Y$.

En efecto, sean $C = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$, $\hat{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\hat{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos la función

$$\hat{G} : Y \times C \to Y \text{ dada por } \hat{G}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (G_n(y_n, c_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

$\hat{G}$ es continua, pues G_n lo es para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún,

$\hat{G}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \hat{a}) = \hat{G}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (G_n(y_n, a_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((f_n \circ g_n)(y_n))_{n\in\mathbb{N}} = (f_n(g_n(y_n)))_{n\in\mathbb{N}} =$
$= f(g_n(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f(g((y_n)_{n\in\mathbb{N}})) = (f \circ g)(y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$

Lo anterior implica que

$$\hat{G}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \hat{a}) = (f \circ g)(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ para toda } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y \text{ y}$$

$$\hat{G}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \hat{b}) = \hat{G}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (G_n(y_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = id_Y((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ para toda } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y.$$

Así, $f \circ g \simeq_C id_Y$.

De igual forma afirmamos que $g \circ f \simeq_* id_X$.

Sean $D = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$, $\hat{a'} = (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\hat{b'} = (b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos la función

$$\hat{H} : X \times D \to X \text{ dada por } \hat{H}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (H_n(x_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

$\hat{H}$ es continua, pues H_n lo es para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún

$$\hat{H}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \hat{a'}) = \hat{H}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (H_n(x_n, a'_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((g_n \circ f_n)(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (g_n(f_n(x_n)))_{n\in\mathbb{N}} =$$
$$= g(f_n(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = g(f((x_n)_{n\in\mathbb{N}})) = (g \circ f)(x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lo anterior implica que

$$\hat{H}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \hat{a'}) = (g \circ f)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ para toda } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \text{ y}$$

$$\hat{H}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \hat{b'}) = \hat{H}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b'_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (H_n(x_n, b'_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = id_X((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ para toda } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X.$$

Así, $g \circ f \simeq_D id_X$.

Por lo tanto $X \approx_P^E Y$, es decir, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \approx_P^E \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. □

Se sabe por el Teorema 4.22 que todo retracto de un espacio pseudo-contráctil resulta ser pseudo-contráctil. ¿Podemos pedirle más a un retracto, para que siendo este pseudo-contráctil el espacio total lo sea? Para responder esto recordemos que un retracto de un espacio X es un subespacio cerrado propio A para el cual existe una función continua $r : X \to A$ llamada retracción tal que $r|_A = id_A$.

Definición 6.23. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto no vacío cerrado de X. Decimos que A es un *retracto de (pseudo-)deformación de* X si, existe una retracción $r : X \to A$ tal que $(r \simeq_* id_X)$ $r \simeq id_X$.

Intuitivamente, un subespacio A de X es un retracto por deformación de X si a cada punto de X se le puede llevar continuamente hasta su imagen en A por una retracción. Se sigue del Teorma 4.22 que todo retracto de pseudo-deformación de un espacio pseudo-contráctil resulta ser pseudo-contráctil simplemente por ser un retracto.

Teorema 6.24. **Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Si A es un retracto de pseudo-deformación de X, entonces A y X tienen el mismo tipo de pseudo-homotopía, es decir, $A \approx_P^E X$.*

Demostración. Como A es un retracto de pseudo-deformación de X, existe una retracción $r : X \to A$ tal que $r \simeq_* id_X$. Sea $i : A \to X$ la función inclusión, la cual es continua. Por un lado se tiene que

$$(r \circ i)(x) = r(i(x)) = r(x) = x \text{ para toda } x \in A. \text{ Lo anterior implica que } r \circ i = id_A; \text{ es decir, } r \circ i \simeq_* id_A.$$

Por otra parte, como $r \simeq_* id_X$, se tiene que $i \circ r \simeq_* i \circ id_X$, es decir, $i \circ r \simeq_* id_X$. Por lo tanto, $A \approx_P^E X$. □

Podemos ahora si contestar la pregunta planteada anteriormente.

Corolario 6.25. **Sea X espacio topológico. Si X tiene un retracto de pseudo-deformación pseudo-contráctil, entonces X es pseudo-contráctil.*

Demostración. Si A es un retracto de pseudo-deformación de X, entonces $A \approx_P^E X$. Dado que A es pseudo-contráctil, entonces por el Corolario 6.12 se tiene que X es pseudo-contráctil. □

Con el Teorema 6.24 y la Definición 6.23 podemos dar una prueba mas de la Proposición 6.21, para esto primero veamos los siguientes resultados.

Proposición 6.26. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Entonces el conjunto $\{p\} \times Y$ es un retracto de $X \times Y$ para todo espacio topológico Y.*

Demostración. Sea Y un espacio topológico. Claramente $\{p\} \times Y$ es un cerrado en $X \times Y$. Sea $r : X \times Y \to \{p\} \times Y$ la función dada por $r(x, y) = (p, y)$. Por el Teorema 1.26, r es continua. Además, se tiene que $r|_{\{p\}\times Y} = id_{\{p\}\times Y}$. Así, r es una retracción de $X \times Y$ en $\{p\} \times Y$. Por lo tanto $\{p\} \times Y$ es un retracto de $X \times Y$. □

Antes de continuar, veamos la siguiente observación.

Obsevación 6.27. Sea X un espacio topológico. Si X es pseudo-contráctil, entonces la función identidad id_X es pseudo-homotópica a una función constante. Sea $\mathbf{a}(x) = a_0$ para cada $x \in X$ tal función constante. Con esto podríamos decir que "X se *pseudo-contrae* al punto a_0". La pregunta sería: ¿Es a_0 el único punto a donde se pseudo-contrae el espacio X? La respuesta inmediata es No. Por la Proposicioón 4.16, tenemos que el espacio $C(X, X)$ consta de una sola clase pseudo-homotópica. Por lo tanto, toda función constante es pseudo-homotópica a la función $\mathbf{a}$. Esto implica que el espacio X se puede pseudo-contraer a cualquier punto p en X.

Proposición 6.28. *Sea X un espacio topológico. Si X es pseudo-contráctil y $p \in X$ es el punto donde se pseudo-contrae X, entonces $\{p\} \times Y$ es un retracto por pseudo-deformación de $X \times Y$ para cada espacio topológico Y.*

Demostración. Sea Y un espacio topológico. Como X es pseudo-contráctil, entonces existen un continuo C, puntos $c_1, c_2 \in C$ y una función continua $H : X \times C \to X$ tal que $H(x, c_1) = x$ y $H(x, c_2) = p$ para cada $x \in X$. Por la Proposición 6.26, se tiene que la función $r : X \times Y \to \{p\} \times Y$ la función dada por $r(x, y) = (p, y)$ es una retracción de $X \times Y$ en $\{p\} \times Y$. Ahora definamos la función $R : (X \times Y) \times C \to X \times Y$ dada por $R((x, y), c) = (H(x, c), y)$. Por el Teorema 1.26, R es continua. Además, $R((x, y), c_1) = (H(x, c_1), y) = (x, y) = id_{X\times Y}(x, y)$ y $R((x, y), c_2) = (H(x, c_2), y) = (p, y) = r(x, y)$ para cada $(x, y) \in X \times Y$. De aquí, se tiene que $r \simeq_C id_{X\times Y}$. Por lo tanto $\{p\} \times Y$ es un retracto por pseudo-deformación de $X \times Y$. □

Ahora si podemos dar otra demostración de la Proposición 6.21.

Sean Y un espacio topológico y $p \in X$ el punto donde se pseudo-contrae X. Entonces por la Proposición 6.28, se tiene que $\{p\} \times Y$ es un retracto por pseudo-deformación de $X \times Y$. Así, del Teorema 6.24 se tiene $\{p\} \times Y \approx^E_P X \times Y$. Se sabe que $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y para cada $x \in X$. entonces por la transitividad de la realción $\sim$ se sigue que $X \times Y \approx^E_P Y$.

Analicemos ahora el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.29. Sea $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Entonces la esfera S^n es un retracto de deformación de X. La función $r : X \to S^n$ dada por $r(x) = \frac{1}{||x||}x$ es una retracción. Además, se tiene que

$$(r \circ i)(x) = r(i(x)) = r(x) = x \text{ para toda } x \in S^n. \text{ Así, } r \circ i = id_{S^n}. \text{ Luego } r \circ i \simeq id_{S^n}.$$

Por otro lado, $(i \circ r)(x) = i(r(x)) = i(\frac{1}{||x||}x) = \frac{1}{||x||}x$ para cada $x \in X$. Ahora definamos $H : X \times I \to X$ dada por $H(x, t) = (1 - t)x + \frac{t}{||x||}x$. Se tiene que H es continua y

$$H(x, 0) = x = id_X(x) \text{ y } H(x, 1) = \frac{1}{||x||}x = (i \circ r)(x) \text{ para cada } x \in X. \text{ De aqui que } i \circ r \simeq id_X.$$

Luego se tiene que S^n es un retracto de deformación de X.

Notemos además que si $a \in S^n$, entonces $H(a,t) = (1-t)a + \frac{t}{||a||}a = (1-t)a + ta = a$ para toda $t \in I$. De aquí que $H(a,t) = a$ para cada $(a,t) \in S^n \times I$. Así, S^n queda fijo bajo la homotopía.

Este retracto de deformación tiene la cualidad de dejar fijo al retracto bajo la homotopía. Esto motiva a las siguientes definiciones.

Definición 6.30. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un *retracto de deformación fuerte* de X, si A es retracto de deformación de X y si existe una homotopía $H : X \times I \to X$ entre la retracción r y la identidad id_X tal que $H(a,t) = a$ para todo $(a,t) \in A \times I$.

Definición 6.31. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un *retracto de pseudo-deformación fuerte* de X, si A es retracto de pseudo-deformación de X y si existe una pseudo-homotopía $H : X \times C \to X$ entre la retracción r y la identidad id_X tal que $H(a,c) = a$ para todo $(a,c) \in A \times C$.

Con respecto a la pseudo-contractibilidad y a los espacios cociente de la forma X/A tenemos lo siguiente.

Teorema 6.32. **Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ cerrado. Si A es un retracto de pseudo-deformación fuerte de X, entonces el espacio cociente X/A es pseudo-contráctil.*

Demostración. Por hipótesis, existen un continuo C, puntos $c_1, c_2 \in C$ y una función continua $H : X \times C \to X$ tal que $H(x, c_1) = x$ y $H(x, c_2) = r(x)$ para alguna retracción $r : Y \to X$. Además, $H(a,c) = a$ para cada $(a,c) \in A \times C$. Tenemos que demostrar que la función identidad en X/A es pseudo-homotópica a una función constante. Para esto, sea $q : X \to X/A$ la función identificación dada por

$$q(x) = \begin{cases} A & \text{si} \quad x \in A \\ \\ \{x\} & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

Definimos $F : X/A \times C \to X/A$ dada por

$$F(\mathbf{x}, c) = \begin{cases} A & \text{si} \quad \mathbf{x} = A \\ \\ q(H(q^{-1}(\mathbf{x}), c)) & \text{si} \quad \mathbf{x} \neq A \end{cases}$$

Se tiene que F es continua en $X/A \times C$. Además, se tiene que

$$F(\mathbf{x}, c_1) = \mathbf{x} \text{ si } \mathbf{x} = A \text{ y } F(\mathbf{x}, c_1) = q(H(q^{-1}(\mathbf{x}), c)) = q(H(y, c_1)) = q(y) = \mathbf{x} \text{ si } \mathbf{x} \neq A, \text{ donde } y = q^{-1}(\mathbf{x}).$$

Así, $F(\mathbf{x}, c_1) = id_{X/A}(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in X/A$. Por otra parte

$$F(\mathbf{x}, c_2) = A \text{ si } \mathbf{x} = A \text{ y } F(\mathbf{x}, c_2) = q(H(q^{-1}(\mathbf{x}), c)) = q(H(y, c_2)) = q(r(y)) = A \text{ si } \mathbf{x} \neq A,$$

ya que $r(y) \in A$ para todo $y \in X$. Luego, $F(\mathbf{x}, c_2) = A$ para cada $\mathbf{x} \in X/A$.

Tenemos así que la función identidad $id_{X/A}$ es pseudo-homotópica a la función constante $k(\mathbf{x}) = A$. Por lo tanto X/A es pseudo-contráctil. $\square$

Capítulo 7

Forma Trivial y pseudo-contractibilidad

Para comenzar este capítulo, daremos la definición concreta de la **forma** de un espacio topológico. Para ello se sabe de [4, p. 79] que para cada espacio métrico compacto Z existe un espacio AR M tal que $Z \subset M$. Ahora bien si X, Y son espacios métricos compactos y M, N son espacios AR tales que $X \subset M$ y $Y \subset N$, por una *sucesión fundamental* $\mathbf{f}$ de X en Y se entiende una sucesión de funciones continuas $\{f_k : M \to M\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que para cada vecindad V de Y en M existe una vecindad U de X en M tal que $f_k|_U \simeq f_{k+1}|_U$ en V para casi toda k (i.e. para toda k salvo un número finito de índices).

Denotemos esta sucesión fundamental $\mathbf{f}$ por $\{f_k; X, Y\}_{M,N}$. En particular, si $X = Y$ y $M = N$ y haciendo $f_k = id_M$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtenemos la sucesión fundamental $\mathbf{id}_{X,M} = \{id_M; X, X\}_{M,M}$ llamada *sucesión fundamental identidad* para X en M.

Si $\mathbf{f} = \{f_k; X, Y\}_{M,N}$ y $\mathbf{g} = \{g_k; Y, Z\}_{N,R}$ son dos sucesiones fundamentales definimos la *sucesión composición fundamental* de ellas por $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \{g_k \circ f_k; X, Z\}_{M,R}$

Decimos que dos sucesiones fundamentales $\mathbf{f} = \{f_k; X, Y\}_{M,N}$ y $\mathbf{f'} = \{f'_k; X, Y\}_{M,N}$ son *homotópicas* (lo cual denotamos por $\mathbf{f} \simeq \mathbf{f'}$), si para cada vecindad V de Y en N existe una vecindad U de X en M tal que $f_k|_U \simeq f'_k|_U$ en V para casi toda k

Por otra parte, si X, Y son espacios métricos compactos y M, N son espacios AR tales que $X \subset M$ y $Y \subset N$. Decimos que X *domina fundamentalmente a* Y, si existen dos sucesiones fundamentales $\mathbf{f} = \{f_k; X, Y\}_{M,N}$ y $\mathbf{g} = \{g_k; Y, X\}_{N,M}$ tales que $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} \simeq \mathbf{id}_{Y,N}$ y lo denotamos por $Y \leqslant_{\mathbf{F}} X$. Si además se cumple que $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} \simeq \mathbf{id}_{X,M}$, entonces se dice que X y Y son *fundamentalmente equivalentes* lo cual se denota por $X \simeq_{\mathbf{F}} Y$.

Se sabe que la relación $\simeq_{\mathbf{F}}$ es una relación de equivalencia sobre la familia de todos los espacios métricos compactos.

Definición 7.1. Sea X espacio métrico compacto y sea $\simeq_{\mathbf{F}}$ la relación de equivalencia en la familia de todos los espacios métricos compactos. A la clase de equivalencia que contiene a X se le llama *forma de* X y se denota por $Sh(X)$, es decir, $Sh(X) = \{Y \text{ métricos compacto} \mid X \simeq_{\mathbf{F}} Y\}$. Decimos que X tiene *forma trivial*, si la clase $Sh(X)$ consta de un sólo elemento, es decir, $Sh(X) = \{X\}$.

Para nuestro trabajo sólo tomaremos en cuenta a los espacios con forma trivial, concepto que relacionaremos con la noción de pseudo-contractibilidad.

Usaremos la siguiente caracterización dada por J. Krasinkiewicz en [16, Teorema 2.1, p. 237] sin dar la demostración, pues se escapa de los objetivos de este trabajo. Especialmente usaremos la caracterización 5.

Teorema 7.2. *Sea X un espacio métrico compacto, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X tiene forma trivial.*
2. *Si $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ donde X_n es ANR para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo entero positivo n existe $m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant n$ tal que f_m^n es homotópica a una función constante.*
3. *X es homeomorfo a $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$, donde X_n es ANR para toda $n \in \mathbb{N}$.*
4. *$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, donde X_n es ANR y $X_{n+1} \subset X_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*
5. *X es contráctil con respecto a cada espacio ANR.*
6. *Si $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ donde X_n es ANR para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces cada proyección $\pi_n : X \to X_n$ es homotópica a una función constante.*

Veamos primero el comportamiento de funciones pseudo-homotópicas en los espacios ANR.

Proposición 7.3. *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio ANR. Si $f, g \in C(X, Y)$ son pseudo-homotópicas, entonces son homotópicas.*

Demostración. Primero, por Teorema 2.13 el espacio $C(X, Y)$ es ANR. Luego por la Proposición 1.67, $C(X, Y)$ es localmente arco-conexo. Por el Teorema 1.51, cada componente de $C(X, Y)$ es arco-conexa.

De esta manera si $f, g \in C(X, Y)$ son tales que $f \simeq_* g$, entonces por el Teorema 3.21 existe un continuo C en $C(X, Y)$ tal que $f, g \in C$. Sea K_C la componente en $C(X, Y)$ que contiene a C. Luego $f, g \in K_C$. Dado que K_C es arco-conexo, existe un arco $A \subset K_C \subset C(X, Y)$ tal que $f, g \in A$. Se sigue del Teorema 3.29 que $f \simeq g$. □

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.4. *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio ANR. El espacio X es pseudo-contráctil con respecto a Y si y sólo si X es contráctil con respecto a Y.*

Demostración. Supongamos que X es pseudo-contráctil con respecto a Y, entonces por definición para toda $f \in C(X, Y)$ se tiene que $f \simeq_* \mathbf{a}$ para alguna $\mathbf{a} \in C(X, Y)$ constante. Luego por la Proposición 7.3 se tiene que $f \simeq \mathbf{a}$, por lo tanto X es contráctil con respecto a Y.

La suficiencia es inmediata. □

Corolario 7.5. *Sea X un espacio ANR. Entonces, X es pseudo-contráctil si y sólo si X es contráctil.*

Este último corolario nos dice que en los espacios ANR la pseudo-contractibilidad y la contractibilidad son equivalentes. De aquí, como S^1 es ANR y S^1 no es contráctil, entonces este no es pseudo-contráctil.

Corolario 7.6. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, X tiene forma trivial si y sólo si X es pseudo-contráctil con respecto a cada espacio ANR.*

Proposición 7.7. *Sean Y un espacio ANR y X un espacio métrico compacto pseudo-contráctil con respecto a Y. Entonces, Y es arco-conexo si y sólo si $C(X,Y)$ es arco-conexo.*

Demostración. Por hipótesis y de la Proposición 7.4 , se tiene que X es contráctil con respecto Y, es decir, toda función en $C(X,Y)$ es homotópica a una función constante.

Supongamos que Y es arco-conexo. Sean $f,g \in C(X,Y)$. Como X es contráctil con respecto Y, se tiene que $f \simeq \mathbf{a}$ y $g \simeq \mathbf{b}$ con $\mathbf{a},\mathbf{b} \in C(X,Y)$ funciones constantes. Como Y es arco-conexo, entonces por el Teorema 3.31, $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$. Así, $f \simeq g$. Por el Corolario 3.30, el espacio $C(X,Y)$ es arco-conexo.

Recíprocamente, si $C\ (X,Y)$ es arco-conexo, entonces por el Corolario 3.30 se tiene que $f \simeq g$ para todas $f,g \in C(X,Y)$. En particular $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$ para todas las funciones constantes. El Teorema 3.31 implica que Y es arco-conexo. $\square$

Uno de los objetivos de este capítulo es de determinar cuando un espacio es o no pseudo-contráctil. Para el resto de éste trabajo a menos que se especifique otra cosa los espacios con los que trabajaremos serán continuos. Para nuestro objetivo damos la siguiente definición.

Definición 7.8. Sean X,Y espacios métricos, $\varepsilon > 0$ y $f \in C(X,Y)$. Diremos que f es una *ε-función* si es suprayectiva y $diam(f^{-1}(y)) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$.

Se sabe lo siguiente para continuos.

Teorema 7.9. *[9, Teorema 1, p. 1308] Sea X un continuo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X tiene forma trivial.*
2. $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, *donde X_n es un continuo contráctil y $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*
3. *X puede ser escrito como límite inverso de continuos contráctiles.*
4. *Para toda $\varepsilon > 0$, existe un continuo contráctil Y_ε y una ε-función f_ε de X sobre Y_ε.*

De los Teoremas 7.2 y 7.9 se tiene lo siguiente con respecto a pseudo-contractibilidad.

Teorema 7.10. **Si X es un continuo pseudo-contráctil, entonces los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *X tiene forma trivial.*
2. *X puede escribirse como $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$, donde X_n es un continuo contráctil y $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*
3. *X puede ser escrito como límite inverso de continuos contráctiles.*
4. *Para toda $\varepsilon > 0$, existe un continuo contráctil Y_ε y una ε-función f_ε de X sobre Y_ε.*

5. *Si* $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *donde* X_n *es ANR para toda* $n \in \mathbb{N}$*, entonces para todo entero positivo* n *existe* $m \in \mathbb{N}$ *con* $m \geqslant n$ *tal que* f_m^n *es homotópica a una función constante.*

6. X *es homeomorfo a* $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$*, donde* X_n *es ANR para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

7. $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$*, donde* X_n *es ANR y* $X_{n+1} \subset X_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$

8. X *es contráctil con respecto a cada espacio ANR.*

9. *Si* $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *donde* X_n *es ANR para toda* $n \in \mathbb{N}$*, entonces cada proyección* $\pi_n : X \to X_n$ *es homotópica a una función constante.*

Demostración. Por el teorema anterior es suficiente demostrar que X tiene forma trivial.

Como X es pseudo-contráctil, entonces por el Teorema 5.5 (2), X es pseudo-contráctil con respecto a cualquier espacio, en particular con respecto a cada espacio ANR. Se sigue entonces del Corolario 7.6 que X tiene forma trivial. $\square$

Notemos que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 7.11. Se sabe que el continuo $sen(1/x)$ es el límite inverso de arcos, que como se sabe son contráctiles. Sin embargo no es pseudo-contráctil. Por otra parte observemos que si $Y \approx_P^E sen(1/x)$, entonces Y no es pseudo-contráctil, por el Corolario 6.12.

Como vimos la no pseudo-contractibilidad del continuo S^1 se determinó usando el hecho de que este es un espacio ANR. Notemos que si $X \approx_P^E S^1$, entonces X no es pseudo-contráctil. Los siguientes continuos son algunos ejemplos de continuos no pseudo-contráctiles porque todos ellos tienen el mismo tipo de homotopía que S^1. Es importante notar aquí que S^1 es un espacio ANR.

Ejemplo 7.12. Sea $A = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$. Entonces $A \approx^E S^1$.

Demostración. En efecto, sean

$$g : S^1 \to A \text{ dada por } g(s) = s \text{ y } f : A \to S^1 \text{ dada por } f(a) = \frac{a}{\parallel a \parallel}.$$ Notemos que f y g son continuas.

Por un lado, tenemos que

$$(f \circ g)(s) = f(g(s)) = f(s) = \frac{s}{\parallel s \parallel} = s. \text{ Así, } f \circ g = id_{S^1} \simeq id_{S^1},$$

Y por otro lado,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g\left(\frac{a}{\parallel a \parallel}\right) = \frac{a}{\parallel a \parallel}.$$

Definimos

$$H : A \times I \to A \text{ dada por } H(a, t) = ta + (1 - t)\left(\frac{a}{\parallel a \parallel}\right).$$ Tenemos que H es continua, además

$$H(a,0) = \frac{a}{\| a \|} = (g \circ f)(a) \text{ y } H(x,1) = a = id_A(a). \text{ Por lo tanto, } g \circ f \simeq id_A.$$

Así, $A \approx^E S^1$. Luego $A \approx_p^E S^1$. De donde A no es pseudo-contráctil. $\square$

Ejemplo 7.13. Sea $T = S^1 \times D^2$. Entonces $T \approx^E S^1$.

Demostración. Sean $y \in D^2$ fijo. Definamos las siguientes funciones continuas.

$$f : S^1 \to S^1 \times D^2 \text{ dada por } f(s) = (s,y), \quad g : S^1 \times D^2 \to S^1 \text{ dada por } g(s,d) = s,$$

$$\text{y } H : (S^1 \times D^2) \times I \to (S^1 \times D^2) \text{ dada por } H((s,d),t) = (s, ty + (1-t)d).$$

Nótese que $(f \circ g)(s,d) = f(g(s,d)) = f(s) = (s,y)$. Además

$$H((s,d),0) = (s,d) = id_{S^1 \times D^2}(s,d) \text{ y } H((s,d),1) = (s,y) = (f \circ g)(s,d) \text{ para todo } (s,d) \in S^1 \times D^2.$$

Por lo tanto $f \circ g \simeq id_{S^1 \times D^2}$. Por otra parte se tiene que

$$(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(s,y) = s = id_{S^1}(s), \text{ es decir, } g \circ f = id_{S^1} \simeq id_{S^1}.$$

Teniendo así, que $T \approx^E S^1$. Luego $T \approx_P^E S^1$. Por lo tanto, T no es pseudo-contráctil. $\square$

En los dos ejemplos anteriores mostramos la existencia de las funciones f y g para poder aplicar la definición del mismo tipo de homotopía, lo cual resultó agradable en el sentido de que pudimos mostrar las homotopías correspondientes, obteniendo así el mismo tipo de homotopía, luego el mismo tipo de pseudo-homotopía.

Notemos que el Corolario 6.12 y el Teorema 7.10 garantizan que si X es un continuo que no tiene forma trivial y si Y es cualquier continuo tal que $X \approx_P^E Y$, entonces Y no es pseudo-contráctil.

Capítulo 8

Propiedad b) y pseudo-contractibilidad.

Consideremos al continuo S^1 determinado de la siguiente forma en el plano complejo.

$$S^1 = \{\ z \in \mathbb{C} \mid z = e^{it},\ t \in \mathbb{R}\ \},\text{ donde } e^{it} = (cos(t), sen(t)).$$

Primero observemos lo siguiente. Si $f \in C(X, S^1)$, entonces $f(x) \in \mathbb{C}$ para toda $x \in X$. De esta manera podemos usar la multiplicación en los complejos $\mathbb{C}$ para definir una operación binaria $*$ en $C(X, S^1)$ de la siguiente forma

$$* : C(X, S^1) \times C(X, S^1) \to C(X, S^1) \text{ dada por } *(f, g) = f \centerdot g$$

$$\text{donde } f \centerdot g : X \to S^1 \text{ es tal que } (f \centerdot g)(x) = f(x)g(x) \text{ para cada } x \in X.$$

Con esta operación, $(C(X, S^1), *)$ forma un grupo multiplicativo abeliano, denotamos por $\mathbf{1}$ al elemento neutro en $C(X, S^1)$.

Definición 8.1. Sea X un espacio topológico y $f \in C(X, S^1)$. Decimos que f es *equivalente a* $\mathbf{1}$ en un conjunto $A \subset X$ si existe una función continua $\phi : A \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = e^{i\phi(x)}$ para cada $x \in A$. En tal caso lo denotamos por $f \sim \mathbf{1}$ en A.

Veamos como está representado $\mathbf{1}$ en $C(X, S^1)$. Se sabe de la teoría de grupos que $\mathbb{C}$ es un grupo multiplicativo, cuyo elemento neutro es $(1, 0)$ y como S^1 es un subgrupo de $\mathbb{C}$, entonces $(1, 0) \in S^1$. Por lo tanto tenemos que la función $\mathbf{1} : X \to S^1$ está dada por $\mathbf{1}(x) = (1, 0)$ para toda $x \in X$.

Se sabe de [18, Teorema 3, p. 426] el siguiente resultado.

Teorema 8.2. *(Teorema de Eilenberg.) Sea X un espacio topológico y $f \in C(X, S^1)$. Entonces $f \sim \mathbf{1}$ si y sólo si f es homotópica a $\mathbf{1}$.*

Proposición 8.3. *Sea X espacio métrico compacto y $f \in C(X, S^1)$. Si f es una función constante en X, entonces $f \simeq \mathbf{1}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.2, se tiene que S^1 es homeomorfo a $W = \{\ f \in C(X, S^1) \mid f \text{ es constante }\}$. Sea $\Psi : S^1 \to W$ el homeomorfismo entre S^1 y W, tal que $\Psi(s) = f_s$ para cada $s \in S^1$, donde $f_s : S^1 \to S^1$ está dada por $f_s(z) = s$ para todo $z \in S^1$. Sea $f_0 \in W$ dada por $f_0(x) = e^{it_0}$ para toda $x \in X$ y algún $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Como S^1 es arco-conexo, entonces existe un arco $A \subset S^1$ tal que $(1,0), e^{it_0} \in A$. Sea $\phi : [0,1] \to A$ el homomorfismo entre $[0,1]$ y A tal que $\phi(0) = e^{it_0}$ y $\phi(1) = (1,0)$. Definimos $\psi : [0,1] \to W$ como $\psi(k) = (\Psi \circ \phi)(k)$ para toda $k \in [0,1]$. Claramente ψ es un homeomorfismo entre $[0,1]$ y su imagen $\psi([0,1])$. Además

$$\psi(0) = (\Psi \circ \phi)(0) = \Psi(\phi(0)) = \Psi(e^{it_0}) = f_0 \ \text{ y } \ \psi(1) = (\Psi \circ \phi)(1) = \Psi(\phi(1)) = \Psi((1,0)) = \mathbf{1}.$$

Por lo anterior, existe un arco $B \subset W$ tal que $f_0, \mathbf{1} \in B$. Por tanto B es un arco en $C(X,S^1)$ tal que $f_0, \mathbf{1} \in B$. Se sigue del Teorema 3.29 que $f_0 \simeq \mathbf{1}$. □

De lo anterior $W \subset [\mathbf{1}]$, donde $[\mathbf{1}] = \{f \in C(X,S^1) |\ f \simeq \mathbf{1}\}$. Una pregunta obvia sería. ¿Si $f \simeq \mathbf{1}$, entonces f es constante? Se sabe que el continuo $I = [0,1]$ es contráctil, entonces I es contráctil con respecto a cualquier espacio en particular con respecto a S^1. Así, se tiene que para toda $f \in C(I,S^1)$, $f \simeq \mathbf{a}$ para alguna $\mathbf{a} \in C(I,S^1)$ constante. De la Proposición 8.3, se tiene que $\mathbf{a} \simeq \mathbf{1}$. Por lo tanto, $f \simeq \mathbf{1}$ para toda $f \in C(I,S^1)$. Sea $h : I \to S^1$ dada por $h(t) = e^{it/2}$ para toda $t \in I$, se tiene que h es continua y no es constante, sin embargo $h \simeq \mathbf{1}$. Por lo tanto la respuesta a la pregunta anterior es no.

Definamos lo siguiente que será de gran utilidad para seguir con nuestro estudio en relación a la pseudo-contráctibildad de un espacio topológico.

Definición 8.4. Sea X un espacio topológico. Decimos que X *tiene la propiedad b)*, si para cada $f \in C(X,S^1)$ existe una función $g : X \to \mathbb{R}$ continua, tal que $f = e^{ig}$. A la función g se le llama *levantamiento* de f.

Tenemos así el siguiente resultado.

Teorema 8.5. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, X es contráctil con respecto a S^1 si y sólo si X tiene la propiedad b).*

Demostración. Supongamos que X es contráctil con respecto a S^1 y sea $f \in C(X,S^1)$. Entonces $f \simeq \mathbf{a}$ donde $\mathbf{a} \in C(X,S^1)$ es constante. Por la Proposicón 8.3, se tiene que $\mathbf{a} \simeq \mathbf{1}$, luego por la transitividad de la relación $\simeq$ se sigue que $f \simeq \mathbf{1}$. Por el Teorema 8.2, se tiene que $f \sim \mathbf{1}$, es decir, existe $\phi : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = e^{i\phi(x)}$ para toda $x \in X$. En resumen, se tiene que para toda $f \in C(X,S^1)$ existe $\phi_f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f = e^{i\phi_f}$. Por lo tanto X tiene la propiedad *b)*.

Recíprocamente, supongamos que X tiene la propiedad *b)* y sea $f \in C(X,S^1)$, entonces existe $\psi : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f = e^{i\psi}$. Definimos

$$H : X \times I \to S^1 \ \text{ dada por } \ H(x,t) = e^{it\psi(x)} \ \text{ para toda } \ (x,t) \in X \times I$$

H es continua por ser composición de funciones continuas, y además

$$H(x,0) = e^{0i} = (1,0) = \mathbf{1}(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = e^{i\psi(x)} = f(x) \ \text{ para toda } \ x \in X$$

Por lo tanto $f \simeq \mathbf{1}$. □

Del hecho de que S^1 es un ANR y de la pseudo-contractibilidad con respecto a, podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 8.6. *Sea X un espacio métrico compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es pseudo-contráctil con respecto a S^1.*

2. *X es contráctil con respecto a S^1.*

3. *X tiene la propiedad b).*

4. *$C(X, S^1)$ es arco-conexo.*

Demostración. Dado que S^1 es ANR, la equivalencia 1)⇔2) se sigue de la Proposición 7.4.
2)⇔3) se sigue del Teorema 8.5.
4)⇒2). Sea $f \in C(X, S^1)$. Como $C(X, S^1)$ es arco-conexo, entonces por el Corolario 3.30, $f \simeq g$ para toda $g \in C(X, S^1)$, en particular, para g constante. Por lo tanto X es contráctil con respecto a S^1.
2)⇒4). Se sigue de la Proposición 7.7, ya que S^1 es arco-conexo. □

Veamos ahora las relaciones que se dan con respecto a la pseudo-contractibilidad y la propiedad *b)* cuando el espacio es un continuo.

Teorema 8.7. **Sea X un continuo. Si X es pseudo-contráctil, entonces X tiene la propiedad b).*

Demostración. Como X es pseudo-contráctil, se sigue del Teorema 5.5 que es pseudo-contráctil con respecto a cualquier espacio, en particular, con respecto a S^1. Así, del Corolario 8.6 se tiene que X tiene la propiedad *b)*. □

Notemos que si X no tiene la propiedad *b)*, entonces todo espacio Y tal que $Y \approx_P^E X$ no es pseudo-contráctil.

Para nuestro siguiente resultado respecto a la pseudo-contractibilidad (Corolario 8.11), primero veamos la siguiente definición.

Definición 8.8. Sea X un continuo. Decimos que X es *unicoherente*, si para cualesquiera A, B subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si cada subcontinuo de X es unicoherente.

Lema 8.9. *Sea D espacio topológico. Si D es conexo y $\phi_1, \phi_2 : D \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $e^{i\phi_1(x)} = e^{i\phi_2(x)}$ para cada $x \in D$, entonces existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi_1(x) - \phi_2(x) = 2k\pi$ para cada $x \in D$.*

Demostración. Sea $x \in D$. Entonces $e^{i(\phi_1(x) - \phi_2(x))} = \mathbf{1}$ luego $cos(\phi_1(x) - \phi_2(x)) = 1$ y $sen(\phi_1(x) - \phi_2(x)) = 0$. Por lo tanto existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi_1(x) - \phi_2(x) = 2k\pi$. □

Teorema 8.10. *Todo continuo X con la propiedad b) es unicoherente.*

Demostración. Sea X un espacio conexo que tiene la propiedad *b)*. Supongamos que X no es unicoherente. Entonces existen $A, B \subset X$ cerrados conexos tales que $X = A \cup B$ con $A \cap B$ disconexo. Entonces existen $F_1, F_2 \subset X$ cerrados ajenos no vacíos tales que $A \cap B = F_1 \cup F_2$. Definimos $\varphi : X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\varphi(x) = \pi \cdot \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)} \text{ y } f : X \to S^1 \text{ dada por}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\varphi(x)} & \text{si} \quad x \in A \\ \\ e^{-i\varphi(x)} & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Notemos que si $x \in A \cap B = F_1 \cup F_2$, entonces $x \in F_1$ o bien $x \in F_2$. Si $x \in F_1$, entonces $\varphi(x) = 0$ y si $x \in F_2$, entonces $\varphi(x) = \pi$. Así, $e^{i\varphi(x)} = e^{-i\varphi(x)}$ para toda $x \in A \cap B$. Por el Lema del Pegado f es continua en X. Como X tiene la propiedad *b)*, entonces existe una función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\phi(x)}$ para cada $x \in X$ esto implica que $f(x) = e^{i\phi(x)} = e^{i\varphi(x)}$ para cada $x \in A$ y $f(x) = e^{i\phi(x)} = e^{-i\varphi(x)}$ para cada $x \in B$. Como A y B son conexos, entonces por el Lema 8.9 se tiene que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\varphi(x) = \phi(x) + 2k_1\pi \;\text{ en } A \;\text{ y }\; -\varphi(x) = \phi(x) + 2k_2\pi \;\text{ en } B$$

Por lo tanto, $\varphi(x) = \pi(k_1 - k_2)$ en $A \cap B$ lo cual es una contradicción. Luego $A \cap B$ es conexo. Por lo tanto X es unicoherente. □

Corolario 8.11. **Sea X un continuo. Si X es pseudo-contráctil, entonces es unicoherente.*

Demostración. Del Teorema 8.7 se tiene que X tiene la propiedad *b)* y del Teorema 8.10 que X es unicoherente. □

Ejemplo 8.12. Esto da otra forma de ver que el espacio S^1 no es pseudo-contráctil diferente a la descrita en el comentario posterior al Corolario 7.5. El espacio S^1 no es pseudo-contráctil, ya que no es unicoherente (ver la Figura 8.1).

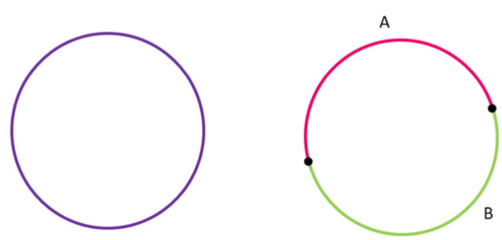

Figura 8.1: Espacio S^1 no unicoherente

Notemos que si X no es unicoherente, entonces todo espacio Y tal que $Y \approx_P^E X$ no es pseudo-contráctil.

Definición 8.13. Un continuo X es *acíclico* si $\check{H}(X, \mathbb{Z}) = 0$; es decir, el primer grupo de cohomología de Čech con coeficientes enteros es trivial.

Por [11, Teorema 8.1 p. 226], un continuo con la propiedad *b)* es acíclico. Como consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Corolario 8.14. **Sea X un continuo. Si X es pseudo-contráctil, entonces X es acíclico.*

Así, si X es un continuo no acíclico, entonces cada espacio Y tal que $Y \approx_P^E X$ no es pseudo-contráctil.

Capítulo 9

Propiedades que se implican bajo la pseudo-contractibilidad en continuos.

Como se vio al final de los preliminares la forma de como se clasificaron los continuos en función de limites inversos o por medio de cadenas, teniendo así los conceptos de continuos tipo arco, tipo círculo o bién encadenables, circularmente encadenables respectivamente. Damos a continuación definiciones de otra clasificación de los continuos. Aclaramos que para nuestros fines solo haremos uso de las siguientes definiciones.

Definición 9.1. Una *gráfica* es un continuo el cual puede ser escrito como unión de un número finito de arcos donde cualesquiera dos son ajenos o se intersectan solamente en sus puntos finales.

Definición 9.2. Un *árbol* o una *gráfica acíclica* es una gráfica la cual no contiene curvas cerradas simples.

Definición 9.3. Sea X un continuo.

1. X es *como un arco* si para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-función de X sobre el intervalo unitario I.

2. X es *como un círculo* si para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-función de X sobre S^1.

3. Un continuo como un círculo que no es como un arco, es llamado *como un círculo propio.*

4. X es *como un árbol* si para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-función de X sobre un árbol T_ε.

Los siguientes teoremas sólo se citarán.

Teorema 9.4. *[21, Teorema 2.4.22, p. 114] Sea X un continuo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es encadenable.*

2. *X es tipo arco.*

3. *X es como un arco.*

Teorema 9.5. *[21, Teorema 2.5.8, p. 120] Sea X un continuo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es circularmente encadenable.*
2. *X es tipo círculo.*
3. *X es como un círculo.*

Tenemos así el siguiente resultado con respecto a la pseudo-contractibilidad de un continuo, el cual sólo citaremos.

Proposición 9.6. *[24, Corolario 3, p. 2986] El único continuo encadenable salvo homeomorfismos pseudo-contráctil es el arco.*

Es de notar hasta el momento que la pseudo-contractibilidad de un espacio implica ciertas propiedades topológicas como por ejemplo, ser conexo por continuos o tener forma trivial o simplemente si el espacio no es pseudo-contráctil, entonces los espacios homotópicamente equivalentes no lo son también. Para seguir obteniendo resultados acerca de la pseudo-contractibilidad nos apoyamos en la siguiente definición.

Definición 9.7. Sean X, Y espacios topológicos y $f \in C(X,Y)$. Diremos que f es *(pseudo)-esencial*, siempre que f no sea (pseudo)-homotópica a cada función constante de X en Y. Diremos que $f \in C(X,Y)$ es *(pseudo)-inesencial* si f no es (pseudo)-esencial.

Tenemos así, la siguiente observación.

Obsevación 9.8. Sean X, Y espacios topológicos.

1. Sea $f \in C(X,Y)$. La función f es pseudo-esencial (esencial) si y sólo si $[f]_*$ ($[f]$) no contiene funciones constantes.
2. X es (pseudo)-contráctil con respecto a Y si y sólo si toda función $f : X \to Y$ es (pseudo)-inesencial.
3. Si X es métrico compacto y Y es ANR, entonces las definiciones de función pseudo-esencial y esencial coinciden, por la Proposición 7.3.

Los siguientes dos resultados nos serán de gran ayuda para después obtener un resultado relacionado con la pseudo-contractibilidad.

Teorema 9.9. *[17, Teorema 3.1, p. 158] Si X es un continuo como un círculo y para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-función de X en S^1 la cual es inesencial, entonces X es como un arco.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $f : X \to S^1$ una ε-función inessencial. De [18, Teorema 3, p. 426] existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{ig(x)}$ para cada $x \in X$. Notemos que $g(X)$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ debido a que X es compacto y conexo. Además se tiene que $g : X \to g(X)$ es una ε-función. Si h es un homeomorfismo de $g(X)$ sobre I, entonces $h \circ g$ es la ε-función buscada. Es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-función $h \circ g$ de X sobre I. Por lo tanto, X es como un arco. □

La demostración del siguiente corolario se sigue por la contra recíproca del Teorema 9.9.

Corolario 9.10. *[17, Corolario 3.2, p.158] Si X es un continuo como un círculo propio, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que cada ε-función de X en S^1 es esencial.*

Tenemos así, el siguiente teorema que permite construir más continuos no pseudo-contráctiles.

Teorema 9.11. *Si X es un continuo como un círculo propio, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Demostración. Por el Corolario 9.10, se tiene que existe una ε-función $f : X \to S^1$ esencial. Dado que S^1 es un espacio ANR se sigue de la Observación 9.8 (3) que f es pseudo-esencial. Así, f no es pseudo-homotópica a ninguna función constante de X en S^1. De donde X no es pseudo-contráctil con respecto a S^1. Luego del Teorema 7.10 (8) se tiene que X no es pseudo-contráctil. □

Como nos hemos dado cuenta el estudio de la pseudo-contractibilidad de un espacio topológico se ha desarrollado en espacios en general, en espacios de Hausdorff, en métricos compactos, en métricos separables, en ANR's y así hasta llegar a continuos. Pasamos ahora a una clase especial de continuos llamados curvas, para esto se darán las definiciones pertinentes para dar seguimiento al trabajo. Se citarán algunos resultados sobre la teoría de continuos los cuales no se demostrarán, para no desviar la atención al tema.

Definición 9.12. Sea X un espacio métrico separable y $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Denotamos la dimensión de X por $dim(X)$ y si $p \in X$, denotamos la dimensión de p en X como $dim_p(X)$. Se define la dimensión del espacio X de manera inductiva de la siguiente forma:
Se define $dim(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$.
Asumiremos inductivamente que hemos definido $dim_p(X) \leqslant n-1$ y $dim(X) \leqslant n-1$ para algún $n \geqslant 0$. Entonces definimos $dim_p(X) \leqslant n$ si p tiene un sistema local de vecindades abiertas pequeñas cuyas fronteras tienen $dim \leqslant n-1$ y definimos $dim(X) \leqslant n$ si $dim_p(X) \leqslant n$ para cada $p \in X$.
Ahora definimos $dim_p(X) = n$ si y sólo si $dim_p(X) \leqslant n$ y $dim_p(X) \nleqslant n-1$. Y $dim(X) = n$ si y sólo si $dim(X) \leqslant n$ y $dim(X) \nleqslant n-1$.

A los continuos de dimensión uno los llamaremos *unidimensionales* o *curvas.*

De [16, Teorema 2.1, p. 237] se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.13. *Sea X una curva. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X tiene forma trivial.*
2. *Si $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ donde X_n es ANR para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo entero positivo n existe $m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant n$ tal que f_m^n es homotópica a una función constante.*
3. *X es homeomorfo a $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$, donde X_n es ANR para toda $n \in \mathbb{N}$.*
4. *$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, donde X_n es ANR y $X_{n+1} \subset X_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$*
5. *X es contráctil con respecto a cada espacio ANR.*

6. *Si* $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *donde* X_n *es ANR para toda* $n \in \mathbb{N}$*, entonces cada proyección* $\pi_n : X \to X_n$ *es homotópica a una función constante.*

7. X *es contráctil con respecto* G *para cada gráfica* G*.*

8. X *es como un árbol.*

9. $X = \varprojlim\{T_n, f_n^{n+1}\}$*, donde para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* T_n *es un árbol y* f_n^{n+1} *es suprayectiva.*

Para la prueba del Teorema 9.15 consideremos el siguiente resultado.

Teorema 9.14. *[21, Corolario 2.1.26, p. 81] Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *una sucesión inversa de continuos hereditariamente unicoherentes. Si* X_∞ *es el límite inverso de* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$*, entonces* X_∞ *es un continuo hereditariamente unicoherente.*

Teorema 9.15. *Si* X *es una curva pseudo-contráctil, entonces es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Por el Teorema 7.10, X tiene forma trivial. Del Teorema 9.13 (9), $X = \varprojlim\{T_n, f_n^{n+1}\}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$, T_n es un árbol y f_n^{n+1} es suprayectiva. Como cada árbol es hereditariamente unicoherente, se tiene del Teorema 9.14 que X es hereditariamente unicoherente. □

De acuerdo al Teorema 9.15 los continuos en las Figuras 9.1, 9.2 y 9.3 son curvas que no pseudo-contráctiles, debido a que todos ellos no son hereditariamente unicoherentes.

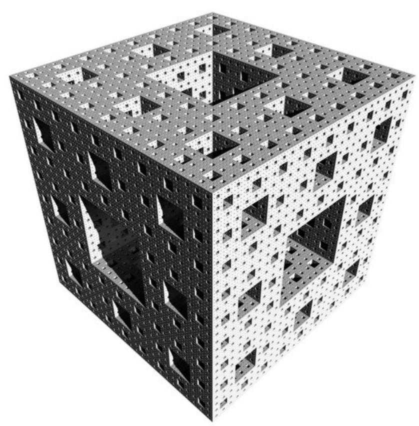

Figura 9.1: Esponja de Menger

En general, si X es una curva que no es hereditariamente unicoherente, entonces todo espacio Y tal que $Y \approx_P^E X$ no es pseudo-contráctil.

Definición 9.16. Sea X un continuo.

1. X es un *dendroide* si es arco-conexo y hereditariamente unicoherente.

2. X es una *dendrita* si X es un dendroide localmente conexo.

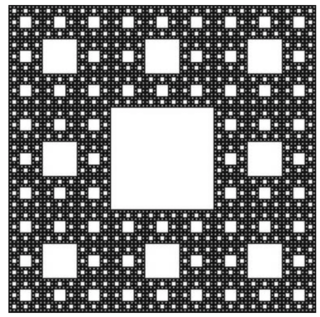

Figura 9.2: Carpeta de Sierpinski

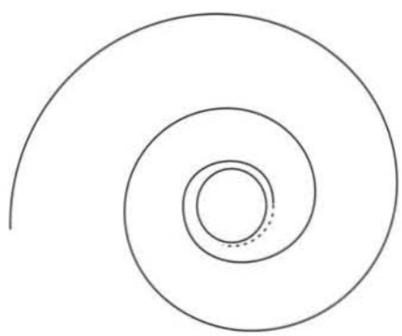

Figura 9.3: Espiral con residuo una circunferencia

3. X es *descomponible* si se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios.

4. X es *indescomponible* si X no es descomponible.

5. X es *hereditariamente descomponible* si cada subcontinuo no degenerado de X es descomponible.

6. X es un λ-*dendroide* si es hereditariamente unicoherente y hereditariamente descomponible.

Uno de los ejemplos más importantes en la teoría de los continuos es el continuo conocido como *pseudo-arco*, este espacio fue construido por primera vez por Knaster en 1922, como ejemplo de un continuo en el plano que es hereditariamente indescomponible. En 1948, Moise construyó un continuo del plano tal que todos sus subcontinuos no degenerados son homeomorfos a él. En 1951, Bing demostró que los ejemplos de Knaster y Moise eran homeomorfos, demostrando una caracterización del pseudo-arco: él es *el único continuo encadenable y hereditariamente indescomponible*. Por lo tanto, de la Proposición 9.5 se tiene que en particular el pseudo-arco no es pseudo-contráctil.

Es siguiente resultado se puede consultar en [21, Corolario 2.6.34, p. 137]

Teorema 9.17. *Todo continuo X hereditariamente descomponible es una curva.*

Corolario 9.18. *Sea X un continuo hereditariamente descomponible. Si X es pseudo-contráctil, entonces X es un λ-dendroide.*

Demostración. Del Teorema 9.17, tenemos que X es una curva. Ahora bien, como X es pseudo-contráctil, entonces por el Teorema 9.15, X es hereditariamente unicoherente. Se sigue de la Definición 9.16 6) que X es un λ-dendroide. $\square$

El recíproco no es cierto, para esto basta tomar el continuo $sen(1/x)$ el cual es un λ-dendroide. Sin embargo, se sabe por [10, Teorema 1, p. 365] o [24, Corolario 5 p. 2987] que no es pseudo-contráctil.

Obsevación 9.19. De la Observación 9.8 inciso 2) se sabe que, si una función $f : X \to Y$ es esencial y Y es un espacio ANR, entonces el espacio X no es pseudo-contráctil. Como S^1 es ANR, para demostrar la no pseudo-contractibilidad de algún espacio X, bastaría con mostrar la existencia de una función $f : X \to S^1$ esencial.

Para nuestro siguiente resultado sobre la pseudo-contractibilidad daremos la definición de espacio homogéneo, y citaremos unos resultados necesarios para este fin.

Definición 9.20. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *homogéneo* si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Teorema 9.21. *[14, Teorema 1, p. 856] Sea X un continuo. Si X es homogéneo y hereditariamente unicoherente, entonces X es indescomponible*

Teorema 9.22. *[7, Teorema 1, p. 74] Sea X una curva. Entonces, X es como un árbol si y sólo si cada función continua $f : X \to S^1$ es inesencial.*

Lema 9.23. *Si X es una curva descomponible homogénea, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Demostración. Notemos primero que X no es como un árbol. Si lo fuera, de la definición de como un árbol y del Teorema 9.14, sería hereditariamente unicoherente, y como por hipótesis X es homogéneo, entonces por el Teorema 9.21, tendríamos que X es indescomponible, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X no es como un árbol. Así del Teorema 9.22, existe $f : X \to S^1$ función esencial. Por lo tanto, de la Observación 9.19 X no es pseudo-contráctil. $\square$

Otra forma de parafrasear el resultado anterior es como sigue.

Obsevación 9.24. *Si X es una curva homogénea pseudo-contráctil, entonces X es indescomponible.*

Se sabe de [3, Teorema 10, p. 181] que cada círculo de pseudo-arcos es homogéneo y que cualesquiera dos de ellos son homeomorfos. Como, el círculo de pseudo-arcos es una curva homogénea descomponible, entonces por el Teorema 9.23 no es pseudo-contráctil.

Teorema 9.25. *Si X es un continuo homogéneo hereditariamente descomponible, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Demostración. Del Teorema 9.17, tenemos que X es una curva. Como por hipótesis X es hereditariamente descomponible, entonces es descomponible. Se sigue del Lema 9.23 que X no es pseudo-contráctil. $\square$

Como consecuencia del Teorema 9.25, tenemos lo siguiente.

Obsevación 9.26. *Sea X un continuo.*

1. *Si X es hereditariamente descomponible pseudo-contráctil, entonces X no es homogéneo.*

2. *Si X es homogéneo pseudo-contráctil, entonces X no es hereditariamente descomponible; es decir, existe un subcontinuo K en X que es indescomponible.*

Definición 9.27. Sea X un continuo. Decimos que X es *hereditariamente equivalente* si todo subcontinuo no degenerado de X es homeomorfo a X.

Proposición 9.28. *Sea X un continuo. Si X es homogéneo, hereditariamente equivalente y pseudo-contráctil, entonces X es indescomponible.*

Demostración. Como X es hereditariamente equivalente, se sabe de [21, Corolario 2.6.39 p. 138] que cada continuo hereditariamente equivalente es una curva. Por lo tanto, se tiene que X es una curva homogénea pseudo-contráctil. Luego de la Observación 9.24, se tiene que X es indescomponible. $\square$

Definición 9.29. Sea X un espacio métrico. X es *uniformemente arco-conexo*, si es arco-conexo y para toda $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que cada arco A en X contiene k puntos $a_0, a_1, ..., a_k$ con la propiedad de que $A = \bigcup_{i=0}^{k-1} a_i a_{i+1}$ y $diám(a_i a_{i+1}) < \varepsilon$ para cada $i = 0, 1, ..., k-1$.

La notación $a_i a_{i+1}$ representa el arco que contiene como puntos finales a a_i y a_{i+1}.

Teorema 9.30. *Todo dendroide contráctil es uniformemente arco-conexo.*

Demostración. Como X un dendroide contráctil, existen un punto $c \in X$ y una función continua $H : X \times I \to X$ que cumple $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = c$ para cada $x \in X$.

Sean $x \in X$ y $D_x = \{H(x,t) \in X \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ para cada $x \in X$. Notemos que $x \in D_x$ y $c \in D_x$ para cada $x \in X$. Además se tiene que como D_x es la imagen continua de $[0,1]$ es un subcontinuo localmente conexo. Como cada subcontinuo de un dendroide es un dendroide, entonces D_x es un dendroide localmente conexo; esto es, D_x es una dendrita. Como todo continuo localmente conexo es arco-conexo (ver [22, Teorema 8.23 p. 130]), entonces D_x es arco-conexo. Así, existe un arco cx en D_x. Nótese que $X = \bigcup_{x \in X} D_x$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i = 0, 1, ..., n-1$ definimos $D_x^i = \left\{H(x,t) \in X \mid \frac{i}{n} \leqslant t \leqslant \frac{i+1}{n}\right\}$. De igual forma D_x^i es una dendrita para cada $i = 0, 1, ..., n-1$ y $D_x = \bigcup_{i=0}^{n-1} D_x^i$ para cada $x \in X$.

Para probar que X es uniformemente arco-conexo, sea $\varepsilon > 0$. Como H es uniformemente continua, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in X$ y para toda $n \geqslant k$ y para cada $i = 0, 1, ..., n-1$ se tiene que $\textit{diám}(D_x^i) < \varepsilon$.

Sea $A = ab$ un arco en X. Como X es un dendroide, se tiene que A está contenido en la unión de los arcos ac y bc, es decir, $A \subseteq (ac) \cup (bc)$. Dado que $ac \subseteq D_a$ y $bc \subseteq D_b$, tomemos $n = k$. De aquí, $A \subset \bigcup_{i=0}^{k-1} (D_a^i \cup D_b^i)$. Por lo que podemos escribir

$$A = \bigcup_{i=0}^{k-1} \left((A \cap D_a^i) \cup (A \cap D_b^i)\right).$$

Dado que X es hereditariamente unicoherente, tenemos que $A \cap D_a^i$ y $A \cap D_b^i$ son arcos (un punto ó vacío). Así tenemos que A es la unión de a lo más $2k$ subarcos de la forma $A \cap D_a^i$ o bién $A \cap D_b^i$ tales que $\textit{diám}(A \cap D_a^i) < \varepsilon$ o bién $\textit{diám}(A \cap D_b^i) < \varepsilon$ para cada $i = 0, 1, ..., k-1$. Por lo tanto, X es uniformemente arco-conexo. □

Corolario 9.31. *Sea X una curva. Los siguientes enunciados se cumplen.*

1. *Si X es pseudo-contráctil con espacio factor arco-conexo, entonces X es un dendroide uniformemente arco-conexo. Más aún, el dendroide X es contráctil.*

2. *Si X es pseudo-contráctil y arco-conexo, entonces X es un dendroide.*

Demostración.
1. Veamos por un lado que como X es pseudo-contráctil con espacio factor K arco-conexo, entonces por el Teorema 4.6, X es contráctil. Por lo tanto X es arco-conexo. Por otra parte, del Teorema 9.15, se tiene que X es hereditariamente unicoherente. Así, de ambas partes se tiene que X es un dendroide. Además, contráctil. Luego del Teorema 9.30, se sigue que X es uniformemente arco-conexo.

2. Como X es pseudo-contráctil, entonces por el Teorema 9.15, X es hereditariamente unicoherente y que junto con la hipótesis de ser arco-conexo, se sigue que X es un dendroide.

□

Los recíprocos del Corolario 9.31 inciso 1) e inciso 2) no son ciertos. Sobolewski mostró en [24, Corolario 5, p. 2987] que el continuo X dado no es pseudo-contráctil. Sin embargo, X es un dendroide uniformemente arco-conexo (vease la Figura 9.4).

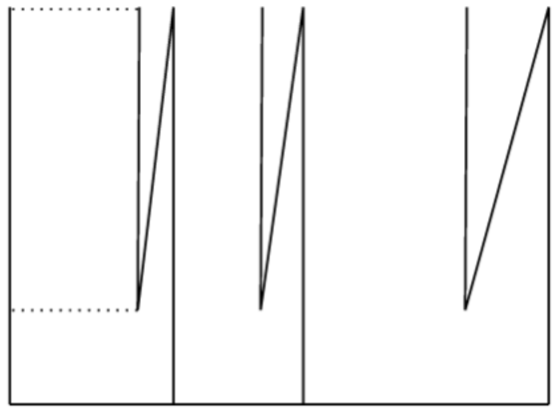

Figura 9.4: Dendroide no pseudo-contráctil

Por otra parte, existe un continuo X localmente conexo que no es unidimensional, pero siguiendo la misma idea del continuo de Kupenberg (ver Ejemplo 4.14) se tiene que es pseudo-contráctil pero no es contráctil (ver Figura 9.5).

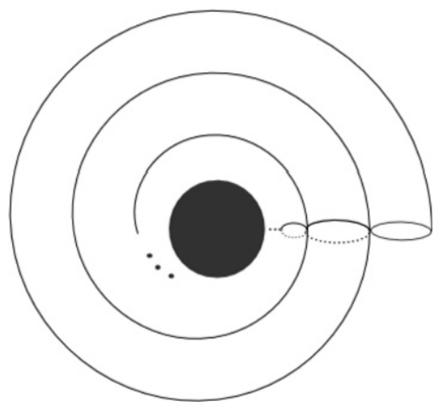

Figura 9.5: Continuo localmente conexo pseudo-contráctil de dimensión dos

A lo largo de este trabajo hemos visto que para decidir si un espacio topológico es o no pseudo-contráctil algunas veces bastaba con que el espacio tuviera ciertas carácteristicas o propiedades, tal como se menciono en el comentario antes de la Definición 9.7, lo cual acabamos de ver algunas en continuos. Sin embargo, hasta el momento no hemos mencionado que si un espacio topológico X tiene algún tipo de subconjunto, entonces X resulte ser o no pseudo-contráctil. Terminaremos este trabajo con un resultado relacionado a esto, en un continuo X (Teorema 9.37). Para este fin primero damos las siguientes definiciones y sólo citaremos unos resultados a estas.

Definición 9.32. Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio topológico X. Definimos el *límite superior* (lím sup) de la sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como el conjunto

$$\limsup(C_n) = \{x \in X \mid \text{para cada } U \text{ abierto que contiene a } x,\ U \cap C_n \neq \emptyset, \text{ para una infinidad de índices } n.\}$$

y definimos el *límite inferior* (lím inf) como el conjunto

$$\liminf(C_n) = \{x \in X \mid \text{para cada } U \text{ abierto que contiene a } x,\ U \cap C_n \neq \emptyset, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}, \text{ excepto para un conjunto finito de índices.}\}$$

Si $\liminf(C_n) = \limsup(C_n)$, diremos que la sucesión *converge a C* y escribiremos $\lim C_n = C$.

Definición 9.33. Sean X un continuo y $K \subset X$ cerrado no vacío. Decimos que

1. K es un R^1*-conjunto* si existe un conjunto abierto U que contiene a K y dos sucesiones $\{C_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $i = 1, 2$, de componentes de U tales que $K = \limsup(C_n^1) \cap \limsup(C_n^2)$.
2. K es un R^2*-conjunto* si existe un conjunto abierto U que contiene a K y dos sucesiones $\{C_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $i = 1, 2$, de componentes de U tales que $K = \lim C_n^1 \cap \lim C_n^2$.
3. K es un R^3*-conjunto* si existe un conjunto abierto U que contiene a K y una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de componentes de U tales que $K = \liminf(C_n)$.

Teorema 9.34. *[1, Teorema 2.3, p. 310] Todo R^2-conjunto es un R^1-conjunto y un R^3-conjunto.*

Teorema 9.35. *[1, Teorema 2.4, p. 310] Todo R^1-conjunto contiene un R^2-conjunto.*

Corolario 9.36. *[1, Corolario 2.5, p. 310] Todo R^1-conjunto contiene un R^3-conjunto.*

Se sabe que si un continuo tiene un R^3-conjunto, entonces no es contráctil ([1, Corolario 3.3, p. 317]). El siguiente resultado generaliza este resultado.

Teorema 9.37. *Sea X un continuo. Si X contiene un R^i-conjunto para $i = 1, 2, 3$, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Demostración. Primero tenemos que si $A \subset X$ es un R^2-conjunto, entonces es un R^3-conjunto. Así como todo R^1-conjunto contiene un R^3-conjunto. Por lo tanto es suficiente demostrar que si el espacio X contiene un R^3-conjunto, entonces X no es pseudo-contráctil.

Sea A un R^3-conjunto en X. Entonces existen un conjunto abierto U que contiene a A y una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de componentes de U tales que $A = \liminf(C_n)$.

Dado que $A \subset U$, tenemos de [12, Teorema 4.4, p. 234] que existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(A, X \setminus U) > \varepsilon$ (pues $A \cap X \setminus U = \emptyset$ y $X \setminus U$ es compacto).

Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces existen un continuo Y, puntos $a, b \in Y$, $x_0 \in X$ y pseudo-homotopía $H : X \times Y \to X$ tal que $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = x_0$ para cada $x \in X$.

Como H es continua. De [12, Teorema 4.6, p. 234], se sigue que H es uniformemente continua. Así, tenemos que para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si *diám*$(K) < \delta$, entonces *diám*$(H(K \times \{t\})) < \varepsilon$ para cada $t \in Y$. $(\star)$

Consideremos al conjunto $P = \{c, c_1, c_2, ..., c_n, ...\} \subset U$, donde $c \in A$, $c_i \in C_i$ para cada $i > 0$ y $\lim c_i = c$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que *diám*$(P) < \delta$. Sea $V = \{t \in Y \mid H(P \times \{t\}) \subset U\}$.

Afirmamos que

1. $V \neq \emptyset$.

2. $V \neq Y$.

3. V es abierto en Y.

Prueba de la afirmación

1. Dado que $H(P \times \{a\}) = P \subset U$. Entonces $a \in V$. Por lo tanto, $V \neq \emptyset$.

2. Si $V = Y$, entonces $b \in V$. Por lo tanto, $H(P \times \{b\}) = \{x_0\} \subset U$ por definición de V. Sea C la componente de U que contiene a x_0. Consideremos una componente C_j de U tal que $C_j \neq C$. Como $c_j \in C_j$, $\{c_j\} \times Y$ es conexo y H continua, entonces $H(\{c_j\} \times Y)$ es conexo. Además $c_j \in P$, esto implica que $H(\{c_j\} \times Y) \subset U$. Así, $x_0, c_j \in H(\{c_j\} \times Y)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V \neq Y$.

3. Sea $t_0 \in Y$. Entonces $H(P \times \{t_0\}) \subseteq U$, esto es, para cada $p \in P$ $\ H(p, t_0) \in U$. Como H es continua, H es continua en $P \times Y$. Así, existe un subconjunto W_p abierto en $P \times Y$ tal que $H(W_p) \subseteq U$. Por lo tanto, existe un abierto básico $Q_p \times R_p$ en $P \times Y$ tal que Q_p y R_p son abiertos en P y Y, respectivamente, de tal forma que $p \in Q_p$ y $t_0 \in R_p$ con $Q_p \times R_p \subseteq W_p$. Así tenemos que $\{Q_p\}_{p \in P}$ es una cubierta abierta de P. Como P es compacto, entonces existen $p_1, p_2, ..., p_n \in P$ tales que $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_{p_i}$.

   Sea $R = \bigcap\limits_{i=1}^{n} R_{p_i}$. Así, R es un subconjunto abierto en Y tal que $t_0 \in R$. Sea $s \in R$, entonces

$$H(P \times \{s\}) = H(\bigcup_{i=1}^{n} Q_{p_i} \times \{s\}) = \bigcup_{i=1}^{n} H(Q_{p_i} \times \{s\}) \subseteq U.$$

   Por lo tanto, $R \subseteq V$. Es decir, existe un subconjunto abierto R en Y tal que $t_0 \in R \subseteq V$. Así, V es abierto en Y.

Ahora, sea V_0 la componente de V tal que $a \in V_0$. Como $\{c_i\} \times V_0$ es conexo para toda $i \in \mathbb{N}$ y H es continua, se sigue que $H(\{c_i\} \times V_0)$ es conexo y $c_i \in H(\{c_i\} \times V_0)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ pues $a \in V_0$. Por lo tanto, $H(\{c_i\} \times V_0) \subset C_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$; esto implica que $H(c_i, t) \in C_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y para toda $t \in V_0$.

Como $\lim c_i = c$ y H es continua, se tiene que $\lim H(c_i, t) = H(c, t)$. Luego, $H(c, t) \in \liminf(C_i) = A$ para toda $t \in V_0$.

Denotemos por $bd(B)$ como la *frontera* de un subconjunto B de X.

Por otro lado, como $Bd(V_0)$ es un conjunto cerrado en Y y Y es primero numerable. Tenemos que si $t_0 \in Bd(V_0) \subseteq cl(V_0)$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_0$ tal que $\lim t_n = t_0$.

Como $H(c, t_n) \in A$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y A es cerrado por definición de R^i-conjunto. Por lo tanto, $\lim H(c, t_n) = H(c, t_0) \in A$. $\hfill (**)$

Finalmente, como V_0 es una componente del conjunto abierto V en Y.

Por el Teorema de Golpes en la Frontera [22, Teorema III, p. 75], se tiene que $cl(V_0) \cap Y \setminus V \neq \emptyset$. Sea $t' \in cl(V_0) \cap Y \setminus V$. Entonces $t' \in Bd(V_0) \setminus V$, es decir, $H(P \times \{t'\}) \not\subset U$ por definición de V. Así, existe $d \in P$ tal que $H(d, t') \notin U$ y como $H(c, t') \in A$ por $(**)$, tenemos que $d(H(d, t'), H(c, t')) \geqslant \varepsilon$, esto es una contradicción a $(\star)$ pues $c, d \in P$. Por lo tanto, X no es pseudo-contráctil. $\square$

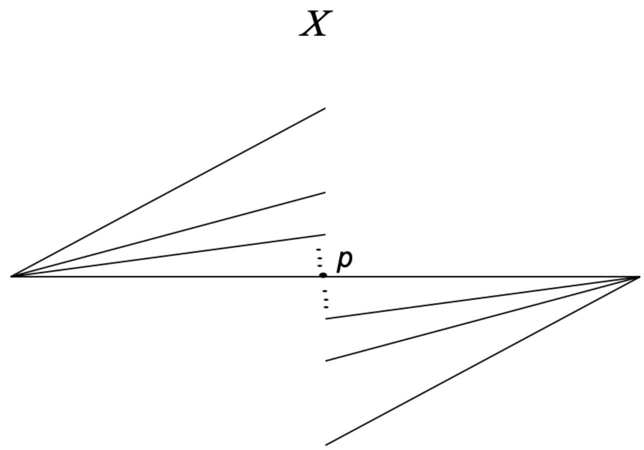

Figura 9.6: Continuo X no pseudo-contráctil con un R^3-conjunto

Finalizamos este trabajo mencionando algunas preguntas relacionadas a la pseudo-contractibilidad.

Pregunta 1. ¿Qué tipo de espacio topológico X satisface que si es pseudo-contráctil, entonces es contráctil?

Pregunta 2.[8, Pregunta 4.10] ¿Es cada dendroide pseudo-contráctil, contráctil?

Pregunta 3.[19, Problema 118] ¿Existirá una curva la cual sea pseudo-contráctil, pero no contráctil?

M. Soboleswski in [24] prueba que el único continuo no degenerado encadenable pseudo-contráctil es el arco. En particular, el pseudo-arco y el continuo tipo Knaster indescomponible no son pseudo-contráctiles. Debido a las propiedades que tienen estos continuos se tiene la siguiente pregunta.

Pregunta 4.[23, Pregunta 19] ¿Existe un continuo no degenerado (hereditariamente) indescomponible el cual es pseudo-contráctil?

Finalmente en relación a la Observación 5.8, tenemos la siguiente pregunta.

Pregunta 5. ¿Existe un continuo X para el cual el espacio $C(X, X)$ es conexo, pero X no es pseudo-contráctil?

Bibliografía

[1] B. S. Baik, K. Hur and C. J. Rhee, *R^i-sets and contractibility* J. Korean Math. Soc. **34** (1997), No. 2, p.309-319.

[2] D. Bellamy, *A null pseudo-homotopic map onto a pseudo arc*, Topol. Proc. **11** (1986) 1-5.

[3] R. H. Bing and F. B. Jones, *Another Homogeneous Plane Continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., **90** (1959), 171-192.

[4] K. Borsuk, *Theory of retracts* (Monografie Matematyczne 44. PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1967).

[5] F. Capulín, L. Juárez-Villa and F. Orozco-Zitli, *General properties on Pseudo-contractibility*, Topology. Appl. **247** (2018), 57-71.

[6] F. Capulín, L. Juárez-Villa and F. Orozco-Zitli, *R^i sets hyperspaces and Pseudo-contractibility*, Glass. Mat. Ser **53** (73) (2018), 359-370.

[7] J. H. Case and R. E. Chamberlin, *Characterizations of tree-like continua*, Pac. J. Math. **10** (1960) 73-74.

[8] J. J. Charatonik, *Select problems in continua theory*, Topol. Proc. **27** (**1**) (2003) 51-78.

[9] W. J. Charatonik and R. P. Roe, *Inverse limits of continua having trivial shape*, Houst. J. Math. **38** (2012) 1307-1312.

[10] W. Debski, *Pseudo-contractibility of sin(1/x)-curve*, Houst. J. Math. **20** (**2**) (1994) 365-367.

[11] C. H. Dowker, *Mapping theorems for non-compact spaces*, Am. J. Math. **69** (2) (1947)200-242.

[12] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc. Series in advanced mathematics. University of Chicago.

[13] A. Illanes, *Pseudo-homotopies of the pseudo-arc*, Comment. Math. Univ. Carol. **53** (**4**) (2012) 629-635.

[14] F. B. Jones *Certain homogeneuos unicoherent indecomposable continua*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 855-859.

[15] H. Katsuura, *Pseudo-contraction and homotopy of sin(1/x) curve*, Proc. Am. Math. Soc. **115** (**4**) (1992) 1129-1138.

[16] J. Krasinkiewicz, *Curves which are continuous images of tree-like continua are movable*, Fundam. Math. **89** (**3**) (1975) 233-260.

[17] J. Krasinkiewicz, *On the hyperspaces of snake-like and circle-like continua*, Fundam. Math. **84** (1974) 155-164.

[18] K. Kuratowski, *Topology, vol. II*, Academic Press, New York, London, 1968.

[19] W. Lewis, *Continuum theory problems, in: Proceedings of the 1983 Topology Conference*, Houston, Tex., 1983, Topol. Proc. **8** (**2**) (1983) 361-394.

[20] S. Macías, *Una introducción a los retractos absolutos y a los retrtactos de vecindad absolutos*, Revista Integración, Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander Vol. **31**, No. 2, 2013, p. 153-164.

[21] S. Macías, *Topics on Continua*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.

[22] S. B. Nadler, *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks, Pure Appl. Math., vol. **158** Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[23] E. M. Pearl (Ed.), *Open Problems in Topology II*, Elsevier, 2011.

[24] M. Sobolewski, *Pseudo-contractibility of chainable continua*, Topol. Appl. **154** (**16**) (2007) 2983-2987.

[25] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company.