



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO  
INSTITUTO INTERAMERICANO DE TECNOLOGÍA  
Y CIENCIAS DEL AGUA (IITCA)**

---

---



**DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA DIMENSIÓN  
FRACTAL DE SEDIMENTOS COHESIVOS UTILIZANDO, UN  
SISTEMA DE HOLOGRAFÍA DIGITAL**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DEL AGUA**

PRESENTA

**FIS. HILDA ZEPEDA MONDRAGON**

TUTOR ACADÉMICO

**DR. JUAN ANTONIO GARCÍA ARAGÓN**

TUTOR ADJUNTO

**DR. HUMBERTO SALINAS TAPIA**

Toluca, México, Mayo 2022.

# RESUMEN

La caracterización de sedimentos se ha vuelto un tema central en los últimos tiempos, debido a que su estudio permite entender y predecir los procesos de transporte de sedimentos en suspensión, y el destino de las partículas en suspensión de aguas residuales, lagos, ríos, estuarios y ambientes marinos.

Aunque se han realizado diversos estudios, la caracterización de los sedimentos cohesivos de forma experimental no es tarea fácil, puesto que no sólo dependen de la hidrodinámica del fluido, sino también de los procesos físicos, químicos y biológicos (no siempre comprendidos) que surgen en el proceso de aglomeración de las partículas primarias que generan la formación de flóculos. Para obtener un modelo de floculación, la caracterización se ha centrado en la obtención de diferentes parámetros de forma experimental, tales como tamaño, forma, densidad efectiva, la dimensión fractal, así como la velocidad de caída.

Diversas investigaciones se han realizado con la finalidad de caracterizar sedimentos cohesivos (flocs) enfocándose principalmente al desarrollo de modelos matemáticos para determinar la velocidad de sedimentación (Winterwerp, 1998; Khelifa y Hill, 2006), los cuales requieren de apoyo experimental, para obtener la dimensión fractal de los agregados.

Los modelos de velocidad de caída son modificaciones de la ley de Stokes, e incluyen la dimensión fractal como parámetro principal, para representar la formación de un agregado como un conjunto de partículas primarias que generan una entidad que se aleja de una forma esférica.

Sin embargo, existe una dificultad para obtener experimentalmente la dimensión fractal, diferentes estudios utilizan enfoques que se limitan a dos dimensiones. En esta investigación, se implementa un método experimental en tres dimensiones para determinar la dimensión fractal de un agregado.

Entre los diversos métodos experimentales, es importante tomar en cuenta que debido a la fragilidad de los flóculos lo ideal es utilizar métodos no intrusivos. Una de esas técnicas son las

ópticas en tres dimensiones, que permitan determinar las características principales de forma volumétrica.

De ahí que uno de los aportes del presente trabajo fue implementar un sistema de holografía digital en línea, para determinar las características de los flóculos: tamaño, forma dimensión fractal y velocidad de sedimentación. La dimensión fractal de los flóculos se determinó aplicando diferentes métodos de conteo de cajas (método de cajas, método diferencial de cajas y método triangular de cajas), a las imágenes de partículas (hologramas) obtenidas experimentalmente de un sistema de holografía en línea y reconstruidas con método de convolución implementando para partículas no esféricas.

Los flóculos fueron reconstruidos en un canal rotatorio circular, con sedimentos cohesivos provenientes de ríos Usumacinta y Grijalva, así como de tanques de acuicultura de centro Acuícola el Zarco y Aguas del Rastro de Toluca. Se demostró la factibilidad del uso de un sistema de holografía digital para caracterizar este tipo de sedimentos y el paso adelante de este tipo de sistemas en el estudio de los sedimentos cohesivos.

Del análisis realizado de la dimensión fractal obtenida con los diferentes métodos del conteo de cajas una vez realizada la reconstrucción de partículas, se determinó que el método de conteo de cajas triangular fue el que presentó mejores resultados ya que se adaptó mejor a las imágenes de partículas. Además, los resultados experimentales fueron ajustados a dos diferentes modelos para determinar la dimensión fractal de sedimentos cohesivos y se determinó que el modelo propuesto por García et al. (2014), fue el que presenta menor variabilidad en el valor de las constantes involucradas, y es el más recomendable para ser aplicado en el análisis de los sedimentos cohesivos utilizados en la presente investigación.

# ABSTRACT

Recently sediment characterization has become a research concern, because it can not only predict suspended sediment transport processes but also establish the destiny of the suspended particles in waste waters, lakes, rivers, estuaries and coastal areas.

Notwithstanding the research efforts done, the experimental sediment characterization is still a difficult task, because the aggregation of particles (floc formation) not only depends on hydrodynamics, but also on physical, biological and chemical aspects sometimes not well understood. In order to build a flocculation model, different parameters are obtained in experimental form, size, shape, effective density, fractal dimension and settling velocity.

In order to characterize cohesive sediments a lot of research has been done and emphasis was done in obtaining a settling velocity model for flocs (Winterwerp, 1998; Khelifa y Hill, 2006), those models require experimental support to obtain the fractal dimension of flocs.

Settling velocity models are modifications of Stokes law, and includes the fractal dimension of aggregates, to consider floc formation as group of primary particles most of the time departing from a spherical particle.

However fractal dimension is difficult to be obtained experimentally, and most of the scientific literature of the subject is two dimensional limited. In this research an experimental three dimensional technique is implemented in order to obtain the fractal dimension.

Experimental non intrusive techniques are the best choice because aggregates are fragile and can be easily destroyed. One of these are optical techniques in three dimensions, that capture the volumetric aggregates characteristics.

In the present research a digital on line holographic system was developed in order to obtain the 3D flocs characteristics: size, shape, fractal dimension and settling velocity. Flocs fractal dimension was obtained applying different box counting methods (usual box counting, differential box counting method, and triangular box counting method), to the particle images

(holograms) obtained experimentally in an holographic online system and reconstructed using the convolution method for non-spherical particles.

The used flocs were reconstructed in rotating annular flume with cohesive sediments coming from the rivers Usumacinta and Grijalva, also from aquacultura tanks of the Zarco aquaculture center and from the Toluca abbatoir. It was shown that it is possible to use the Holographic system to characterize these type of sediments and that those systems are a major advance in the study of cohesive sediments.

From the analysis of fractal dimension obtained the different box counting methods after particle reconstruction, it is concluded that the triangular box counting method was the one that best fitted the particle images. Also the experimental results were fitted to two different models for the flocs and was obtained that the model proposed by Garcia Aragon et al. (2014) was the one that presented less variability in the parameters involved and is the best to be used with the different cohesive sediments used in this research.

# ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS

RESUMEN

ABSTRACT

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

1.1 Justificación contextual y científica .....	3
1.2 Hipótesis .....	4
1.3 Objetivos .....	4
1.3.1 Objetivo general .....	4
1.3.2 Objetivos específicos .....	5

## CAPÍTULO 2

### SEDIMENTOS COHESIVOS

2.1 Sedimentos .....	6
2.1.1 Clasificación de los sedimentos .....	7
2.1.1.1 Sedimentos no cohesivos .....	7
2.1.1.2 Sedimentos cohesivos .....	7
2.1.1.2.1 Flóculos (flocs).....	8
2.2 Caracterización de sedimentos cohesivos (flocs) .....	10
2.2.1 Densidad .....	11
2.2.2 Porosidad .....	13
2.2.3 Tamaño y forma de los flocs.....	13
2.2.3.1 Diámetros equivalentes .....	14
2.2.3.1.1. Diámetro de una esfera de volumen equivalente ( $d_v$ ) .....	14
2.2.3.1.2. Diámetro de una esfera de superficie equivalente ( $d_s$ ) .....	14

2.2.3.1.3 Diámetro de una esfera de superficie por unidad de volumen equivalente (dsv) .....	14
2.2.3.1.4. Diámetro de una esfera de área proyectada equivalente (da).....	15
2.2.3.1.5. Diámetro de una esfera de perímetro equivalente ( $d_c$ ) .....	15
2.2.3.2 Forma de partículas .....	15
2.2.3.2.1 Esfericidad ( $\psi$ ) .....	16
2.2.3.2.2 Circularidad (C) .....	16
2.2.4 Velocidad de caída .....	16
2.2.4.1 Modelos matemáticos para determinar la velocidad de caída .....	17
2.3 Técnicas de caracterización de sedimentos cohesivos .....	20
2.3.1 Técnicas ópticas (técnicas no invasivas) .....	20
2.3.1.1 Técnicas ópticas en 2D.....	20
2.3.1.1.1 PIV: Velocimetría por imágenes de partículas.....	22
2.3.1.1.2 Velocimetría por rastreo de partículas.....	23
2.3.1.2 Técnicas ópticas en 3D .....	24
2.3.1.2.1 Holografía digital.....	24
2.3.1.2.2 Holografía digital PIV(DHPTV) .....	25
2.3.1.2.3 Sistema DHPTV .....	27

## **CAPÍTULO 3**

### **HOLOGRAFÍA DIGITAL**

3.1 Principios fundamentales de la holografía.....	28
3.1.1 Interferencia .....	28
3.1.2 Difracción .....	30
3.1.3 Fundamento matemático de la holografía .....	32
3.2 Holografía digital en línea .....	33
3.3 Grabado digital de hologramas.....	34
3.3.1 Requerimientos para el registro de hologramas digitales .....	35
3.3.1.2 Dispositivo a utilizar (CCD) .....	35
3.3.1.3 Frecuencia espacial .....	35
3.3.1.4 Estabilidad .....	35
3.4 Pre-procesamiento de hologramas .....	35
3.5 Reconstrucción de hologramas .....	36
3.5.1 Métodos de reconstrucción de hologramas .....	36

3.5.1.1 Aproximación de Fresnel .....	36
3.5.1.2 Convolución .....	38

## **CAPÍTULO 4**

### **GEOMETRÍA FRACTAL**

4.1 Características de los fractales.....	41
4.1.1 Autosimilitud .....	41
4.1.2 Dimensión fractal.....	43
4.1.3 Relación de ley de potencia entre dos variables .....	44
4.2 Métodos para determinar la dimensión fractal .....	44
4.2.1 Método de conteo de cajas.....	45
4.2.1.1 Método de conteo de células reticulares .....	45
4.2.1.2 Método de conteo de caja diferencial (DBC).....	46
4.2.1.3 Método de conteo de caja para imágenes no cuadradas.....	50
4.2.1.4 Método de conteo de cajas triangulares (TBC).....	52
4.3 Dimensión fractal aplicada en sedimentos cohesivos.....	53

## **CAPÍTULO 5**

### **METODOLOGÍA**

5.1 Sistema de holografía digital .....	55
5.1.1 Instalación y calibración del sistema de holografía digital.....	56
5.1.1.1 Instalación del sistema de holografía digital.....	56
5.1.1.2 Calibración del sistema de holografía digital.....	58
5.2 Grabación de hologramas .....	60
5.2.1 Formación de flocs.....	65
5.3 Pre-Procesamiento de los hologramas.....	67
5.4 Reconstrucción del holograma .....	67
5.5 Caracterización de partículas .....	71
5.5.1 Forma y tamaño .....	71
5.5.2 Dimensión fractal.....	78
5.5.2 .1 Ajuste de los datos de la dimensión fractal vs. tamaño de los flóculos.....	83
5.5.3 Velocidad de caída .....	84
5.6 Desarrollo de Algoritmos computacionales .....	85

## CAPÍTULO 6

### RESULTADOS

6.1 Montaje del sistema de holografía en línea .....	86
6.2 Herramienta computacional en MATLAB .....	86
6.3 Caracterización de partículas esféricas.....	87
6.3.1 Caracterización de partículas esféricas .....	87
6.3.2 Caracterización de partículas no esféricas .....	92
6.3.2.1 Caracterización de partículas no esféricas provenientes del río Usumacinta .....	92
6.3.2.1.1 Forma y tamaño .....	92
6.3.2.1.2 Dimensión fractal .....	97
6.3.2.1.3 Velocidad de caída.....	111
6.3.2.2 Caracterización de partículas no esféricas provenientes del río Grijalva.....	112
6.3.2.2.1 Forma y tamaño .....	112
6.3.2.2.2 Dimensión fractal .....	117
6.3.2.2.3 Velocidad de caída.....	130
6.3.2.3 Caracterización de partículas no esféricas provenientes del Rastro de Toluca, Estado de México. ....	130
6.3.2.3.1 Forma y tamaño .....	133
6.3.2.3.2 Dimensión fractal .....	132
6.3.2.3.3 Velocidad de caída.....	135
6.3.2.4 Caracterización de partículas no esféricas provenientes del Zarco.....	135
6.3.2.4.1 Forma y tamaño .....	136
6.3.2.4.2 Dimensión fractal .....	136
6.3.2.4.3 Velocidad de caída.....	139
6.4 Análisis de Resultados .....	140
6.5 Conclusiones .....	147
6.6 Recomendaciones .....	148

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Conceptualización del área proyectada.....	15
Figura 2.2. Sistema PIV (Barja, 2015) .....	22
Figura 2.3. Arreglo HPIV (a) Etapa de grabado; (b) Etapa de reconstrucción (Coronel, 2011) .....	26
Figura 2.4. Arreglo en línea DHPIV (Coronel, 2011).....	26
Figura 3.1. Sistema de coordenadas (Coronel, 2011).....	31
Figura 3.2. Sistema holográfico en línea .....	34
Figura 4.1. Autosimilitud exacta del copo de nieve de Koch.....	42
Figura 4.2. Cuasiautosimilitud en el conjunto de Mandelbrot: al variar la escala obtenemos copias del conjunto con pequeñas diferencias.....	42
Figura 4.3. Auto-similitud estadística de un fractal generado por el proceso de agregación limitada por difusión. ....	43
Figura 4.4. Factor de reducción de una imagen .....	46
Figura 4.5. Determinación de los niveles de grises (Li et al., 2009).....	49
Figura 4.6. Partición de una imagen y recuento de cajas (Long and Peng, 2013).....	52
Figura 4.7. Ilustración de dividir un cuadro de imagen en dos cuadros triangulares con cuatro patrones (Kaewaramsri y Woraratpanya (2015)).....	53
Figura 5.1. Pasos que definieron la metodología .....	57
Figura 5.2. Esquema de un sistema de holografía en línea (sin lentes).....	58
Figura 5.3. Sistema de holografía en línea montado el laboratorio.....	59
Figura 5.4 Filtraje espacial con ruido .....	61
Figura 5.5 Filtraje espacial sin ruido .....	61
Figura 5.6 Montaje para la colimación del haz .....	61
Figura 5.7 Hoja de calibración .....	62
Figura 5.8 Arreglo de colimación del haz .....	62
Figura 5.9 Diagrama de experimentos .....	64
Figura 5.10. Hologramas grabados con diferentes cámaras, a) cámara Lumenera de 640 X 480; b) cámara Lumenera con resolución de 1240 X 1024 y c) cámara JAI con resolución de 1600 X 1195. ....	64
Figura 5.11 Hologramas adquiridos, a) holograma digital con mucho ruido; b) holograma digital con poco ruido.....	65

Figura 5.12. Hologramas obtenidos de flóculos del río Usumacinta.....	66
Figura 5.13. Holograma obtenido de flóculos del estaque de peces el “Zarco”.....	66
Figura 5.14. Hologramas obtenidos de flóculos del río Grijalva.....	67
Figura 5.15. Canal anular circular ITTCA .....	67
Figura 5.16 Lectura de la imagen .....	69
Figura 5.17. Partícula reconstruida.....	69
Figura 5.18 Reconstrucción a diferentes distancias, a) Gráfica de reconstrucción; b) reconstrucción $z=10$ , fuera de foco; c) reconstrucción $z=166$ , en el foco; d) reconstrucción $z=220$ , fuera del foco. ....	71
Figura 5.19. Superficie de la partícula en estudios, a) partícula esférica; b) partícula no esférica (flocs).....	72
Figura 5.20. Ventana de la partícula en estudios, a) partícula esférica; b) partícula no esférica (flocs).....	72
Figura 5.21. Delimitación de la región de estudio para una partícula no esférica (floc), a) gráfica de intensidad en el renglón donde se encuentra la intensidad máxima; b) gráfica de intensidad en la columna donde se encuentra la intensidad máxima; c) nueva región .....	73
Figura 5.22. Delimitación de la región de estudio para una partícula esférica, a) gráfica de intensidad en el renglón donde se encuentra la intensidad máxima de la imagen; b) gráfica de intensidad en la columna donde se encuentra la intensidad máxima de la imagen; c) nueva región de estudio. ....	74
Figura 5.23. Contorno de la región de estudio para una partícula esférica, a) intensidad mayor a 200; b) intensidad mayor a 127; c) intensidad mayor a la media de la imagen.....	75
Figura 5.24. Contorno de la región de estudio para una partícula esférica, a) intensidad mayor a 200; b) intensidad mayor a 127; c) intensidad mayor a la media de la imagen.....	75
Figura 5.25. Forma, tamaño y centroide de partículas: a) partícula esférica; b) partículas no esféricas. ....	75
Figura 5.26. Ejemplos de picos de intensidad en ambos ejes.....	76
Figura 5.27. a) Superficie de la reconstrucción de una partícula esférica y como se ve en un plano, b) muestra la gráfica de la detección de la partícula en	

estudio y como se ve el plano después de hacer la ubicación de la partícula.....	76
Figura 5.28. Forma, tamaño y centroide de una partícula esférica con el código 2.....	77
Figura 5.29. Interfaz utilizada para la obtención de forma y tamaño de flóculos. ....	78
Figura 5.30. Elección de las partículas a reconstruir.....	78
Figura 5.31. Reconstrucción plano a plano, imagen superior considerando intensidades máximas y plano inferior considerando intensidades mínimas .....	79
Figura 5.32. Partículas no esféricas reconstruidas.....	79
Figura 5.33. Formas de partículas no esféricas reconstruidas. ....	80
Figura 5.34. Dimensión fractal, a) imagen de ceros 256x256; b) grafica log-log.....	81
Figura 5.35. Dimensión fractal, a) imagen de 255 de 6x6; b) grafica log-log. ....	82
Figura 5.36. Dimensión fractal, a) imagen de floculo de 59x34; b) grafica log-log. ....	82
Figura 5.37. Imágenes procesadas para la obtención de la velocidad de caída. a), d) recuadro rojo son las partículas que se reconstruyeron; b), e) determinación de sus centroides; c), f) la forma y tamaño de las partículas. ....	85
Figura 5.38. Interfaz gráfica final .....	85
Figura 6.1. Holograma a reconstruir. a) Sin filtro; b) Con filtro .....	87
Figura 6.2. Holograma a reconstruir. a) Ventana de reconstrucción 128 x 128; b) detección de la partícula; c) forma y tamaño de la partícula.....	88
Figura 6.3 Frecuencia relativa contra diámetro de partículas esféricas Carpeta 1 .....	89
Figura 6.4. Graficas de densidad de probabilidad para la carpeta 1 .....	89
Figura 6.5 Frecuencia relativa contra diámetro de partículas esféricas Carpeta 2 .....	90
Figura 6.6. Graficas de densidad de probabilidad para la carpeta 2.....	90
Figura 6.7 Frecuencia relativa contra diámetro de partículas esféricas Carpeta 3 .....	91
Figura 6.8 Graficas de densidad de probabilidad para la carpeta 3.....	91
Figura 6.9. Datos obtenidos de partículas esféricas. a) Frecuencia relativa; b) función de densidad de probabilidad .....	91
Figura 6.10 Hologramas del río Usumacinta. a) Disgregados; b) a los 15 minutos; c) a los 30 minutos; d) a los 45 minutos; e) a los 60 minutos. ....	94
Figura 6.11 Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo t=0min. a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.....	94

Figura 6.12 Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo $t=15\text{min}$ . a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad .....	95
Figura 6.13. Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo $t=30\text{min}$ . a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad. ....	95
Figura 6.14 Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo $t=45\text{min}$ . a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad .....	96
Figura 6.15 Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo $t=60\text{min}$ . a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad. ....	96
Figura 6.16 Densidad de probabilidad de los datos obtenidos del río Usumacinta para diferentes tiempos.....	97
Figura 6.17 Distribución espacial de las partículas del río Usumacinta en 3D; a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos y d) 60 minutos .....	98
Figura 6.18. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 15 minutos. ....	99
Figura 6.19. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 30 minutos. ....	99
Figura 6.20. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 45 minutos. ....	100
Figura 6.21. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 60 minutos .....	100
Figura 6.22. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 75 minutos. ....	101
Figura 6.23 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.....	101
Figura 6.24 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste.....	102
Figura 6.25 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste. ....	102

Figura 6.26. Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal. ....	103
Figura 6.27 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	104
Figura 6.28 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste. ....	104
Figura 6.29 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando ecuación exponencial para el ajuste. ....	105
Figura 6.30 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal. ....	105
Figura 6.31 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	106
Figura 6.32 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.....	106
Figura 6.33 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando ecuación exponencial para el ajuste. ....	107
Figura 6.34 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta	

a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal. ....	107
Figura 6.35 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	108
Figura 6.36 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.....	108
Figura 6.37 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste. ....	109
Figura 6.38 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal. ....	109
Figura 6.39 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	110
Figura 6.40 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.....	111
Figura 6.41 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste . . .	111
Figura 6.42 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal. ....	112

Figura 6.43 Dimensión fractal y distribución espacial de las partículas del río Usumacinta, a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos, d) 60 minutos. ....	112
Figura 6.44. Velocidades experimentales para cada uno de los tiempos del río Usumacinta, a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos, d) 60 minutos. ....	114
Figura 6.45. Datos obtenidos del río Grijalva en el tiempo $t=15\text{min}$ . a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad. ....	114
Figura 6.46. Datos obtenidos del río Grijalva en el tiempo $t=30\text{min}$ . a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad. ....	115
Figura 6.47. Datos obtenidos del río Grijalva en el tiempo $t=45\text{min}$ . a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad. ....	115
Figura 6.48. Datos obtenidos del río Grijalva en el tiempo $t=60\text{min}$ . a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad. ....	116
Figura 6.49. Densidad de probabilidad de los datos obtenidos del río Grijalva para diferentes tiempos. ....	116
Figura 6.50 Distribución espacial de las partículas del río Grijalva en 3D; a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos y d) 60 minutos. ....	117
Figura 6.51 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	118
Figura 6.52 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste. ....	119
Figura 6.53 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste. ....	119
Figura 6.54 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 15 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal). ....	120

Figura 6.55 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	120
Figura 6.56 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste .....	121
Figura 6.57 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste. ....	121
Figura 6.58 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 30 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.). ....	122
Figura 6.59 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	122
Figura 6.60 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, ajustado a la ecuación de García et al. (2014).). ....	122
Figura 6.61 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste . ....	123
Figura 6.62 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 45 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.). ....	124
Figura 6.63 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 60 min, considerando cada uno de	

los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	124
Figura 6.64 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste .....	124
Figura 6.65 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste. ....	125
Figura 6.66 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 60 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.). ....	125
Figura 6.67 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	126
Figura 6.68 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste. ....	126
Figura 6.69 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste. ....	127
Figura 6.70 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 75 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal). ....	127
Figura 6.71 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	128

Figura 6.72	Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste. ....	128
Figura 6.73	Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste .....	129
Figura 6.74	Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.). ....	129
Figura 6.75	Dimensión fractal y distribución espacial de las partículas del río Grijalva en 3D; a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos y d) 60 minutos.). ....	130
Figura 6.76.	Velocidades experimentales para cada uno de los tiempos del río Grijalva; a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos y d) 60 minutos.). ....	131
Figura 6.77.	Datos obtenidos del Rastro de Toluca. a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.). ....	132
Figura 6.78	Distribución espacial de las partículas del Rastro de Toluca en 3D.). ....	133
Figura 6.79	Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Rastro de Toluca, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste. ....	133
Figura .6.80	Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Rastro de Toluca, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste. ....	133
Figura 6.81	Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Rastro de Toluca, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste .....	134

Figura 6.82 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Rastro de Toluca, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.).	134
Figura 6.83 Dimensión fractal y distribución espacial de las partículas del Rastro de Toluca en 3D.	135
Figura 6.84. Velocidades experimentales para las partículas del Rastro de Toluca.	135
Figura 6.85. Datos obtenidos del Estanque de peces “El Zarco”. a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.	136
Figura 6.86 Distribución espacial de las partículas del Zarco	137
Figura 6.87 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Zarco, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.	137
Figura 6.88 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Zarco, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste.	137
Figura 6.89 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Zarco, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.	138
Figura 6.90 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Zarco, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.	138
Figura 6.91 Dimensión fractal y distribución espacial de las partículas del Zarco.	139
Figura 6.92. Velocidades experimentales para las partículas del Zarco.	139

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1	Diferencias entre geometría euclidiana y fractal .....	34
Tabla 5.1	Distancias del sistema de holografía en línea .....	48
Tabla 6.1	Resultados de tamaños y dimensión fractal para el río Usumacinta.....	140
Tabla 6.2	Resultados de tamaños y dimensión fractal para el río Grijalva.....	141
Tabla 6.3	Resultados de tamaños y dimensión fractal del Zarco y el Rastro .....	141
Tabla 6.4	Parámetros para cada modelo de ajuste considerando los diferentes métodos para determinar la dimensión fractal y los tiempos de análisis para el río Usumacinta. ....	144
Tabla 6.5	Parámetros para cada modelo de ajuste considerando los diferentes métodos para determinar la dimensión fractal y los tiempos de análisis para el río Grijalva.....	145
Tabla 6.6	Parámetros para cada modelo de ajuste considerando los diferentes métodos para determinar la dimensión fractal y los tiempos de análisis para el Zarco y el Rastro de Toluca.....	146

# LISTA DE SÍMBOLOS Y UNIDADES

$a$ :	Entero positivo
$A$ :	área (m <sup>2</sup> )
$A_0$ :	Amplitud de la onda (m)
$A(x, y)$ :	amplitud compleja en el plano de la apertura
$b, e, f, h$ :	constantes que dependen del tipo de sedimento y de la tasa de corte.
$c$ :	Velocidad de la luz, en la ecuación de onda (m/s)
$C_d$ :	coeficiente de arrastre
$C_{Df}$ :	Coefficiente de arrastre de partículas permeables
$d$ :	Diámetro de la partícula primaria
$D$ :	Diámetro equivalente de una esfera compuesta por $k$ partículas primarias
$D_f$ :	Dimensión fractal
$D_{50}$ :	diámetro medio de los sedimentos
$E_o(x, y)$ :	Onda objeto
$E_R(x, y)$ :	Onda de referencia
$E_R^*$ :	conjugado de la onda de referencia
$E_t$ :	Onda transmitida
$E_1, E_2$ :	Onda 1 y 2
$E(r)$ :	Onda resultante
$G$ :	aceleración de la gravedad
$G$ :	niveles máximos de intensidad de gris en una imagen
$g(\xi, \eta, x, y)$ :	Respuesta de impulso
$h(x, y)$ :	Función holograma
$I$ :	Intensidad
$I_{max}$ :	Intensidad de escala de gris máximo
$I_{min}$ :	Intensidad de escala de gris mínimo
$L$ :	tamaño del floc
$L_c$ :	longitud de la caja
$L_p$ :	tamaño de las partículas primarias que forman al floc
$L'$ :	Nivel de gris

$M$ :	masa de las partículas
$M_i$ :	longitud de la imagen
$N$ :	Número de píxeles
$n_r$ :	Aporte de los niveles de gris
$N_r$ :	Sumatoria de todos los aportes de los niveles de gris de una imagen
ns:	nanosegundos
$Q$ :	factor de oblicuidad
$1/r$ :	factor de reducción
$R$ :	número de Reynolds de la partícula
$S$ :	tamaño de la caja reducida
$s'$ :	Altura de la caja
$\bar{u}$ :	Velocidad instantánea
$V$ :	volumen
$w_s$ :	Velocidad de caída
$\alpha_w, \beta_w$ :	Parámetros de forma (ecuación de Winterwerp)
$\Gamma$ de $\xi, \eta$ :	campo en el plano de observación
$\Delta t$ :	Incremento de tiempo
$\Delta(\bar{x}, t)$ :	Cambio de posición con respecto al tiempo
$\Delta \varphi$ :	Diferencia de fase
$\epsilon_0$ :	Permitividad en el vacío
$\theta$ :	porosidad de un flóculo
$k_4$ :	Constante para la fórmula de porosidad dada por Li y Ganczarzyk
$\lambda$ :	Longitud de onda
$\mu$ :	Viscosidad dinámica del agua
$\xi, \eta$ :	Coordenadas plano objeto
$\xi', \eta'$ :	Coordenadas plano de reconstrucción
$\rho'$ :	Distancia entre un punto en el plano de la apertura y un punto en el plano de observación
$\rho_f$ :	Densidad efectiva del floculo
$\rho_p$ :	Densidad de las partículas primaria
$\rho_s$ :	Densidad relativa de las partículas primarias
$\rho_w$ :	Densidad del agua
$\sigma$ :	Desviación estándar de los niveles de gris de la imagen

$\varphi$ :	Factor de forma
$\varphi$ :	Fase
$\varphi_0$ :	Fase de la onda objeto
$\varphi_R$ :	Fase de la onda de referencia
$\mathfrak{F}$ :	Transformada de Fourier
$\mathfrak{F}^{-1}$ :	transformada inversa de Fourier
$\otimes_0$	función de convolución

# LISTA DE ACRÓNIMOS

2D:	Bidimensional
3D:	Tridimensional
CCD:	Dispositivo de carga acoplada
DBC:	Método de recuento diferencial de cajas
DHPIV:	Holografía digital PIV
DHPTV:	Holografía digital PTV
fBm:	Método de movimiento fraccional Browniano
HD:	Holografía digital
IFS:	Sistemas de funciones iteradas
ITTCA	Instituto Interamericano de Tecnología y Ciencias del Agua
PDI:	Procesado digital de imágenes
PIV:	Velocimetría por imágenes de partículas
PTV:	Velocimetría por rastreo de partículas
RPM:	Revoluciones por minuto
UAEMex.:	Universidad Autónoma del Estado de México

# ***ESTRUCTURA DE LA TESIS***

El presente trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se da una introducción sobre la importancia de implementar un sistema de holografía digital para la caracterización de partículas cohesivas, se presenta también en este capítulo los antecedentes, la justificación, la hipótesis y los objetivos planteados en la presente investigación.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico relacionado con los sedimentos cohesivos, así como de sus principales características. Además, se presenta una descripción de las técnicas que se han utilizado para llevar a cabo la caracterización de sedimentos cohesivos y los modelos matemáticos que rigen la velocidad de sedimentación.

En el capítulo 3 se explica que es la holografía digital, así como los conceptos básicos que deben conocerse para entender esta técnica, también se explica de forma detallada cada uno de los pasos que deben realizarse y las consideraciones que deben tomarse para llevar a cabo un correcto grabado y se explican cuáles son los métodos para realizar la reconstrucción numérica de hologramas.

En el capítulo 4 se explica que son los fractales, así como las características de estos, haciendo hincapié en la dimensión fractal y los métodos más utilizados para la obtención de la dimensión fractal de una imagen de forma tridimensional.

En el capítulo 5 se describe la metodología que se llevó a cabo para realizar el montaje del sistema de holográfica digital, así como la grabación de hologramas. También se explica cómo fue desarrollada la herramienta computacional que permitió llevar a cabo la reconstrucción de los hologramas y la caracterización de las partículas de sedimentos cohesivos.

Finalmente, en el capítulo 6 se presenta el análisis de los resultados obtenidos, así como las conclusiones y recomendaciones para trabajos posteriores.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

La caracterización de sedimentos se ha vuelto un tema central en los últimos tiempos, debido a que su estudio permite entender y predecir los procesos de transporte de sedimentos en suspensión, principalmente los sedimentos cohesivos, procesos clave para la dinámica de las partículas en suspensión del agua. Sin embargo, para un estudio exhaustivo es necesario que se incluya la agregación de partículas, es decir la formación de flóculos.

Cuando se habla de flóculos, su caracterización se vuelve más compleja debido al conjunto de variables que intervienen en la hidrodinámica del medio. Es por ello, que la caracterización se ha centrado en la obtención de diferentes parámetros de forma experimental, tales como tamaño, forma, densidad efectiva y la velocidad de caída.

Cabe señalar que, hasta este momento, la determinación por ejemplo de la velocidad de sedimentación de los flocs es estimada por medio de modelos matemáticos, los cuales son modificaciones a la Ley de Stokes aplicada a partículas esféricas. Pero considerado como parámetro principal la dimensión fractal, debido a que los flocs no presentan una forma esférica sino formas irregulares producto de la aglomeración de partículas. Además, un floc se considera como un medio poroso compuesto por partículas primarias y de formas irregulares que pueden ser definidos como un fractal.

Así, el parámetro que se ha vuelto pieza clave en la caracterización de sedimentos cohesivos es la dimensión fractal, la cual presenta una complejidad alta para su obtención, aunque se han realizado diversos trabajos, en muchos de ellos se considera constante, debido a la falta de datos experimentales confiables obtenidos con técnicas no intrusivas.

Por ello, es importante implementar nuevos métodos que permitan determinar la dimensión fractal considerando su tridimensionalidad. Aunque existen diversos métodos experimentales,

es importante tomar en cuenta que debido a la fragilidad de los flocs lo ideal es utilizar métodos no intrusivos, que permitan determinar las características principales de forma volumétrica.

Lo ideal para realizar la caracterización de sedimentos es el uso de técnicas ópticas no invasivas. Cabe señalar que dentro de las técnicas ópticas la que presenta una buena eficacia para el estudio de micropartículas es la holografía digital. Por lo cual, en la presente investigación se determinará de forma experimental la dimensión fractal de sedimentos cohesivos (flocs) utilizando un sistema de holografía digital.

## **1.1 JUSTIFICACIÓN CONTEXTUAL Y CIENTÍFICA**

Caracterizar los sedimentos cohesivos es importante para predecir el transporte de sedimentos en suspensión, principalmente la eliminación de partículas en suspensión de aguas residuales, lagos, ríos, estuarios y ambientes marinos. Aunque se han realizado diversos estudios, la caracterización de forma experimental no es tarea fácil debido a la hidrodinámica que presentan los flocs, puesto que no sólo dependen de las condiciones del agua, sino también de los procesos físicos, químicos y biológicos que surgen en el proceso de aglomeración de las partículas primarias que los componen.

Diversas investigaciones se han realizado con la finalidad de caracterizar sedimentos cohesivos (flocs) enfocándose principalmente al desarrollo de modelos matemáticos para la velocidad de sedimentación (Winterwerp, 1998; Khelifa y Hill, 2006), los cuales requieren de apoyo experimental.

Estos modelos parten de la ley de Stokes, pero incluyen la dimensión fractal como parámetro principal dado a la irregularidad que presentan los flocs. Sin embargo, debido a la dificultad para obtener experimentalmente la dimensión fractal, diferentes estudios la consideran como constante en función del tipo de sedimento. De ahí que uno de los aportes del presente trabajo consiste en utilizar un sistema tridimensional como la holografía digital para determinar la dimensión fractal de forma experimental de flóculos.

La implementación del sistema de holografía digital para la caracterización de sedimentos cohesivos se considera como el aporte principal de la investigación ya que a partir de un algoritmo de reconstrucción se desarrolló una herramienta computacional que incluye

diferentes técnicas para obtener la dimensión fractal, así como las características de los flocs: tamaño, forma y velocidad de sedimentación.

Dado que uno de los intereses del presente trabajo es la determinación de la dimensión fractal de los sedimentos cohesivos (flocs) de forma experimental, se utilizó un sistema de holografía digital en línea, puesto que en estudios previos se ha manejado este sistema para partículas y aunque presenta algunos aspectos a mejorar es un sistema que permite obtener hologramas de una forma más sencilla comparada con un sistema de holografía digital fuera de eje. Se utilizó este sistema considerando la dificultad que por sí sola presenta la obtención de la dimensión fractal de forma experimental debido a que son escasos los estudios precedentes.

Una vez obtenidos los parámetros: forma, tamaño y dimensión fractal, también se obtuvo la velocidad de caída de las partículas de forma experimental, dejando para futuros trabajos el que estos datos puedan ser usados para alimentar los modelos matemáticos existentes en la literatura para obtener la velocidad de caída de flocs.

## **1.2 HIPÓTESIS**

Debido a la complejidad que tiene el estudio de los sedimentos cohesivos (flocs) puesto que son muy frágiles, la implementación de una técnica óptica no invasiva como lo es la holografía digital permitirá obtener de forma más completa y experimental la dimensión fractal de los flocs.

Además, con esta técnica también se obtendrán características como: forma, tamaño y velocidad de sedimentación de manera experimental.

## **1.3 OBJETIVOS**

### **1.3.1 Objetivo general**

Implementar un sistema de holografía digital en línea para determinar de forma experimental la dimensión fractal de sedimentos cohesivos, así como sus características de sedimentos cohesivos (Flocs) tales como: forma, tamaño, dimensión fractal y velocidad de caída considerando su naturaleza tridimensional.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Realizar una búsqueda bibliográfica referente a los sistemas de holografía digital, así como su aplicación a la caracterización de partículas.
- Diseñar e instalar un sistema de holografía digital en línea que permita obtener hologramas tanto de partículas esféricas como no esféricas, para la caracterización de las partículas en 3D.
- Analizar las diferentes técnicas de reconstrucción de hologramas que permitan la reconstrucción adecuada de partículas esféricas, para elegir la que se pueda implementar para la reconstrucción de hologramas de partículas no esféricas.
- Desarrollar una herramienta computacional que permita la reconstrucción de hologramas, e implementar los diferentes métodos del conteo de cajas para determinar la dimensión fractal de flocs, que permitan validar los modelos propuestos para sedimentos cohesivos.

# CAPÍTULO 2

## SEDIMENTOS COHESIVOS

En este capítulo se pretende que el lector conozca los conceptos básicos que se deben tener para la presente investigación con respecto a sedimentos cohesivos, dado que de ello depende que pueda tenerse una idea más clara y/o concreta. Primero se dará una introducción al concepto de sedimentos y posterior a ello la clasificación de estos, dando un mayor énfasis en los sedimentos cohesivos.

El estudio de la sedimentación se ha vuelto un tema de gran importancia debido a que, su análisis y caracterización permite predecir su comportamiento y con ello realizar estudios más completos en las diferentes áreas en las que se encuentran todo tipo de sedimentos. Para nuestro caso de estudio nos permitirá predecir el comportamiento de sedimentos cohesivos que se encuentran tanto en cauces, como en aguas de residuales provenientes de estanques de peces.

### **2.1. Sedimentos**

Se consideran como sedimentos a las partículas desprendidas de rocas y suelos que son transportadas por las corrientes de agua, así como por los vientos. Estas partículas después de ser transportadas son depositadas finalmente a lo largo de los cauces de los ríos, en lagos o lagunas, en el mar y en las partes bajas de las cuencas.

Es difícil precisar las fuentes que generan los sedimentos que están presentes en el lecho de los ríos; sin embargo, de acuerdo con la definición previa una de las fuentes principales la conforman los suelos y rocas que se encuentran en la cuenca, el agua y el viento son las principales fuentes de erosión y transporte. Por otra parte, debido al quehacer del ser humano

en el medio en el que se desenvuelve, las fuentes de sedimento pueden clasificarse en dos grupos: naturales y artificiales.

Algunas de las fuentes naturales de generación de sedimento son la erosión de la superficie del terreno, erosión del cauce principal del río y sus cauces tributarios, los movimientos naturales del terreno entre otros. Las fuentes artificiales de sedimentos las constituyen la destrucción de la vegetación, la explotación de minas y canteras, los desechos urbanos e industriales y por supuesto las obras de ingeniería.

Generalmente en un sistema fluvial, en primer lugar, se encuentran los sedimentos que se originan en la superficie de la cuenca, seguido de éstos se encuentran los sedimentos que provienen del fondo y de las márgenes de los ríos y finalmente los sedimentos que provienen de los desechos urbanos e industriales.

### **2.1.1 Clasificación de los sedimentos**

Los sedimentos pueden clasificarse de acuerdo con su origen natural, por su condición, resistencia que presentan a ser arrastrados, su diámetro, así como su comportamiento ante el efecto de ser transportados por una corriente de agua. Es así, que los sedimentos se clasifican en: cohesivos y no cohesivos

#### **2.1.1.1 Sedimentos no cohesivos**

También son denominados materiales granulares y son los que están formados por granos finos o gruesos de partículas sueltas tales como las arenas y gravas. En este tipo de sedimentos predomina fuertemente la fuerza de gravedad sobre cualquier otra fuerza, por esta razón todas las partículas no-cohesivas tienen un comportamiento muy similar. Las fuerzas de arrastre y sustentación son resistidas principalmente por el peso propio de las partículas.

#### **2.1.1.2 Sedimentos cohesivos**

Se consideran sedimentos cohesivos debido a las fuerzas de cohesión que experimentan las partículas, cuya fuerza permite generar aglomeración de partículas y esta fuerza se opone a que las partículas individuales sean separadas o arrancadas del conjunto El grado de cohesión

depende del área superficial específica, es decir, la división entre el área superficial de la partícula y su peso (Mehta y McAnally, 2008).

Las partículas en suspensión se transportan con el flujo horizontal ya que no tienen movimiento propio. No obstante, a medida que se incrementa la concentración, por la cohesión éstas tienden a agruparse para formar agregados (flóculos) que pueden sedimentar por gravedad (Prandle, 2009).

Para materiales cohesivos, los parámetros de control para el sedimento dependen de muchas propiedades, tanto características de las partículas, como del medio en que se encuentran.

Los sedimentos cohesivos se caracterizan principalmente por la fuerza intermolecular entre sus partículas debido a su carga iónica; y a medida que disminuye el tamaño de la partícula, su superficie por unidad de volumen aumenta y las fuerzas entre las partículas son las que dominan el comportamiento del sedimento.

Por lo tanto, una vez que la cohesión ha sido vencida pueden llegar a comportarse como sedimentos no cohesivos, aunque éstos serán suspendidos con mayor facilidad, ya que, debido a su tamaño, su peso prácticamente no influye en sus movimientos y cuando el movimiento del flujo es reducido, muchas de ellas, tales como los coloides no se depositan a menos que exista la presencia de elementos que faciliten la floculación.

#### **2.1.1.2.1 Flóculos (flocs)**

Los sedimentos cohesivos están sujetos a los procesos de la agregación (debido a las características fisicoquímicas de los minerales de la arcilla), desintegración, deposición y erosión. Los flóculos o agregados de partículas cohesivas son considerados microsistemas con funciones o comportamientos autónomos interactivos. Son partículas dinámicas con una componente cambiante en sus comportamientos físico, químico y biológico, producto de su interacción con el agua (Droppo et al., 2000; Droppo, 2001).

Los procesos de floculación se han modelado siguiendo tres enfoques (Milligan y Hill, 1998): a) Coagulación Browniana, para líquidos con poco movimiento. b) Coagulación por corte, se

lleva a cabo en partículas de tamaño mediano con líquidos en movimiento. c) Coagulación por sedimentación diferencial (se presenta en partículas grandes).

Las principales variables físicas que se consideran en un flóculo son: su densidad; su porosidad; forma; tamaño y composición teniendo en cuenta las partículas que la componen (partículas primarias), por lo que la velocidad de caída y transporte dependen de estas variables y también de las características del flujo, principalmente de la turbulencia.

La mezcla turbulenta del líquido hace que los agregados suspendidos, de este tipo de sedimento, se pongan en contacto, induciendo la agregación adicional y produciendo el crecimiento de agregados más grandes. Simultáneamente estos agregados pueden romperse debido a los esfuerzos de corte.

La frecuencia con la cual las partículas chocan, crecen y se rompen (al estar suspendidas) depende en gran parte de la intensidad de la turbulencia (rangos de velocidad, esfuerzo de corte) y, en segundo plano, de la gravedad (Maggi, 2005).

Los flóculos más grandes (mientras no sean muy porosos) sedimentan más rápidamente que los flóculos pequeños y se acumulan en el lecho, por lo tanto, la estructura de la estratificación del lecho es de agregados pequeños sobre agregados grandes. Cuando las fluctuaciones turbulentas son suficientemente intensas, los agregados que forman la parte superior del lecho se levantan y se suspenden, por lo tanto, esos agregados participan en las reacciones de la floculación otra vez.

El proceso dinámico de la floculación depende de las tasas de agregación y desagregación de los sedimentos. Los procesos de agregaciones entre las partículas están relacionados con el movimiento Browniano, las tensiones de corte de la corriente, y la sedimentación diferencial de las partículas (Trento y Vinzon, 2004).

En relación con el proceso de desagregación es muy importante la tensión de corte del flujo, que, aunque no exista choque de partículas es capaz de generar el rompimiento de los flóculos. Las colisiones debidas a las tensiones de corte son originadas por los gradientes de velocidad generados en el seno del fluido, y son particularmente importantes en los cuerpos de agua naturales, donde el escurrimiento es altamente turbulento. Es importante resaltar que los

flóculos desempeñan un papel importante en el proceso de sedimentación de partículas en cauces, lagos, lagunas etc. y en la separación de los sólidos en sistemas de tratamiento de aguas residuales.

Las perturbaciones de la corriente aumentan la probabilidad de choque entre las partículas, sin embargo, un aumento importante de la turbulencia tenderá más a romper los flóculos ya formados que a promover su crecimiento (Trento y Vinzon, 2004).

La distribución de tamaño del flóculo es fundamental para caracterizar al sedimento en suspensión, además es importante considerar que son medios porosos con estructura fractal (Xiao et al., 2013). Por lo que, su caracterización es uno de los retos importantes puesto que, al ser irregulares y porosos permitirían que el fluido fluya a través de su interior, modificando algunas propiedades como la densidad, la cual es variable en función del tamaño del floc y de su permeabilidad (Xiao et al., 2013).

Para estudiar el comportamiento de materiales cohesivos desde el punto de vista del transporte hidráulico, lo que más interesa son las propiedades de las partículas en conjunto, es decir, la adhesión entre las partículas, la resistencia al corte, la composición granulométrica de la fracción gruesa, la composición mineral e índice de plasticidad (Trento y Vinzon, 2004).

Los flóculos generados en agua y tratamiento de aguas residuales típicamente tienen geometrías irregulares (fractales). Debido a la complejidad de los procedimientos analíticos para determinar la forma, tamaño, densidad y velocidad de caída, las teorías de la sedimentación asumen condiciones ideales.

## **2.2 Caracterización de sedimentos cohesivos (flocs)**

Para realizar una predicción del transporte de sedimentos cohesivos, es necesario definir su comportamiento y por ello se lleva a cabo la caracterización, siendo la forma, el tamaño, la densidad relativa, la dimensión fractal y la velocidad de sedimentación las características más estudiadas.

Con la finalidad de caracterizar los flóculos de forma general, se han realizado diversos estudios entre los que destacan los realizados por Winterwerp (2002), quien desarrolló un modelo de

floculación adoptando la teoría fractal, este modelo describe el tamaño característico de los flóculos y considera la turbulencia como factor dominante, que afecta los procesos de floculación. Sin embargo, considera los valores de dimensión fractal en el rango de 2.0 a 2.2 (Winterwerp, 1998; Winterwerp et al., 2006).

Por su parte, Khelifa y Hill (2006) proponen un modelo para predecir la densidad efectiva de flóculos y la velocidad de sedimentación usando una dimensión fractal variable, la cual depende del tamaño del floc, del tamaño de las partículas que lo forman denominadas partículas primarias y de la tasa de corte.

Recientemente se han refinado los modelos numéricos para el transporte de sedimentos finos, determinando la velocidad de sedimentación de flóculos en una columna de agua (Harris et al., 2004; Van Der Ham y Winterwerp, 2001; Warner et al., 2007), el transporte de fluido en lodos (Hsu et al., 2007; Winterwerp, 2002), así como los procesos de sedimentación y de consolidación (Merckelbach et al., 2002; Toorman, 1999). Sin embargo, la dinámica del floc, no se considera explícitamente, ya que requieren de ecuaciones gobernantes adicionales que consideren la evolución del tamaño y la densidad efectiva, como el propuesto por Winterwerp (1998) o Hill y Newell (1995).

### **2.2.1 Densidad**

Se ha demostrado que los flóculos no son partículas esféricas, si no que tienen formas irregulares y es común que se representen como objetos fractales.

Al ser muy importante la determinación de la densidad efectiva de un flóculo, son varios los autores que han desarrollado modelos matemáticos para su obtención variando algunos parámetros, dentro de los más destacados se encuentran los que consideran que el floculo está formado por partículas de diferentes tamaños, por lo cual la densidad efectiva puede ser expresada como (Khelifa *et al.*, 2006).

$$\rho_f = \rho_p \frac{\sum_{i=1}^k d^3}{D^3} \quad (2.1)$$

Donde  $d$  representa el diámetro de la partícula primaria y  $D$  es el diámetro equivalente de una esfera compuesta por  $k$  partículas primarias,  $\rho_p$  densidad de las partículas primarias

Mientras que, Tambo y Watanabe (1979) proponen el cálculo de la densidad efectiva como una relación entre los diámetros y la densidad del agua ( $\rho_w$ ) :

$$\rho_f - \rho_w = 0.0013 \left(\frac{D}{d}\right)^{-0.9} \quad (2.2)$$

Por su parte, Hawley (1982) introduce la importancia de la densidad de las partículas primarias ( $\rho_p$ ) y calcula la densidad efectiva como:

$$\rho_f - \rho_w = (\rho_p - \rho_w) \left(\frac{D}{d}\right)^{-0.9} \quad (2.3)$$

Mientras que, Lau y Krishnappan (1997) proponen el cálculo de la densidad efectiva mediante la siguiente expresión:

$$\rho_f - \rho_w = (\rho_p - \rho_w) \exp(-bD)^e \quad (2.4)$$

Donde  $\rho_f$  es la densidad del flóculo,  $\rho_p$  la densidad de las partículas primarias,  $\rho_w$  la densidad del agua,  $D$  es el diámetro del flóculo,  $b$  y  $e$  son constantes que dependen del tipo de sedimento y de la tasa de corte.

Para el caso de flóculos conformados por partículas primarias esféricas de idéntico diámetro  $d$ , Kranenburg (1994) propone la siguiente ecuación para la densidad de los flóculos.

$$\rho_f - \rho_w = (\rho_p - \rho_w) \left(\frac{D}{d}\right)^{F-3} \quad (2.5)$$

Donde  $\rho_f$ , es la densidad del flóculo;  $\rho_p$ , densidad de las partículas primarias y  $F$  es la dimensión fractal.

En esta expresión Kranenburg introduce el concepto de dimensión fractal. Esta dimensión es una medida de la compacidad del flóculo. Entre más denso sea un flóculo,  $F$  se acerca a 3 y en

la medida en que su densidad sea menor baja a 1, este concepto considera la estructura de un flóculo como una agregación de partículas primarias de un mismo diámetro  $d$  que forman un agregado equivalente a una esfera de diámetro  $D$  (Kranenburg, 1994).

### 2.2.2 Porosidad

Con respecto a la suposición de que todas las partículas son esféricas y así permanecen, se ha demostrado que los flóculos son partículas irregulares y es común que se representen como objetos fractales. Pero su propiedad más importante, es que la porosidad de un flóculo aumenta al incrementar su tamaño. La porosidad de un flóculo  $\theta$  se define como:

$$\frac{\rho_f - \rho_w}{\rho_p - \rho_w} = 1 - \theta \quad (2.6)$$

Li y Ganczarczyk (1989) presentan una relación entre la porosidad  $\theta$  de un flóculo y su dimensión fractal  $F$  esto es:

$$\theta = 1 - k_4 D^{F-3} F \quad (2.7)$$

Donde:  $k_4$  es una constante y  $D$  es el diámetro del flóculo. La dimensión fractal varía entre 1 y 3, para cuando  $F = 3$  se considera una esfera sólida. La variación de  $F$  no sólo depende del tamaño para floculación ortokinética, también depende de la tasa de corte (García Aragón et al., 2011b).

Mientras que Kranenburg definió a la porosidad de un flóculo esférico como:

$$1 - \theta = \left(\frac{D}{d}\right)^{F-3} \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Tamaño y forma de los flocs

Los flóculos, presentan formas muy diversas por lo cual pueden ser considerados como partículas irregulares y debido a los mecanismos de agregación y ruptura también presentan diferentes tamaños.

Cuando se desea caracterizar una partícula irregular por una sola dimensión debemos recurrir a la Teoría de la Esfera Equivalente. La idea es relacionar alguna o algunas propiedades geométricas de la partícula irregular con las correspondientes a una esfera y con ello calcular a partir de estas relaciones un diámetro equivalente.

### **2.2.3.1 Diámetros equivalentes**

Los instrumentos comerciales utilizados para medir tamaño de partículas utilizan distintos diámetros equivalentes, por lo tanto, debe esperarse como resultado distintos valores de diámetro de acuerdo al criterio que se use. A continuación, se resumen los diámetros más utilizados.

#### **2.2.3.1.1. Diámetro de una esfera de volumen equivalente ( $d_v$ )**

Es el diámetro de una esfera que posee el mismo volumen ( $V$ ) que la partícula que se desea caracterizar.

$$d_s = \left(\frac{6V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.9)$$

#### **2.2.3.1.2. Diámetro de una esfera de superficie equivalente ( $d_s$ )**

Es el diámetro de una esfera que posee la misma superficie externa ( $S$ ) que la partícula que se desea caracterizar.

$$d_s = \left(\frac{S}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

#### **2.2.3.1.3 Diámetro de una esfera de superficie por unidad de volumen equivalente ( $d_{SV}$ )**

Es el diámetro de una esfera que posee la misma relación de superficie externa ( $S$ ) por unidad de volumen ( $V$ ) que la partícula que se desea caracterizar.

$$d_{SV} = \frac{6V}{S} \quad (2.11)$$

#### 2.2.3.1.4. Diámetro de una esfera de área proyectada equivalente ( $d_a$ )

Es el diámetro de una esfera que posee igual área proyectada ( $A$ ) que la partícula que se desea caracterizar. Esta medida depende de la orientación de la partícula al momento de la medición.

$$d_a = \left(\frac{4A}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

La Figura 2.1 muestra una proyección de una partícula irregular (trazo azul). Si se establece el área de dicha proyección es posible estimar el diámetro de un círculo equivalente (figura de trazo rojo). La microscopía permite la estimación de  $d_a$ . Además, dependiendo en qué dirección se obtenga el área proyectada, las áreas serán diferentes y consecuentemente se obtendrán distintos diámetros equivalentes.

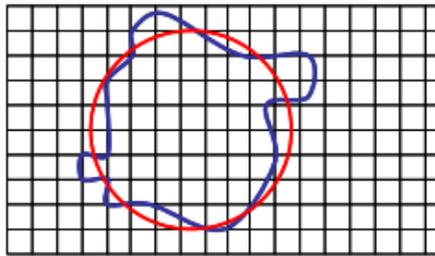


Figura 2.1. Conceptualización del área proyectada

#### 2.2.3.1.5. Diámetro de una esfera de perímetro equivalente ( $d_c$ )

Es el diámetro de una esfera que posee igual perímetro ( $P$ ) que la partícula que se desea caracterizar. Esta medida también depende de la orientación de la partícula al momento de la medición.

$$d_c = \frac{P}{\pi} \quad (2.13)$$

#### 2.2.3.2 Forma de partículas.

Hay aspectos de las partículas (como la forma) que pueden ser necesarios evaluar según la aplicación del producto final. Por ejemplo, la forma puede afectar la capacidad de fluir del producto. Las propiedades que más se usan son las siguientes:

### 2.2.3.2.1 Esfericidad ( $\psi$ )

La propiedad de forma más simple se define como esfericidad (la cual es una medida a la cercanía a la esfera perfecta)

$$\left(\frac{d_V}{d_s}\right)^2 \quad (2.14)$$

Se verifica que  $\psi \leq 1$ .

### 2.2.3.2.2 Circularidad ( $C$ )

Otra medida de la forma de la partícula es la “cercanía” a un círculo perfecto. El parámetro que cuantifica esta propiedad se denomina circularidad y se define como sigue

$$C = \frac{4\pi A}{P^2} \quad (2.15)$$

La circularidad es el cuadrado de la relación de: el perímetro de un círculo que tiene igual área proyectada ( $A$ ) que la partícula dividida por el perímetro de la partícula ( $P$ ).

El factor de forma es un valor adimensional que estima como el área proyectada de una partícula varía de un círculo. Por lo tanto, para las partículas esféricas,  $\varphi$  es igual a la unidad, mientras que para otras partículas el valor cambia.

## 2.2.4 Velocidad de caída

Se define como la velocidad terminal de una partícula (o floc) que sedimenta cuando el arrastre de fluido es igual a la fuerza de gravedad (Winterwerp y Van Kesteren, 2004). Además, es un parámetro clave para predecir el transporte de sedimentos.

Para partículas de sedimento no cohesivo puede ser calculada por la conocida ley de Stokes basado en el tamaño y la densidad de la partícula, así como la viscosidad del fluido circundante, cuando el diámetro del grano es inferior a 250  $\mu\text{m}$  (Dyer, 1986; van Leus-Sen, 1988).

Para sistemas cohesivos, se rige de manera más complicada por la interacción con una serie de factores incluyendo contenido orgánico, grado de floculación, mineralogía, SSC (concentración

de sedimentos en suspensión) y propiedades (por ejemplo, temperatura y salinidad) del fluido ambiente.

Por lo tanto, se acepta generalmente que la velocidad de caída ( $w_s$ ) de sedimentos cohesivos debe medirse en el campo dado que los flóculos no pueden sobrevivir durante el muestreo y transporte al laboratorio.

#### 2.2.4.1 Modelos matemáticos para determinar la velocidad de caída

La ecuación de Stokes permite determinar la velocidad de caída de partículas esféricas con número de Reynolds menor a uno en un fluido en reposo. La velocidad de caída puede ser calculada por el balance entre el peso sumergido de la partícula y la fuerza de resistencia (fuerza de arrastre) provocada por el fluido (Salinas y García, 2011).

$$w_s = \frac{(\rho_f - \rho_w)gD^2}{18\mu} \quad (2.16)$$

Donde:  $w_s$  es la velocidad de sedimentación,  $\rho_f$  es la densidad del floc y  $\rho_w$  es la densidad del agua,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\mu$  viscosidad dinámica del agua y  $D$  es el diámetro de la partícula.

Una partícula esférica presenta la misma forma para el flujo que se aproxima independientemente de su orientación. Por el contrario, para una partícula no esférica, esta situación es diferente y su orientación, así como su forma, cambiarán según la condición de flujo: laminar, transicional o turbulento.

Debido a que la forma de la partícula influye en el coeficiente de arrastre  $C_d$ , algunas investigaciones han incluido un factor de forma  $\phi$ , en modelos de velocidad de sedimentación (Tambo y Watanabe 1979, Gorczyca y Ganczarczyk 1999) como sigue:

$$w_s = \left[ \frac{4g(\rho_s - \rho)d}{3C_d\phi\rho} \right]^{0.5} \quad (2.17)$$

Otra forma de describir la forma del floc es por geometría fractal. La dimensión fractal de un floc es una representación numérica de su forma geométrica altamente irregular. Esta forma irregular se atribuye a la distribución de partículas primarias que comprenden el floc (Li y Ganczarczyk 1989).

En sus trabajos Winterwerp (1999,2002) obtiene la ecuación para determinar la velocidad de caída considerando la dimensión fractal (fija) de los flocs.

$$w_s = \frac{\alpha_w}{18\beta_w} \frac{(\rho_p - \rho_w)g}{\mu} d^{3-F} \frac{D^{F-1}}{1+0.15R^{0.687}} \quad (2.18)$$

Donde:  $\alpha_w$  y  $\beta_w$ , son parámetros de forma;  $F$  es la dimensión fractal de los flóculos;  $\rho_p$  es la densidad de las partículas primarias;  $\rho_w$  es la densidad del agua;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $\mu$  viscosidad dinámica del agua;  $R$  es el número de Reynolds de la partícula;  $d$  es el tamaño de las partículas primarias que forman al floc y  $D$  es el tamaño del floc.

Por su parte en su trabajo Khelifa (2006) obtiene la ecuación que determina la velocidad de caída considerando la dimensión fractal (variable) de los flocs.

$$w_s = \frac{1}{18} \phi g \frac{(\rho_p - \rho_w)}{\mu} d^{3-F} \frac{D^{F-1}}{1+0.15R^{0.687}} \phi \quad (2.19)$$

Dónde:  $F$  es la dimensión fractal de los flóculos,  $\phi$  es el factor de forma,  $\rho_p$  es la densidad de las partículas primarias;  $\rho_w$  es la densidad del agua;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $\mu$  viscosidad dinámica del agua;  $R$  es el número de Reynolds de la partícula;  $d$  es el tamaño de las partículas primarias que forman al floc y  $D$  es el tamaño del floc.

Cabe señalar que el uso de la dimensión fractal como parámetro para obtener la velocidad es un parámetro muy útil debido a que obtener la densidad de los flocs es muy complejo, por lo cual el valor de la dimensión fractal define que tan compacto es y con ello su densidad efectiva.

Por su parte Maggi (2007), propone una función de ley de potencia para describir los cambios en la dimensión fractal del floc durante su crecimiento y esta ley se utiliza para analizar su

impacto sobre los parámetros estructurales del floc, la velocidad de sedimentación y la cinemática de agregación y desintegración.

Un análisis de este modelo para la dimensión fractal destaca los cambios de aproximadamente un factor de 2 o más en la porosidad del floc y las frecuencias de agregación y desintegración y de aproximadamente primer orden de magnitud en la densidad de floc y velocidad de sedimentación en comparación con los valores estimados con dimensión fractal constante.

Posteriormente Maggi (2013), propone una nueva ecuación con la que se demuestra que, los parámetros fractales están fuertemente correlacionados con la composición de las partículas (por ejemplo, el contenido de materia orgánica). Además, junto con los parámetros físicos, estos permiten determinar la velocidad de sedimentación terminal esto es:

$$w_s = \frac{-18\mu \pm \sqrt{18^2 \mu^2 6gD^3 \rho_f (\rho_s - \rho_f)}}{3D\rho_f} \quad (2.20)$$

Por su parte Garcia-Aragon et al. (2014), proponen la ecuación 2.21 para determinar la velocidad de caída considerando el coeficiente de arrastre de partículas permeables ( $C_{Df}$ ), la dimensión fractal, los diámetros tanto del floc ( $D$ ) como de la partícula primaria ( $d$ ) y la densidad relativa de las partículas primarias ( $\rho_s$ ).

$$w_s = \sqrt{\frac{4(\rho_s - 1)g(D)^{F-2}}{3C_{Df}(d)^{F-3}}} \quad (2.21)$$

La cual puede también ser expresada como:

$$w_s = \frac{[13.08(s-1)]^{\frac{1}{2-n}} D^{\frac{F+n-2}{2-n}}}{a^{\frac{1}{2-n}} v^{\frac{n}{2-n}} d^{\frac{F-3}{2-n}}} \quad (2.22)$$

Donde:  $v$  es la viscosidad cinemática del agua,  $a$  y  $n$  son constantes que dependen del sedimento cohesivo en estudio. En el estudio los autores determinaron que  $n$  varía de 1.1 a 1.25 y  $a$  tiene un valor que depende del tipo de floc.

Existen en la actualidad diversos trabajos enfocados a la velocidad de sedimentación y a la turbulencia que existe en los fluidos, la investigación en estos temas aún puede dar mucha información. |

### **2.3 Técnicas de caracterización de sedimentos cohesivos**

Para llevar a cabo la caracterización de sedimentos cohesivos existen diversas técnicas las cuales van desde técnicas invasivas hasta técnicas no invasivas, estas últimas siendo más aceptadas debido a que no afectan el comportamiento de los flóculos.

#### **2.3.1 Técnicas ópticas (técnicas no invasivas)**

Las técnicas ópticas utilizadas para el estudio del comportamiento de los fluidos en la mecánica e hidráulica hacen posible la obtención de una grabación óptica, es decir de una imagen con las propiedades físicas del campo de flujo en estudio.

Además, algunas técnicas de diagnóstico óptico permiten determinar las propiedades de los campos de flujo, tal como la presión, temperatura, densidad y velocidad.

En las últimas décadas las técnicas ópticas se han desarrollado enormemente y enfocado principalmente a la medición de los campos de velocidad del flujo de fluidos (Raffel et al., 1998) los cuales, tienen aplicación práctica en la aeronáutica, turbo maquinaria, transferencia de calor, transporte, geofísica, entre otras, donde se han obtenido resultados interesantes, principalmente en el cálculo de perfiles de velocidad, deformaciones y caracterizaciones de partículas.

##### **2.3.1.1 Técnicas ópticas en 2D**

Las técnicas ópticas de mayor uso en el estudio del flujo de fluidos en 2D, son las técnicas de velocimetría óptica. Las técnicas de velocimetría óptica son técnicas no intrusivas e instantáneas, usadas para visualización cualitativa y diagnóstico de un campo de flujo cuantitativo (Adrian, 1991; Salinas, 2007).

La técnica se basa en la captura de imágenes sucesivas de una región iluminada por una hoja de luz láser, de un flujo con partículas trazadoras para la identificación correcta del campo de flujo. Las técnicas se dividen en dos categorías; que dependen de la densidad de partículas; para imágenes muy densas, se aplican algoritmos que se utilizan en forma local como los de correlación cruzada; para imágenes con baja densidad de partículas los algoritmos aplicados son de rastreo del movimiento individual de las partículas. Esta división se trata como dos técnicas separadas PIV (Particle Image Velocimetry) y PTV (Particle Tracking Velocimetry).

Una de las aplicaciones importantes de la técnica PTV es en el flujo en dos fases, principalmente en el transporte de sedimentos no cohesivos, campo en el cual se han obtenido resultados en la caracterización de las partículas y la determinación de la velocidad de caída de sedimentos no cohesivos (arenas) así como, el coeficiente de arrastre en fluidos en movimiento (Salinas, 2007).

Estos parámetros han permitido plantear modelos matemáticos considerando la hidrodinámica del flujo (Salinas, 2007) así como, calcular la eficiencia de las técnicas en la determinación de la velocidad de caída de partículas no uniformes y no esféricas en fluidos en movimiento.

No obstante, que cada técnica ofrece ventajas y desventajas en la determinación de campos de velocidades en 2D casi en forma instantánea, la técnica PIV es la más idónea en la mecánica de fluidos (Adrian, 1991) para estudiar el comportamiento de los flujos en 2D. Es muy útil en la determinación de los campos de velocidad para todo tipo de flujos (turbulentos y no turbulentos) mientras que la técnica PTV en 2D, además de obtener los campos de velocidad del fluido, también permite obtener la velocidad de caída de partículas sedimentarias no cohesivas, para diferentes tamaños y tipos de sedimentos (Salinas, 2007). Por lo que, se pueden adaptar a la determinación de la velocidad de sedimentación tamaño y densidad de partículas cohesivas (de flóculos), así como el cálculo de la velocidad y forma de las burbujas de agua en sistemas de recirculación.

Las técnicas PIV y PTV se han utilizado ampliamente en la medición de la velocidad en muchas aplicaciones que involucran flujo de fluidos, estas técnicas permitirán analizar también los factores hidrodinámicos del flujo y el proceso de formación de los flóculos para con ello efficientar la eliminación de sedimentos en sistemas de recirculación. Esos resultados se pueden utilizar para la validación de modelos matemáticos.

### 2.3.1.1.1 PIV: Velocimetría por imágenes de partículas

La velocimetría por imágenes de partículas (PIV) es una técnica no invasiva que permite obtener, mediante el procesamiento de imágenes digitales, el campo de velocidades de un fluido en movimiento. Las herramientas basadas en esta técnica son una potente alternativa de medición de la dinámica de fluidos, capaz de medir sin grandes errores un campo de velocidad distribuido en líquidos, gases y flujo multi fase.

Las técnicas de PIV basadas en plano laser consisten en agregar pequeñas partículas trazadoras al fluido en estudio, las cuales se asumen que se mueven con la velocidad y dirección de este. Si bien requiere de dominios transparentes o semitransparentes para permitir la visibilidad de las partículas al momento de capturar las imágenes, su aplicación ha encontrado mucha aceptación en el estudio de fluidos, permitiendo por ejemplo analizar turbulencias de manera apropiada.

En la Figura 2.1 se muestra un sistema PIV que consiste en un láser pulsado y arreglos ópticos que forman una lámina delgada de luz que penetra en el fluido, ubicando las partículas trazadoras ya que éstas dispersan la luz del láser, la posición es registrada por una cámara con sensor CCD. La técnica PIV es una técnica de visualización cuantitativa, visualiza el flujo y realiza medidas cuantitativas de velocidad.

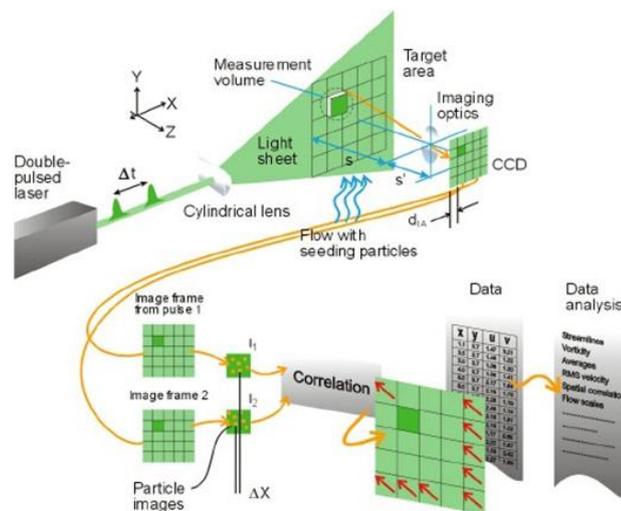


Figura 2.2 Sistema PIV (Barja, 2015)

La velocidad instantánea de un fluido (Adrián 1991) se obtiene aplicando la siguiente expresión:

$$\bar{u} = \frac{\Delta(\bar{x},t)}{\Delta t} \quad (2..23)$$

La técnica PIV consta de cuatro aspectos importantes:

- **Sembrado de partículas:** que consiste en agregar partículas de la misma densidad del fluido al flujo.
- **Iluminación del plano a investigar:** esta iluminación se realiza por medio de un láser y dispositivos ópticos.
- **Adquisición de imágenes:** se registra con cámaras con sensores CCD
- **Procesamiento de imágenes:** que se lleva a cabo mediante técnicas de correlación que puede ser en una imagen doble pulso (auto correlación) o dos imágenes mono pulso (correlación cruzada).

Este método permite determinar el desplazamiento medio de un grupo de partículas en un intervalo de tiempo en áreas o regiones, el software presenta los vectores velocidad mediante mapas donde se aprecia la dirección del flujo y la magnitud de la velocidad.

### 2.3.1.1.2 Velocimetría por rastreo de partículas

La velocimetría por rastreo de partículas (PTV) tiene el mismo principio que PIV, sin embargo, la técnica PTV se utiliza para determinar la velocidad de una partícula individual conociendo su desplazamiento en un intervalo de tiempo, para su aplicación se requiere una baja concentración de partículas dentro del fluido, siendo ésta su principal diferencia con respecto a la técnica PIV. A diferencia de PIV que calcula velocidades a partir de un grupo de partículas, PTV identifica cada partícula de forma individual, así como su desplazamiento. Ya que se conoce el tiempo que existe entre los pulsos de luz, se puede calcular la velocidad de cada partícula identificada.

Los aspectos importantes de PTV, al igual que PIV son: sembrado de partículas, iluminación del plano de estudio y adquisición de imágenes. La parte de adquisición de imágenes para PTV es la misma que para PIV, donde se requiere como mínimo dos imágenes continuas (imágenes

mono pulso), o bien una imagen con dos cuadros de captura en dos tiempos sucesivos (imagen multipulso). La técnica PTV presenta dificultades de aplicación en flujos rápidos, debido a la rapidez de los tiempos de captura entre imágenes (pulsos de luz), lo cual hace casi imposible la obtención de dos imágenes o una imagen multipulsada (Wernet, 1999).

Para determinar la velocidad individual de cada partícula por (PTV) se lleva a cabo el siguiente procedimiento:

- Identificación de las partículas de una imagen de partículas, esta detección se realiza en función de los niveles de grises de dos imágenes consecutivas (imagen mono pulso) o de una imagen con dos cuadros en tiempos consecutivos (imagen multipulso).
- La determinación de los pares de partículas, esto es, identificar las partículas en la imagen del primer pulso (primer cuadro), con su correspondiente par en el segundo pulso (segundo cuadro).

### **2.3.1.2 Técnicas ópticas en 3D**

En la actualidad se han desarrollado diversas técnicas que permiten el estudio de diferentes fenómenos, dentro de éstas es importante destacar las técnicas ópticas, puesto que permiten analizarlos sin alterar las características de los mismos, es por ello que en la presente investigación se selecciona la holografía digital debido a que es una técnica óptica no invasiva.

#### **2.3.1.2.1 Holografía digital**

La holografía es un proceso en 3D de imágenes que instantáneamente captura la información volumétrica del objeto de prueba. El uso de la holografía para el diagnóstico de pequeñas partículas proviene desde los años 60 (Thompson 1963 y Trolinger 1969).

La holografía consiste en grabar una serie de hologramas en un sensor CCD y reconstruir el campo del fluido 3D numéricamente. La idea de la holografía digital fue primeramente propuesta por Goodman y Lawrence (1967) y la teoría fundamental fue establecida en los años ochenta por (Yaroslavskii y Merzlyakov, 1980) aunque su implementación práctica vino a darse en los noventa por (Schnars y Juptner, 1994).

La aplicación de holografía digital en línea para mediciones de partículas fue primeramente reportada por Adams y Nishihara (1997), Kreis (1999) y seguido por Murata y Yasuda (2000). En sus aplicaciones grabaron mediante cámaras CCD el esparcimiento en línea de los campos de partículas en 3D, entonces reconstruyeron numéricamente el campo calculando la integral de difracción mediante la aproximación de Fresnel. De esa manera se extrae la posición 3D y el tamaño de las partículas a partir de la intensidad de las imágenes de la onda reconstruida.

#### **2.3.1.2.2 Holografía digital PIV (DHPIV)**

Esta técnica ha permitido el entendimiento, modelado y control de flujos turbulentos y complejos. Además, se hace posible su implementación en condiciones industriales adversas. Básicamente, la holografía digital toma la simplicidad de la técnica PIV combinada con las características volumétricas de la holografía.

Para entender la operación de la holografía digital se introduce el principio de operación de holografía PIV (HPIV) basada en placas fotográficas. HPIV mide velocidades instantáneas en 3D de flujos de fluidos a través de la imagen de pequeñas partículas dispersas en el flujo. La Figura 2.2 muestra el principio básico de HPIV. La figura 2.2 (a) muestra la etapa de grabado del holograma, donde un grupo de partículas que se mueven con el fluido es iluminado con un láser pulsado que tiene una duración de pulso láser del orden de  $ns$ .

En el plano del holograma, la luz esparcida por las partículas (la iluminación que proviene del objeto) interfiere con el haz de referencia. La intensidad de los patrones de interferencia generados por la interferencia de la iluminación objeto y referencia son grabados en el holograma. En la figura 2.2 (b) se muestra la etapa de reconstrucción del holograma, en donde este es iluminado con el haz de referencia original, la onda transmitida a través del holograma es el producto de la onda incidente y la transmitancia espacial del holograma, el cual tiene la información de la iluminación original del objeto. Como esta iluminación transmitida se propaga en el espacio en 3D, la iluminación original del objeto se reconstruye y produce una imagen en 3D de las partículas.

A lo largo del tiempo para HPIV digital o DHPIV (grabado digital y reconstrucción numérica); las películas holográficas se reemplazan por un sensor de imágenes digitales, lo que elimina completamente el proceso químico de revelado ya que el hardware y los circuitos de la cámara

se encargan de obtener los hologramas (ver figura 2.3). DHPIV también tiene la ventaja de la reconstrucción numérica por lo que no se necesita un láser como onda de referencia para la reconstrucción, lo que evita el tedioso y poco viable arreglo óptico de reconstrucción mencionado en el punto anterior. Cuando el arte de DHPIV sea perfeccionado, éste será muy fácil de usar y ampliamente demandado.

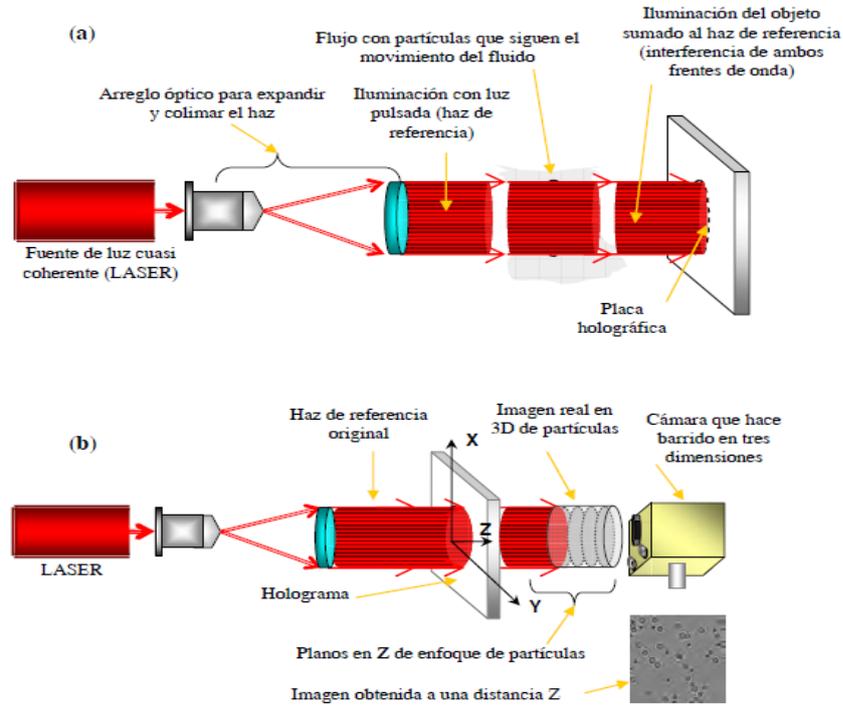


Figura 2.3. Arreglo HPIV (a) Etapa de grabado; (b) Etapa de reconstrucción (Coronel, 2011).

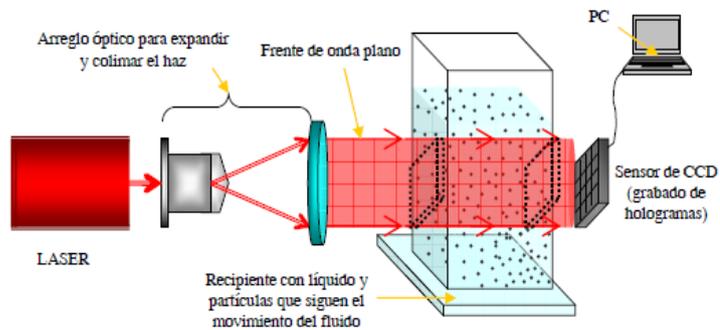


Figura 2.4. Arreglo en línea DHPIV (Coronel, 2011)

### 2.3.1.2.3 Sistema DHPTV

DHPTV basa su técnica principalmente en el rastreo de partículas, es una variante de la técnica DHPIV que aplica a hologramas con baja densidad de partículas, en esta técnica se determina la velocidad de las partículas contenidas en un fluido mediante un par de hologramas consecutivos separados un periodo de tiempo  $t$  igual al tiempo que tarda el sensor en obtener dos imágenes. Se mide entonces el desplazamiento individual de las partículas y se divide entre ese tiempo para obtener la velocidad.

DHPTV es muy útil, aunque no provee un campo de velocidades con alta resolución, ya que las partículas están esparcidas aleatoriamente y por tanto la información de velocidad también.

En la técnica de velocimetría por rastreo de partículas usando holografía digital, se identifica de manera individual la posición X, Y, Z de cada partícula. La manera de ubicar la posición Z de la partícula mediante su patrón de difracción, es obteniendo su perfil de máxima intensidad para cada plano Z de reconstrucción hasta encontrar su distancia de enfoque. La información de la posición X, Y de cada partícula se sabe por defecto al encontrar el punto máximo de intensidad de la partícula (distancia Z).

Después del proceso de reconstrucción y enfoque, se tienen las ubicaciones tridimensionales de cada partícula en ambos hologramas.

Una vez almacenados los datos, es necesario identificar qué posición tendrá en el segundo holograma cada partícula en movimiento del primer holograma, desgraciadamente todas son iguales y no hay manera de distinguir las o etiquetarlas por lo que se recurre a un método estadístico para predecir cuál sería su posición más probable.

Cabe señalar que en el presente trabajo se realizaron algoritmos para identificar la posición de las partículas, el algoritmo y todo el proceso que se llevó a cabo se explican en el capítulo 5, mientras que el sustento matemático de la holografía digital se explica en el capítulo 3.

## CAPÍTULO 3

### HOLOGRAFÍA DIGITAL

En el presente capítulo se da a conocer la información necesaria para que el lector conozca los conceptos necesarios para llevar a cabo la presente investigación relacionados con la holografía digital, así así mismo permita entender la importancia de la holografía como herramienta de adquisición de imágenes.

#### 3.1 Principios fundamentales de la holografía

La palabra holograma viene del griego, holos, que significa “todo” debido a que el patrón de interferencia registrado contiene toda la información del campo óptico. Fue utilizada por primera vez por Gabor D (1948) con el objetivo de mejorar las imágenes de los microscopios electrónicos. Aunque representaba un método totalmente diferente para la formación de imágenes, fue hasta los años 1962-64 que la holografía empezó a tener gran interés en la investigación gracias a que Emmeth Leith y Juris Upatnieks (1962) realizaron una serie de publicaciones describiendo formas para compensar los principales problemas de la holografía de Gabor esto es: la limitada coherencia e intensidad de la luz, la combinación de la señal de la imagen formada y las ondas que iluminan durante la lectura de salida.

El uso del láser como fuente de iluminación solucionó el problema de coherencia permitiendo la iluminación difusa de objetos tridimensionales amplios y así, tener la posibilidad de ver la reconstrucción de un objeto con efectos de profundidad. Otra ventaja del láser es que permite una gran libertad y la limita en la elección del objeto utilizado y la disposición física de la congelación para la captura del holograma.

##### 3.1.1 Interferencia

La interferencia es un fenómeno que se presenta cuando dos o más ondas de luz coherentes se superponen. Este fenómeno es uno de los de mayor importancia en holografía.

El análisis de la interferencia parte del principio de superposición. En donde el resultado, para ondas electromagnéticas, es la intensidad de campo eléctrico en un punto en el espacio donde dos o más ondas se traslapan, por lo tanto, es igual a la suma de los vectores de las intensidades de las ondas individuales.

Si se considera la interferencia de dos ondas monocromáticas con igual frecuencia y longitud de onda, las ondas deben tener las mismas direcciones de polarización. Para la descripción del fenómeno de la interferencia, basta con considerar solo la parte que proporciona la distribución espacial de los campos. Con lo cual las ondas pueden describirse de la siguiente manera:

$$E_1 = A_{01}e^{i\varphi_1} \quad \text{y} \quad E_2 = A_{02}e^{i\varphi_2} \quad (3.1)$$

Donde  $A_0$  es la amplitud de la onda y  $\varphi = k \cdot r + \varphi_0$  es la fase.

Al superponer estas ondas la onda resultante es:

$$E(r) = E_1(r) + E_2(r) \quad (3.2)$$

Además, la intensidad de una onda plana ese describe como:

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} |E(r)|^2 \quad (3.3)$$

Donde:  $c$  es la velocidad de la luz y  $\epsilon_0$  es la permitividad en el vacío, es importante recordar que  $|E|^2 = E^*E = A_0$ .

Sustituyendo (3.1) en (3.3) y dejando de lado por simplicidad el término  $\frac{c\epsilon_0}{2}$  dado que este no afecta directamente los resultados por ser constante y al no ser de interés el valor absoluto de  $I$  se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= |E_1 + E_2|^2 = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* \\ I &= A_{01}^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde:  $I_1 + I_2$  son las intensidades individuales y  $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  es la diferencia de fase de las ondas,  $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$  es el termino de interferencia el cual depende de la diferencia de fase de las ondas.

En holografía, el registro de un holograma se basa en la interferencia de dos ondas de luz, una que proviene del objeto de estudio y otra de referencia; el patrón de interferencia registrado se conoce como holograma.

### 3.1.2 Difracción

Cuando la luz es obstruida por un obstáculo, el cual puede ser una estructura opaca con aberturas o tener una estructura transparente con porciones opacas, uno espera ver la sombra geométrica del obstáculo, pero, cuando las dimensiones de este son del orden de la longitud de onda, en lugar de ver la sombra geométrica del objeto, lo que se observa es un patrón de zonas brillantes y oscuras. Este fenómeno se conoce como difracción.

En holografía, la reconstrucción óptica de un holograma se realiza por la difracción de la onda de referencia, ya que tiene una estructura difractante transparente, por lo tanto, se requiere entender el mecanismo de reconstrucción de un frente de onda que es difractado.

El término difracción definido por Sommerfeld establece que: “*Es cualquier desviación de rayos de luz de trayectorias rectilíneas, los cuales no pueden ser interpretadas como refracción o reflexión.*”. La difracción puede ser explicada cualitativamente con el principio de Huygens, el cual fue postulado en 1678, donde se expresa de manera intuitiva que: si cada punto sobre el frente de onda de una perturbación fuera considerado como una nueva fuente de una perturbación puntual de ondas esféricas secundarias, entonces el frente de onda en un instante después formase el nuevo frente de onda.

La ecuación que describe cuantitativamente la difracción es la integral de Fresnel- Kirchhoff:

$$E(\xi', \eta') = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \frac{e^{-ik\rho'}}{\rho'} Q dx dy \quad (3.5)$$

Con

$$A(x, y) = \frac{E_0 e^{-i\kappa\rho}}{\rho} \quad (3.6)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + d^2} \quad (3.7)$$

$$\rho' = \sqrt{(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2 + d^2} \quad (3.8)$$

$$Q = \left[ \frac{\cos\theta_S + \cos\theta_O}{2} \right] \quad (3.9)$$

donde  $A(x, y)$  es la amplitud compleja en el plano de la apertura, ver sistema de coordenadas en la figura 3.1,  $\Gamma(\xi', \eta')$  es el campo en el plano de observación,  $\rho'$  es la distancia entre un punto en el plano de la apertura y un punto en el plano de observación,  $Q$  se conoce como factor de oblicuidad, y relaciona los ángulos de entrada y salida y tiene como fin evitar que los frentes de onda que vienen del plano fuente regresen a él.

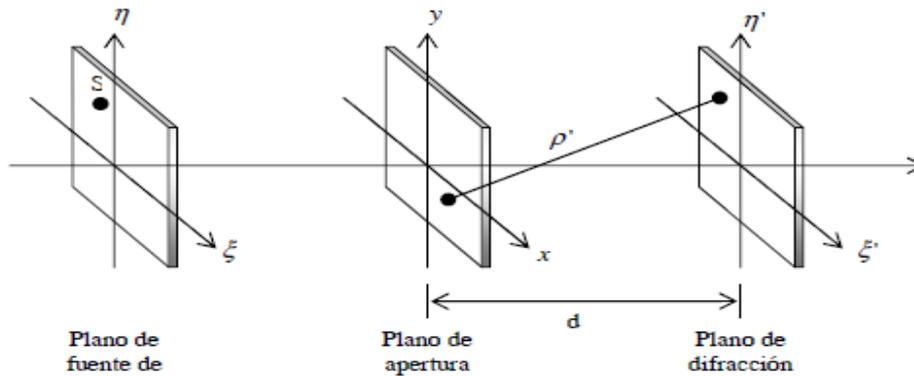


Figura 3.1 Sistema de coordenadas (Coronel, 2011)

En la práctica,  $\theta_S \approx 0$  y  $\theta_O \approx 0$ , por lo que

$$Q \approx 1 \quad (3.10)$$

Con esto, la fórmula de difracción queda de la siguiente forma:

$$E(\xi', \eta') = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \frac{e^{-i\kappa\rho'}}{\rho'} dx dy \quad (3.11)$$

Por lo tanto, el campo  $E(\xi', \eta')$  en el punto de observación  $O$ , es proporcional a la amplitud compleja de las ondas esféricas que emergen de la fuente evaluadas en el punto  $P$ , las cuales están descritas por el término  $A(x, y)$ ; también, es proporcional a las ondas secundarias de Huygens que emergen del mismo punto, descritas por el término  $\frac{e^{-ik\rho'}}{\rho'}$ .

### 3.1.3 Fundamento matemático de la holografía

Podemos definir a la holografía como una técnica mediante la cual es posible registrar y reconstruir un frente de onda proveniente de un objeto.

Para describir matemáticamente el proceso de la holografía, consideremos que la onda objeto queda representada por la expresión

$$E_o(x, y) = A_o(x, y)e^{i\varphi_o(x, y)} \quad (3.12)$$

Donde  $A_o$  es una amplitud real y  $\varphi_o$  es la fase de la onda objeto. La onda de referencia se representa mediante:

$$E_R(x, y) = A_R(x, y)e^{i\varphi_R(x, y)} \quad (3.13)$$

Con una amplitud  $A_R$  real y una fase  $\varphi_R$ . Aquí se supone que estas dos ondas son generadas en el plano  $(\xi, \eta)$  (figura 3.1), y que interfieren en un punto del plano  $(x, y)$  de esta misma figura, que es el plano donde se encuentra el material de registro y donde quedaría registrado el holograma. Posteriormente, el holograma servirá como transparencia para la reconstrucción en el plano  $(\xi', \eta')$ .

Entonces, la intensidad registrada queda descrita mediante lo siguiente (como se describió en el apartado de interferencia):

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |E_o + E_R|^2 = (E_o + E_R)(E_o + E_R)^* \\ &= |E_o|^2 + |E_R|^2 + E_o E_R^* + E_R E_o^* \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para la reconstrucción física, se ilumina el holograma con la onda de referencia  $E_R(x, y)$  esto equivale a multiplicar la función holograma  $h(x, y)$  por la expresión de esta onda. La onda transmitida  $E_t$ , queda descrita por:

$$E_t = E_R h = \underbrace{[h_0 + \beta\tau(|E_o|^2 + |E_R|^2)E_R]}_{Te1} + \underbrace{\beta\tau E_R^2 E_o^2}_{Te2} + \underbrace{\beta\tau |E_R|^2 E_o}_{Te3} \quad (3.15)$$

Las etiquetas en la ecuación 3.15, sirven para el siguiente análisis:

Te1. Este término, es una atenuación de la onda de referencia, y representa a las ondas no difractadas que pasan por el holograma (orden cero de la difracción).

Te2. El segundo término es una imagen real pseudoscópica (perspectiva invertida) distorsionada del objeto. En la práctica esta suele tener mala calidad o no estar presente a la hora de la reconstrucción.

Te3. Este término es la onda objeto reconstruida, que forma una imagen virtual ortoscópica (perspectiva correcta). El factor  $\beta\tau |E_R|^2$  solo influye en el brillo de la imagen.

Existen numerosos métodos para grabar los hologramas, sin embargo, las técnicas de adquisición se caracterizan comúnmente sobre el arreglo óptico, el haz objeto y el haz de referencia que permiten clasificar los sistemas holográficos. La clasificación de los sistemas holográficos de acuerdo con la geometría del arreglo es: holografía digital en línea (Holografía de Gabor) y holografía digital fuera de eje (Holografía de Leith-Upanieks).

### 3.2 Holografía digital en línea

La holografía en línea consiste en el uso de una fuente de luz láser que emite ondas esféricas, las cuales son colimadas por una lente, y las ondas planas resultantes atraviesan el objeto bajo prueba hasta incidir en el medio de grabado como se muestra en la figura 3.2.

Para el caso de holografía digital, la difracción es descrita por la integral de Fresnel-Kirchhoff

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) \frac{e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\rho'}}{\rho'} dx dy \quad (3.16)$$

Con

$$\rho' = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + d^2} \quad (3.17)$$

Donde,  $h(x, y)$  es la función del holograma y  $\rho'$  es la distancia entre un punto en el plano del holograma y un punto en el plano de reconstrucción.

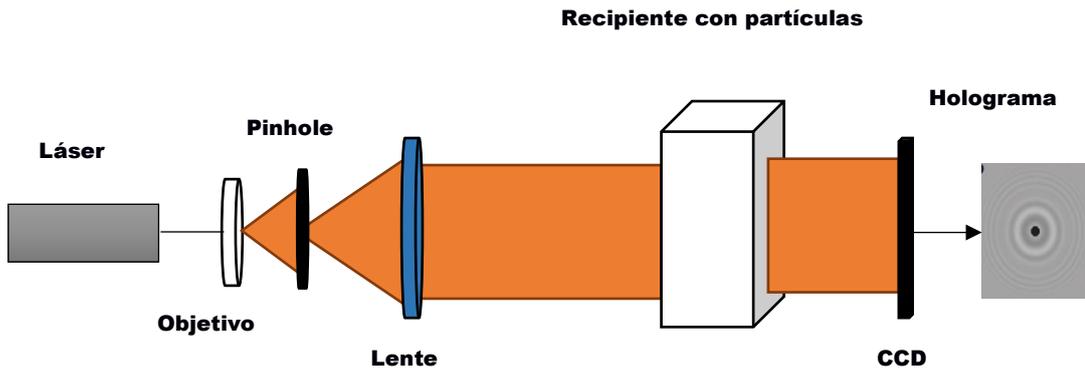


Figura 3.2. Sistema Holográfico en línea

### 3.3 Grabado digital de hologramas

La grabación de un holograma digital consiste en una matriz de  $N \times N$  números (píxeles) que resultan del mapeo bidimensional de  $I(x, y)$  por la cámara CCD (Monada et al, 2009)

$$I(k, l) = I(x, y) \text{rect}\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}\right) \times \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \delta(x - k \Delta x, y - l \Delta y) \quad (3.18)$$

Donde,  $k, l$  son enteros,  $L \times L$  es el área sensible utilizada del chip, y  $\Delta x = \frac{L}{N}$ ,  $\Delta y = \frac{L}{N}$  definen los intervalos de muestreo en el plano del holograma, esto es, el tamaño del píxel.

### **3.3.1 Requerimientos para el registro de hologramas digitales**

Para llevar a cabo un buen grabado de hologramas se deben considerar los siguientes requerimientos:

#### **3.3.1.2 Dispositivo a utilizar (CCD)**

Se usan dispositivos CCD debido a que su sensibilidad es mucho mejor que la sensibilidad de las emulsiones fotográficas usadas en la holografía clásica. El rango espectral que alcanzan a detectar las cámaras CCD va de  $400nm$  a  $1000nm$  aproximadamente. Además, la energía luminosa total que incide en el CCD se puede controlar.

#### **3.3.1.3 Frecuencia espacial**

Debe cuidarse la frecuencia espacial, la cual en holografía digital está determinada por la distancia entre píxeles, es por ello que se requieren CCDs de alta resolución.

#### **3.3.1.3 Estabilidad**

Es necesario un sistema óptico estable, dado que cualquier cambio en la diferencia de caminos ópticos de los haces que interfieren será causa de un movimiento de las franjas y por lo tanto el contraste se verá afectado reduciéndose o desapareciendo.

### **3.4 Pre-procesamiento de hologramas**

En los campos que se aplica el procesado digital de imágenes (PDI), en dependencia de la aplicación, es necesario resaltar o identificar características específicas de las imágenes que se traten como bordes, límites, figuras, etcétera. De esta forma, se hace necesario realizar funciones de pre-procesado para preparar las imágenes para su posterior procesamiento. En este punto es que el filtrado digital viene a ocupar un escalón fundamental dentro del PDI.

Básicamente, el proceso de filtrado en esta temática se describe como el conjunto de técnicas englobadas dentro del pre-procesamiento de imágenes cuyo objetivo principal es obtener, a

partir de una imagen determinada, otra cuyo resultado sea más adecuado, mejorando ciertas características de la misma que posibilite efectuar operaciones del procesado sobre ella.

De esta forma, los principales objetivos que se persiguen con la aplicación de filtros digitales son:

- Suavizar la imagen (reducir las variaciones de intensidad entre píxeles vecinos).
- Realzar bordes (destacar los bordes presentes en una imagen).
- Detectar bordes (detectar los píxeles donde se produce un cambio brusco en la función intensidad).
- Eliminar el ruido presente en la imagen (eliminar aquellos píxeles cuyo nivel de intensidad es muy diferente al de sus vecinos y cuyo origen puede estar tanto en el proceso de adquisición de la imagen como en el de transmisión o inclusive, durante la reproducción).

La eliminación del ruido es una de las características básicas que se desea durante el pre-procesamiento de los hologramas.

### **3.5 Reconstrucción de hologramas**

Una vez que el holograma fue capturado, se encuentra codificado numéricamente como una imagen digital en forma de un patrón de interferencia, y el siguiente paso es la reconstrucción del mismo para obtener la información objeto de su uso.

#### **3.5.1 Métodos de reconstrucción de hologramas**

Existen diferentes métodos para la propagación numérica del campo difractado ópticamente, entre los más conocidos son: método de Fresnel y el método de la Convolución. A continuación, se presenta una breve descripción de cada uno de ellos para conocer sus ventajas y desventajas.

##### **3.5.1.1 Aproximación de Fresnel**

En la aproximación de Fresnel, se hacen una serie de simplificaciones sobre la integral de Fresnel-Kirchhoff (ecuación 3.16) que describe matemáticamente la difracción de una onda de luz por una apertura, puesto que para realizar la reconstrucción numérica del campo óptico es necesario resolverla, pero dado que dicha solución analítica no es sencilla, es necesario realizar

aproximaciones aritméticas con soporte físico que permitan simplificar el integrando de dicha ecuación; así, para valores de  $(x, y)$  y de  $(\xi', \eta')$  los cuales son pequeños comparados con la distancia  $d$  entre el plano de reconstrucción y el plano del holograma, la expresión puede ser expandida como una serie de Taylor

$$\rho = d + \frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{2d} - \frac{1}{8} \frac{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^2}{d^3} + \dots \quad (3.19)$$

El cuarto término puede ser despreciado ya que es pequeño comparado con su longitud de onda.

$$\frac{1}{8} \frac{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^2}{d^3} \ll \lambda \quad (3.20)$$

o

$$d \gg \sqrt[3]{\frac{1}{8} \frac{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^2}{\lambda}} \quad (3.21)$$

Entonces la distancia  $\rho$  consiste en los términos lineales y cuadráticos

$$\rho = d + \frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{2d} \quad (3.22)$$

Sustituyendo  $\rho$  en la ecuación 3.16, la nueva expresión para la reconstrucción de la imagen real resulta

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda d} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda}d} \times \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} h(x, y) E_R^*(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{(\xi-x)^2}{2d} + \frac{(\eta-y)^2}{2d} \right)} dx dy \quad (3.23)$$

Realizando las operaciones de argumentos se llega a:

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda d} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda}d} e^{-\frac{i\pi}{\lambda d}(\xi^2 + \eta^2)} \times \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} h(x, y) E_R^*(x, y) e^{-i\frac{\pi}{\lambda d}(x^2 + y^2)} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d}(x\xi + y\eta)} dx dy \quad (3.24)$$

### 3.5.1.2 Convolución

El procesamiento numérico de la integral de Fresnel-Kirchhoff sin su aproximación consume demasiado tiempo, por eso se establece una formulación diferente pero equivalente y más conveniente. Esta formulación hace uso del teorema de convolución y es nombrada “aproximación por convolución”. La fórmula de reconstrucción (ecuación 2.16) puede interpretarse de la siguiente manera:

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, t) E_R^*(x, y) g(\xi, \eta, x, y) dx dy \quad (3.25)$$

Donde la respuesta la impulso  $g(\xi, \eta, x, y)$  esta dada por

$$g(\xi, \eta, x, y) = \frac{i}{\lambda} \frac{\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{d^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right]}{\sqrt{d^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \quad (3.26)$$

De acuerdo con la ecuación 3.26, el sistema lineal caracterizado por

$$g(\xi, \eta, x, y) = g(\xi - x, \eta - y) \quad (3.27)$$

es invariante en el espacio y la integral puede ser considerada como una convolución, entonces se puede aplicar el teorema de convolución que dice que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es igual al producto de las transformadas de Fourier de las funciones individuales:

$$\mathfrak{F}\{(f \otimes g)(x, y)\} = F(u, v)G(u, v) \quad (3.28)$$

Según el teorema, la transformada de Fourier de la convolución de  $h \cdot E_R^*$  con  $g$  es el producto de las transformadas  $\mathfrak{F}\{h \cdot E_R^*\}$  y  $\mathfrak{F}\{g\}$ . Entonces  $\Gamma(\xi, \eta)$  puede ser calculada obteniendo primero  $\mathfrak{F}\{h \cdot E_R^*\}$ , después multiplicando el resultado por  $\mathfrak{F}\{g\}$  y al final, realizando la transformada inversa de esa multiplicación.

La respuesta numérica al impulso es:

$$g(k, l) = \frac{i}{\lambda} \frac{\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{d^2 \left(k - \frac{N}{2}\right)^2 \Delta x^2 + \left(l - \frac{N}{2}\right)^2 \Delta y^2}\right]}{\sqrt{d^2 \left(k - \frac{N}{2}\right)^2 \Delta x^2 + \left(l - \frac{N}{2}\right)^2 \Delta y^2}} \quad (3.29)$$

El movimiento de las coordenadas en  $N/2$  se da por razones de simetría.

Finalmente, la notación para la reconstrucción de la imagen real es:

$$\Gamma(\xi, \eta) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}(h \cdot E_R^*) \cdot \mathfrak{F}(g)\} \quad (3.30)$$

## CAPÍTULO 4

### GEOMETRÍA FRACTAL

En el presente capítulo se dan a conocer los conceptos más utilizados con respecto a la dimensión fractal, así como, los métodos que mejores resultados han mostrado durante diversas investigaciones. Se pretende que el lector pueda identificar cada una de las variables que se utilizan en la dimensión fractal y como es que estas afectan a la presente investigación.

En los últimos años ha sido utilizado el concepto de geometría fractal para caracterizar las formas de los objetos naturales, desde finales de la década de 1980 y comienzos de la década de 1990 fue introducido el concepto como herramienta para determinar características texturales en una imagen (Clarke, 1986; Pentland, 1984; Sarkar, 1992); desde entonces y hasta la actualidad se han propuesto variedad de algoritmos que utilizan como base la dimensión fractal en el análisis de imágenes digitales (Yu, *et al.*, 2014; Theera, 2002) ya que se ha mostrado que los objetos del mundo real pueden tener estructura fractal, al igual que las imágenes captadas de dichos objetos (Matter, *et al.*, 2009).

Mandelbrot (1967) definió un objeto fractal como aquel que está compuesto por muchos elementos, cada uno de igual forma al elemento global, pero con una reducción en su escala, a su vez, dichos elementos se componen de múltiples elementos de la misma forma, pero de escala más reducida, es por ello que los objetos fractales son auto-similares e independientes de la escala.

La geometría fractal permite el estudio de objetos fragmentados que presentan invarianza respecto al cambio de escala, pues permite describir matemáticamente objetos que se consideran demasiado complejos encontrados en la naturaleza, por lo cual sumergirse en la geometría fractal implica correr el riesgo de cambiar la percepción de las nubes, los bosques, las galaxias, las hojas de los árboles y muchos otros elementos de la naturaleza.

La observación de Mandelbrot de la existencia de una “Geometría de la Naturaleza” ha inducido a los científicos a medir de una manera diferente los bordes de las nubes o el perfil de las copas de los árboles.

El análisis de los fractales abre todo un mundo de posibilidades para los científicos: con el análisis podemos encontrar patrones de repetición en objetos que la naturaleza ha dispuesto con tal complejidad que la geometría euclidiana resultaría una herramienta tediosa para explicarla dado que estos objetos son demasiado complejos para poseer tamaños característicos y ser descritos por la geometría euclidiana tradicional. En la tabla 4.1 se muestran las diferencias que existen entre la geometría euclidiana y la geometría fractal.

<b>Euclidiana</b>	<b>Fractal</b>
Tradicional (más de 2000 años)	Moderna (50 años aprox.)
Dimensión entera	Dimensión fractal (fraccionaria)
Trata de objetos hechos por el hombre	Apropiada para formas naturales
Descrita por fórmulas	Descrita por métodos iterativos

Tabla 4.1 Diferencias entre geometrías Euclidiana y Fractal

## 4.1 Características de los fractales

Los objetos fractales pueden definirse como aquellos objetos que: a) muestran auto-similitud; b) expresan una relación de ley de potencia entre dos variables y c) pueden ser caracterizados por una dimensión fractal no entera, la cual representa el grado de compactación de los objetos.

### 4.1.1 Autosimilitud

En los fractales se puede observar la propiedad de auto similitud, lo cual implica que, cuanto más te acercas con mayor precisión ves el mismo objeto; En principio esta auto-similitud es infinita, pero sólo en el caso de los fractales matemáticos. Los fractales naturales sólo presentan un número finito de “niveles” auto-similares. Además, aunque parecidos, no poseen una semejanza totalmente exacta. A esta propiedad de invarianza estadística del escalado se le denomina auto similitud estadística. Ciertos objetos naturales poseen un número finito de grados de auto-similitud, y pueden ser considerados como fractales naturales. Además, la auto-similitud es una propiedad esencial de la naturaleza fractal y puede ser cuantificada por una

dimensión fractal (F), es por ello que el concepto de auto similitud se usa para estimar la dimensión fractal

Según B. Mandelbrot (1967), un objeto es autosimilar o auto semejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas.

Los fractales pueden presentar tres tipos de auto similitud:

**Auto-similitud exacta:** Este es el tipo más restrictivo de auto-similitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo se encuentra en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS). Como se puede ver en la figura 4.1, en el caso de autosimilitud exacta se observa que cada parte del total de la figura está conformado por elementos exactamente iguales.

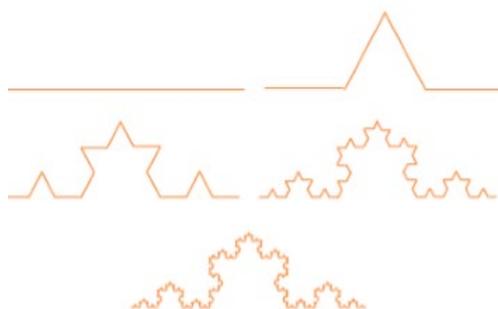


Figura 4.1 Autosimilitud exacta del copo de nieve de Koch.

**Cuasi auto-similitud:** Exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente Sullivan (1987) definió el concepto de conjunto cuasi auto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo. Como se puede ver en la figura 4.2, en el caso de cuasi autosimilitud se observa que cada parte del total de la figura está conformado por conjuntos iguales que contienen solo pequeñas diferencias entre sí.

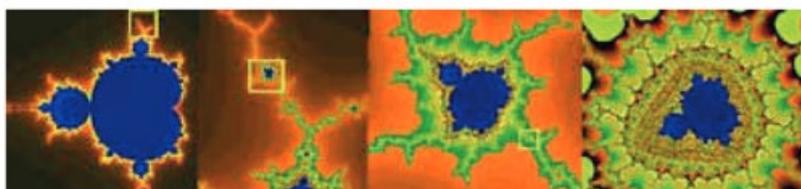


Figura 4.2 Cuasi autosimilitud en el conjunto de Mandelbrot: al variar la escala se obtienen copias del conjunto con pequeñas diferencias.

**Auto-similitud estadística:** Es el tipo más débil de auto-similitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo. En la figura 4.3 se puede observar que no se cumple con la condición de elementos iguales, y tampoco conjuntos iguales que compongan toda la imagen, sin embargo, estadísticamente preservan una igualdad.

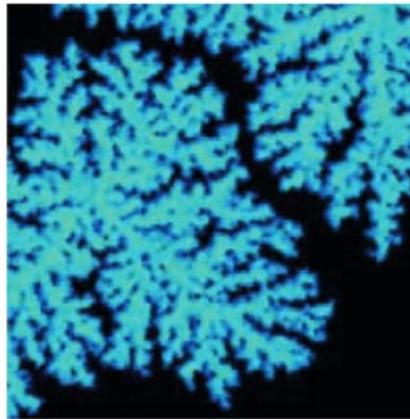


Figura 4.3. Auto-similitud estadística de un fractal generado por el proceso de agregación limitada por difusión.

#### 4.1.2 Dimensión fractal

El concepto de dimensión fractal es la base de la geometría fractal, y se introduce dado que los objetos de la naturaleza en su gran mayoría no cuentan con dimensión entera, es decir, se encuentran en una dimensión fraccionada (claro está que algunos objetos pueden contar con dimensión entera); así mismo, esta dimensión debe ser mayor que su dimensión topológica.

De una manera más general, la dimensión fractal se puede definir como el número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural, o bien como la capacidad que tiene un objeto de rellenar el espacio que lo contiene, por lo que puede tomar valores continuos en el espacio de los números reales.

Para los objetos euclidianos, el valor dimensional de **F** es: **0 para el punto, 1 para una línea recta, 2 para una superficie y 3 para un espacio (volumen)**. Los fractales no tienen dimensión entera, sino que pueden tener como dimensión cualquier valor real positivo.

Por ejemplo, la dimensión fractal ( $F$ ) es una característica útil a la hora de extraer características de las imágenes, en la segmentación de texturas, clasificación de formas y análisis gráfico en muchos campos, además, puede dar información estructural importante en el estudio de agregados(flocs).

#### 4.1.3 Relación de ley de potencia entre dos variables

La dimensión fractal puede ser directamente proporcional al área ( $A$ ) y la longitud ( $L$ ) como en la ecuación 4.1, y entre el volumen de ( $V$ ) y el área como en la ecuación 4.2

$$A \propto L^F \quad (4.1)$$

$$V \propto A^F \quad (4.2)$$

Dónde:  $A$  es el área,  $L$  la longitud,  $V$  el volumen y  $F$  la dimensión fractal.

Por ejemplo, los flocs por su estructura son considerados objetos fractales de masas. Esto significa que tanto la estructura interna y la superficie del agregado presentan propiedades fractales las cuales se puede determinar cómo:

$$M \propto L^F \quad (4.3)$$

Dónde:  $M$  es la masa de las partículas,  $L$  es una medida característica de tamaño y  $F$  es la dimensión fractal de la masa.

Gregory (1998) resume que la elección de medida del tamaño  $L$  no importa que las mismas tendencias se observan siempre que la elección sea constante.

#### 4.2 Métodos para determinar la dimensión fractal de imágenes digitales

La dimensión fractal se ha utilizado en diversas áreas, es por ello que existen diferentes métodos que permiten determinarla, A continuación, se presentan los métodos más usados para la estimación de la dimensión fractal en imágenes digitales en escala de grises;

Lopes y Betrouni (2009), realizan una agrupación de tres métodos que son: los métodos de conteo de cajas, el método de movimiento fraccional Browniano (fBm) y los métodos de medición de área.

#### **4.2.1 Método de conteo de cajas**

Es el método más usado para obtener la dimensión fractal y está basado en la dimensión de Minkowski-Bouligand.

Existen diferentes métodos de conteo de cajas para medir la dimensión fractal. Siendo los básicos el método de conteo de células reticulares y el método de conteo diferencial de cajas (DBC), que es uno de los más precisos, más utilizados y menos costosos en cuanto a su implementación computacional (Matter, 2009).

##### **4.2.1.1 Método de conteo de células reticulares**

Este método fue propuesto por Gangepain y Roques-Carmes (Sarkar, 1995). En este método la dimensión se calcula midiendo el nivel de gris cubierto por los diferentes cuadros de una imagen. El nivel de gris se puede calcular utilizando la longitud de escala reducida de la imagen con el nivel máximo de grises con respecto a la longitud de la imagen. Puede ser representado como:

$$L' = L \times \frac{G}{M} \quad (4.4)$$

Donde  $L'$  es el nivel de grises,  $L$  es la longitud de la caja,  $G$  son los niveles máximos de intensidad de grises en una imagen (es decir, se encuentra entre 0-255) y  $M$  es la longitud de la imagen.

Después de obtener el nivel de grises  $L'$ , se puede encontrar el número total de cajas necesarias para cubrir la imagen. Para obtener la dimensión fractal, se necesita el factor de reducción  $1/r$ . La longitud de la escala reducida se puede calcular utilizando la longitud de la caja  $L$  con respecto a la longitud de la imagen  $M$ . Como se muestra en la figura 4.4, el valor de reducción del comportamiento de escala  $2D$  puede ser:

$$r = \frac{L}{M} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{L} \quad (4.5)$$

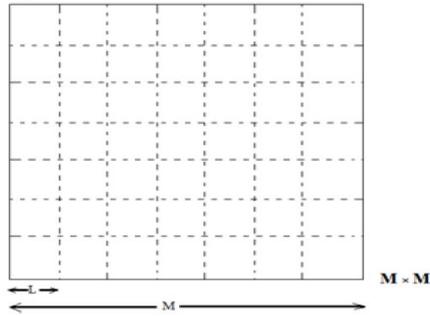


Figura 4.4 Factor de reducción de una imagen

Para una imagen del tamaño  $M \times M$ , y asumiendo el tamaño del cuadro de esa imagen  $L \times L$ , entonces toda la imagen está cubierta por los recuadros del lado  $L \times L \times L'$ . Por lo tanto desde diferentes tamaños de cajas de longitud  $L$ , se puede calcular la dimensión fractal ( $F$ ) que tiene el factor de reducción  $1/r$  (ecuación 4.5), donde  $M$  permanece constante para diferentes valores de  $L$ .

Para cada longitud  $L$ , se calcula el valor de  $N$  que representa el total de cajas que cubren a la imagen y se realiza una gráfica en escala  $\log - \log$  de  $N$  vs.  $1/r$ , de esta gráfica se obtiene la pendiente, la cual representa el valor de la dimensión fractal de la imagen en estudio.

#### 4.2.1.2 Método de conteo de caja diferencial (DBC)

La dimensión fractal ( $F$ ) se obtiene a partir de los diferentes niveles de grises de la caja en una imagen particular. Por lo tanto, en el método de Conteo de caja diferencial (DBC) la dimensión fractal se calcula como la diferencia entre el nivel de grises máximo y mínimo según el tamaño del cuadro de una imagen. Este método fue propuesto por B.B. Chaudhuri y Nirupam Sarkar y es basado en la propiedad de auto similitud de los fractales.

La dimensión  $F$  se obtiene con:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r}{\log \frac{1}{r}} \quad (4.6)$$

Donde  $N_r$  representa el total de cajas que cubren una imagen y  $r$  es el factor de reducción de las cajas.

Para entender mejor este método, se explica el procedimiento que se sigue para obtener los valores involucrados en la ecuación 4.6. Se asume una imagen de tamaño  $M \times M$  píxeles como una superficie espacial tridimensional (3-D) con  $(x, y)$  que denotan la posición del píxel en el plano de la imagen y la tercera coordenada ( $z$ ) es denotada por el nivel de grises.

En el DBC se toman tamaños de caja reducida  $s$ , donde debe cumplirse que  $s$  es entero y  $s \times s$  donde  $M / 2 > s > 1$ , así la escala de cada caja es  $r = s$ . Para la obtención de  $N_r$  se sigue el siguiente procedimiento: cada columna de la caja es obtenida como:  $s \times s \times L'$ , donde  $L'$  es la altura de cada caja y se cumple que  $\frac{G}{L'} = \frac{M}{s}$  donde  $G$  es el total de niveles de grises. Luego se encuentra el nivel de grises máximo y mínimo de la imagen en  $(i, j)$   $i$ -ésima celda y cae el  $l$ -ésimo y el  $k$ -ésimo píxel de esa celda, respectivamente.

Entonces

$$n_r = i - j + 1 \quad (4.7)$$

es la contribución de  $N_r$  en la celda  $(i, j)$ . Tomando la contribución de todas las celdas que tienen diferentes niveles de grises se obtiene el número total de cajas que cubren la imagen completa con la siguiente ecuación

$$N_r = \sum_{i,j} n_r(i, j) \quad (4.8)$$

Debe tomarse en cuenta que  $N_r$  se contrarresta con diferentes valores de  $r$  (es decir, diferentes valores de  $s$ ).

La dimensión fractal  $F$  a partir del ajuste lineal de mínimos cuadrados de  $\log(N_r)$  vs  $\log(1/r)$ .

En los últimos años investigadores como por ejemplo Li et al. (2009), han propuesto mejoras al algoritmo DBC, estas mejoras han surgido, en su mayoría, debido a la deficiencia de este algoritmo a la hora de realizar el conteo de cajas real para que cubra la totalidad de la imagen.

Se considera que los principales problemas que afronta este método son la: selección de la altura de la caja, el cálculo del número de cajas y la partición en cuanto a la intensidad de la imagen.

Considerando estos problemas Li et al. (2009) proponen el DBC mejorado en el cual modifica la expresión (4.6) por la ecuación (4.9)

$$F = \frac{\log N_{r1} - \log N_{r2}}{\log r1 - \log r2} \quad (4.9)$$

Dónde:  $F$  es la dimensión fractal,  $N_{r1}$  y  $N_{r2}$  son números de cajas que cubren la superficie ideal del fractal, cuando las escalas de caja son  $r1$  y  $r2$ , respectivamente.

Para el problema de la selección de la altura ellos consideran la desviación estándar de las intensidades en escala de grises que tiene la imagen y obtienen la altura con la ecuación 4.10

$$r' = \frac{r}{1+2o\sigma} \quad (4.10)$$

Donde  $o$  es un entero positivo y  $\sigma$  es la desviación estándar de los niveles de grises de la imagen.

Para el número de cajas proponen que la ecuación (4.7) se cambie a la (4.11)

$$n_r(i,j) = \begin{cases} \text{ceil}\left(\frac{I_{max}-I_{min}+1}{s'}\right) & \text{si } I_{max} \neq I_{min} \\ 1 & \text{si } I_{max} = I_{min} \end{cases} \quad (4.11)$$

Donde la expresión “ceil” denota la parte entera superior del valor resultante dentro de los paréntesis,  $I_{max}$  e  $I_{min}$  representan la intensidad de escala de grises máximo y mínimo respectivamente.

Para garantizar que toda la superficie está cubierta ellos propusieron que la partición de una imagen con el tamaño  $M \times M$  sea en bloques equivalentes con  $s \times s$  píxeles. Así, dos bloques espacialmente adyacentes se superponen en el límite en una fila (o columna, es decir,  $s$  píxeles). Por ejemplo, una imagen de tamaño  $16 \times 13$  píxeles que se muestra en la figura 4.5 está dividida en 20 bloques, cada bloque posee  $4 \times 4$  píxeles y dos bloques adyacentes se superponen por 4 píxeles en su límite compartido. Además,  $s - 1$ , representa la distancia máxima entre dos píxeles cualquiera en un bloque en la misma dirección vertical u horizontal. Por ejemplo, el bloqueo de escala de cada bloque en la figura 4.5 es igual a 3.

Después de esta partición, los píxeles en el límite de dos bloques vecinos, que caen en las cuadrículas  $(i, j)$  y  $(i + 1, j)$ , se tienen en cuenta para calcular  $nr(i, j)$  y  $nr(i + 1, j)$  también. Sin embargo, esos píxeles de límites dan diferentes contribuciones a  $nr(i, j)$  y  $nr(i + 1, j)$ . Si sus valores representan los valores verdaderos de los píxeles en el bloque  $(i, j)$  *th*, se utilizan para el cálculo de  $nr(i + 1, j)$  como valores aproximados de píxeles de límite. Afortunadamente, sus valores se acercan a los verdaderos valores de los píxeles de los límites en el bloque  $(i + 1, j)$ , ya que la superficie de intensidad de la imagen se considera contigua. Por lo tanto, un plano de imagen está dividido de la manera en que dos bloques vecinos se aproximan a cero en la distancia y todos los cuadros cubren por completo la intensidad de la imagen.

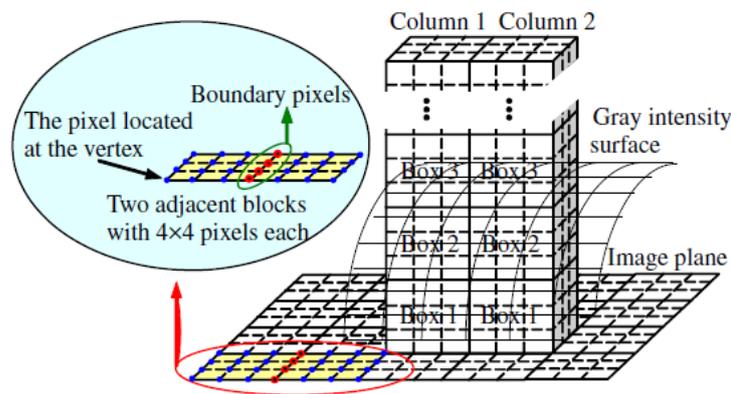


Figura 4.5. Determinación de los niveles de grises (Li et al., 2009)

Finalmente, para la obtención de la dimensión fractal se llevan a cabo los siguientes pasos:

- 1.- Se divide la imagen en bloques de tamaño  $s \times s$ , donde dos bloques adyacentes se superponen por una fila (y columna) de píxeles en el límite.
- 2.- Asignar una columna de cuadros con una escala de  $s \times s \times r'$  iniciando el píxel con el nivel de gris mínimo en el bloque,  $r$  se selecciona de acuerdo con la ecuación (4.10).
- 3.- Determinar  $n_r(i, j)$  usando la ecuación (4.11).
- 4.- Determinar  $N_r$  usando la ecuación (4.8).
- 5.- Trazar el ajuste lineal de mínimos cuadrados de  $\log(Nr)$  versus  $\log(r)$ . La  $F$  estimada es igual a la pendiente negativa de la línea recta ajustada.

### 4.2.1.3 Método de conteo de caja para imágenes no cuadradas

Este método fue propuesto por Long y Peng (2013) y es un método de recuento de cajas más preciso para imágenes de tamaño arbitrario, ya que permite que la altura del cuadro en la parte superior de cada bloque de cuadrícula sea adaptable a las escalas de grises máximas y mínimas de ese bloque y así evita las limitaciones comunes de los métodos de recuento de cajas existentes.

Para este método, también se parte de las ecuaciones 4.6, 4.7 y 4.8, sin embargo, lo más importante de su método es que puede ser aplicable a imágenes no cuadradas y las alturas de las cajas pueden ser modificables acorde al máximo y mínimo nivel de intensidad de cada bloque.

Parten de proponer que para una imagen de  $M \times N$  píxeles, con una  $r \geq 2$ , se propone una malla de celdas de  $m \times n$ , donde  $m = \frac{M}{r}$  y  $n = \frac{N}{r}$  y consideran 4 situaciones:

- $M = mr$  y  $N = nr$ : el plano de la imagen se divide uniformemente en  $r \times r$  bloques de  $m \times n$  píxel.
- $M = mr$  y  $N > nr$ : el plano de la imagen se divide en bloques  $r \times (r + 1)$ . Entre estos bloques, hay  $r \times r$  bloques de  $m \times n$  píxeles y  $r \times 1$  bloques de  $m \times (N - nr)$  píxeles.
- $M > mr$ ,  $N = nr$ : el plano de la imagen se divide en  $(r + 1) \times r$  bloques. Entre estos bloques, hay bloques  $r \times r$  de  $m \times n$  píxeles y bloques  $1 \times r$  de  $(M - mr) \times n$  píxeles.
- $M > mr$ ,  $N > nr$ : el plano de la imagen se divide en bloques  $(r + 1) \times (r + 1)$ . Entre estos bloques, hay  $r \times r$  bloques de  $m \times n$  píxeles,  $r \times 1$  bloques de  $m \times (N - nr)$  píxeles,  $1 \times r$  bloques de  $(M - mr) \times n$  píxeles y 1 bloque de  $(M - mr) \times (N - nr)$ .

Por ejemplo, el tamaño del plano de la imagen en la Figura 4.6 (a) es de  $11 \times 19$  píxeles. Con una relación  $r = 3$ , entonces  $m = 3$  y  $n = 6$ , lo que confirma la cuarta situación. Así que podemos dividir el plano de la imagen en  $3 \times 3$  bloques de  $3 \times 6$  píxeles,  $3 \times 1$  bloques de  $3 \times 1$  píxeles,  $1 \times 3$  bloques de  $2 \times 6$  píxeles y 1 bloque de  $1 \times 2$ , como se ilustra en la Figura 4.6 (a).

Después de dividir el plano de la imagen, se trata la imagen como un paisaje tridimensional, con la dimensión vertical que representa la escala de grises y se cuenta el número de cuadros en cada pila según cada bloque. La altura del cuadro es  $p = \Lambda / r$ , donde  $\Lambda$  es el número total de escalas de grises.

Para contener la imagen firmemente y con precisión, se permite que el número de cuadros sea real, en lugar de un número entero, es decir, se permite que la altura del cuadro en la parte superior de cada bloque sea una fracción de la altura de los cuadros que continúan, tal como se ve en la Figura 4.6 (b) y en la Figura 4.6 (c).

Se cuenta el número de casillas en el bloque  $(i, j)$  -ésimo como:

$$n_r(i, j) = \left( \frac{\max I(i, j) - \min I(i, j)}{p} + 1 \right) \left( \frac{S(i, j)}{mn} \right) \quad (4.12)$$

Donde  $S(i, j)$  es el área del bloque  $(i, j)$  -ésimo que para la mayoría de los bloques es  $m \times n$ , pero para los bloques a lo largo de los bordes en el lado derecho e inferior de las imágenes cuyas dimensiones planas no son potencias de 2,  $S(i, j)$  es menor que  $m \times n$  cómo se puede ver en la figura 4.6.

El método propuesto (Long & Peng, 2013) es capaz de colocar de manera adaptativa una caja de altura arbitraria en la parte superior de la pila de cajas según los valores de  $\max I(i, j)$  y  $\min I(i, j)$  mejorando así la precisión de estimación. El número total de cuadros de toda la imagen con una relación de  $r$  está dado por la ecuación 4.8. Al calcular varios valores de  $Nr$  para diferentes valores de  $r$ , la dimensión fractal  $F$  puede calcularse encontrando las pendientes de una curva log-log en una serie de puntos en el espacio  $(\log(1/r), \log(Nr))$ .

También consideraron un límite en el tamaño de la caja, el número de píxeles cubiertos por un bloque de cuadrícula en particular no debe ser inferior al número máximo de casillas en la parte superior de ese bloque, es decir,

$$mxn = (M/r)(N/r) \geq r \quad (4.13)$$

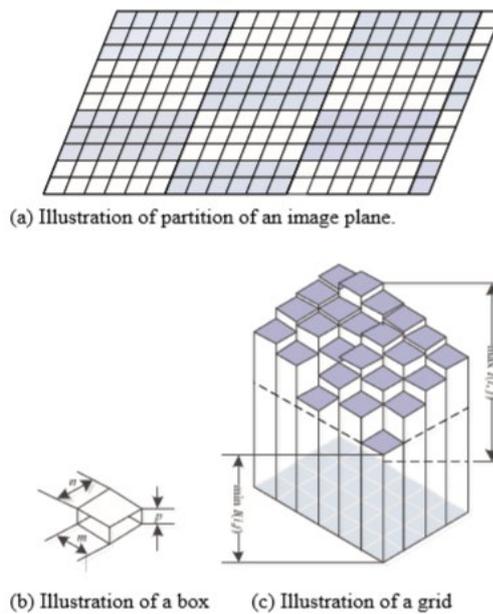


Figura 4.6. Partición de una imagen y recuento de cajas (Long and Peng, 2013).

#### 4.2.1.4 Método triangular de conteo de cajas (TBC)

Este método se propuso para mejorar recuento de cajas (BC) y fue propuesto por Yothin Kaewaramsri and Kuntpong Woraratpanya (2015). Este método simplemente divide las cajas cuadradas en dos triángulos iguales para aumentar la precisión de los recuentos asociados con el tamaño de las cajas, ajustándose a los requisitos del recubrimiento mínimo de la caja. El TBC mejora enormemente la precisión de la estimación.

Los pasos a seguir para implementar este método son:

- Dividir una imagen con  $M \times M$  píxeles en cuadrículas cuadradas con tamaños  $r$  variando de 2 a  $M/2$ .
- Calcular la altura de la caja  $h = r \times G/M$  donde  $G$  es el número total de niveles de grises. El tamaño de caja puede estar dado por  $r \times r \times h$ .

- Determine el recuento de cajas  $nd$  de cada patrón en la figura 4.7 usando (4.6), tal que  $l$  y  $k$  se puede calcular mediante  $IMax / h$  y  $IMin / h$ , donde  $IMax$  e  $IMin$  son los valores máximos y mínimos de intensidad de cada cuadrícula.
- Calcule  $p1$  promediando los recuentos de cajas de las diagonales superiores e inferior derecha, mientras que calcula  $p2$  promediando los recuentos de cajas de las diagonales superiores e inferior izquierda.
- Obtenga cada recuento de cajas  $n_r(i, j)$  usando (4.14)

$$n_r(i, j) = \max\{p1, p2\} \quad (4.14)$$

- Utilice (4.8) para calcular el número total de recuentos de cajas  $N_r$ .

Una de las ventajas de este método es que la gran diferencia de niveles de intensidad máxima y mínima en cada cuadrícula se puede reducir dividiendo una caja cuadrada en dos cajas triangulares iguales como se muestra en la Fig.4.7.

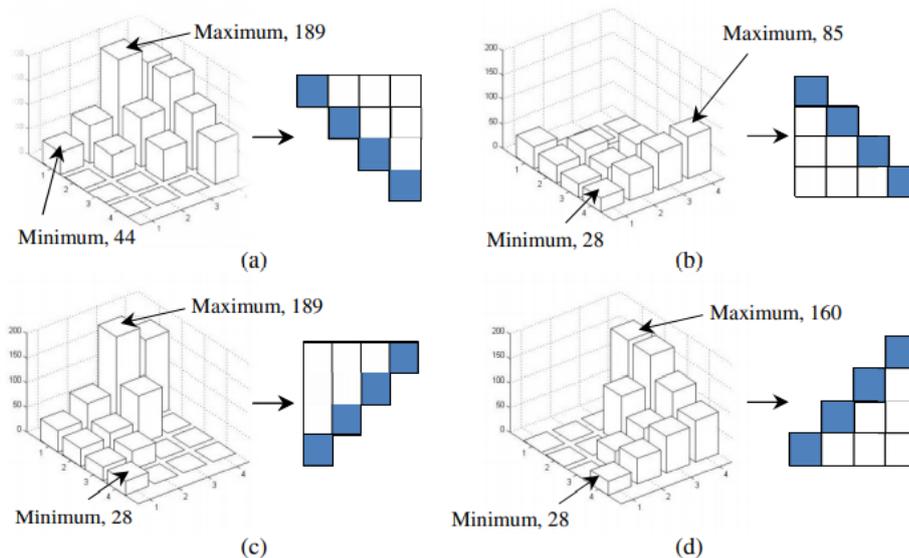


Figura 4.7. Ilustración de dividir un cuadro de imagen en dos cuadros triangulares con cuatro patrones (Kaewaramsri y Woraratpanya (2015)).

### 4.3 Dimensión fractal aplicada a sedimentos cohesivos

Mandlebrot introdujo el concepto de la teoría fractal en la década de 1970, la aplicación de la geometría fractal, es ahora un medio bien establecido para múltiples aplicaciones e investigaciones de procesamiento de imágenes SAR (Matter, 2009) y de otras imágenes utilizadas en diversas disciplinas que dan referencia de la utilización de la teoría fractal (Clarke,

1986; Yu, *et al.*, 2014; Lopes, et Betrouni, 2009; Pentland, 1984; Sarkar, 1995; Theera, 2002) como herramienta de procesamiento de imágenes. Así como, para la descripción de la estructura de los agregados de partículas (Selomulya *et al.*, 2003; Chakraborti *et al.*, 2003).

Enfocándonos al estudio de agregados los trabajos más representativos son los realizados por: Winterwerp (1999,2002), Khelifa (2006), Maggi (2007,2013) y Garcia-Aragon et al. (2014).

## **CAPÍTULO 5**

### **METODOLOGÍA**

En el presente capítulo se describe la metodología que se aplicó para realizar la presente investigación, que consiste en la instalación, calibración de un sistema de holografía digital, para determinar experimentalmente la forma, tamaño y dimensión fractal de flóculos (producto de la aglomeración de sedimentos cohesivos), aplicando diferentes métodos del conteo de cajas

Se describe el sistema de holografía digital en línea que se instaló para caracterizar los flocs y obtener principalmente su dimensión fractal, así como su: forma, tamaño, y velocidad de sedimentación, las cuales son las características más importantes en el estudio de los sedimentos cohesivos.

#### **5.1 Sistema de holografía digital**

Para la realización de los experimentos se implementó un sistema de holografía digital, para ello se analizaron las ventajas y desventajas de los dos sistemas de holografía digital existentes: en línea y fuera de eje, siendo el sistema en línea el utilizado en la presente investigación, debido a la relativa facilidad que presenta su instalación comparada con el fuera de eje.

También, se evaluó implementar el sistema en línea con lentes y sin lentes y se determinó que el sistema a utilizar fue un sistema en línea sin lentes dado que los flocs son micropartículas donde se requiere de alta presión en su caracterización. No se elige el sistema fuera de eje dado que, presenta mayor complejidad y el aporte principal de la presente investigación radicó en la implementación de esta técnica para caracterizar sedimentos cohesivos y la elaboración de una herramienta computacional para obtener la forma, tamaño y dimensión fractal de los flocs de forma experimental. Por lo cual, se considera que el uso del sistema de holografía fuera de eje podría implementarse en futuras investigaciones para obtener mejoras en los resultados obtenidos en la presente investigación.

Para el montaje del sistema de holografía digital en línea se utilizaron los siguientes equipos y accesorios ópticos:

- Diodo láser en haz verde de 532nm (longitud de onda) y 50mW (potencia), el cual es controlado por el software: Flex Control Interface V2.10
- Objetivos de microscopio de 40x y 60x
- Pinhole de 25  $\mu\text{m}$  y 10 $\mu\text{m}$
- Montura de tres ejes para el filtro espacial marca Newport y modelo 900, la cual cuenta con precisión micrométrica en sus tres ejes.
- Filtros polarizadores,
- Lentes semiesféricos de 75 mm para colimar la luz
- Cámaras digitales tipo CCD de marca JAI CV-M2CL de 1600 x 1200 píxeles de resolución espacial de 30 a 250 fps y 7.4  $\mu\text{m}$  por píxel.
- Tabla óptica y diferentes accesorios ópticos.
- Prisma de vidrio de 5cm x 3cm x 20 cm y 2mm de espesor y otro de 5cm x 3cm x 50cm y 2mm de espesor.

Para la implementación del sistema y la caracterización de las partículas, se siguieron las etapas que se presentan en la figura 5.1, donde cada etapa es explicada a continuación.

### **5.1.1 Instalación y calibración del sistema de holográfica digital**

En esta sección se explica cómo se llevó a cabo la instalación y calibración del sistema de holografía digital en línea.

#### **5.1.1.1 Instalación del sistema de holografía digital**

Para instalar el sistema de holografía digital en línea como se muestra en la figura 5.2, se utilizó una mesa con una tabla óptica, donde se cuidó la estabilidad de la misma con la finalidad que no se permitiese ningún tipo de vibración, dado que cualquier movimiento en la mesa tendría efectos negativos en los resultados de los experimentos.

Una vez que se logró la estabilidad de la tabla óptica, se colocó el Diodo láser sobre una montura óptica cuidando también su estabilidad, es importante señalar que el láser fue controlado vía computadora utilizando su software, posterior a ello se usó una montura de desplazamiento de 3 ejes para colocar el filtro espacial en el cual se colocó un objetivo de microscopio de 60X y

un pinole de 25  $\mu\text{m}$ , en esta parte se usaron los tres ejes para lograr que se tuviera un buen filtraje espacial. La finalidad del uso del objetivo de microscopio es para expandir el haz de luz, mientras que la del pinhole es para filtrar el haz de luz, lo anterior se logra colocando el pinhole en el foco del objetivo, esto se logró manipulando la montura de tres ejes, el filtro espacial se colocó a 10.5cm del láser.

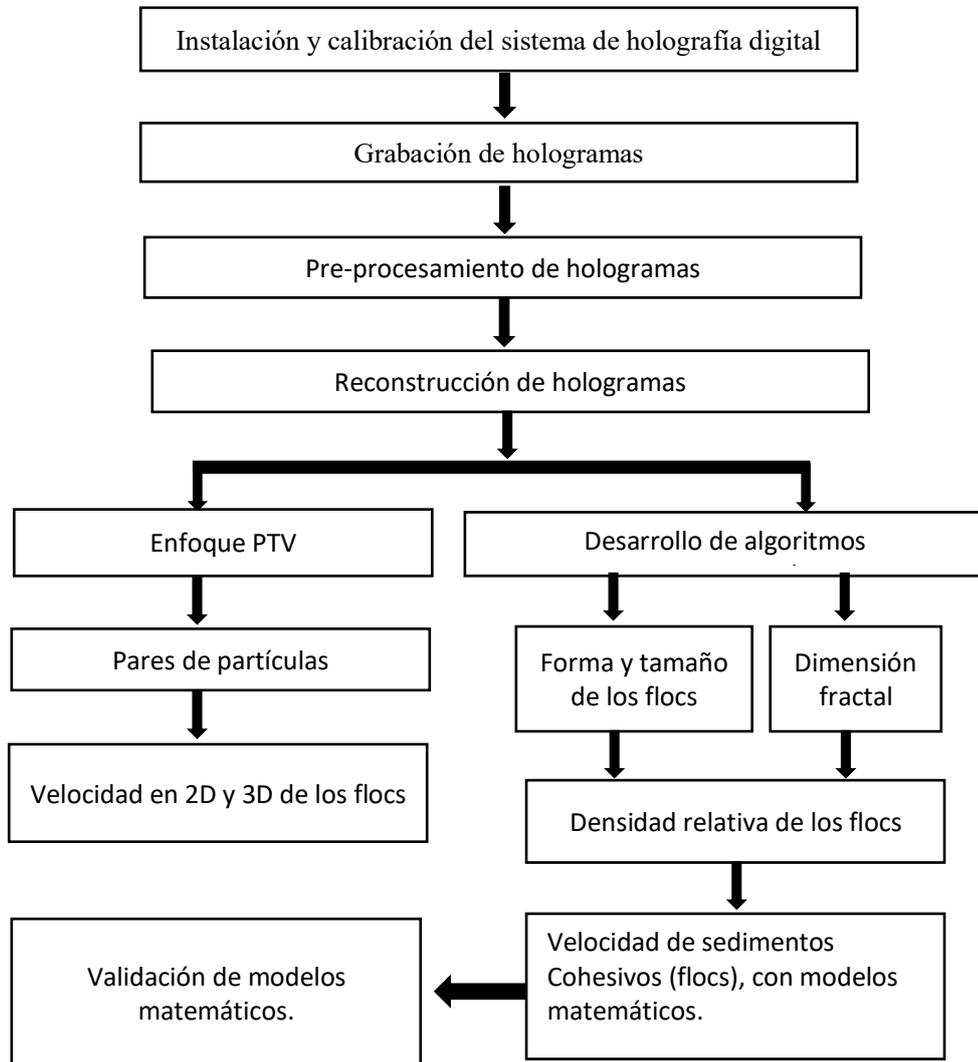


Figura 5.1. Pasos que definieron la metodología

Una vez logrado el filtraje espacial se colocó una lente planoconvexa de 75mm, en este paso se cuidó que el filtro espacial quedara en el foco de la lente para que la colimación fuera adecuada, es importante señalar la importancia de este paso dado que de una buena colimación dependen los resultados de la experimentación.

Cuando se logró la colimación del haz, se colocó la cámara cuidando que se encontrara en línea con el resto del equipo instalado, en este paso se probaron varias cámaras hasta identificar la que presentó los

mejores resultados, siendo la JAI CV-M2CL la que se usó para los experimentos. Entre la lente y la cámara fue colocado un prisma de vidrio (columna) en el cual se utilizó para simular una columna de agua donde se vertieron las muestras de partículas, además se probaron diferentes arreglos de rieles y monturas ópticas hasta lograr las condiciones necesarias para llevar a cabo los experimentos.

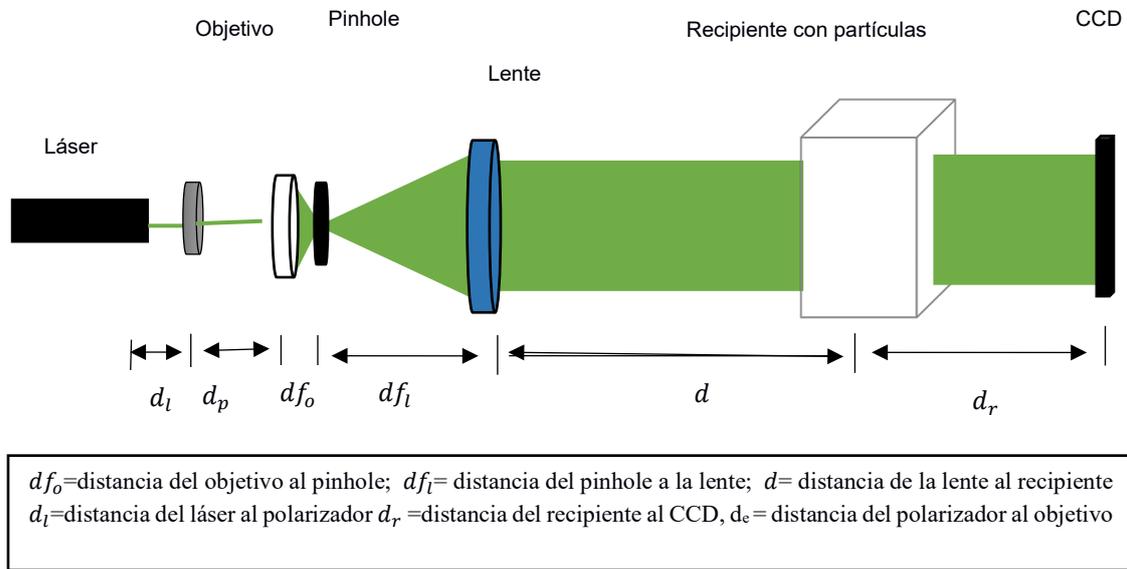


Figura 5.2 Esquema de un sistema de holografía en línea (sin lentes)

Dentro del montaje del sistema de holografía en línea se presentó mayor dificultad tanto en llevar a cabo el filtraje espacial, como en la colimación del haz de luz con la lente semiesférica, debido a que, para el primero se debe contar con una alta precisión en los tres ejes, además se debe tomar en cuenta el tamaño del objetivo y con ello el pinhole que de mejores resultados, mientras que para el segundo se deben tomar en cuenta el foco exacto de la lente y que la mesa óptica no presente ninguna perturbación. En la figura 5.3 se muestra una imagen del sistema de holografía en línea empleado en la investigación e instalado dentro del laboratorio.

### 5.1.1.2 Calibración del sistema de holografía digital

Para llevar a cabo la calibración del sistema de holografía en línea se realizaron los siguientes pasos:

Se determinaron las distancias óptimas de instalación de cada accesorio óptico, para obtener los patrones de interferencia adecuados (hologramas), las distancias finales se muestran en la tabla 5.1.

- Para la calibración del sistema se realizaron experimentos con partículas esféricas de poliestireno altamente refractivas y diámetro de 50  $\mu\text{m}$ , aunado a que fueron utilizadas en trabajos previos y presentaron buenos resultados en el estudio de flujo de fluidos (Coronel, 2011).
- Se realizaron diversos códigos en MATLAB para la reconstrucción de los hologramas, así como para la determinación de la dimensión fractal, donde se modificaron varias veces las condiciones para que los resultados obtenidos fueran los más precisos, se explican estas modificaciones con mayor detalle en el apartado del desarrollo de la herramienta computacional.
- Los resultados obtenidos de la reconstrucción y caracterización de las partículas de polietileno se compararon con los valores teóricos para estas, principalmente tamaño de partículas, todo esto para verificar que el sistema presente resultados correctos

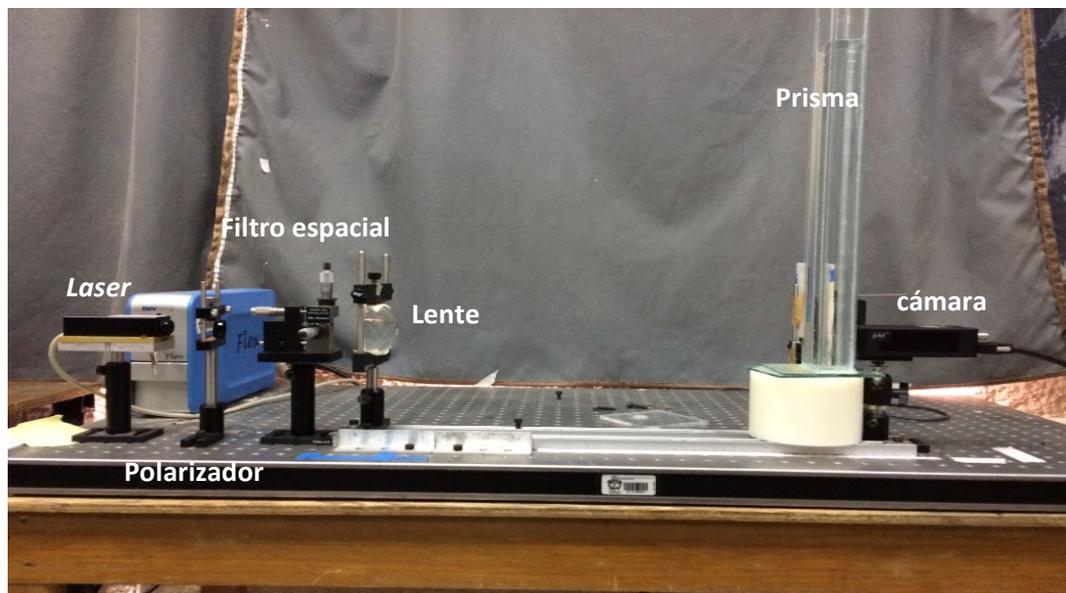


Figura 5.3 Sistema de holografía en línea montado el laboratorio

Tabla 5.1 Distancias del sistema de holografía en línea

Distancia	Valor en cm
del láser al polarizador	3.8
del polarizador al objetivo	9.7
del objetivo al pinhole	0.2
del pinhole a la lente	3.1
de la lente al recipiente	40
del recipiente al CCD	1.8

## 5.2 Grabación de hologramas

Esta es la etapa más importante de la investigación ya que depende de ésta, que los resultados permitan la obtención de la dimensión fractal y de las demás características de los flocs. Para llevar a cabo una correcta grabación, las principales características que se cuidaron fueron:

- **Alineación del haz de luz:** se alineó el haz de luz cuidando que todos los instrumentos estuvieran a la misma altura y el haz de luz pasará en el centro de cada instrumento óptico.
- **Filtraje espacial:** se realizó el filtraje espacial moviendo con mucha precisión los tres ejes de la montura, cabe señalar que está fue uno de los dos accesorios que presento mayores dificultades en su calibración dado que la precisión debe ser micrométrica y por ejemplo el hacer coincidir el haz con la abertura del pinhole fue muy complicado y aunado a ello cuando se logra que el láser pase por la abertura se presenta el problema de alinearlos en los tres ejes.

La figura 5.4 muestra un filtraje espacial aún con ruido donde se puede observar que el haz logra atravesar el pinhole, sin embargo, el haz aún no se encuentra concentrado en un punto, mientras que en la figura 5.5 se muestra un filtraje espacial más limpio donde se puede percibir que todo el haz está concentrado en un área específica.

- **Colimación del haz de luz:** para realizar la colimación, la cual fue la parte más complicada de la calibración del sistema debido a que se tenía que tomar en cuenta la distancia focal y la forma de colocar la lente. Para la colimación se utilizó una lente planoconvexa como se muestra en la figura 5.6, donde se observa que el lado plano está frente al sistema de filtraje espacial y el lado convexo hacia la cámara, esto debido a la geometría de los rayos en las lentes. Se utilizó una hoja de calibración para verificar que el diámetro del haz se conservará en toda la longitud.

En la figura 5.7 se muestra la hoja de calibración que fue utilizada, mientras que en la figura 5.8 se muestra la colimación a diferentes distancias de la lente, por ejemplo, en el inciso a) se muestra la colimación a una distancia de 10 cm de la lente, el inciso b) a una distancia de 20 cm y el inciso c) a una distancia de 38 cm y se puede observar que

el haz tiene en promedio el mismo diámetro en toda el área de estudio, esto demuestra que a colimación es adecuada.

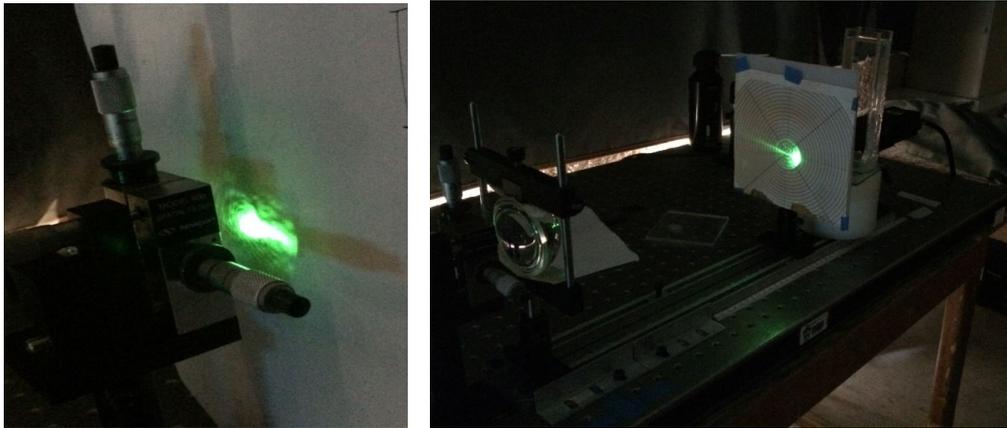


Figura 5.4 Filtraje espacial con ruido

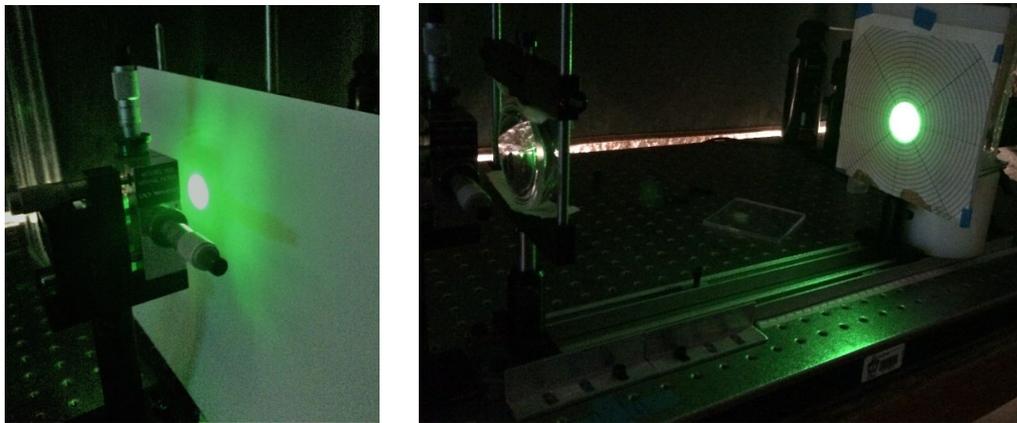


Figura 5.5 Filtraje espacial sin ruido

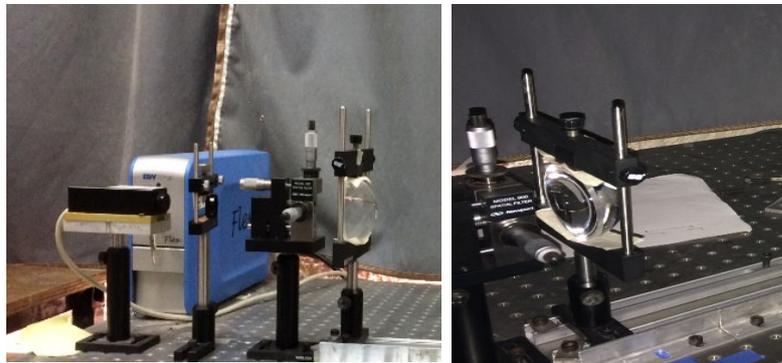


Figura 5.6. Montaje para la colimación del haz

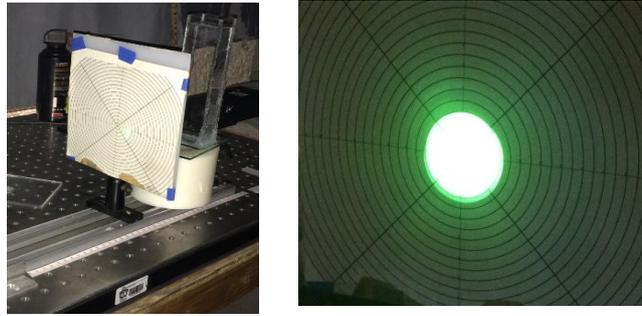


Figura 5.7. Hoja de calibración

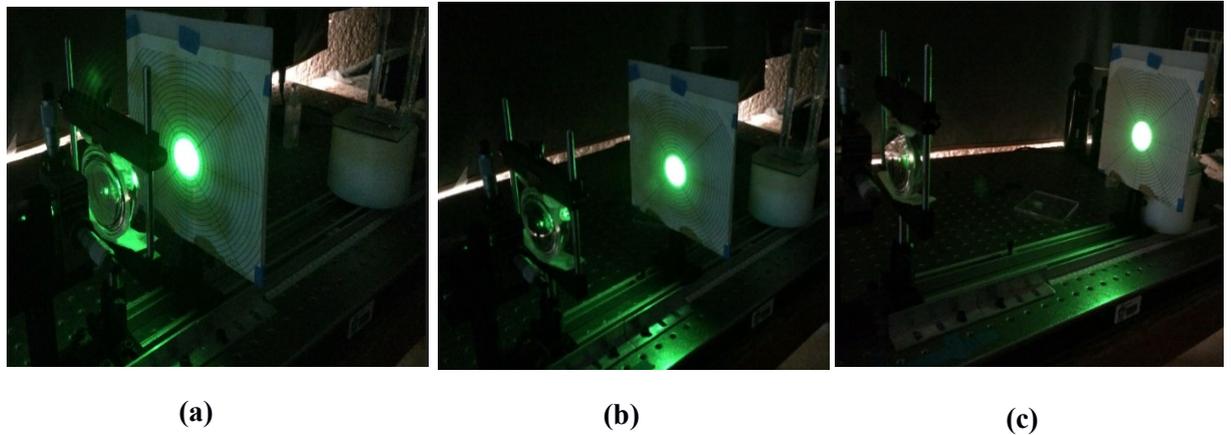


Figura 5.8. Arreglo de colimación del haz

- **Misma longitud de onda:** se cuidó que el haz de referencia y el objeto fueran de la misma longitud de onda dado que este sale del mismo laser y el haz de referencia es el que no se difracta con las partículas mientras que el haz objeto es el que se difracta con las partículas.
- **Iluminación:** se cuidó que en el cuarto donde se realizaron los experimentos no hubiera interferencia de otro tipo de luz por lo cual, se utilizó un espacio oscuro sin luz natural, solo la luz de la computadora por medio de la cual se controló el láser y la cámara.
- **Polarización del haz de luz:** se usó un polarizador que ayudo a que la cantidad de energía luminosa que llegaba al sensor de la cámara fuese controlada, esto debido a la sensibilidad del sensor de la cámara, y también a que no se utilizaron lentes de la cámara y que el haz de luz fue directamente al sensor.
- **Configuración del software de la cámara:** Se configuró el software de la cámara para que éste no grabara toda la intensidad de la luz y así el ruido en los hologramas fuera menor.

El grabado de los hologramas se realizó en dos etapas, primero para partículas esféricas las cuales, al conocer sus características ayudaron a calibrar el sistema de holografía en línea y posteriormente para partículas no esféricas (flóculos) provenientes del Centro Acuícola El Zarco ubicado en Carretera Toluca - México en el *Km 32, 52743* de la Ciudad de México, Méx., los ríos Grijalva y Usumacinta, Agua del Rastro de Toluca, siendo las muestras del Grijalva y Usumacinta la más importantes en el estudio.

Para la adquisición de hologramas se siguió el procedimiento determinado en el diagrama de experimentos mostrado en la figura 5.9, donde se puede observar que, para cada una de las etapas se tienen dos subetapas, una de las cuales consiste en grabar o adquirir hologramas individuales, los cuales se reconstruyen y se obtienen las características de forma, tamaño y dimensión fractal experimentalmente, mientras que en la segunda etapa se obtienen pares de partículas para determinar experimentalmente la velocidad de caída.

En esta primera etapa (partículas esféricas) se grabaron 100 hologramas por cada repetición y en total se hicieron tres repeticiones para obtener los resultados finales.

Es importante señalar que se hicieron diversas pruebas antes de grabar los hologramas de partículas esféricas dado que en las primeras pruebas los hologramas obtenidos no presentaron resultados satisfactorios debido al ruido provocado por la luz en el laboratorio ya que a veces no era controlada al cien por ciento y también al provocado por algunos de los instrumentos ópticos, los cuales tenían demasiado ruido y tuvieron que ser cambiados.

También se hicieron pruebas con diferentes cámaras hasta obtener el menor ruido posible en la grabación y así elegir la cámara con la que se llevaron a cabo los experimentos de calibración y de flocs. En la figura 5.10 se muestran hologramas grabados con diferentes cámaras, en el inciso a) con la cámara Lumenera con una resolución de 640 x 480 y en el inciso b) con la cámara Lumenera y resolución de 1240 x 1024, en el inciso c) con la cámara JAI con resolución de 1600 x 1195 y se puede observar claramente que mientras mayor resolución tiene, mejores resultados se obtienen.

Por tal razón, la cámara con la que se realizaron los experimentos fue con la JAI, dado que muestra mejores resultados y es más sensible a la luz, sin embargo también se tuvieron que hacer configuraciones al software de captura para obtener hologramas lo más limpios posibles,

por ejemplo en la figura 5.12 se muestra en el inciso a) un holograma con mucho ruido, cuyas dimensiones son de 1600 x 1195, y en el inciso b) un holograma en el cual el ruido es menor y con dimensiones de 1600 x 1195, que es un ejemplo de los que se obtuvieron para llevar a cabo su reconstrucción.

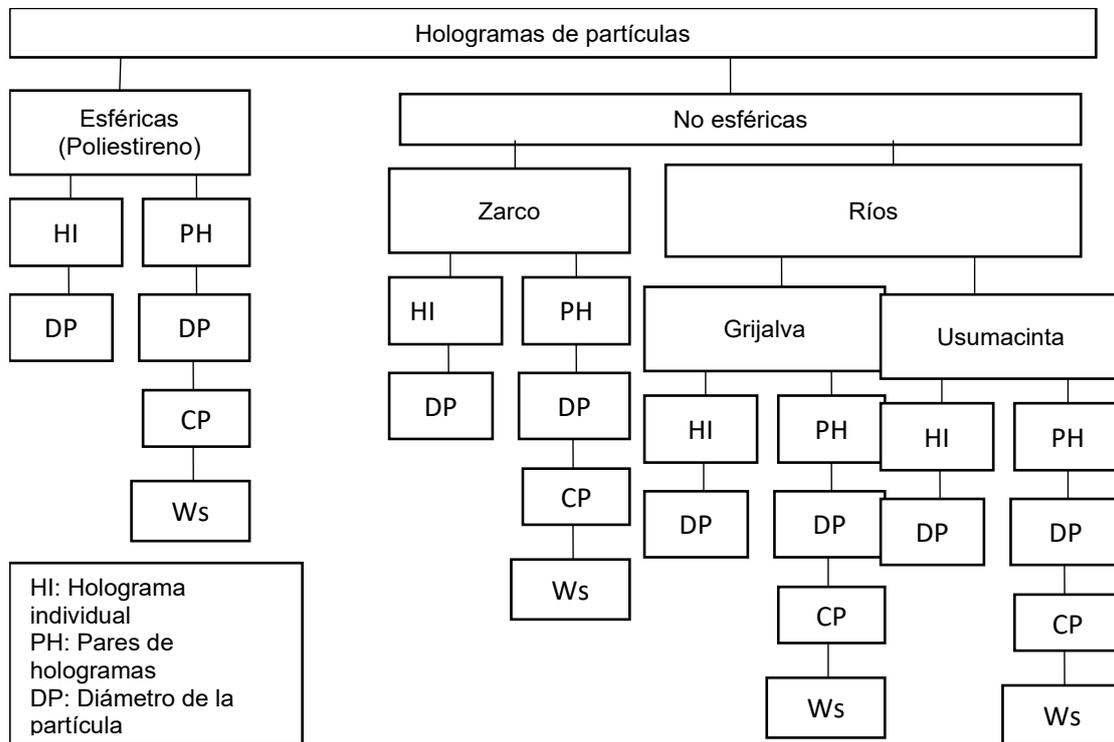


Figura 5.9 Diagrama de experimentos

Una vez grabados, se llevó a cabo el procesamiento de la imagen para su reconstrucción.

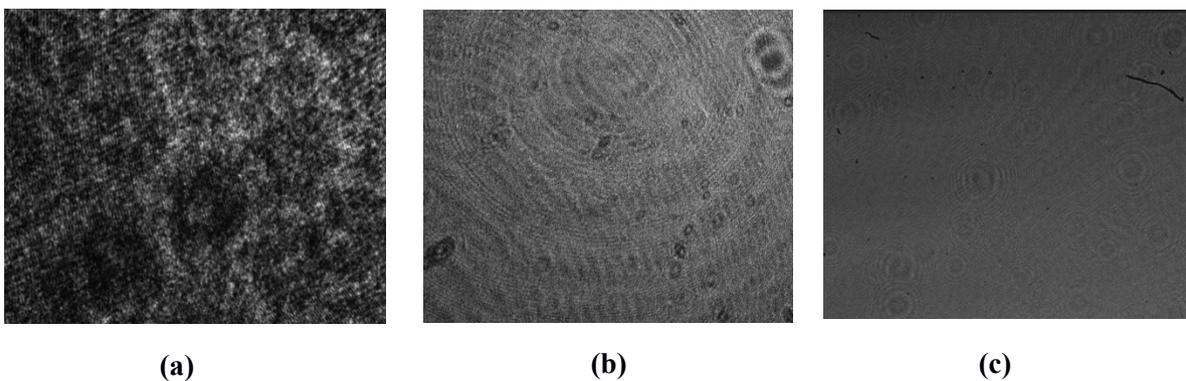


Figura 5.10. Hologramas grabados con diferentes cámaras, a) cámara Lumenera de 640 X 480; b) cámara Lumenera con resolución de 1240 X 1024 y c) cámara JAI con resolución de 1600 X 1195.

Para la segunda etapa se llevó a cabo la formación de flocs, proceso que se explica con mayor detalle en el siguiente punto.

Se trabajó con partículas no esféricas (flóculos), que son provenientes de estanques para el cultivo de peces (“El Zarco”, ubicado en la Marquesa, Edo. De México) que oscilan en tamaños de 50 a 3000  $\mu\text{m}$ , de acuerdo al trabajo realizado por López (2019) y de ríos (Usumacinta y Grijalva) que tienen un tamaño medio de 180  $\mu\text{m}$  para el río Usumacinta y del río Grijalva 240  $\mu\text{m}$ , de acuerdo al trabajo realizado por Izquierdo (2019).

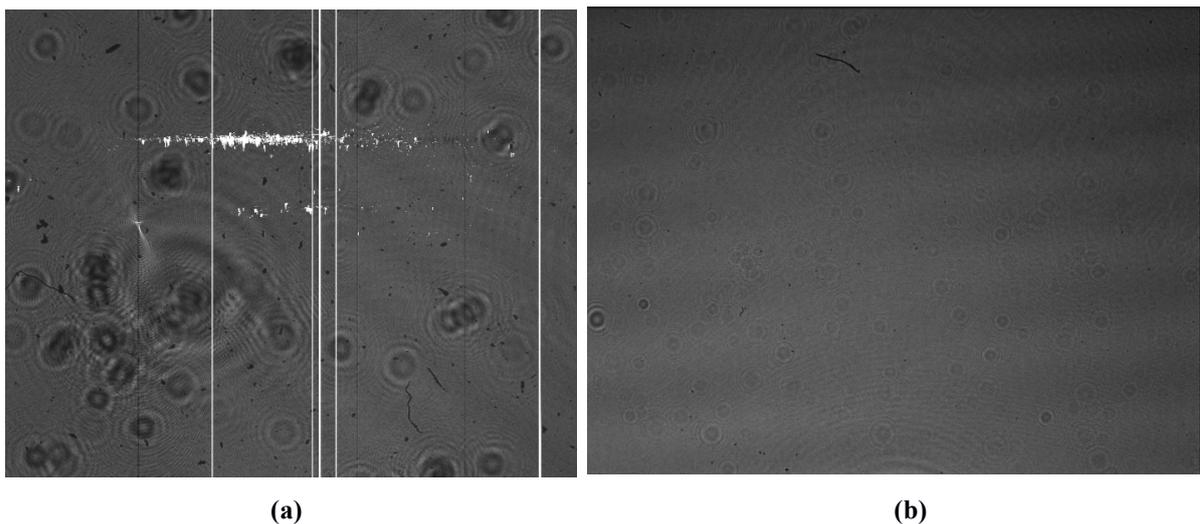


Figura 5.11. Hologramas adquiridos, a) holograma digital con mucho ruido; b) holograma digital con poco ruido.

En esta etapa se obtuvieron 10 carpetas, cada una con 50 imágenes para cada tipo de sedimento, las imágenes fueron tomadas cada 15 minutos con la finalidad de observar el comportamiento de los flocs. En esta etapa al igual que para las partículas esféricas los experimentos tuvieron que repetirse para lograr un mejor control en los hologramas. En la figura 5.12, 5.13 y 5.14 se muestra un ejemplo de los hologramas adquiridos para cada tipo de sedimentos (El Zarco, río Usumacinta y río Grijalva).

### 5.2.1 Formación de flocs

Para la formación de los flóculos, se utilizó el canal anular circular diseñado e instalado en el ITTCA (Instituto Interamericano de Tecnología y Ciencias del Agua) mostrado en la figura 5.15, el cual se considera un canal infinito donde se puede controlar una tasa de corte constante y con ello lograr la formación de agregados de partículas (Salinas et al., 2017).

Los sedimentos cohesivos que se utilizaron como ya se mencionó provienen de estanques para el cultivo de peces (“El Zarco”) y de los ríos Grijalva y Usumacinta, los cuales se obtuvieron de los experimentos previos para cada uno de los sedimentos, realizados por López (2019) e Izquierdo (2019) para sus trabajos de doctorado.

Cabe señalar que para la etapa de grabación de pares de hologramas se realizaron los experimentos, usando el procedimiento que siguieron López (2019) e Izquierdo (2019) y se obtuvieron hologramas cada 15 minutos para observar la evolución de los flocs y obtener todas las características antes mencionadas.

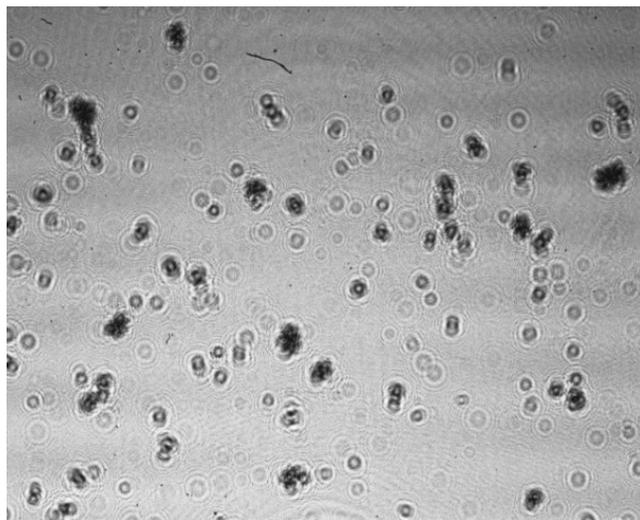


Figura 5.12. Hologramas obtenidos de flóculos del río Usumacinta.

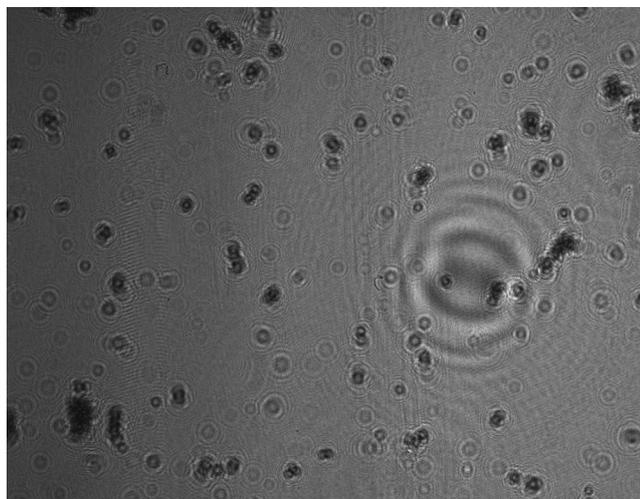


Figura 5.13 Holograma obtenido de flóculos del Centro Acuicola “El Zarco”

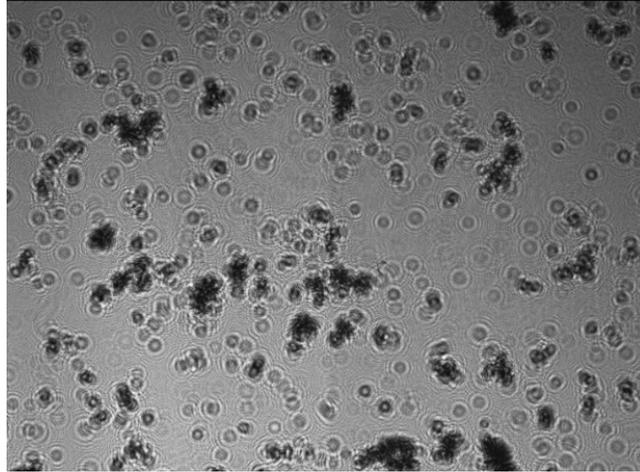


Figura 5.14. Hogramas obtenidos de flóculos del río Grijalva.

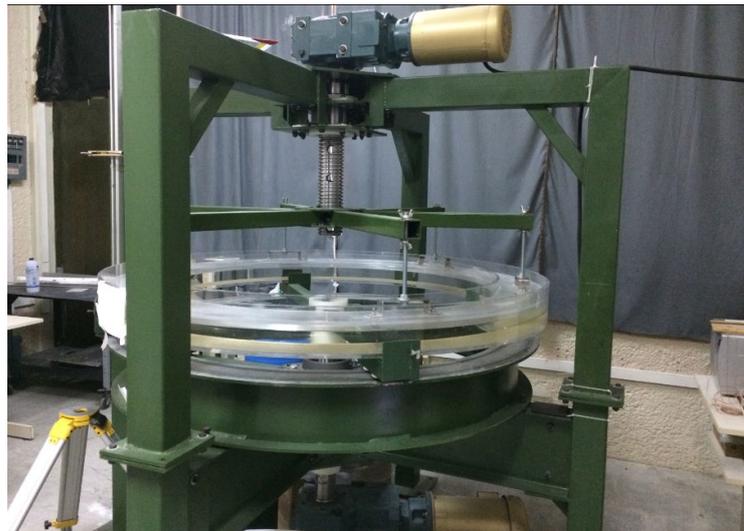


Figura 5.15. Canal anular circular ITTCA

### **5.3 Pre-Procesamiento de los hologramas.**

Una vez adquiridos los hologramas, se llevó a cabo un pre-procesamiento digital, con la finalidad de eliminar los efectos no deseados del holograma, como es el ruido, para posteriormente comenzar el proceso de reconstrucción.

### **5.4 Reconstrucción del holograma**

Una vez mejoradas las imágenes, se reconstruyeron numéricamente con el fin de obtener de forma experimental las siguientes características: forma, tamaño, dimensión fractal y velocidad de caída. Para la reconstrucción se analizaron dos de los métodos más aplicados (Fresnel,

Convolución) para partículas esféricas, y se desarrolló la herramienta computacional en MATLAB, así como su adaptación para partículas no esféricas (flocs).

El método que se utilizó para reconstruir en la presente investigación fue el de convolución debido a que es el que presentó menor dificultad en su codificación. En esta etapa de reconstrucción se realizaron los códigos por módulos en el programa, el contenido de cada módulo se describe a continuación:

### ***Módulo 1: Obtención de datos***

En este módulo el usuario selecciona el grupo de imágenes (holograma) a reconstruir. También se proporciona la información necesaria para llevar a cabo la reconstrucción, destacando la distancia inicial de reconstrucción la cual consiste en la distancia entre la columna donde se encuentran las partículas y el sensor de la cámara. También es importante la distancia final de reconstrucción la cual es determinada por el ancho de la columna, así como la distancia a la cual se realiza la reconstrucción de la imagen hasta encontrar el foco de la partícula. Cabe señalar que, de acuerdo con los experimentos realizados, los incrementos que presentan mejores resultados son de 0.02mm.

Dentro de este módulo los pasos a seguir son:

**Paso 1:** Leer la imagen (holograma) y convertirla a escala de grises, en la figura 5.16 se muestra la figura que arroja en MATLAB.

**Paso 2:** Realizar la selección de la región que se va a reconstruir, para este paso se realizaron diferentes códigos con la finalidad de ver en cual se obtenían mejores resultados, siendo considerado como un buen resultado que se logre identificar la partícula reconstruida, como se muestra en la figura 5.17.

Dentro de los códigos esta la opción de:

- **Elegir y reconstruir todo el holograma**, esta opción, aunque se dejó codificada no mostro los resultados esperados debido a que no se logró identificar claramente las partículas reconstruidas por lo cual se concluye que no es la opción más viable a la hora de reconstruir.

- **Reconstruir por ventanas de diferentes tamaños**, ya sea los dados por el usuario o bien las recomendadas por el software, dando como resultado la reconstrucción de toda la imagen. Dentro de esta opción se encontró la limitante del tiempo, dado que es un proceso bastante largo y al igual que la primera opción presenta dificultades para la obtención clara de la reconstrucción de las partículas, pero con ella se logra identificar el plano donde se encuentran la mayoría de las partículas a reconstruir
- **Reconstruir por una ventana seleccionada por el usuario** sobre el holograma total, la diferencia con el código de arriba es que este solo reconstruye las áreas seleccionadas y no todo el holograma. Esta opción presenta muy buenos resultados, sin embargo, dado que la selección de la ventana varía de acuerdo con la selección del usuario, al momento de realizar la reconstrucción y resultado de toda la imagen, se encontraron dificultades para unir toda la información obtenida.

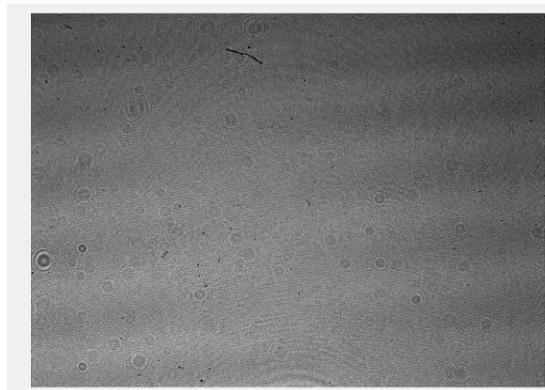


Figura 5.16 Lectura de la imagen.

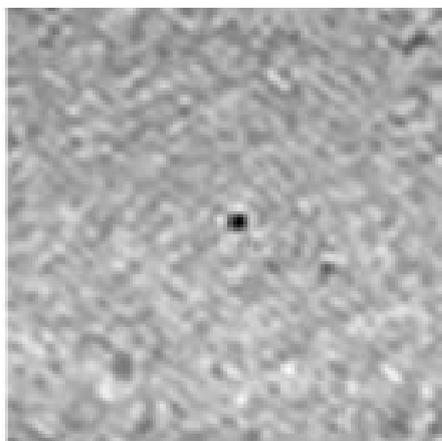


Figura 5.17. Partícula reconstruida.

- **Reconstruir seleccionando el punto central** y de ahí hacer una ventana del tamaño que el usuario desee, lo cual permite acotar a que la reconstrucción sólo sea de las partículas seleccionadas. Esta opción es la que presentó mejores resultados dado que en una imagen se pueden elegir desde una hasta las partículas que se desee y el programa las reconstruye usando el tamaño de la ventana deseada por el usuario, y aunque también es un proceso tardado la reconstrucción presenta mejores resultados que las primeras tres opciones.

### ***Módulo 2: Reconstrucción***

Dentro de este módulo se codificó y cargo de forma interna toda la información necesaria para llevar a cabo la reconstrucción, esta información consiste en el tamaño del pixel, los planos de reconstrucción, las ecuaciones para la onda de referencia, las transformadas de Fourier y la convolución.

Para llevar a cabo la reconstrucción por convolución, se va variando la distancia de reconstrucción, lo que equivale a que hacer la reconstrucción por planos hasta encontrar el plano en el que se encuentra el foco de la partícula, se sabe que es el foco cuando la intensidad es máxima en alguna distancia (esto debido a como se configuro el software).

La figura 5.18 muestra en el inciso a) se muestra la reconstrucción en el plano  $z=10$ , donde se observa que la partícula aún no se encuentra bien definida, en el inciso b) se muestra la reconstrucción en el plano  $z=166$ , que es en el plano donde se encuentra la menor intensidad por lo cual se concluye que es donde se encuentra el foco de la partícula, este plano se encuentra a una distancia de 34.6 cm del sensor y en el inciso c) se encuentra la reconstrucción en el plano  $z=220$  donde se observa que la partícula no se encuentra bien definida por tal motivo también es considerada fuera de foco.

Cabe señalar que para cada uno de los códigos de reconstrucción se fue verificando que el programa hiciera lo que se le requería, por lo cual fue un proceso muy tardado.

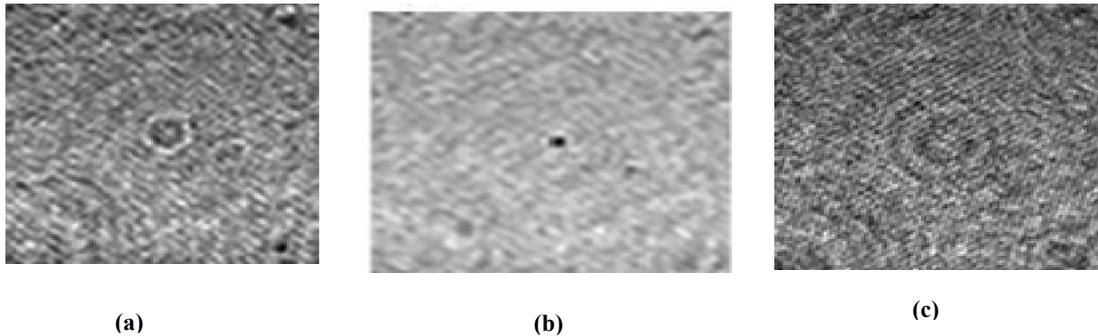


Figura 5.18 Reconstrucción a diferentes distancias, a) reconstrucción  $z=10$ , fuera de foco; b) reconstrucción  $z=166$ , en el foco; c) reconstrucción  $z=220$ , fuera del foco.

## 5.5 Caracterización de partículas

Una vez obtenida la reconstrucción de los hologramas, se determinaron de forma experimental la forma y tamaño de las partículas esféricas y posteriormente la forma, tamaño, dimensión fractal y velocidad de caída de los flóculos.

### 5.5.1 Forma y tamaño

El tamaño de las partículas esféricas y los flocs se determinó mediante el procesado de las imágenes para lo cual se realizó un tercer módulo en la herramienta computacional.

#### *Módulo 3: Forma y tamaño*

Para determinar la forma y tamaño de las partículas, lo primero fue realizar el código que permitió identificar toda la superficie de la partícula en estudio, un ejemplo de esto se muestra en la figura 5.19, en el inciso a) se muestra la superficie de una partícula esférica y en el inciso b) una partícula no esférica (floc), esto para una ventana de reconstrucción de  $128 \times 128$  y se observa cómo los flocs abarcan mayor superficie que las partículas esféricas, aunado a ello, se puede apreciar que la intensidad de la partícula esférica está más concentrada en un pequeño espacio y la del floc abarca casi toda la ventana.

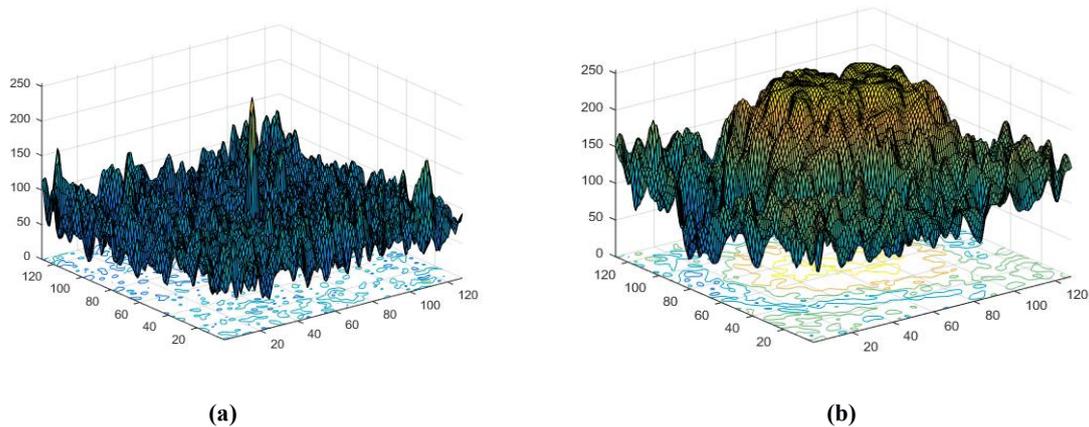


Figura 5.19. Superficie de la partícula en estudios, a) partícula esférica; b) partícula no esférica (flocs)

Posterior a la determinación de la superficie, se realizaron las gráficas del punto en el que se encuentra la intensidad máxima, para así acotar la región de la ventana de estudio. Como se puede observar en la figura 5.20 si se giran las gráficas de superficie dentro de la ventana de estudio hay regiones que no aportan información, en el inciso a) se muestra la gráfica de la partícula esférica y en el inciso b) la de la partícula no esférica, es importante señalar que las gráficas son las mismas que las mostradas en la figura 5.20, solo que se encuentran rotadas con la finalidad de que pueda observarse el área donde se encuentra la partícula con respecto a la ventana de reconstrucción.

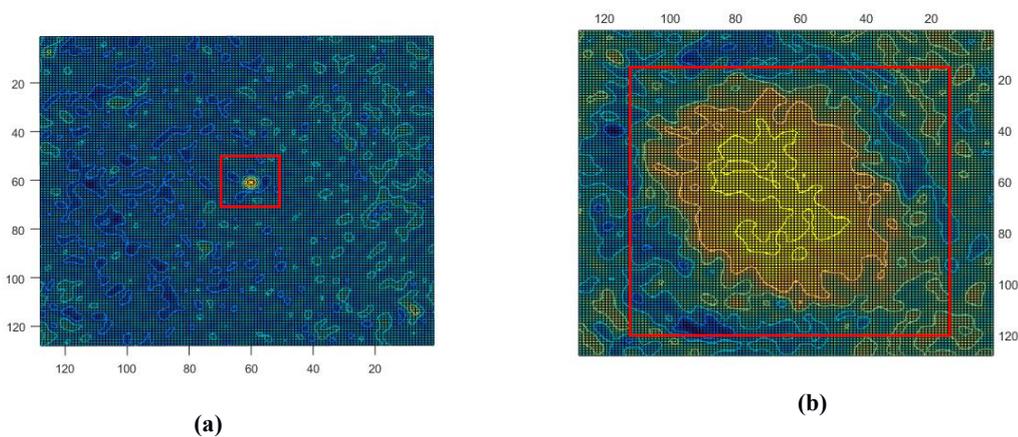


Figura 5.20. Ventana de la partícula en estudio, a) partícula esférica; b) partícula no esférica (flocs)

Como se puede observar en la figura 5.21, dentro de la ventana de reconstrucción, la región de estudio que está dentro del recuadro es la que permitió conocer la forma y tamaño de las partículas.

Para extraer el recuadro rojo, se procedió a realizar dos tipos de códigos el primero enfocado tanto a partículas esféricas y a flóculos y en el segundo código hubo un ajuste para el caso de partículas esféricas y otro ajuste para el caso de flóculos.

Para el primer código a partir de las gráficas en el punto de intensidad máxima, se encuentran los mínimos de intensidad y es el área que se extrae de la ventana de reconstrucción en el caso de los flóculos como se muestra en la figura 5.21 donde el inciso a) corresponde a la gráfica que determina el rango del renglón, el inciso b) muestra la gráfica que determina el rango de la columna y el inciso c) muestra la región de estudio. Mientras que, para el caso de las partículas esféricas se codificó de tal forma que se extrae el área que se encuentra entre los dos mínimos más cercanos a la intensidad máxima como se muestra en la figura 5.22, donde al igual que en el caso de los flóculos, el inciso a) corresponde a la gráfica que determina el rango del renglón, el inciso b) muestra la gráfica que determina el rango de la columna y el inciso c) muestra la región de estudio

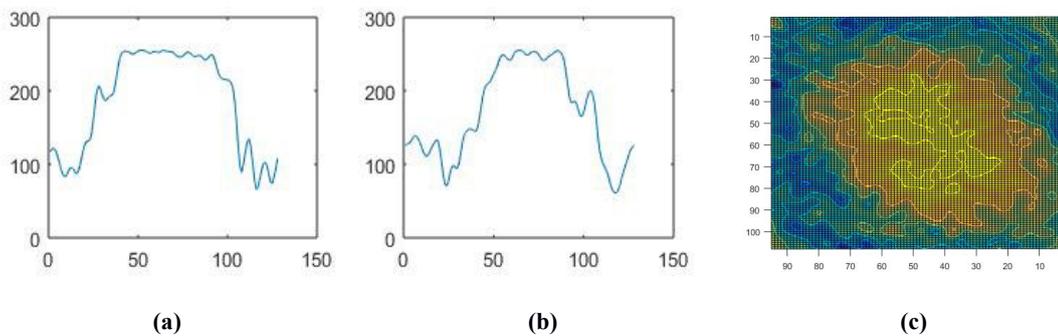


Figura 5.21. Delimitación de la región de estudio para una partícula no esférica (floc), a) gráfica de intensidad en el renglón donde se encuentra la intensidad máxima; b) gráfica de intensidad en la columna donde se encuentra la intensidad máxima; c) nueva región de estudio.

Una vez recortada la región de estudio se realizó el código en el cual se encuentra el contorno de la partícula de tres diferentes modos, el primero es considerando sólo las intensidades mayores a 200, el segundo considerando las intensidades mayores a 127 y el tercero considerando las intensidades que se encuentran sólo por arriba de la media de las intensidades de toda la imagen, es importante destacar que en el caso de las partículas esféricas se obtuvieron mejores resultados cuando se consideraron las intensidades por arriba de la media, mientras que en el caso de las partículas no esféricas los resultados fueron mejores cuando se consideran intensidades por arriba de 200.

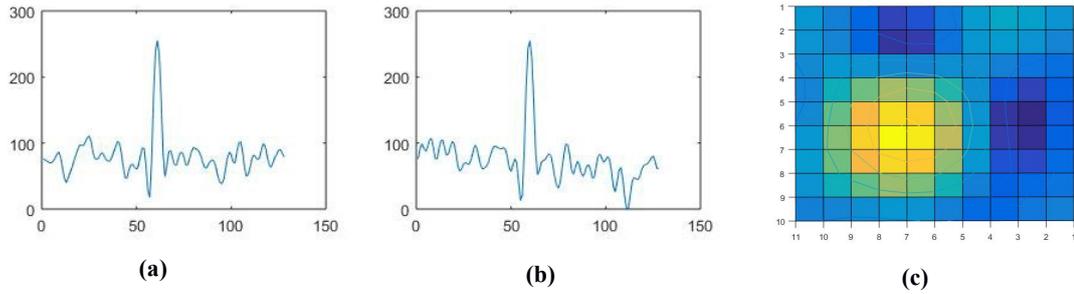


Figura 5.22. Delimitación de la región de estudio para una partícula esférica, a) gráfica de intensidad en el renglón donde se encuentra la intensidad máxima de la imagen; b) gráfica de intensidad en la columna donde se encuentra la intensidad máxima de la imagen; c) nueva región de estudio.

En la figura 5.23 se observa cómo quedan limitadas los contornos de estudio para el caso de partículas esféricas, en el inciso a) se muestra el resultado para contornos mayores a 200, en el inciso b) para contornos mayores a 127 y en el inciso c) para contornos mayores a la media de la intensidad de la imagen y se concluyó que se obtienen mejores resultados cuando los contornos se filtran con intensidades por arriba de la media.

En la figura 5.24 se observa cómo quedan limitadas los contornos de estudio para el caso de partículas no esféricas, en el inciso a) se muestra el resultado para contornos mayores a 200, en el inciso b) para contornos mayores a 127 y en el inciso c) para contornos mayores a la media de la intensidad de la imagen y se concluyó que se obtienen mejores resultados cuando los contornos se filtran con intensidades mayores a 200.

Una vez que se encontraron determinados los contornos se aplicó el código que permitió determinar el perímetro, el área, los centroides de la partícula y el diámetro equivalente, en la figura 5.25 se muestran la forma y tamaño que se obtuvieron de las partículas esféricas en el inciso a) y de las partículas no esféricas en el inciso b).

Es importante destacar que el código es capaz de identificar la mayor área en la imagen, la cual corresponde a la reconstrucción de la partícula en estudio y sobre ella se obtiene el centroide y todas las características antes mencionadas.

Para el segundo código en el caso de partículas esféricas, a partir de las gráficas en el punto de intensidad máxima mostrada en la figura 5.26, se encuentran las pendientes de las rectas y se

corta el área de interés, de tal forma que la información que no está dentro del área correspondiente se convierte en ceros y queda resaltada solamente la partícula en estudio, este proceso se muestra en la figura 5.27 donde se observa en el inciso a) la gráfica de la intensidad la partícula en un plano y en el inciso b) se observa cómo se ve la misma ventana después de que se identifica la partícula en estudio.

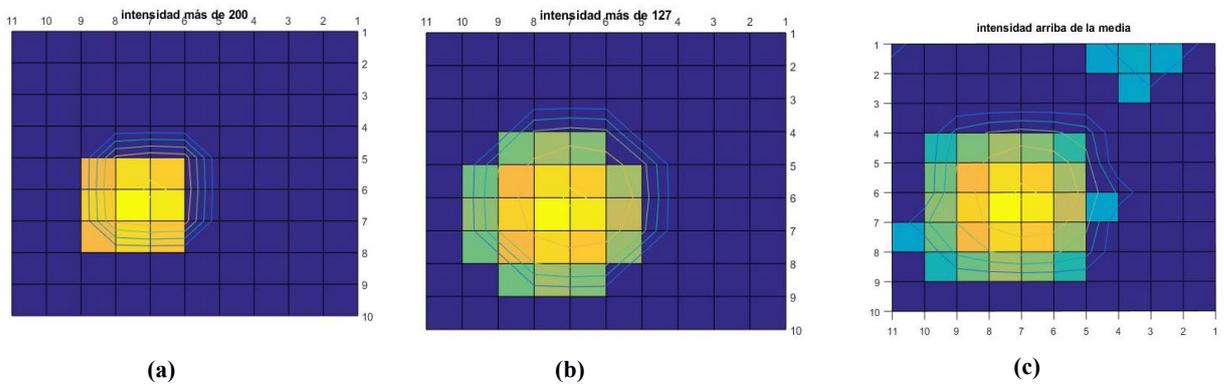


Figura 5.23. Contorno de la región de estudio para una partícula esférica, a) intensidad mayor a 200; b) intensidad mayor a 127; c) intensidad mayor a la media de la imagen.

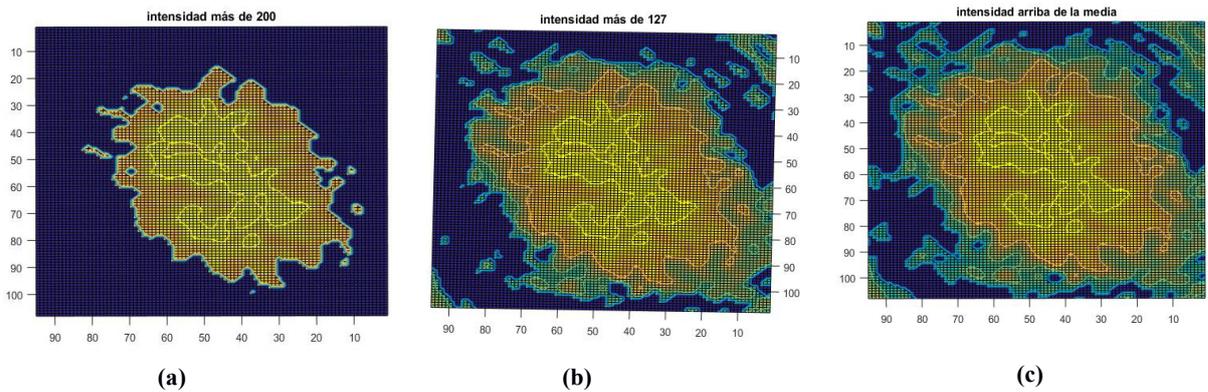


Figura 5.24. Contorno de la región de estudio para una partícula esférica, a) intensidad mayor a 200; b) intensidad mayor a 127; c) intensidad mayor a la media de la imagen.

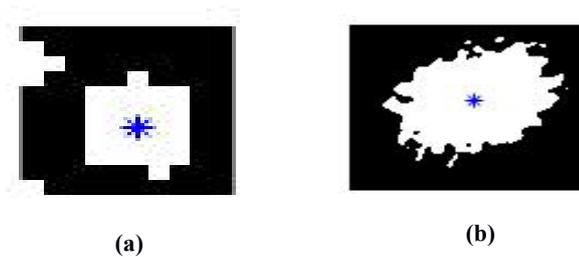


Figura 5.25. Forma, tamaño y centroide de partículas: a) partícula esférica; b) partículas no esféricas

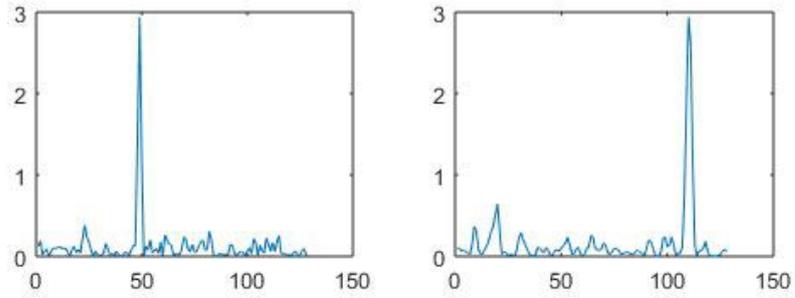


Figura 5.26. Ejemplos de picos de intensidad en ambos ejes.

Posterior al corte se realizó un código que permitió usando herramientas diferentes al código anterior, determinar el perímetro, el área, los centroides de la partícula y el diámetro equivalente, en la figura 5.28 se muestran la forma y tamaño que se obtuvieron de las partículas esféricas.

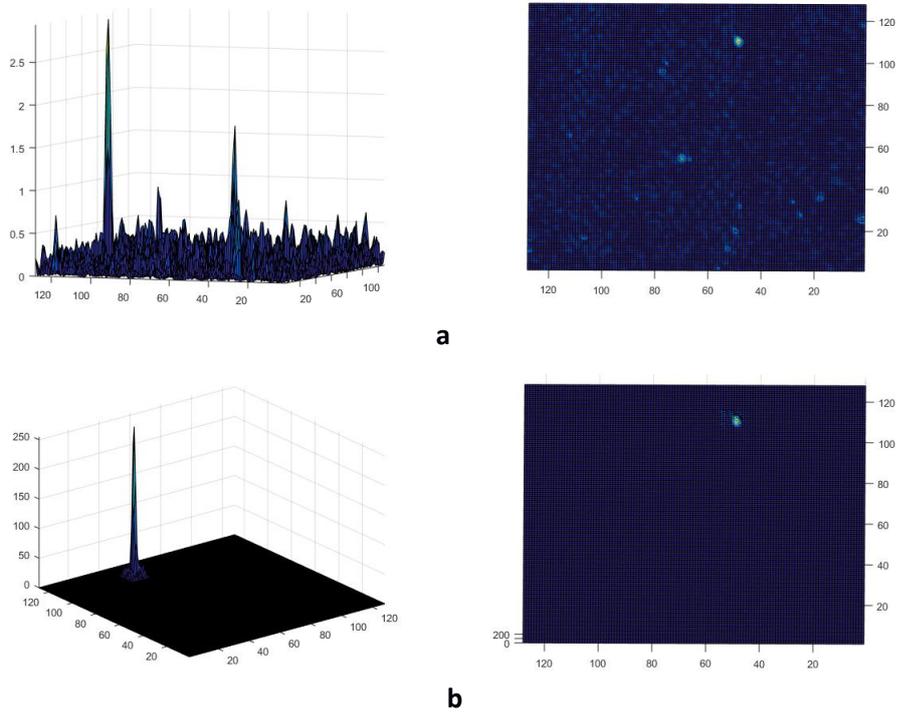


Figura 5.27. a) Superficie de la reconstrucción de una partícula esférica y como se ve en un plano, b) detección de la partícula en estudio y como se ve el plano después de hacer la ubicación de la partícula.

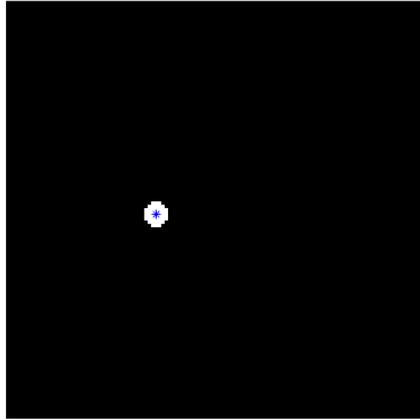


Figura 5.28. Forma, tamaño y centroide de una partícula esférica con el código 2

Es importante señalar que debido a que el segundo código presento un acercamiento más real a la forma de las partículas esféricas fue el código que se utilizó para determinar la forma y tamaño de las partículas esféricas en la presente investigación, sin embargo, el primer código también mostró buenos resultados.

Para el caso de los flóculos para el segundo código se elaboró la interfaz mostrada en la figura 5.29, en la cual se utilizaron dos tipos de filtros diferentes para la obtención de la forma y tamaño, esto a partir de la localización de foco. Es importante señalar que para el caso de los flóculos, a diferencia de las partículas esféricas en las que se elegía el tamaño de la ventana y el código detectaba la partícula, en éste se identifica el flóculo y a partir del centroide se crean ventanas de 128 x 128 para flóculos pequeños y de 256 x 256 para flóculos de mayor tamaño, en la figura 5.30 se muestra un ejemplo de elección de diferentes partículas en un holograma, la figura 5.31 muestra la gráfica de las intensidades máximas en la parte superior y mínimas en la parte inferior, así como la forma de la partícula que se reconstruyó, en la figura 5.32 se muestran las partículas reconstruidas.

En la figura 5.33 se muestran varias de las formas que se obtuvieron en la reconstrucción de las partículas no esféricas, esto permitió identificar la relación que hay entre la forma, tamaño y velocidad de caída de las partículas.

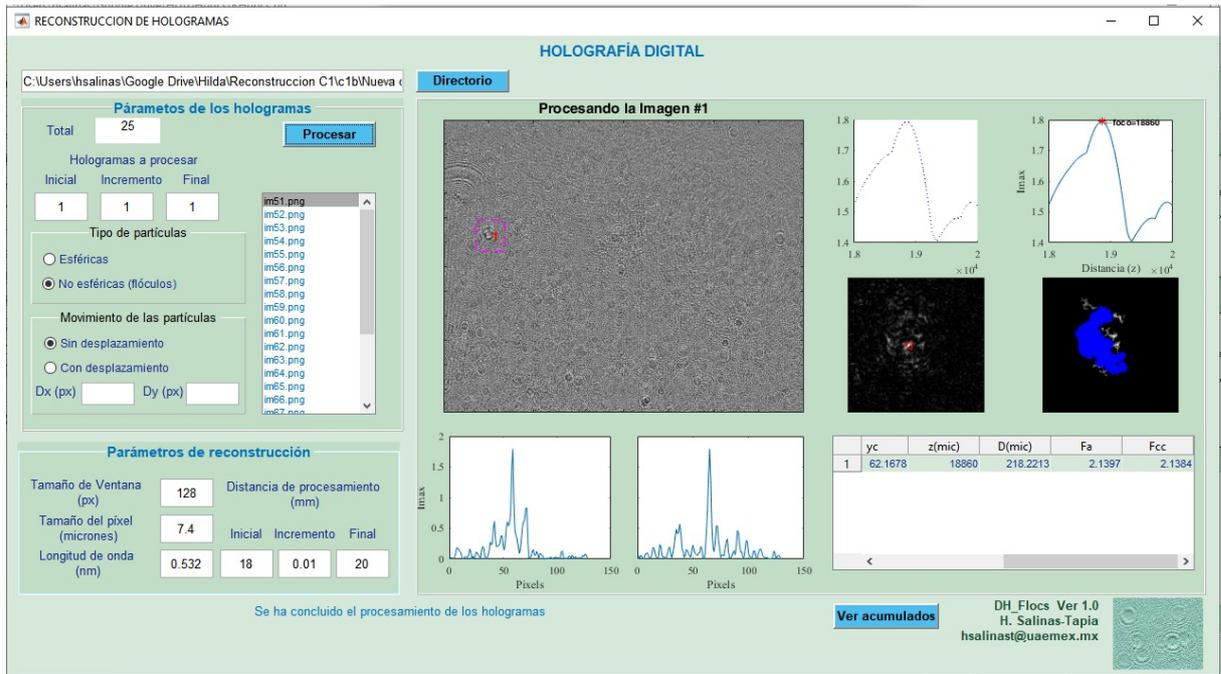


Figura 5.29. Interfaz utilizada para la obtención de forma y tamaño de flóculos.

### 5.5.2 Dimensión fractal

En esta etapa se analizaron los diferentes métodos que se han utilizado para determinar la dimensión fractal en imágenes considerando sus niveles de grises, dado que con esto se aseguró obtener la dimensión fractal de los flocs considerando su naturaleza tridimensional.

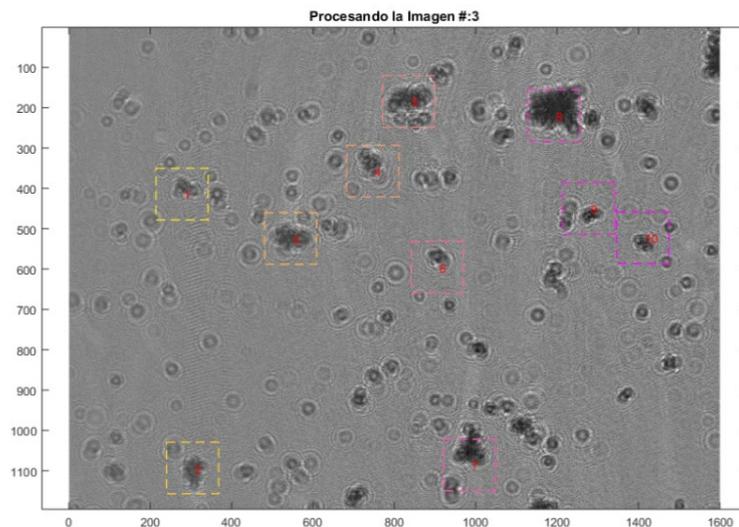


Figura 5.30. Elección de las partículas a reconstruir.

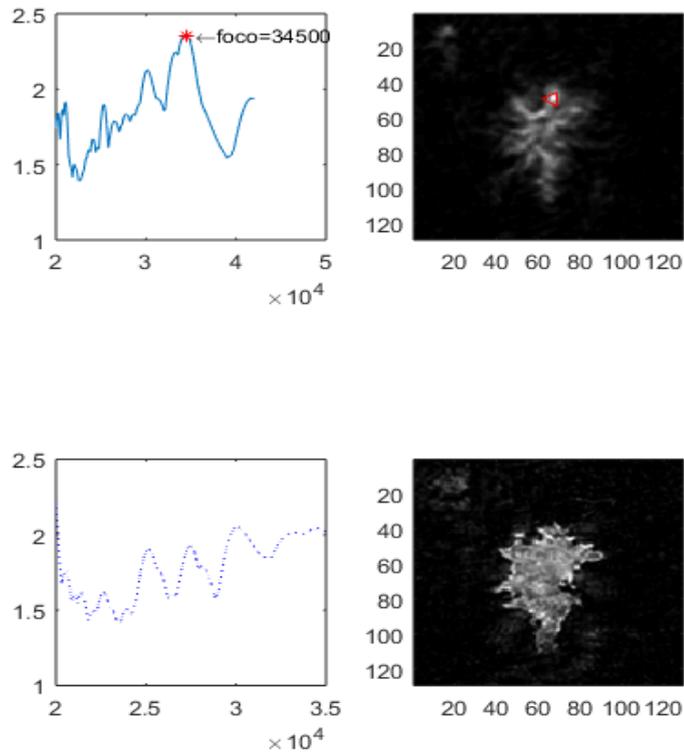


Figura 5.31. Reconstrucción plano a plano, imagen superior considerando intensidades máximas y plano inferior considerando intensidades mínimas.

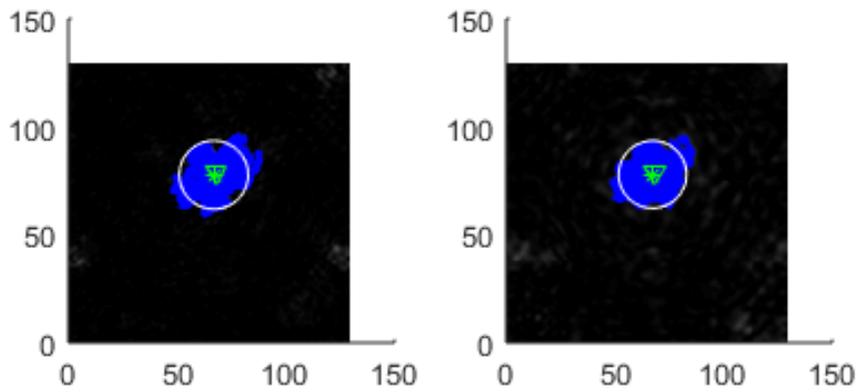


Figura 5.32. Partículas no esféricas reconstruidas.

#### ***Módulo 4: Dimensión fractal***

Para determinar la dimensión fractal de las partículas se realizaron tres códigos, el primero, el método de conteo diferencial de cajas (DBC), desarrollado por Li et al (2009), en este código se realizaron subrutinas las cuales se enlistan a continuación:

- Seleccionar la imagen con la que se desea trabajar esta se extrae tomando en cuenta la posición de la imagen a reconstruir y se convirtió la imagen a escala de grises.
- Dividir la imagen en bloques de tamaño  $s \times s$ , donde dos bloques adyacentes se superponen por una fila (y columna) de píxeles en el límite.
- Asignar una columna de cuadros con una escala de  $r \times r \times r'$  iniciando el píxel con el nivel de gris mínimo en el bloque,  $r'$  se selecciona de acuerdo con la ecuación (4.10).
- Determinar  $n_r(i, j)$  usando la ecuación (4.11).
- Determinar  $N_r$  usando la ecuación (4.8).
- Trazar el ajuste lineal de mínimos cuadrados de  $\log(N_r)$  versus  $\log(r)$ .
- Estimada la  $F$  que es igual a la pendiente negativa de la línea recta ajustada.

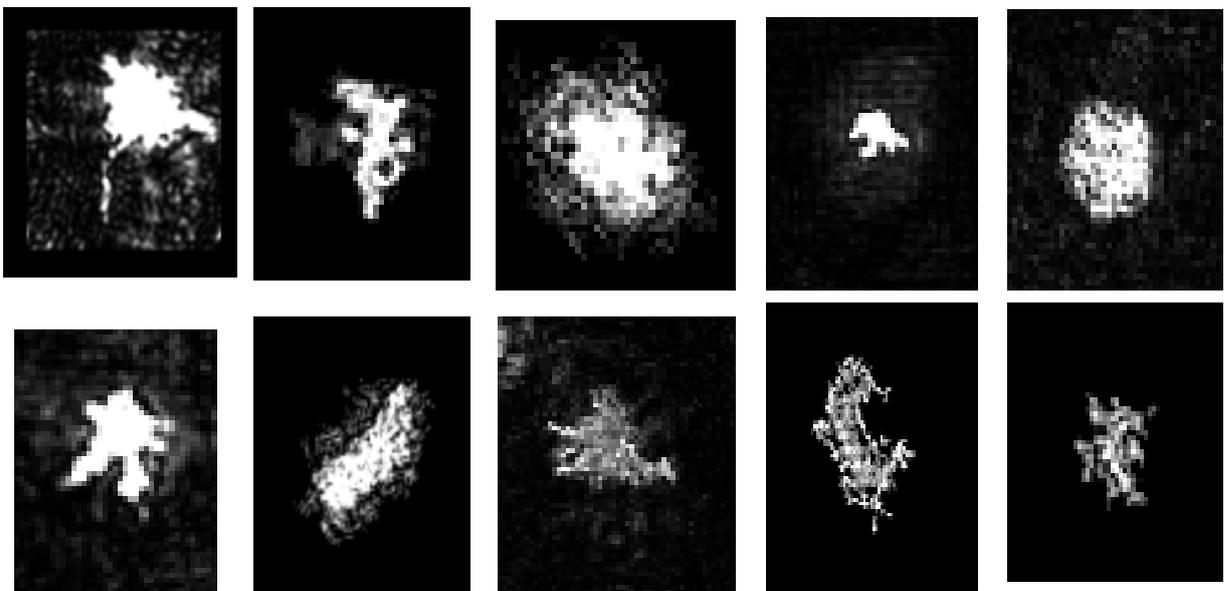


Figura 5.33. Formas de partículas no esféricas reconstruidas.

Para el segundo código se utilizó el método propuesto por Long y Peng (2013), que también consiste en un método de conteo de cajas (BC), con la diferencia que las alturas son adaptables, este método relativamente nuevo, mostró mejores resultados que el método anterior por lo cual fue el que se utilizó para la obtención de la dimensión fractal.

Es importante señalar que este método obtuvo mejores resultados que todos los métodos estudiados.

Dentro del código se realizaron diferentes subrutinas, las cuales se enlistan a continuación:

- Seleccionar la imagen con la que se desea trabajar esta se extrae tomando en cuenta la posición de la imagen que fue reconstruida y se trabaja la imagen a escala de grises.
- Dividir la imagen en bloques siguiendo el procedimiento de Long y Peng (2013)
- Determinar  $n_r(i, j)$  usando la ecuación (4.12).
- Determinar  $N_r$  usando la ecuación (4.8).
- Trazar el ajuste lineal de mínimos cuadrados de  $\log(Nr)$  versus  $\log(r)$ .
- Estimada la  $F$  que es igual a la pendiente negativa de la línea recta ajustada.

Para verificar que el método estuviera codificado correctamente se realizaron los experimentos mostrados en el artículo, en el cual para una imagen con intensidad cero, se obtiene una dimensión fractal de 2 (Long y Peng (2013)) y para una imagen con valores distintos de cero se obtiene una dimensión fractal mayor a dos. En la figura 5.34 se muestra en el inciso a) la imagen de ceros de  $256 \times 256$  y en el inciso b) la gráfica log-log correspondiente a la misma la cual da un valor de pendiente igual a  $-2$  y dado que la dimensión fractal es la pendiente negativa se tiene entonces que la dimensión fractal de la imagen es 2.

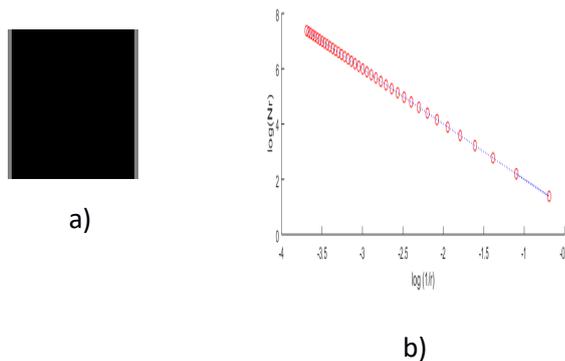


Figura 5.34. Dimensión fractal, a) imagen de ceros  $256 \times 256$ ; b) grafica log-log.

En la figura 5.35 se muestra en el inciso a) la imagen de 255 de intensidad, de  $6 \times 6$  y en el inciso b) la gráfica log-log correspondiente a la misma la cual da un valor de pendiente igual a  $-2$  y dado que la dimensión fractal es la pendiente negativa se tiene entonces que la dimensión fractal de la imagen es 2.

En la figura 5.36 se muestra en el inciso a) la imagen de un floculo con diferentes intensidades, con un tamaño de  $59 \times 34$  y en el inciso b) la gráfica  $\log - \log$  correspondiente a la misma la

cual da un valor de pendiente igual a  $-2.2860$  y dado que la dimensión fractal es la pendiente negativa se tiene entonces que la dimensión fractal de la imagen es  $2.2860$ .

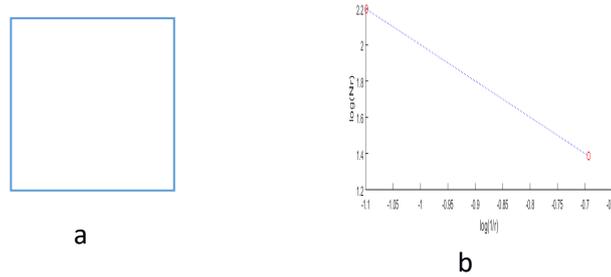


Figura 5.35. Dimensión fractal, a) imagen de 255 de 6x6; b) grafica log-log.

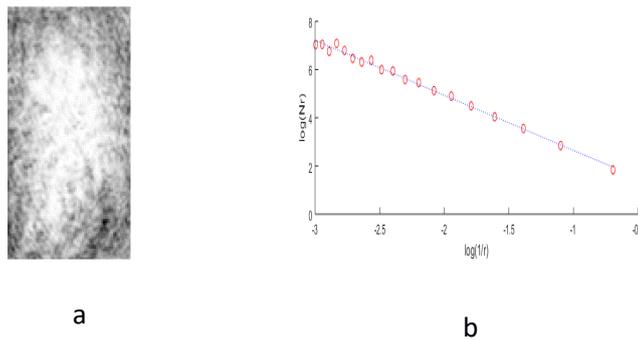


Figura 5.36. Dimensión fractal, a) imagen de floculo de 59x34; b) grafica log-log.

El último código fue realizado con el método triangular de conteo de cajas, propuesto por Kaewaramsri y Woraratpanya (2015). Dentro del código se realizaron diferentes subrutinas, las cuales se enlistan a continuación:

- Seleccionar la imagen con la que se desea trabajar esta se extrae tomando en cuenta la posición de la imagen que fue reconstruida y se trabaja la imagen a escala de grises.
- Dividir una imagen y seguir el procedimiento de Kaewaramsri y Woraratpanya (2015).
- Determinar el recuento de cajas  $n_r$
- Calcular  $p1$  y  $p2$
- Obtener recuento de cajas  $n_r(i, j)$  usando (4.14)
- Utilizar (4.8) para calcular el número total de recuentos de cajas  $N_r$ .

### 5.5.2.1 Ajuste de los datos de la dimensión fractal vs. tamaño de los flóculos

El ajuste de los datos obtenidos de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos se realizó usando tres modelos de ajuste, esto con la finalidad de verificar la pertinencia del uso de la holografía digital para determinar la dimensión fractal.

Para el primero se consideró la ecuación 2.4 propuesta por Lau & Krishnappan (1997) la cual al combinarse con la ecuación 2.5 propuesta por Kranenburg (1994) permite determinar la dimensión fractal con el siguiente modelo de ajuste.

$$F = 3 - \frac{bD^c}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad (5.1)$$

Donde  $F$  es la dimensión fractal,  $D$  es el diámetro del flóculo,  $d$  es el diámetro de la partícula primaria y las constantes  $b$  y  $c$  dependen del tipo de sedimento que se está estudiando (García-Aragón et al., 2014).

Para el segundo modelo de ajuste es el propuesto por García et al. (2014), este modelo fue propuesto para determinar la dimensión fractal de sedimentos cohesivos provenientes de sistemas acuícolas, el modelo está dado por:

$$F = 3 - \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n} D \left(n - \left(\frac{1}{a}\right)^{0.85n}\right)}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad (5.2)$$

Donde  $F$  es la dimensión fractal,  $D$  es el diámetro del floculo,  $d$  es el diámetro de la partícula primaria y las constantes  $a$  y  $n$  dependen del tipo de sedimento que se está estudiando.

Para el tercero y último ajuste se utilizó un ajuste exponencial dado que de acuerdo a los datos obtenidos es el que se asemeja a los otros dos ajustes propuestos que son los que se obtuvieron en estudios previos y mostraron mejores resultados, el modelo del ajuste exponencial propuesto tiene la siguiente forma:

$$F = e \ln\left(\frac{D}{d}\right) + f \quad (5.3)$$

Donde  $F$  es la dimensión fractal,  $D$  es el diámetro del flóculo,  $d$  es el diámetro de la partícula primaria y las constantes  $e$  y  $f$  dependen del tipo de sedimento que se está estudiando

Es importante recordar que la dimensión fractal mide el nivel de compacidad de los flóculos por lo tanto cuando se obtiene valores cercanos a 3 se trata de flocs compactos, mientras que más cercanos estén al 2, se habla de flocs con altas porosidades.

### 5.5.3 Velocidad de caída

Esta etapa se realizó un código el cual identifica parejas de partículas no esféricas, se sabe que son pareja debido a que el tamaño es similar, es importante señalar que debido a la naturaleza de los códigos y a que la reconstrucción se lleva a cabo en una cantidad muy grande de planos, hay casos en los que en una primera imagen detectaba una partícula en la posición dada y en la siguiente imagen detectaba otra, por lo cual se buscó que todas las velocidades obtenidas correspondieran efectivamente a pares de partículas.

Para obtener la velocidad de caída de forma experimental se realizó un código en Matlab en el cual después de reconstruir y obtener la forma y tamaño de las partículas se determinan sus centroides y se va obteniendo la velocidad en sus tres ejes usando la fórmula de velocidad, donde la distancia se obtiene con la diferencia de los centroides y el tiempo es el tiempo de captura de las imágenes (60 ms).

En la figura 5.37 incisos a) y d) se muestran en el recuadro rojo las partículas que se reconstruyeron en los incisos b) y e) la determinación de sus centroides y en los incisos c) y f) la forma y tamaño de las mismas. Es importante señalar que la pequeña diferencia que existe entre la forma y tamaño se debe a que las partículas al ir cayendo también van girando y las tomas corresponden a diferentes instantes.

La velocidad experimental se obtuvo a partir de los centroides de las partículas no esféricas que fueron estudiadas y el tiempo de captura entre dos imágenes consecutivas, se determinó la velocidad en los tres ejes y su magnitud.

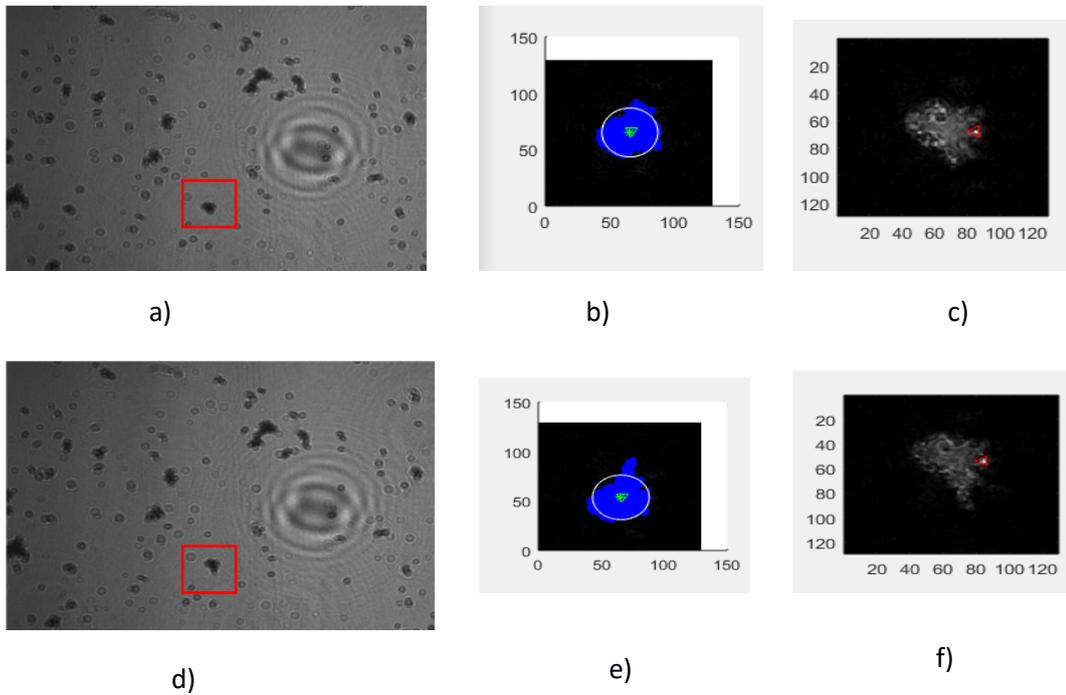


Figura 5.37. Imágenes procesadas para la obtención de la velocidad de caída. a), d) recuadro rojo son las partículas que se reconstruyeron; b), e) determinación de sus centroides; c), f) la forma y tamaño de las partículas.

## 5.6 Desarrollo de los algoritmos computacionales

En esta etapa se desarrolló una interfaz gráfica que permite que los usuarios puedan llevar a cabo la reconstrucción de una forma más sencilla. siguiendo lo descrito en los apartados previos. En la figura 5.38 se muestran ejemplo de cómo quedó la interfaz.

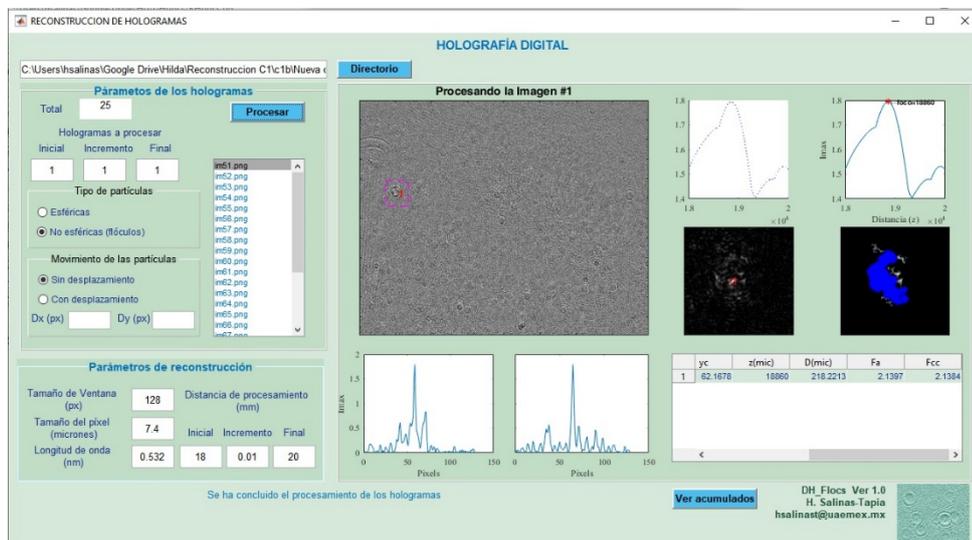


Figura 5.38. Interfaz gráfica final

# CAPÍTULO 6

## RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos referentes a los experimentos realizados para la grabación de hologramas de partículas esféricas y no esféricas, así como los resultados que se obtuvieron de la reconstrucción de los hologramas que fueron grabados y las características que se han determinado de los mismos.

### 6.1 Montaje del sistema de holografía en línea

El montaje del sistema de holografía en línea se muestra como un resultado debido a que llevar a cabo su calibración en cuanto al cuidado de las distancias y el perfecto funcionamiento de cada uno de los accesorios ópticos fue un trabajo que consumió mucho tiempo de la presente investigación, ya sea porque el equipo no se encontraba en las condiciones necesarias y/o bien por el desconocimiento del funcionamiento de cada uno de los accesorios ópticos.

Además, es importante señalar que para llevar a cabo cada uno de los experimentos realizados se tenía que volver a calibrar el sistema de holografía en línea debido a que cualquier movimiento o cambio en la tabla óptica y o cualquiera de los accesorios ópticos provocaba que los resultados se vieran afectados por el ruido de cada uno de los accesorios.

Los accesorios ópticos que fueron más sensibles y que tuvieron que ser calibrados en cada experimento fueron los tres ejes de la montura para el filtraje espacial del haz de luz, la limpieza del prisma contenedor de las partículas, la polarización del haz de luz y la configuración del software de la cámara.

### 6.2 Herramienta computacional en MATLAB

Se realizó la codificación en MATLAB de 4 módulos: Módulo de adquisición de datos, Módulo de reconstrucción y Módulo de obtención de forma y tamaño de partículas esféricas y partículas no esféricas, Módulo obtención de la dimensión fractal.

### 6.3 Caracterización de partículas esféricas.

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de la caracterización de hologramas de partículas esféricas usando el método de convolución.

#### 6.3.1 Caracterización de partículas esféricas

Se llevó a cabo la reconstrucción de una muestra de las partículas esféricas la cual consistió en reconstruir partículas de tres carpetas, para la carpeta 1 se tomó una muestra de 1862, para la carpeta 2 una muestra de 2496 y para la carpeta 3 una muestra de 1917 partículas esféricas para verificar que el módulo de reconstrucción arrojara los resultados esperados.

En la figura 6.1 se muestra en el inciso a) la imagen a reconstruir y en el inciso b) la imagen después del filtro, en la figura 6.2 se muestra en el inciso a) la ventana seleccionada para reconstruir. Es importante señalar que la reconstrucción se hizo de toda la imagen estableciendo ventanas de 128 x 128 píxeles, en el inciso b) se muestra la reconstrucción de la partícula y en el inciso c) se muestra la forma y tamaño de la partícula reconstruida.

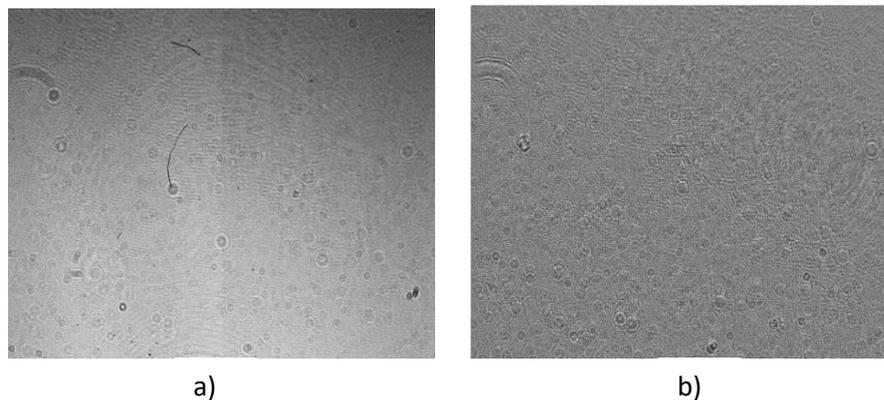


Figura 6.1. Holograma a reconstruir. a) Sin filtro; b) Con filtro

Los planos de reconstrucción para las partículas esféricas variaron desde una distancia inicial de 18 mm que es la distancia a la que se encuentra la primera pared del prisma donde está el fluido que contiene las partículas en estudio, hasta una distancia final de 48 mm debido a que el ancho del prisma es de 3 cm. Los incrementos que se dieron fueron de 0.01 mm (10  $\mu\text{m}$ ), dado que el tamaño de las partículas es de 50  $\mu\text{m}$  y cuando se dieron incrementos mayores no

se obtuvieron buenos resultados y para incrementos menores el proceso de reconstrucción consumía mucho tiempo computacional.

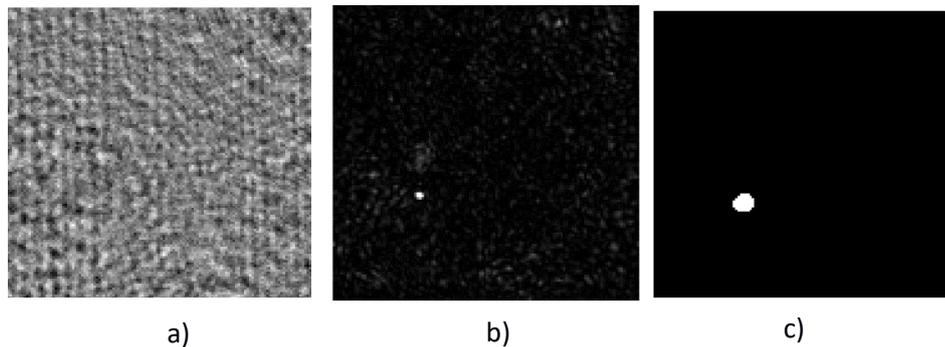


Figura 6.2. Holograma a reconstruir. a) Ventana de reconstrucción 128 x 128; b) detección de la partícula; c) forma y tamaño de la partícula.

En la figura 6.3 se muestra el histograma de frecuencia correspondiente al total de partículas reconstruidas para el grupo de imágenes de la carpeta 1, se puede observar que, aunque aún existen resultados en los cuales las partículas reconstruidas tienen valores muy pequeños, la media está en un valor muy cercano al valor de las partículas que se ocuparon para calibrar el sistema.

Es importante resaltar que para elegir la función de densidad que define a los datos obtenidos, se realizó el análisis en Matlab con diferentes funciones, se observó de acuerdo a las gráficas obtenidas, que se trata de una distribución continua, de las cuales debido a la inclinación y forma que tiene la curva, se trabajó con las funciones: Gamma, Log normal y Normal ya que son, de acuerdo a la búsqueda bibliográfica las que cumplen con las características que tienen los datos, una vez hecho el análisis, se concluye que los datos siguen una distribución log normal, dado que en todos los casos presentaron una  $r$  mayor (de 0.65 a 0.72) en comparación con las otras distribuciones.

En la figura 6.4 se muestra la gráfica de los datos y las tres funciones de densidad de probabilidad que más se ajustan, los tamaños de las partículas oscilan entre 40.04  $\mu\text{m}$  y 79.65  $\mu\text{m}$  y tiene una media de 52.90  $\mu\text{m}$ , por lo cual se concluye que la media corresponde al tamaño medio de la partícula empleada para este caso.

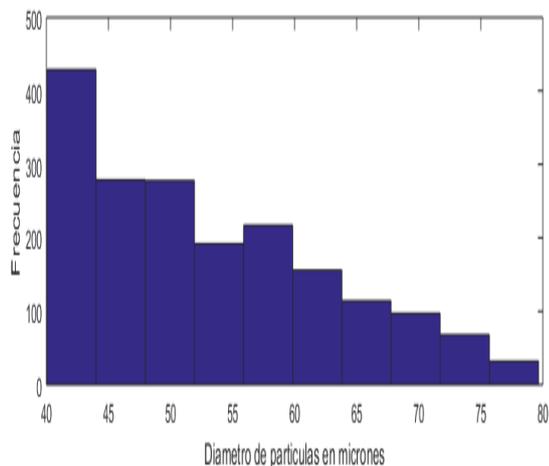


Figura 6.3 Frecuencia relativa contra diámetro de partículas esféricas (Carpeta 1)

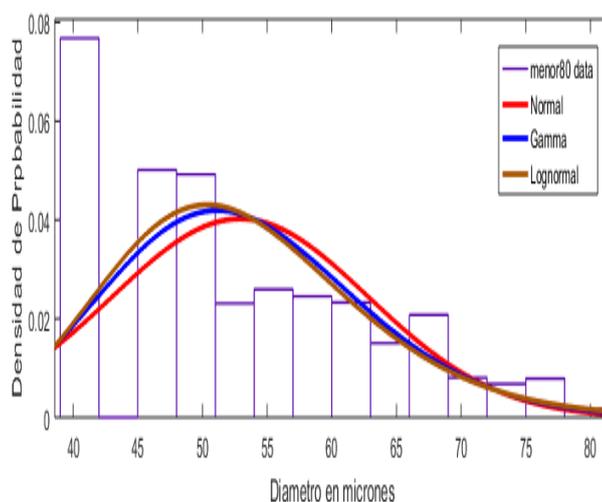


Figura 6.4 Gráficas de densidad de probabilidad para los resultados de la carpeta 1.

Mientras que, en la figura 6.5 se muestra el histograma de frecuencia de las partículas que reconstruidas correspondientes al grupo de hologramas de la carpeta 2, y en la figura 6.6 se muestra la gráfica de los datos y las tres funciones de densidad de probabilidad que más se ajustan. Para este grupo de imágenes los tamaños de las partículas circulares oscilan entre  $37.3424 \mu\text{m}$  y  $79.2151 \mu\text{m}$  con una media de  $52.56 \mu\text{m}$ , por lo cual se concluye que el resultado de la reconstrucción de los hologramas en relación con el tamaño de partículas fue el esperado.

Por otro lado, en figura 6.7 se muestra el histograma de frecuencia de las partículas que fueron reconstruidas para el grupo de imágenes correspondientes a la carpeta 3, en la figura 6.8 se muestra la gráfica de los datos y las tres funciones de densidad de probabilidad que más se ajustan, y los tamaños de las partículas esféricas oscilan entre  $30.1064 \mu\text{m}$  y  $79.6540 \mu\text{m}$  con

una media de 52  $\mu\text{m}$ , por lo cual se concluye que el método de reconstrucción presenta buenos resultados.

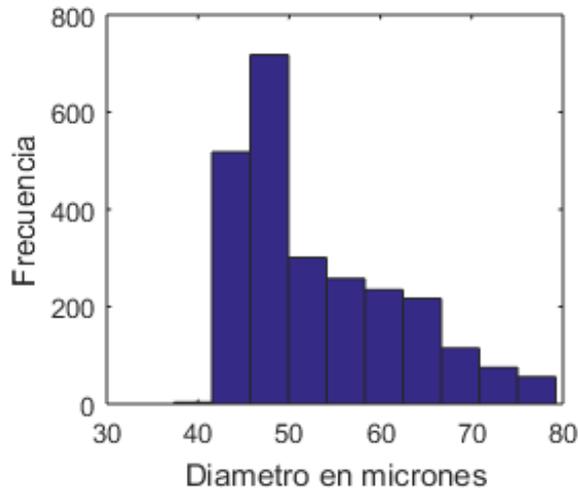


Figura 6.5 Frecuencia relativa contra diámetro de partículas esféricas (Carpeta 2)

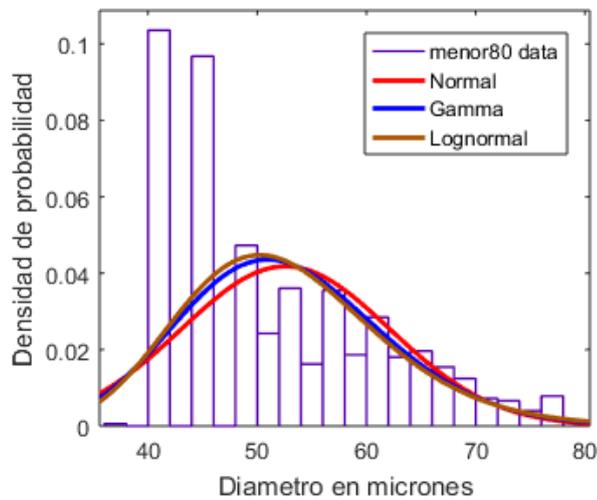


Figura 6.6 Gráficas de densidad de probabilidad para los resultados de la carpeta 2.

Uniendo todos los datos de las partículas esféricas se obtuvieron un total de 6275 partículas reconstruidas con diámetros que oscilan entre 30.1064  $\mu\text{m}$  y 79.6540  $\mu\text{m}$ , los cuales siguen una función de distribución log normal y tienen una media de 53.3706  $\mu\text{m}$ , por lo cual, se concluye que los experimentos y los códigos para partículas esféricas dan buenos resultados pues la media está muy cercana al valor del diámetro (50  $\mu\text{m}$ ) de las partículas esféricas de poliestireno utilizadas en esta etapa. En la figura 6.9 inciso a) se muestra la gráfica de frecuencias y en el inciso b) la gráfica de la función de probabilidad log normal correspondiente a los datos.

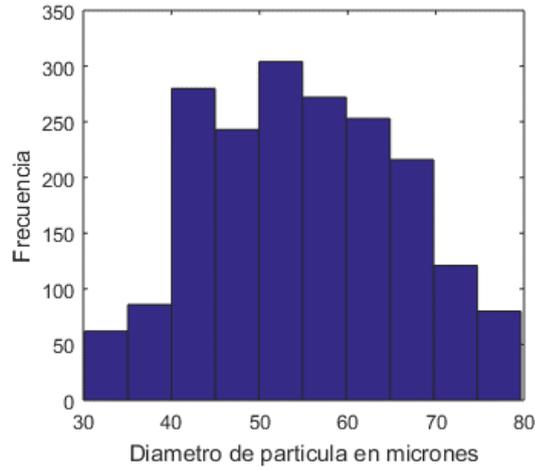


Figura 6.7 Frecuencia relativa contra diámetro de partículas esféricas (Carpeta 3)

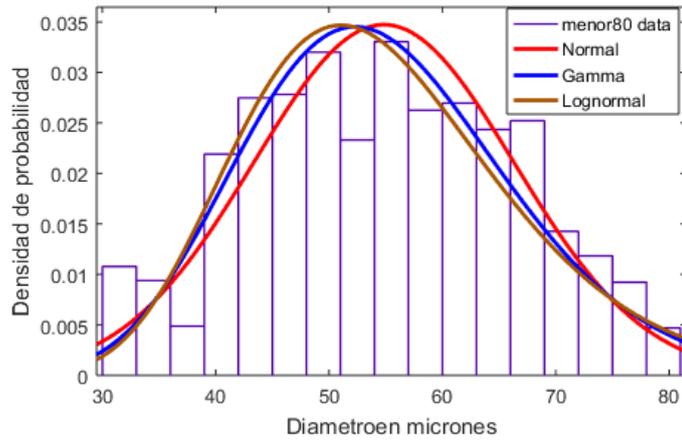


Figura 6.8 Graficas de densidad de probabilidad para los resultados de la carpeta 3.

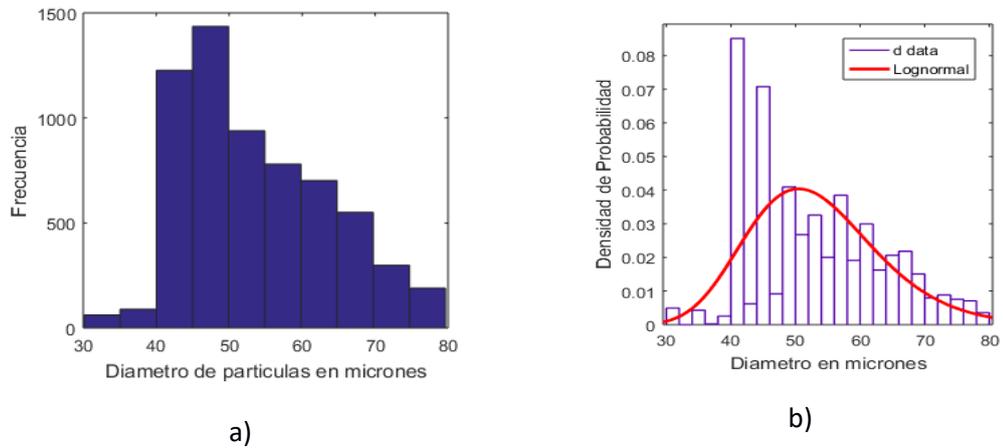


Figura 6.9. Datos obtenidos de partículas esféricas. a) Frecuencia relativa; b) función de densidad de probabilidad.

### **6.3.2 Caracterización de partículas no esféricas**

En este apartado se presentan los resultados correspondientes a la caracterización de las partículas no esféricas, para las cuales se utilizó el mismo código de reconstrucción usado para partículas esféricas con la modificación descrita en la metodología, dado que la reconstrucción de partículas esféricas sirvió para calibrar y verificar que el módulo de reconstrucción y el módulo de obtención de forma y tamaño funcionara adecuadamente.

#### **6.3.2.1 Caracterización de partículas no esféricas provenientes del río Usumacinta**

En este apartado se muestran los resultados obtenidos para los sedimentos provenientes del río Usumacinta, primero se mostrarán los resultados obtenidos para forma y tamaño de los flóculos y posterior a ello se muestran los resultados obtenidos para la dimensión fractal.

##### **6.3.2.1.1 Forma y tamaño**

Los resultados de la reconstrucción de las partículas no esféricas del río Usumacinta mostraron que existen diferentes tipos de aglomerados y a su vez estos tienen diversas formas y tamaños, además, se puede observar y comprobar que los aglomerados van haciéndose más grandes conforme el tiempo va pasando. Esto puede observarse en la figura 6.10 en la cual se muestra un ejemplo de una de las imágenes que se reconstruyó de los flóculos del río Usumacinta, en el inciso a) se puede observar cuando los flóculos están disgregados, el inciso b) corresponde a un tiempo de 15 minutos, en inciso c) un tiempo de 30 minutos, el inciso d) un tiempo de 45 minutos y el inciso e) un tiempo de 60 minutos y con ello se observa la evolución en la formación de los flóculos.

Mientras que en la figura 6.11 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=0$  minutos (cuando se encuentran disgregados), en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 189 partículas con tamaños de partículas que oscilan entre los 11.8087  $\mu\text{m}$  y los 368.8208  $\mu\text{m}$  con una media de 135.442  $\mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal, pues es la función de distribución que más se ajusta a los datos obtenidos referente a todos los tamaños.

En la figura 6.12 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=15$  minutos, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 669 partículas, con tamaños de partículas que oscilan entre los  $30.1064 \mu\text{m}$  y los  $436.0430 \mu\text{m}$  con una media de  $150.865 \mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal.

En la figura 6.13 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=30$  minutos, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 335 partículas con un tamaño de partículas que oscilan entre los  $48.6885 \mu\text{m}$  y los  $447.4855 \mu\text{m}$  con una media de  $161.688 \mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal.

En la figura 6.14 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=45$  minutos, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 657 partículas con un tamaño de partículas que oscilan entre los  $39.1650 \mu\text{m}$  y los  $514.0512 \mu\text{m}$  con una media de  $197.423 \mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal.

En la figura 6.15 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=60$  minutos, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 361 partículas con un tamaño de partículas que oscilan entre los  $41.7500 \mu\text{m}$  y los  $484.0123 \mu\text{m}$  con una media de  $167.411 \mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal.

En la figura 6.16 se muestra cómo va creciendo la media del tamaño de las partículas conforme el tiempo de formación de los flóculos en canal anular va aumentando, se observa como en los primeros 45 minutos la media va en aumento hasta llegar a  $197.423 \mu\text{m}$ , posterior a ello la media baja a  $167.411 \mu\text{m}$  con lo cual se concluye que los experimentos realizados arrojan que

la formación de los flóculos se lleva a cabo en los primeros 45 min y posterior a ello los flóculos comienzan a disgregarse.

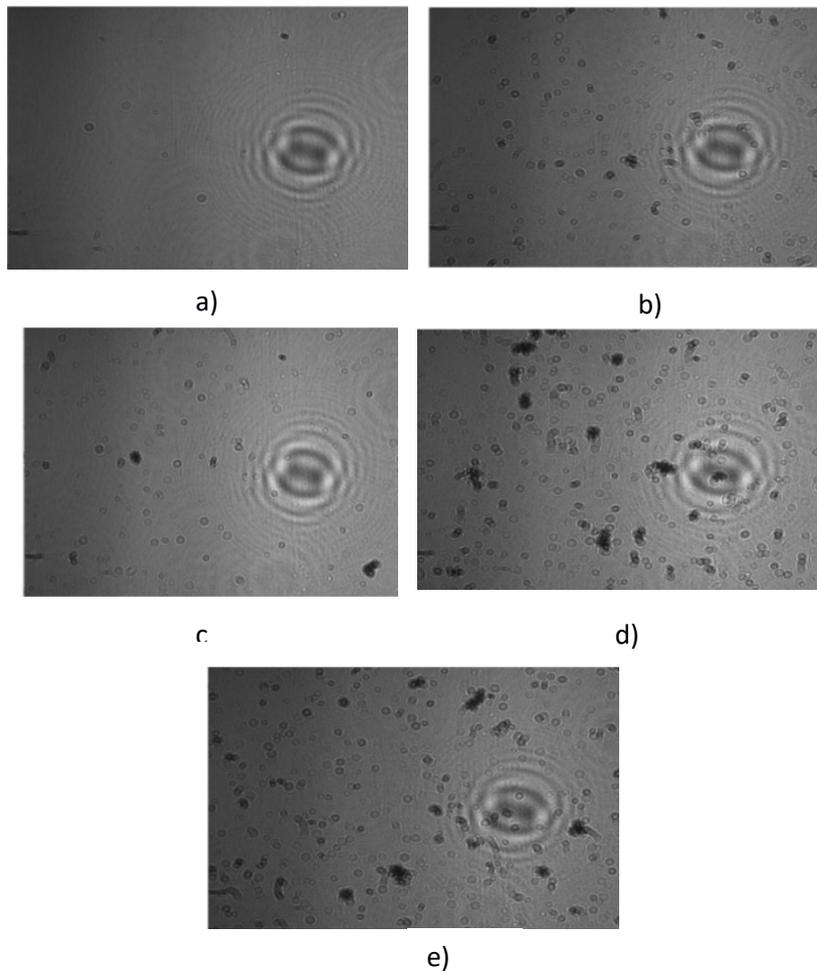


Figura 6.10. Hologramas del río Usumacinta. a) Disgregados; b) a los 15 minutos; c) a los 30 minutos; d) a los 45 minutos; e) a los 60 minutos.

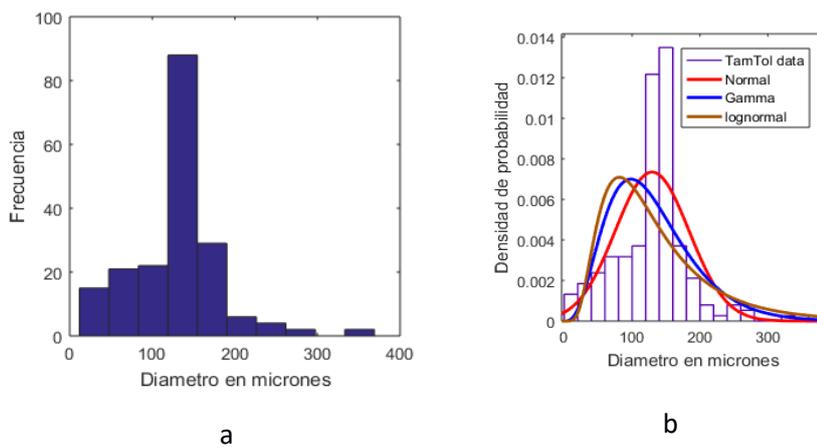
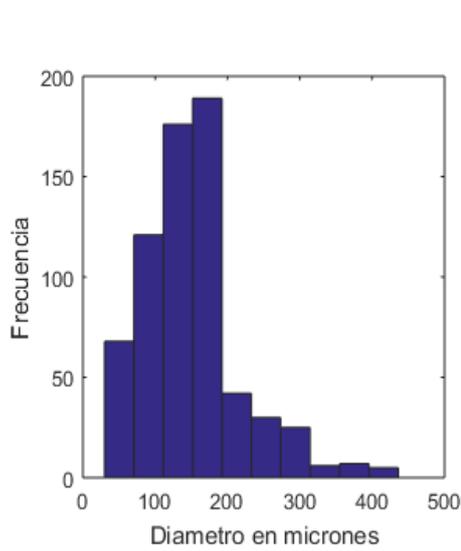
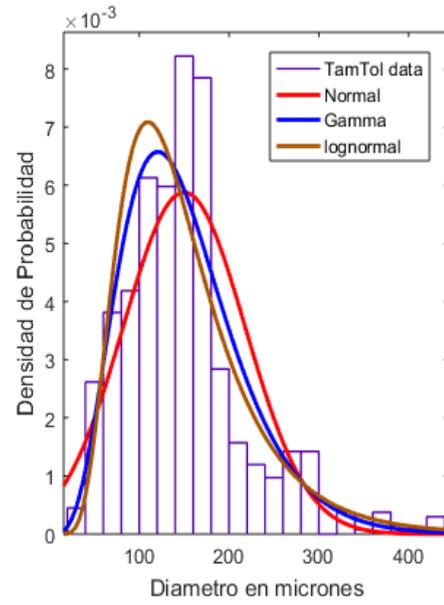


Figura 6.11. Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo  $t=0$  min. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

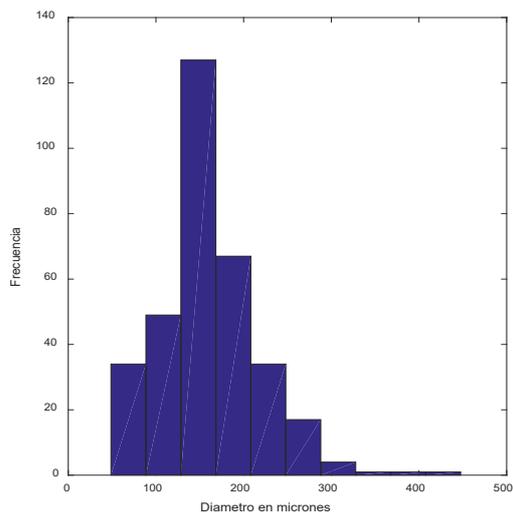


a)

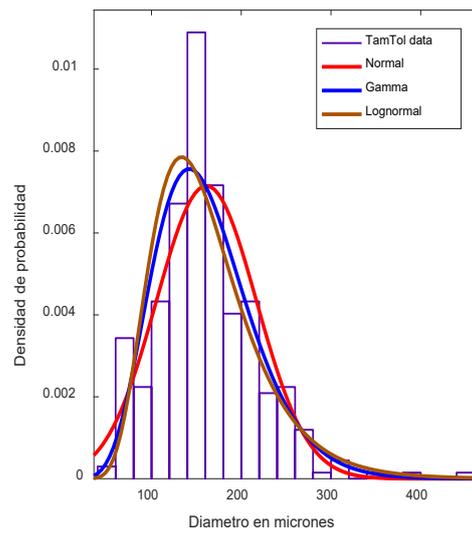


b)

Figura 6.12. Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo  $t=15$  min. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.



a)



b)

Figura 6.13. Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo  $t=30$  min. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

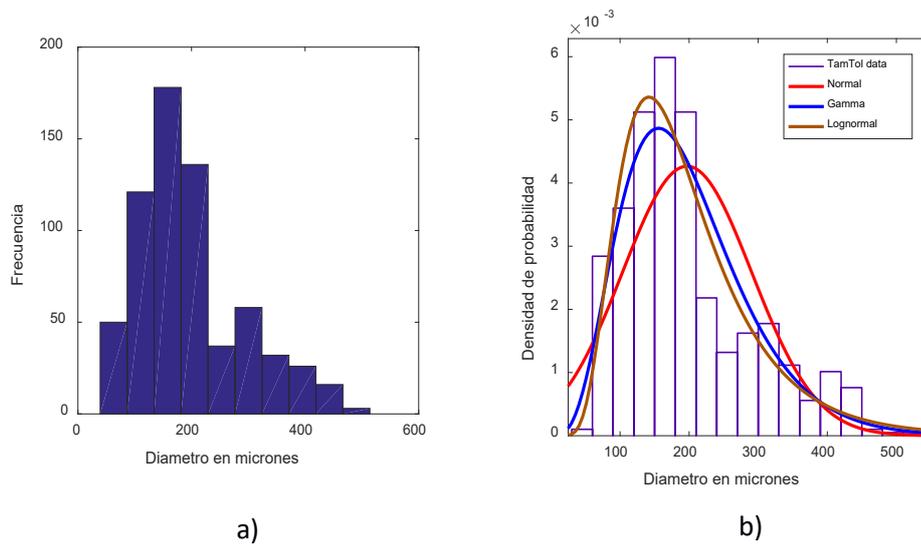


Figura 6.14. Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo  $t=45$  min. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

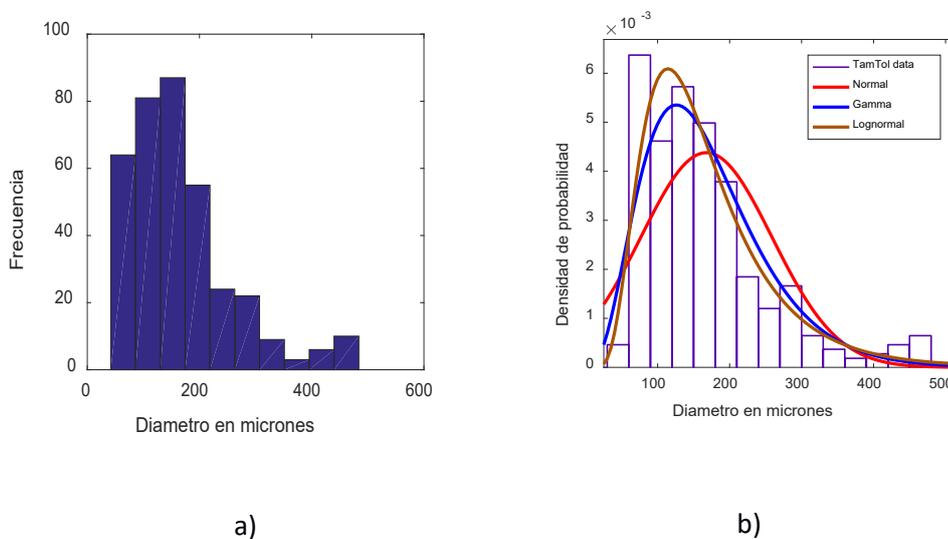


Figura 6.15. Datos obtenidos del río Usumacinta en el tiempo  $t=60$  min. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

Se concluye también que la técnica utilizada y los métodos de reconstrucción y determinación de tamaño y forma de partículas muestran buenos resultados.

Finalmente, en la figura 6.17 se muestra la distribución espacial de los tamaños de las partículas (diámetro) en el volumen de análisis, así como la posición tridimensional de las partículas del río Usumacinta para cada uno de los tiempos que se hizo el experimento, esto es resultado la grabación de hologramas y del método de reconstrucción empleado, lo que permite observar la importancia de aplicar este tipo de técnicas no invasivas. Se puede observar como a los 15

minutos (figura 6.17 a) las partículas en su mayoría tienen diámetros menores en comparación con los resultados presentados entre los 30 y 60 min.

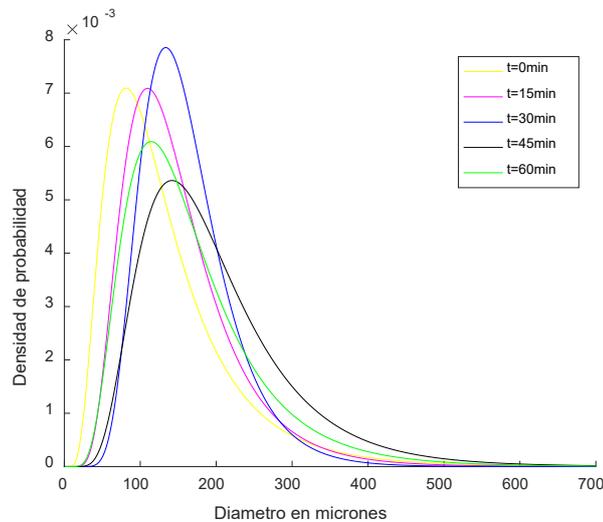


Figura 6.16. Densidad de probabilidad de los datos obtenidos del río Usumacinta para diferentes tiempos.

### 6.3.2.1.2 Dimensión fractal

En cuanto a la dimensión fractal se obtuvieron imágenes de los flóculos más representativos de cada uno de los tiempos en los que se llevó a cabo la reconstrucción. En la figura 6.18 se muestran los más representativos a los 15 min, los cuales tienen dimensiones fractales que van de 2.0435 hasta 2.3627. Mientras que en la figura 6.19 se muestran los más representativos a los 30 min, los cuales tienen dimensiones fractales que van de 2.0415 hasta 2.5217.

En la figura 6.20 se muestran los más representativos a los 45 min, los cuales tienen dimensiones fractales que van de 2.1181 hasta 2.3902, mientras que en la figura 6.21 se muestran los más representativos a los 60 min, los cuales tienen dimensiones fractales que van de 2.1252 hasta 2.4518 y en la figura 6.22 se muestran los más representativos para los 75 min, los cuales tienen dimensiones fractales que van de 2.0623 hasta 2.537.

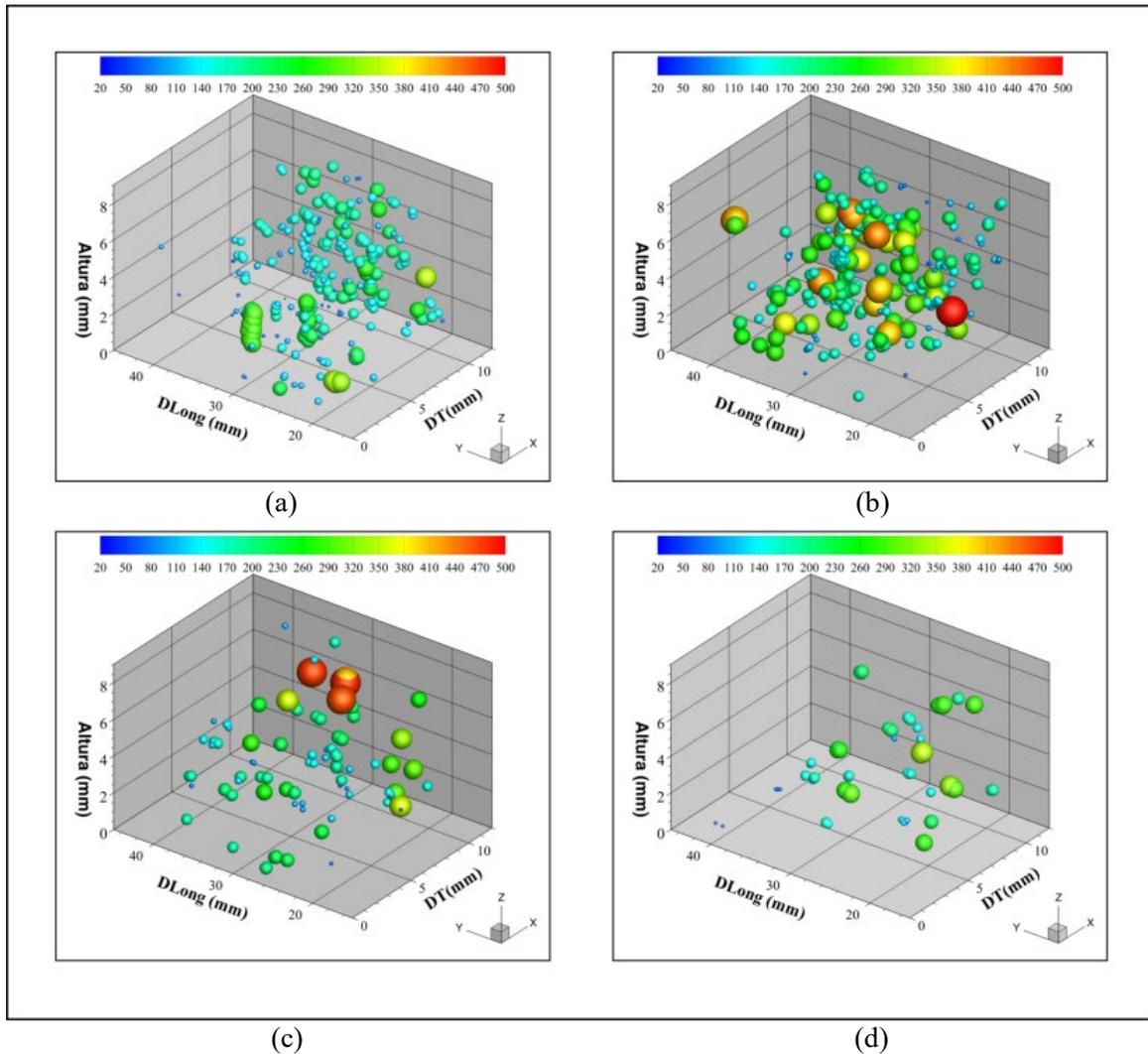


Figura 6.17 Distribución espacial de las partículas del río Usumacinta en 3D; a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos y d) 60 minutos

Por último, se muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos considerando cada uno de los métodos de cajas utilizados para determinar la dimensión fractal y el método de PTV (particle tracking velocimetry) para obtener los tamaños, de ahí que la técnica en combinación con la holografía digital (DH) se denomine DHPTV.

En la figura 6.23 se muestran los resultados de la dimensión fractal obtenidos para el río Usumacinta a los 15 min obtenida con los diferentes métodos de cajas, y con los datos se realizó el ajuste utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997).  $c$  de 0.69 a 0.73. Para estos métodos los coeficientes del modelo con los diferentes métodos de cajas son muy similares, donde el coeficiente  $c$  toma valores entre de 0.4 a 0.7 y el coeficiente  $b$  de 0.3 a 0.4.

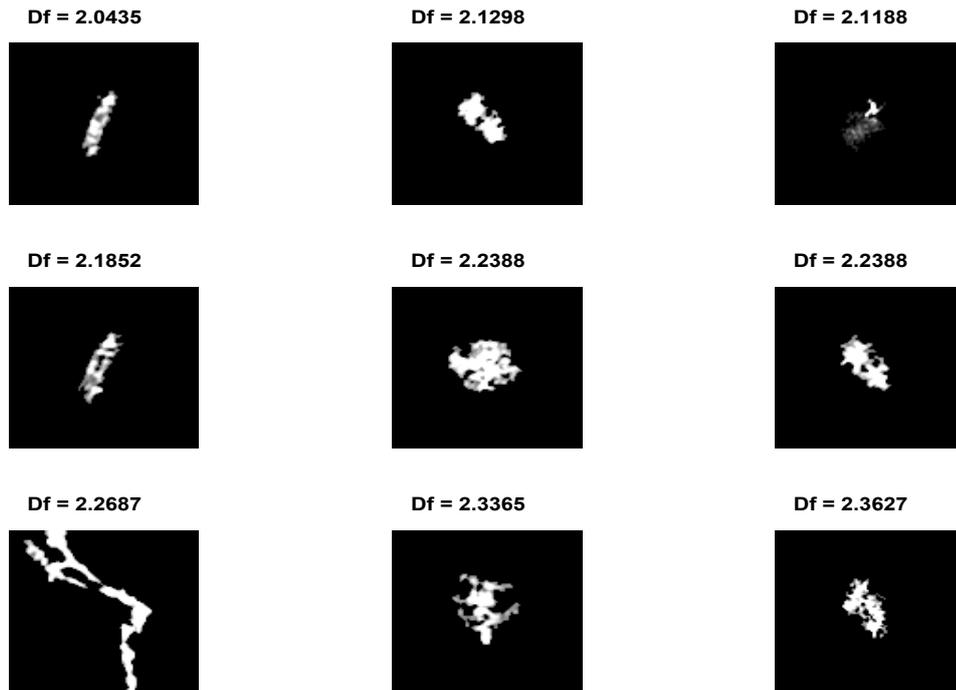


Figura 6.18. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 15 minutos.

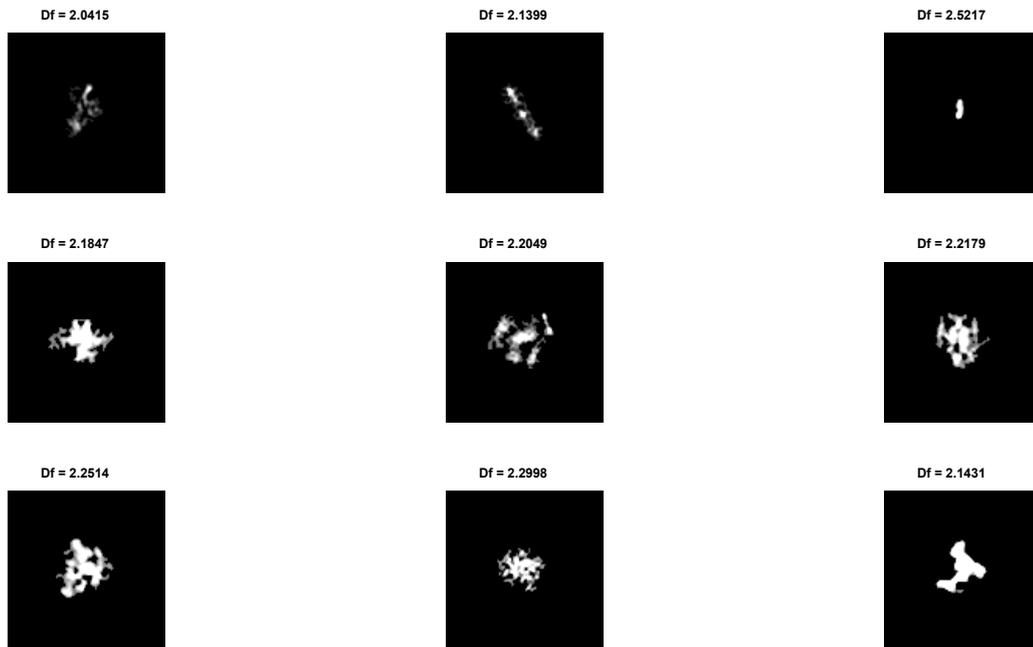


Figura 6.19. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 30 minutos.

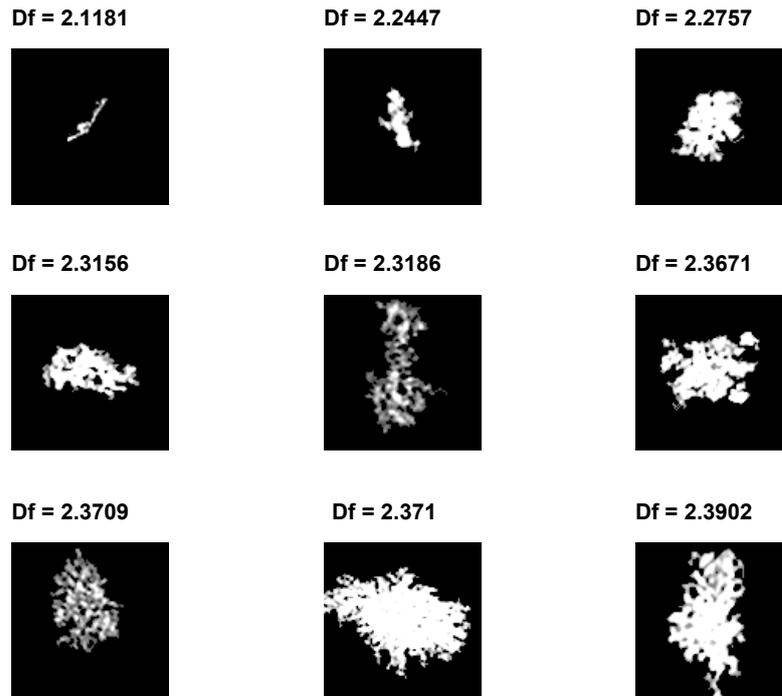


Figura 6.20. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 45 minutos.

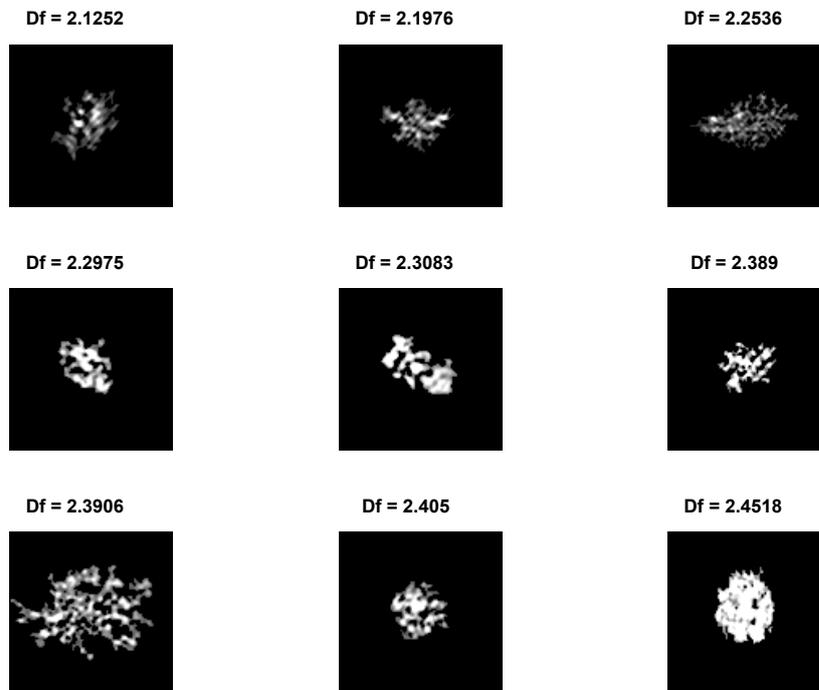


Figura 6.21. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 60 minutos.

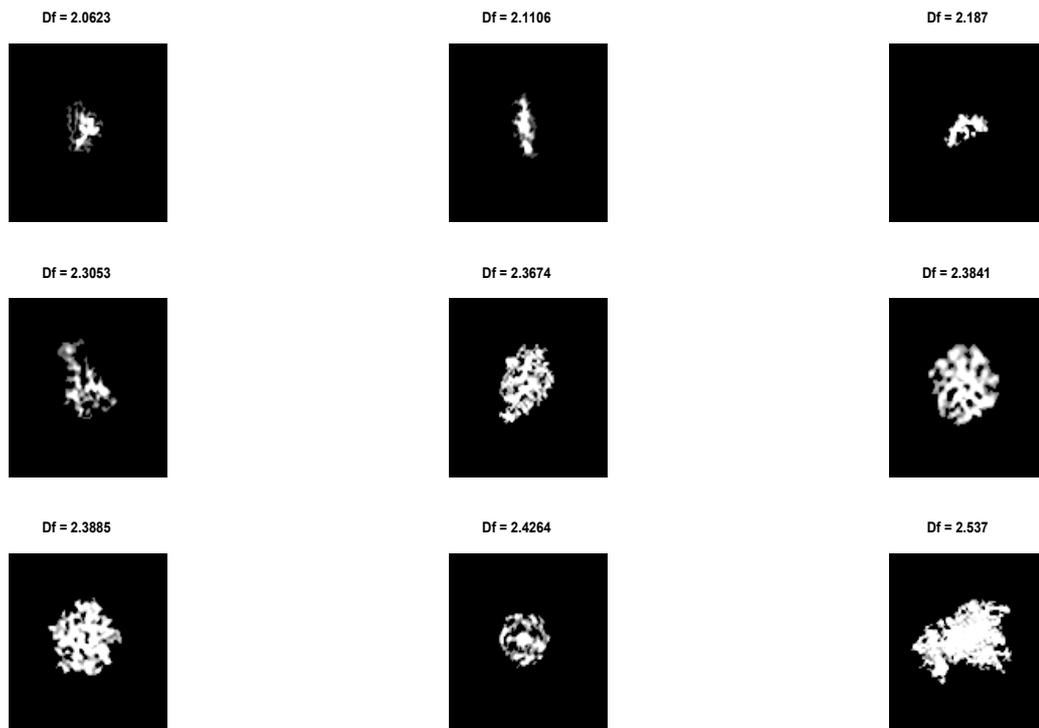


Figura 6.22. Forma y dimensión fractal de los flóculos del río Usumacinta para un tiempo de 75 minutos.

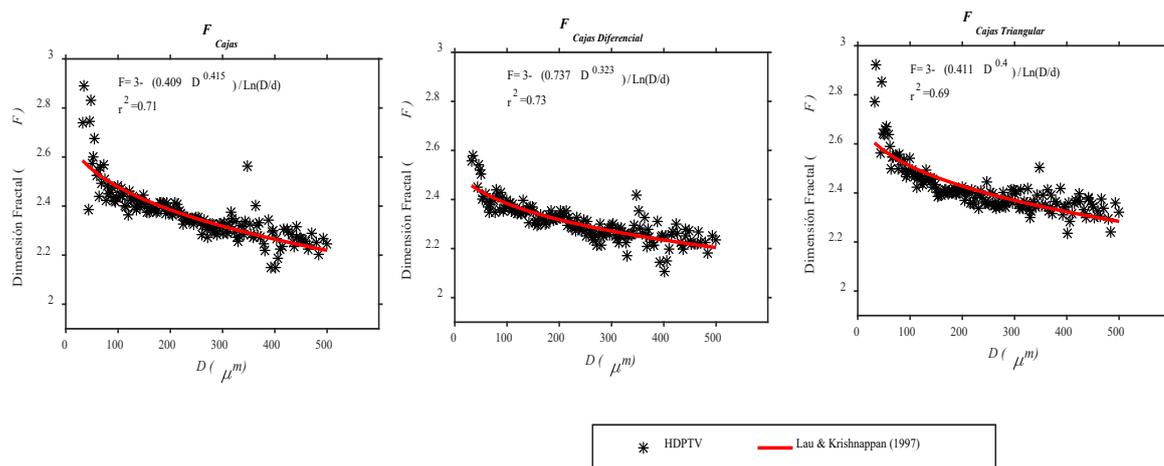


Figura 6.23 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

Mientras que en la figura 6.24 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 15 min, se muestra la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos de cajas y el ajuste al modelo de García et al. (2014). Se puede observar que el ajuste de los datos al modelo presenta coeficientes de determinación de 0.64 y 0.66, en este caso la  $n$  toma el valor constante

de 1.15 el cual se encuentra en el rango determinado en García et al. (2014), dado que, al ir variando los valores, es el que presentó mejor ajuste y mientras que el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

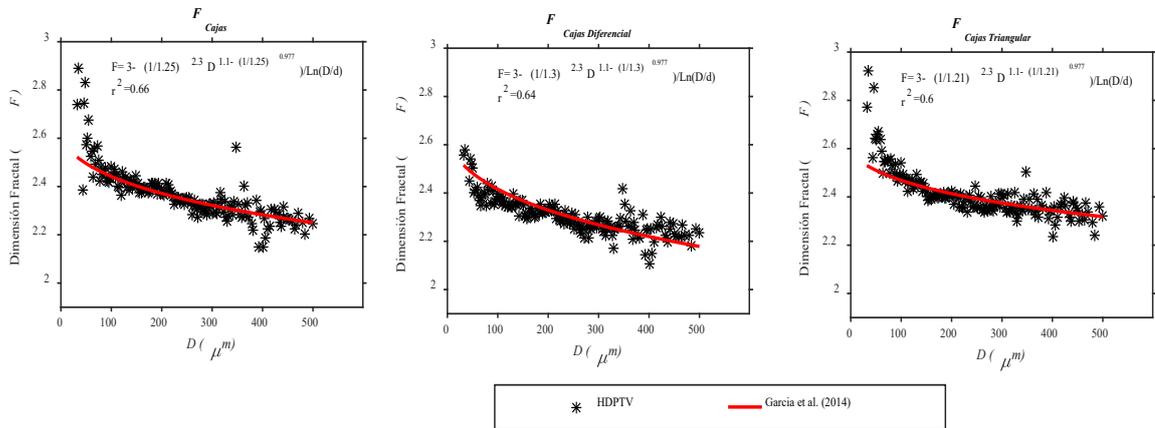


Figura 6.24 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flocúlos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste.

Así mismo, en la figura 6.25 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 15 min, donde se muestran los resultados de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y su ajuste utilizando una ecuación exponencial, los cuales presentan coeficientes de determinación de 0.75 y 0.76.

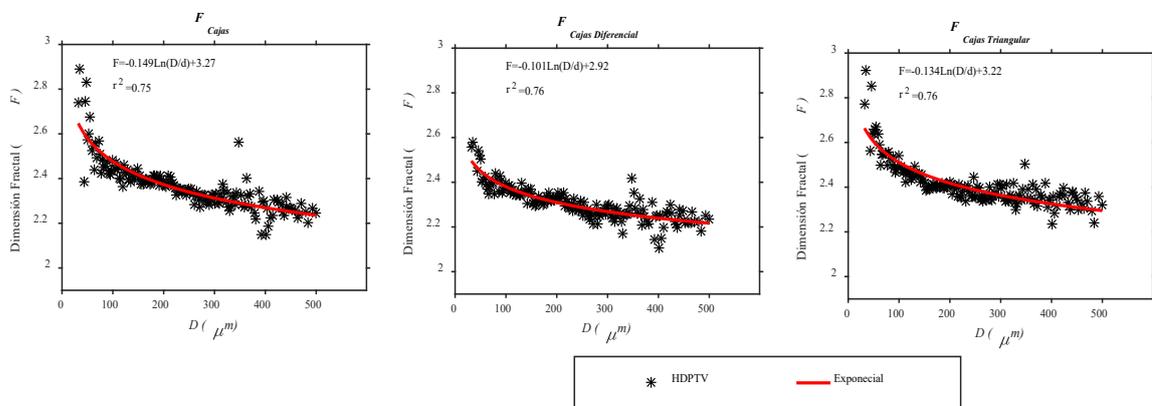


Figura 6.25 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flocúlos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

Con la finalidad de observar la dispersión de los datos, en la figura 6.26 se muestra el diagrama de cajas (bigotes) en el cual se observa que de los tres métodos los que presentan mayor cantidad de datos atípicos son el de cajas diferencial y el de cajas triangular, también se observa que todos presentan una mediana alrededor de 2.3 y 2.4 por lo cual se concluye que el valor de la dimensión fractal a los 15 minutos oscila entre 2.1 y 2.6.

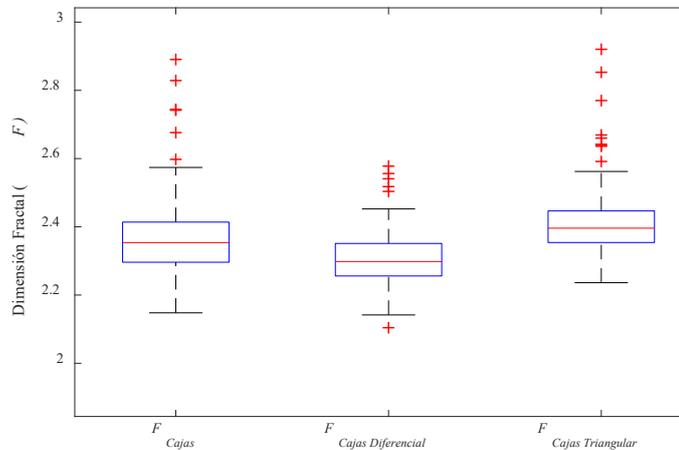


Figura 6.26. Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

Así mismo en la figura 6.27 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 30 min, donde se muestran los resultados experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos de cajas y su ajuste utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997). Se observa que los datos experimentales que se ajustan al modelo presentan coeficientes de determinación de 0.70 a 0.74 y el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.15 a 0.37 mientras que el coeficiente  $b$  varía de 0.4 a 1.6.

En la figura 6.28 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 30 min, se muestran los datos experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y su ajuste al modelo de García et al. (2014), para este modelo los coeficientes de determinación varían de 0.58 a 0.73, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.19 a 1.28.

En la figura 6.29 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 30 min, se muestran datos experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos de cajas y el ajuste utilizando la ecuación exponencial, con coeficientes de determinación de 0.7 y 0.75.

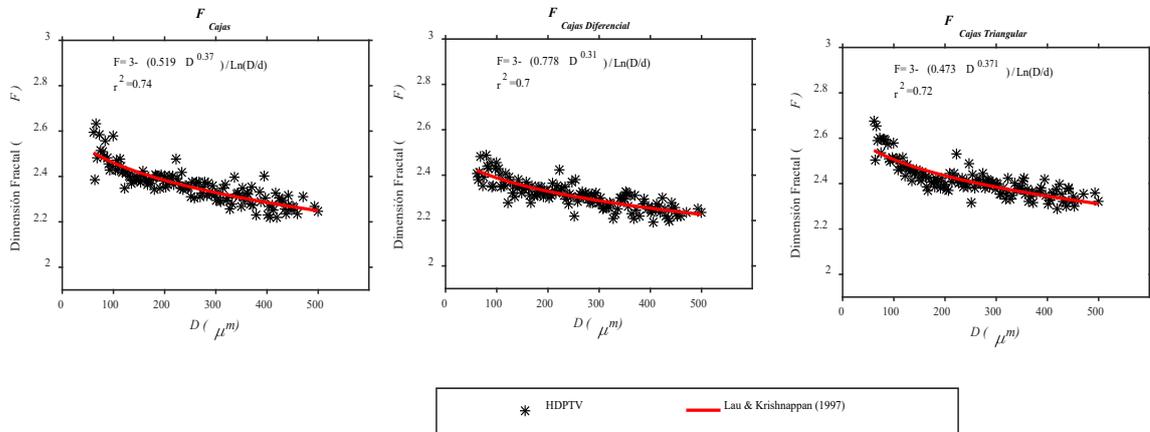


Figura 6.27 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

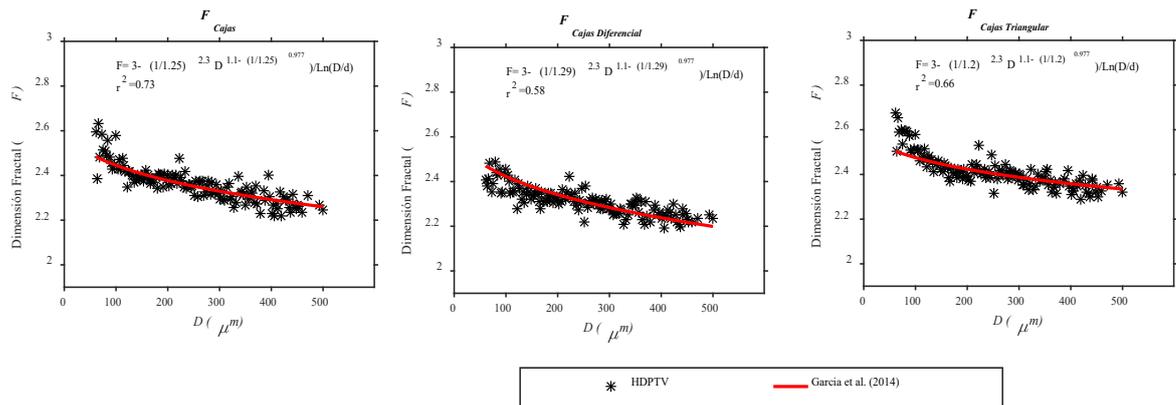


Figura 6.28 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste.

En la figura 6.30 se muestra el diagrama de cajas donde se observa que los métodos para determinar la dimensión fractal que presentan mayor cantidad de datos atípicos por arriba son el de cajas y el triangular, mientras que el método diferencial de cajas es el que presentan una menor dispersión en los datos, así mismo todos presentan una mediana alrededor de 2.3 y 2.4

por lo cual se concluye que el valor de la dimensión fractal a los 30 minutos es de dicho valor y los valores oscilan entre 2.2 y 2.58.

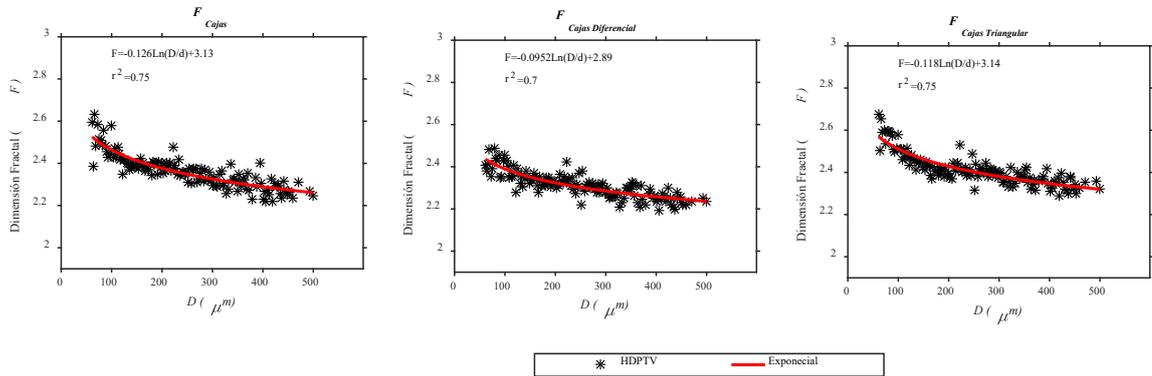


Figura 6.29 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

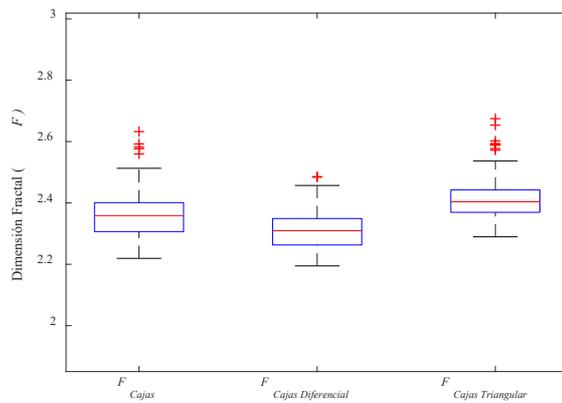


Figura 6.30 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

Por otro lado, en la figura 6.31 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 45 min, se muestran se muestran los datos experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos de cajas y su ajuste utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997), para este caso el modelo presentan coeficientes de determinación de 0.55 a 0.66 y los coeficientes del modelo presenta variaciones, donde  $c$  toma valores promedio de 0.19 a 0.36 y el coeficiente  $b$  de 0.49 a 1.32.

En la figura 6.32 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 45 min, se muestran los datos experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos de cajas y el ajuste utilizando el modelo de García et al. (2014), para este modelo se presentan coeficientes de determinación de 0.46 y 0.62, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.21 a 1.29.

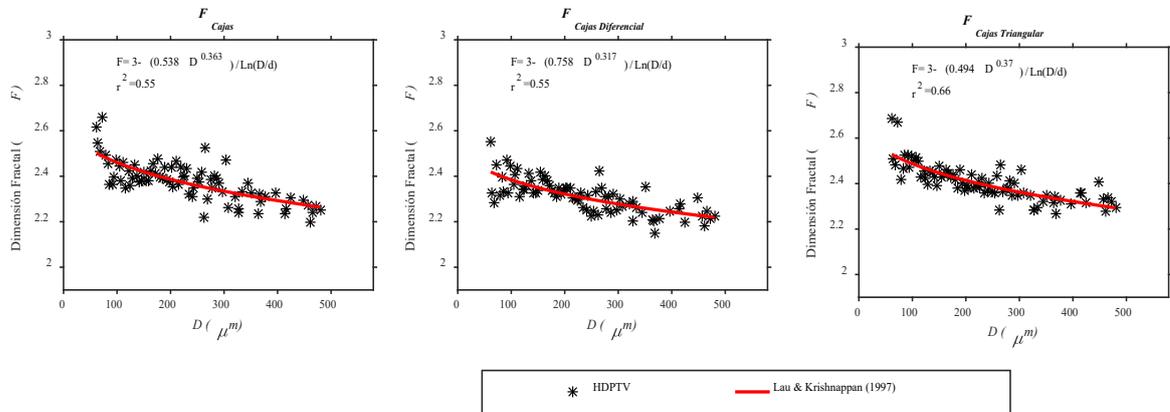


Figura 6.31 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

En la figura 6.33 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 45 min, se muestran los datos experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado utilizando la ecuación exponencial, presentando coeficientes de determinación de 0.53 a 0.68.

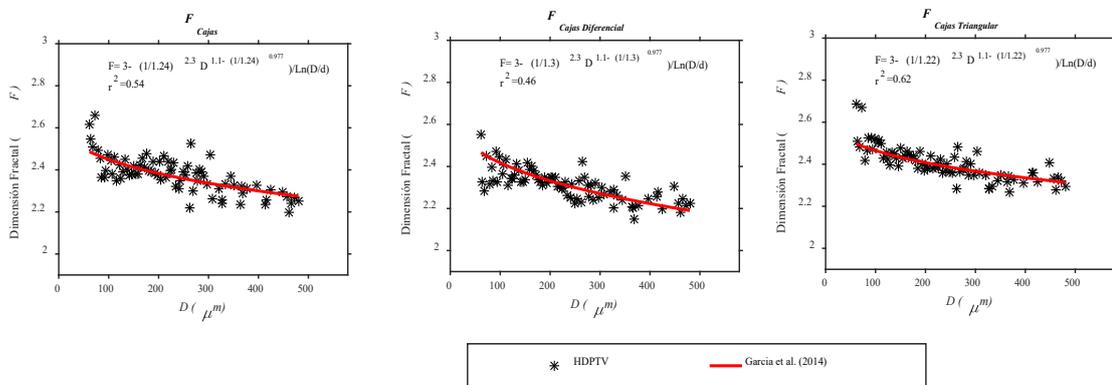


Figura 6.32 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.

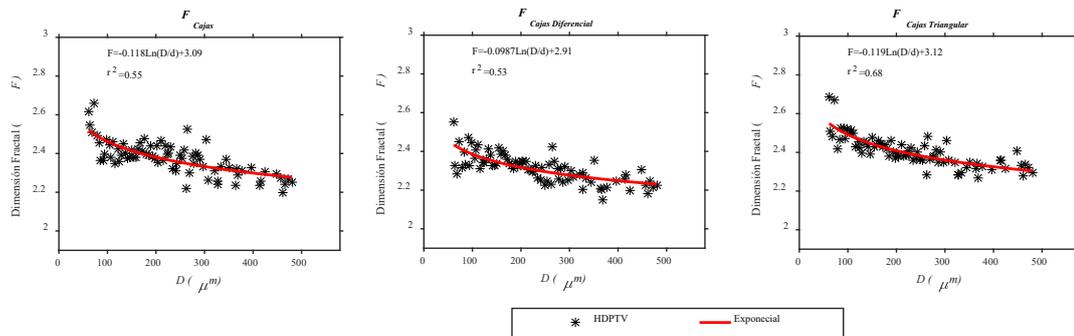


Figura 6.33 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

En la figura 6.34 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observa que en este caso no hay gran cantidad de datos atípicos además los diferentes métodos presentan casi la misma dispersión en los datos, también se observa que todos presentan una mediana alrededor de 2.3 y 2.4 por lo cual se concluye que el valor de la dimensión fractal a los 45 minutos es de dicho valor y los valores oscilan entre 2.15 y 2.55.

En la figura 6.35 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 60 min, se muestran los datos experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997), presentando coeficientes de determinación de 0.45 a 0.7 y para la cual el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.20 a 0.42 y el coeficiente  $b$  de 0.34 a 1.2.

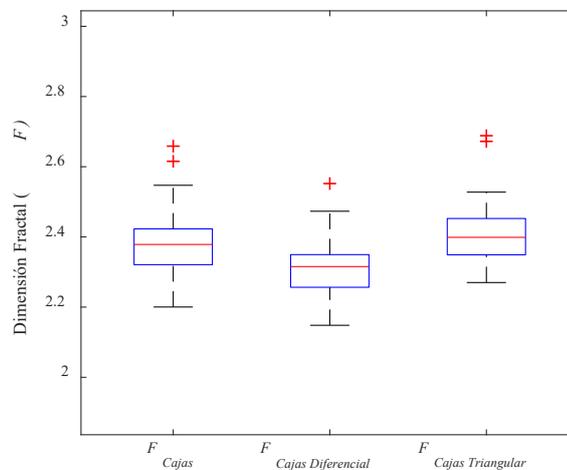


Figura 6.34 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

En la figura 6.36 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 60 min, se muestran los datos experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste utilizando el modelo de García et al. (2014), con coeficientes de determinación de 0.64 y 0.66, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.17 a 1.27.

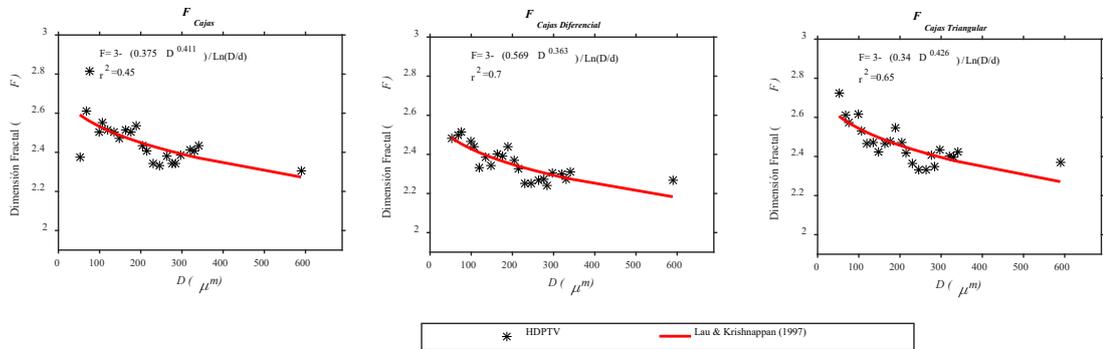


Figura 6.35 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

En la figura 6.37 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta a los 60 min, se muestran los datos experimentales de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste utilizando la ecuación exponencial, con coeficientes de determinación de 0.75 y 0.76.

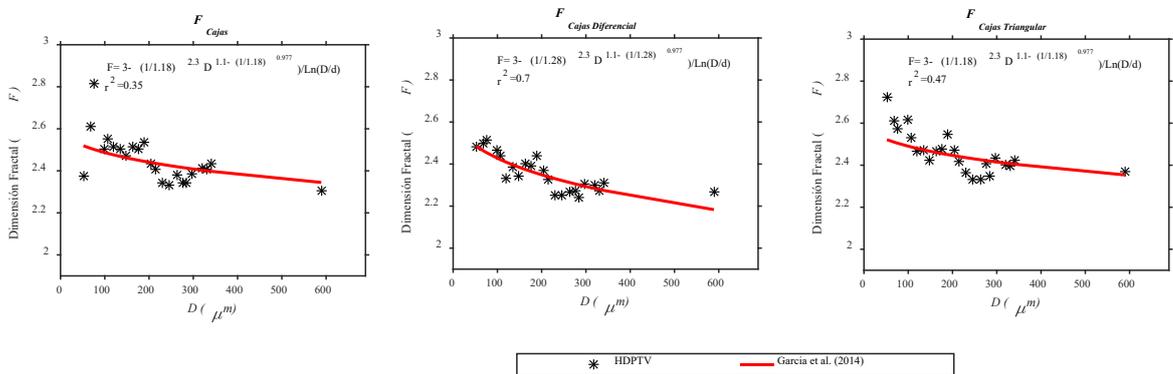


Figura 6.36 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.

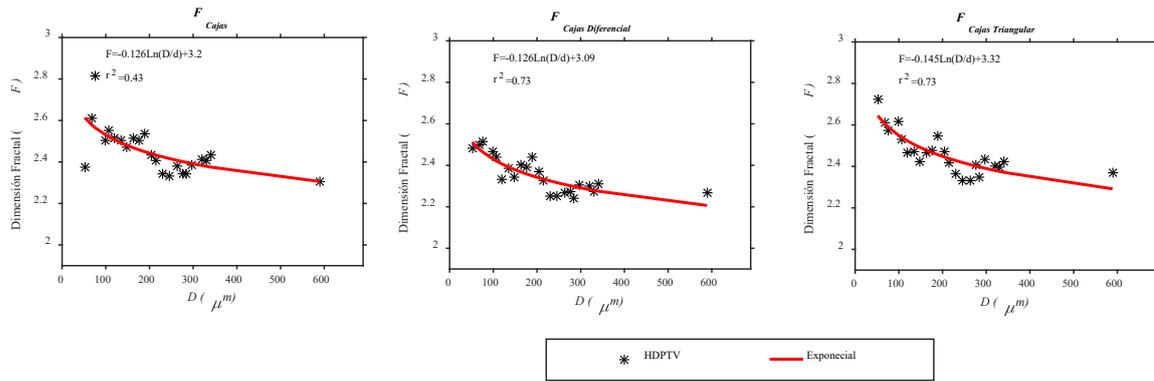


Figura 6.37 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flocúlos para el río Usumacinta a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

En la figura 6.38 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observa que en este caso no hay gran cantidad de datos atípicos donde el método triangular presenta la menor cantidad de datos comparado con los otros métodos de cajas, también se observa que todos presentan una mediana alrededor de 2.3 y 2.4, por lo cual se concluye que el valor de la dimensión fractal en los 60 minutos es de dicho valor y los valores oscilan entre 2.3 y 2.6.

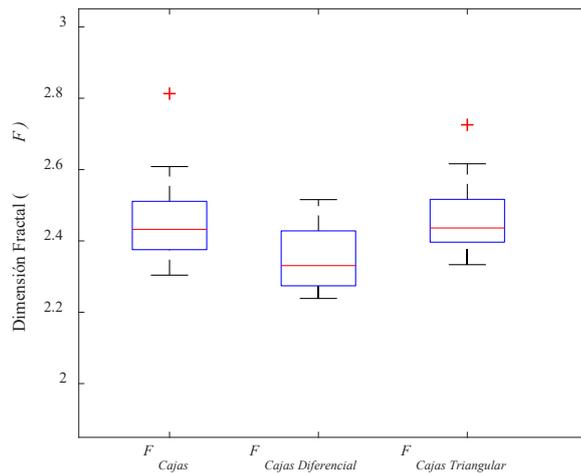


Figura 6.38 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flocúlos para el río Usumacinta a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

En la figura 6.39 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta, donde se agrupan todos los datos experimentales de la dimensión fractal, es decir se concatenan todos los valores obtenidos en los diferentes tiempos y por cada uno de los métodos y a estos datos se realiza el ajuste al modelo de Lau & Krishnappan (1997), se puede observar que los métodos, presentan

coeficientes de determinación de 0.69 a 0.73 y para la cual el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.1 a 0.4 y el coeficiente  $b$  de 0.4 a 1.3.

Así mismo, en la figura 6.40 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta, donde se agrupan todos los datos experimentales de la dimensión fractal, es decir se concatenan todos los valores obtenidos en los diferentes tiempos y a estos datos se realiza el ajuste al modelo de García et al. (2014), presentado coeficientes de determinación de 0.47 a 0.53, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

En la figura 6.41 se muestran los resultados obtenidos para el río Usumacinta, donde se agrupan todos los datos experimentales de la dimensión fractal, es decir se concatenan todos los valores obtenidos en los diferentes tiempos y el ajuste a la ecuación exponencial, presentando coeficientes de determinación de 0.6 y 0.66.

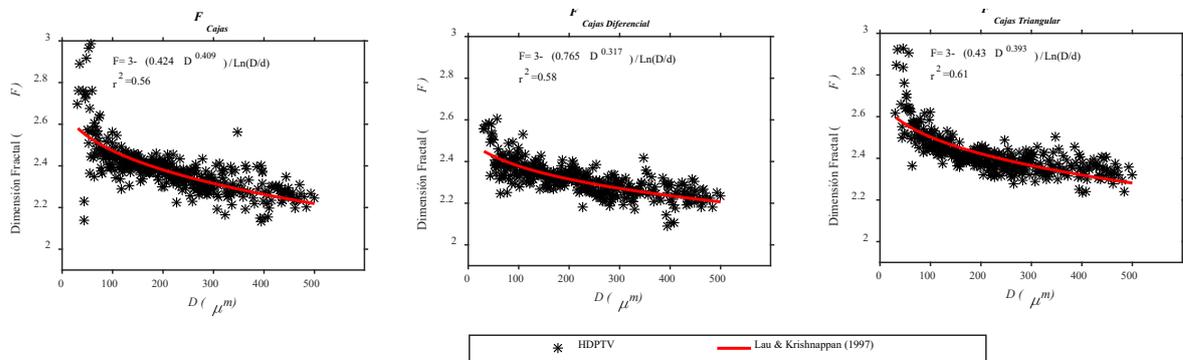


Figura 6.39 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta (total), considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

En la figura 6.42 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observa que el que muestra una mayor dispersión de datos es el de cajas, y los valores de las medianas oscilan entre 2.1 y 2.6.

Finalmente, en la figura 6.43 se muestran las partículas del río Usumacinta en cuanto a su dimensión fractal, así como a su posición tridimensional para cada uno de los tiempos que se realizó la parte experimental. Se puede observar que en los tiempos de 15 y 30 minutos (figura 6.43 a) y 6.43 b) las partículas tienen menor dimensión fractal en comparación con los

presentados a los 45 minutos (figura 43 c) donde éstos aumentan y a los 60 minutos vuelven a disminuir (figura 43 d)).

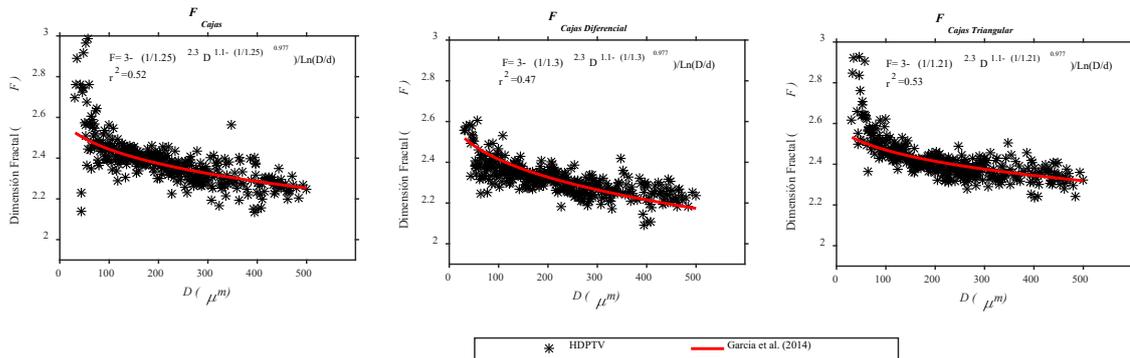


Figura 6.40 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los floculos para el río Usumacinta (total), considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.

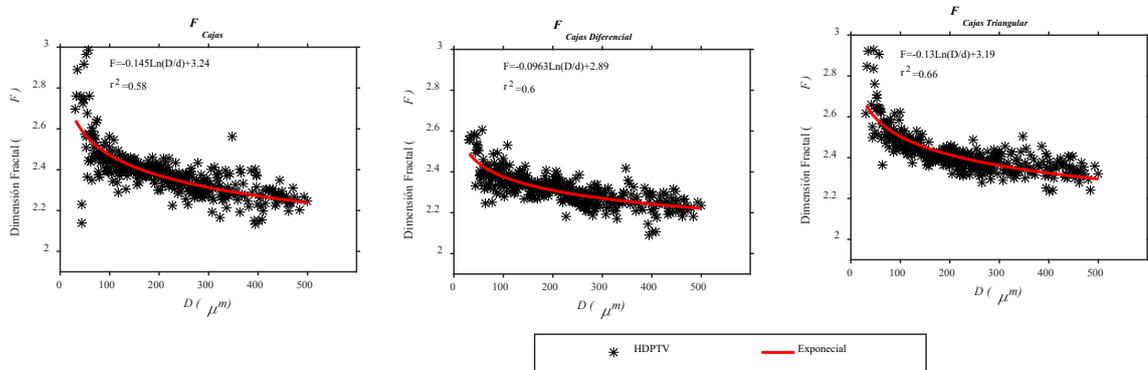


Figura 6.41 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los floculos para el río Usumacinta (total), considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

### 6.3.2.1.3 Velocidad de caída

La velocidad de caída se obtuvo de forma experimental a partir de los hologramas reconstruidos y con la caracterización de las partículas y utilizando el algoritmo de PTV desarrollado por Salinas et al. (2006). En la figura 44, se muestran los resultados donde se observa que, a los 15 minutos las velocidades oscilan entre 0 y 6 mm/s (figura 44a), a los 30 minutos están entre 0 y 4 mm/s la mayoría (figura 44b), mientras que para 45 y 60 min la velocidad disminuye (figura 44c y 44d, respectivamente).

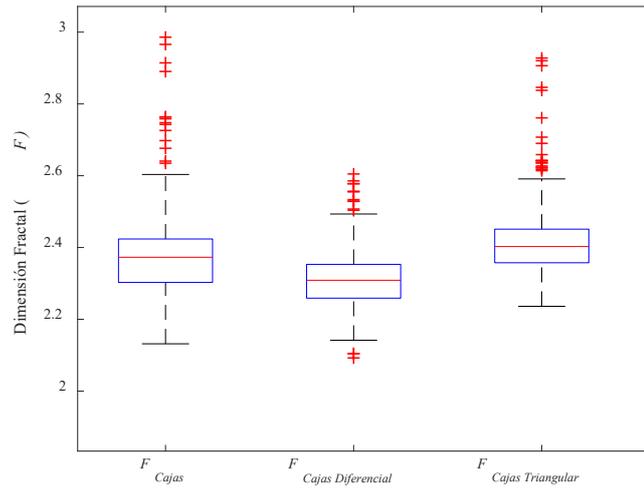


Figura 6.42. Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Usumacinta, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

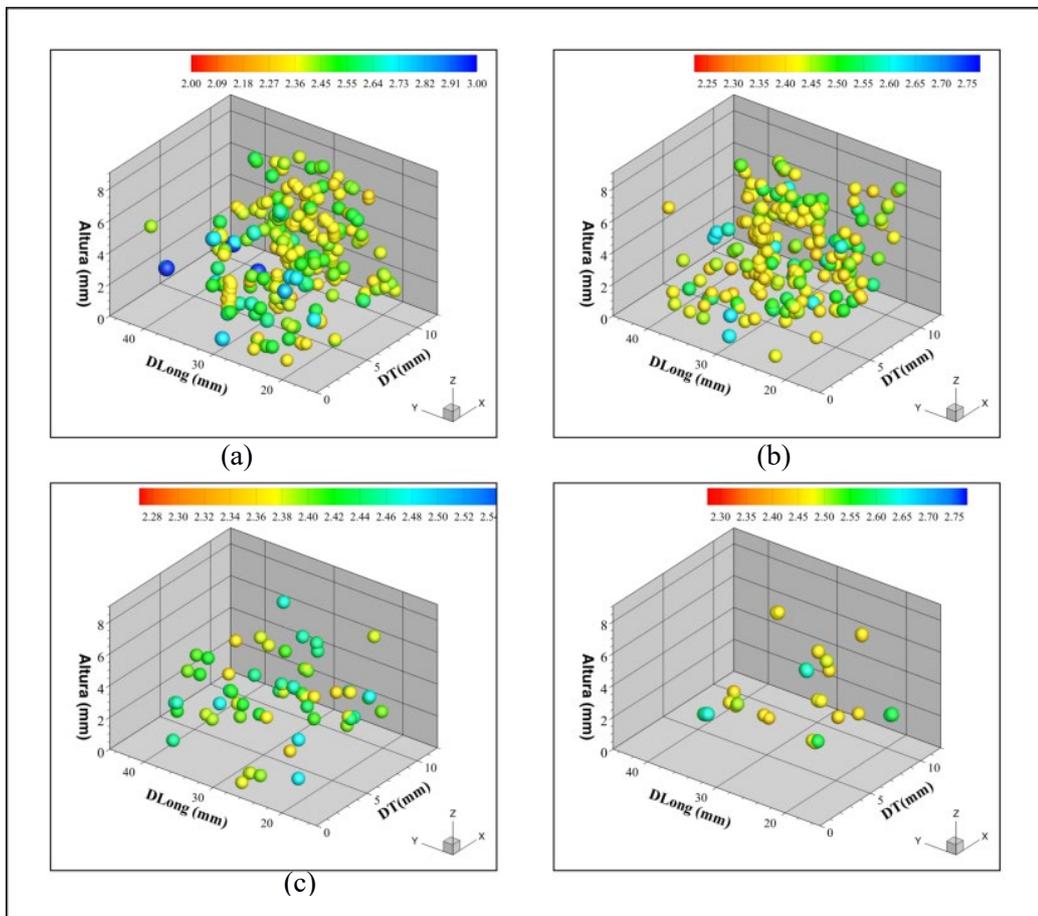


Figura 6.43 Dimensión fractal y distribución espacial de las partículas del río Usumacinta, a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos, d) 60 minutos.

### **6.3.2.2 Caracterización de partículas no esféricas provenientes del río Grijalva**

En este apartado se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva, primero se mostrarán los resultados obtenidos para forma y tamaño de los flóculos, posterior a ello se muestran los resultados obtenidos para la dimensión fractal.

#### **6.3.2.2.1 Forma y tamaño**

Los resultados de la reconstrucción de las partículas no esféricas del río Grijalva mostraron al igual que en el caso del río Usumacinta que existen diferentes tipos de aglomerados y a su vez estos tienen diversas formas y tamaños, además, se puede observar y comprobar que los aglomerados van haciéndose más grandes conforme el tiempo va pasando.

En la figura 6.45 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=15$  minutos, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 268 partículas, con tamaños de partículas que oscilan entre los  $66.8 \mu\text{m}$  y los  $981.4 \mu\text{m}$  con una media de  $256.262 \mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal.

En la figura 6.46 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=30$  minutos, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 314 partículas, con tamaños de partículas que oscilan entre los  $30.106 \mu\text{m}$  y los  $296.278 \mu\text{m}$  con una media de  $162.642 \mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal.

En la figura 6.47 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=45$  minutos, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 261 partículas, con tamaños de partículas que oscilan entre los  $20.453 \mu\text{m}$  y los  $327.0389 \mu\text{m}$  con una media de  $162.7098 \mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal.

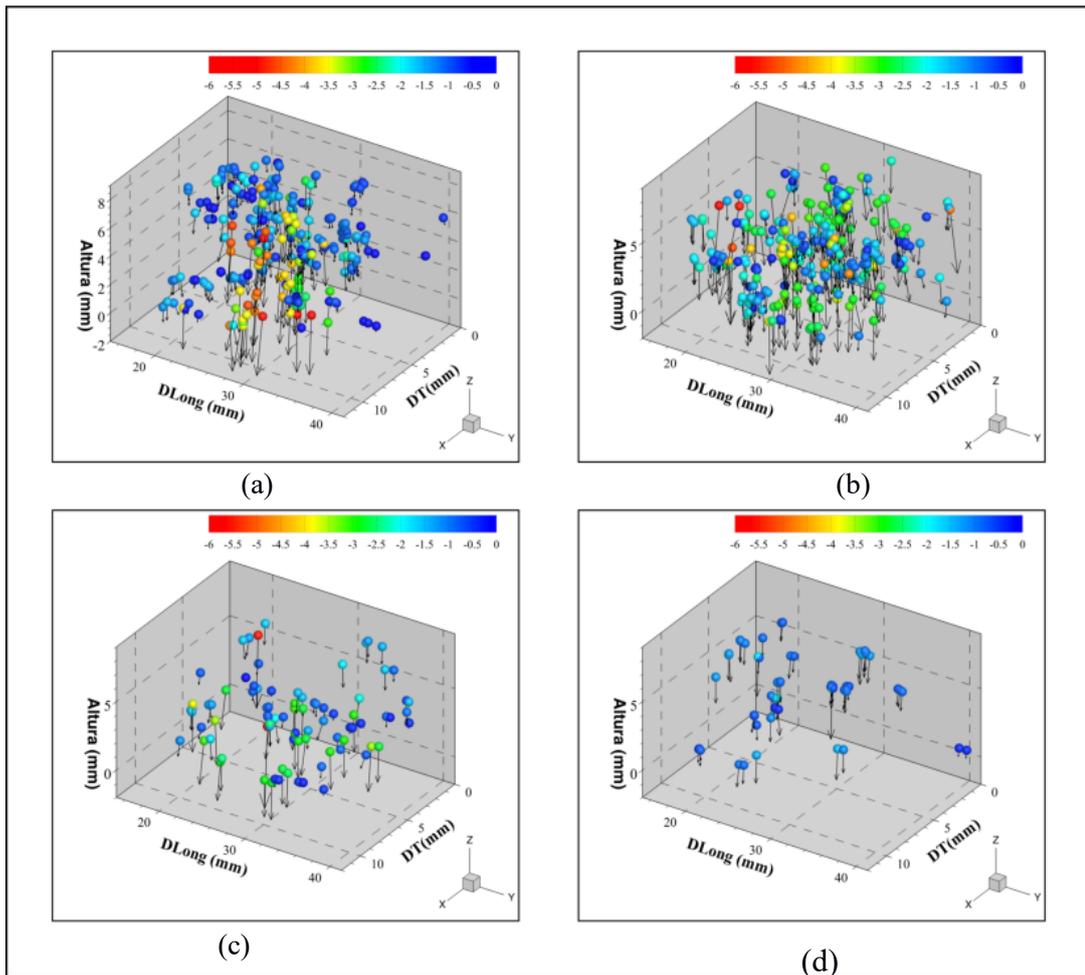


Figura 44. Velocidades experimentales para cada uno de los tiempos del río Usumacinta, a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos, d) 60 minutos.

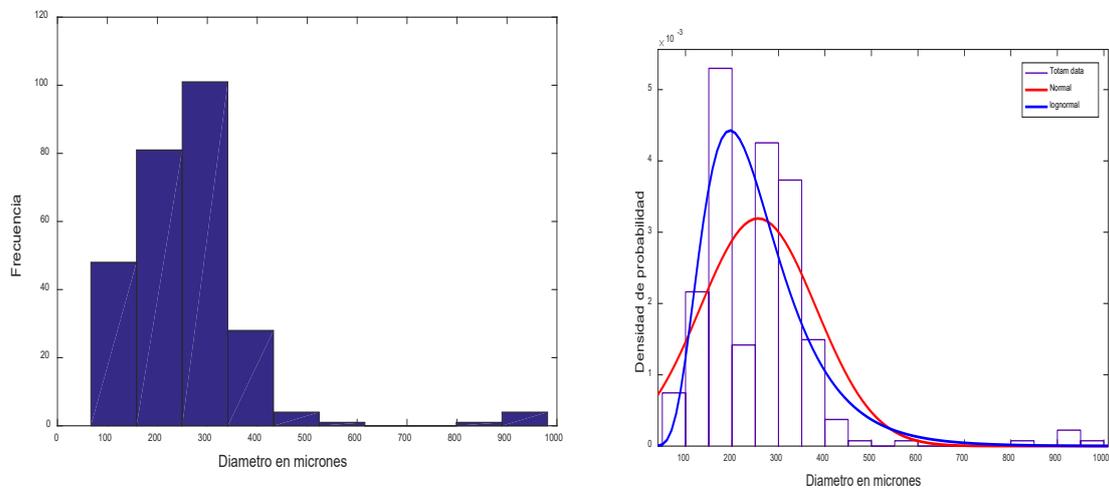


Figura 6.45. Datos obtenidos del río Grijalva en el tiempo  $t=15$  min. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

En la figura 6.48 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones para un tiempo  $t=60$  minutos, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tiempo se obtuvo una muestra de 447 partículas, con tamaños de partículas que oscilan entre los  $16.7 \mu\text{m}$  y los  $718.1 \mu\text{m}$  con una media de  $213.714 \mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal.

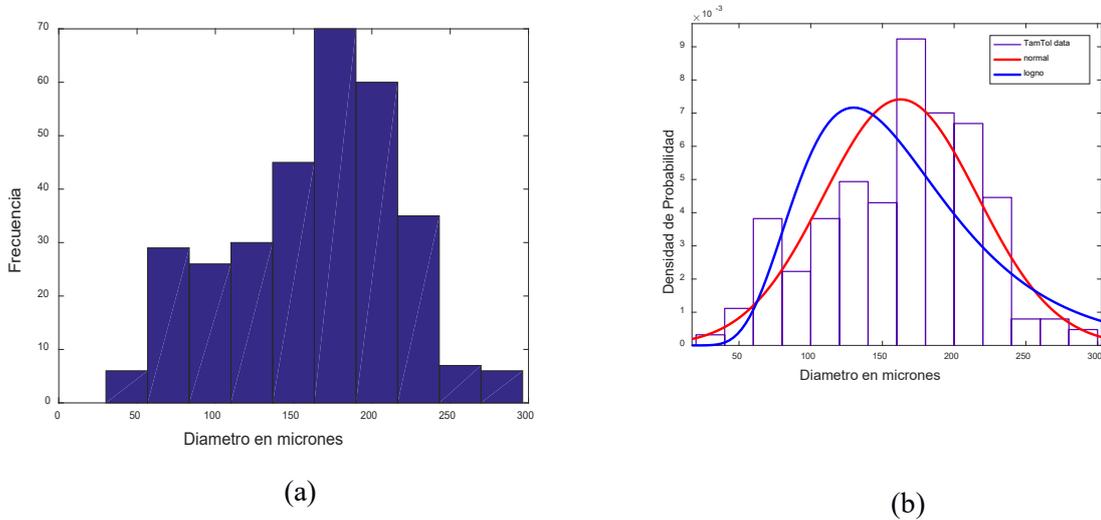


Figura 6.46. Datos obtenidos del río Grijalva en el tiempo  $t=30$  min. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

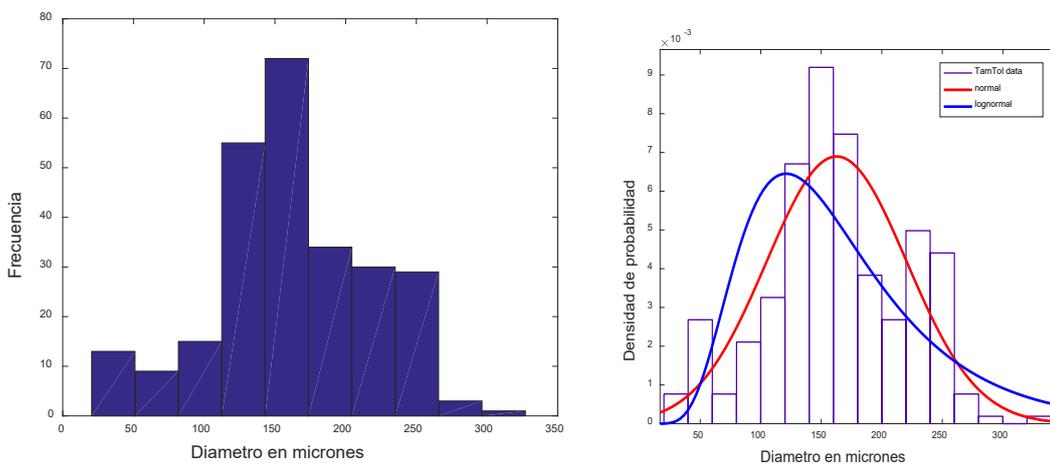


Figura 6.47. Datos obtenidos del río Grijalva en el tiempo  $t=45$  min. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

En la figura 6.49 se muestra el comportamiento del tamaño de las partículas conforme el tiempo va transcurriendo. Se concluye que, la técnica utilizada y los métodos de reconstrucción y determinación de tamaño y forma de partículas muestran resultados aceptables.

Finalmente, en la figura 6.50 se muestra la distribución espacial de tamaños de partículas (diámetro) en el volumen de análisis, así como su posición tridimensional de las partículas del río Grijalva para cada uno de los tiempos que se realizó el experimento, esto es resultado de la reconstrucción de los hologramas, lo que permite ver la importancia de aplicar este tipo de técnicas no invasivas. Se puede observar como a los 15 minutos (figura 6.50 a) las partículas en su mayoría tienen diámetros menores en comparación a las de 30 a 60 min.

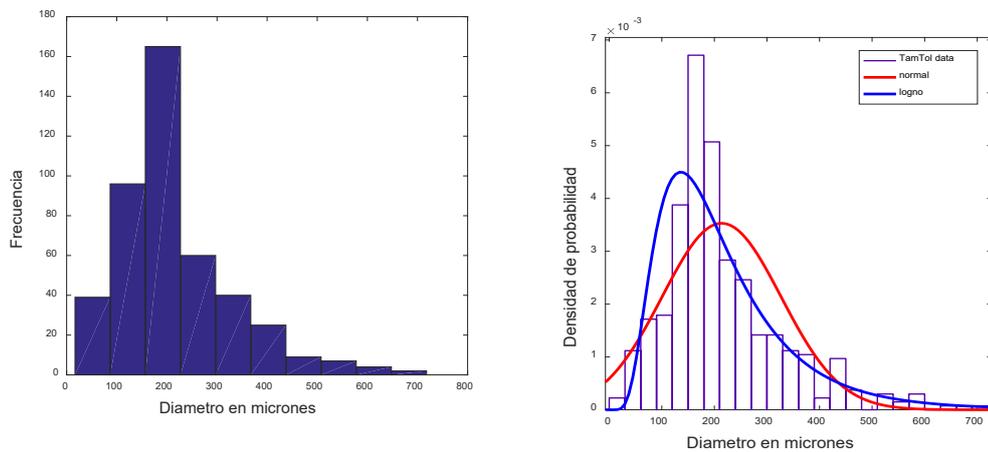


Figura 6.48. Datos obtenidos del río Grijalva en el tiempo  $t=60$  min. a) Frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

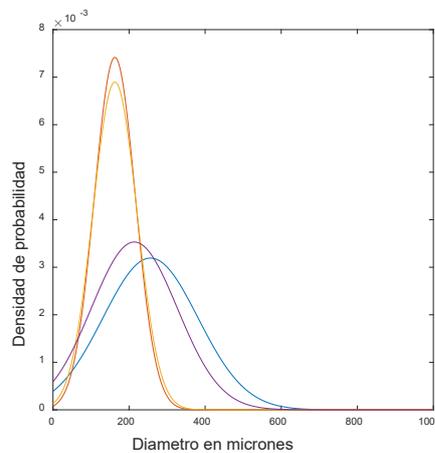


Figura 6.49. Densidad de probabilidad de los datos obtenidos del río Grijalva para diferentes tiempos.

### 6.3.2.1.2 Dimensión fractal

En cuanto a la dimensión fractal se obtuvieron imágenes de los flóculos más representativos de cada uno de los tiempos en los que se llevó a cabo la reconstrucción. Para ello, se muestran las gráficas del comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

En la figura 6.51 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 15 min., de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos con los diferentes métodos de cajas, y el ajuste realizado utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997), se observa que el método presenta coeficientes de determinación de 0.81 a 0.85, y el coeficiente  $c$  del modelo toma valores promedio de 0.20 a 0.36 y el coeficiente  $b$  de 0.46 a 1.20.

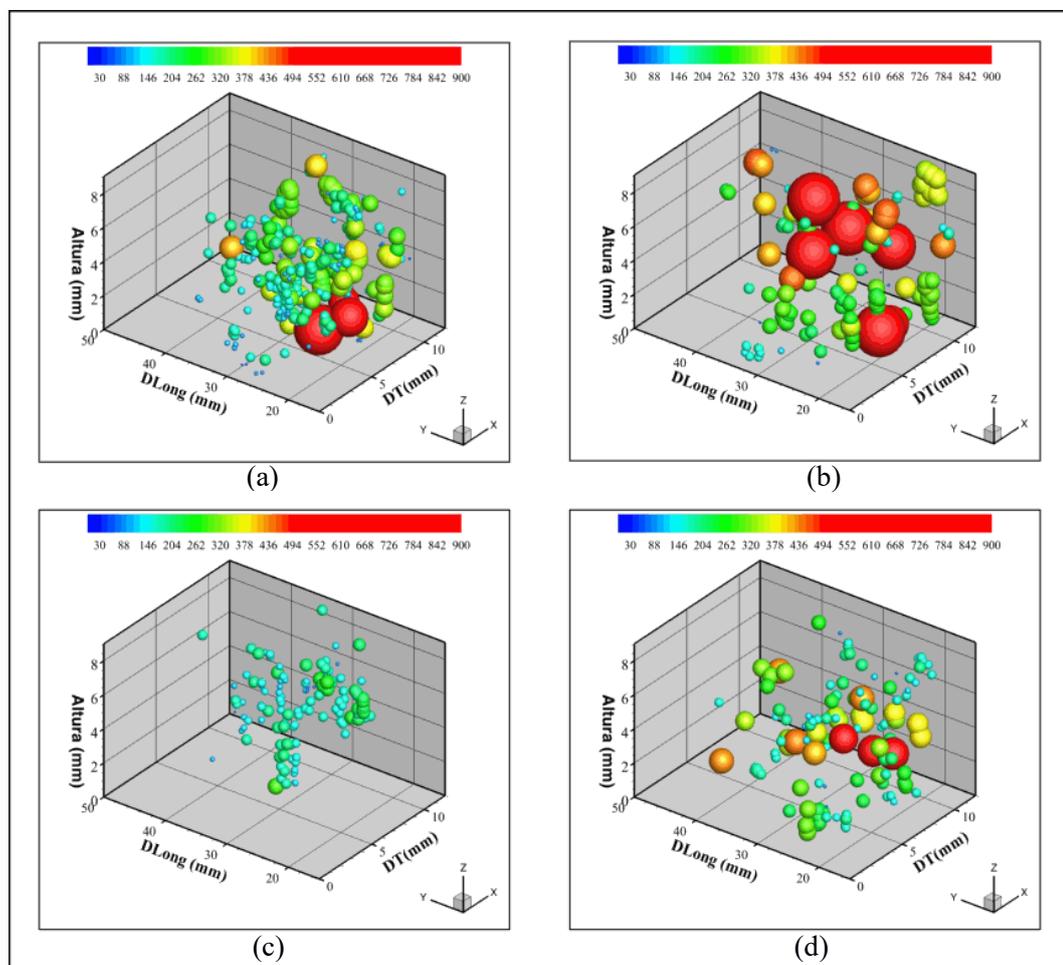


Figura 6.50 Distribución espacial de las partículas del río Grijalva en 3D; a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos y d) 60 minutos

En la figura 6.52 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 15 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos de cajas y el ajuste utilizando el modelo de García et al. (2014), obteniendo coeficientes de determinación de 0.62 y 0.80, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.17 a 1.27.

En la figura 6.53 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 15 min, de la dimensión fractal determinada con cada uno de los métodos de cajas y el ajuste de los datos utilizando la ecuación exponencial, presentando coeficientes de determinación de 0.83 y 0.88.

En la figura 6.54 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observa que todos los métodos muestran datos atípicos, mostrando una mediana de 2.4, estando el 50% de datos entre 2.30 y 2.42, además el método de cajas triangular también tiene una mediana alrededor de 2.4, mientras que los de cajas están entre 2.3 y 2.34.

En la figura 6.55 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 30 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997), presentando coeficientes de determinación de 0.21 a 0.57 y en este caso el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.16 a 0.30 y el coeficiente  $b$  de 0.6 a 1.5.

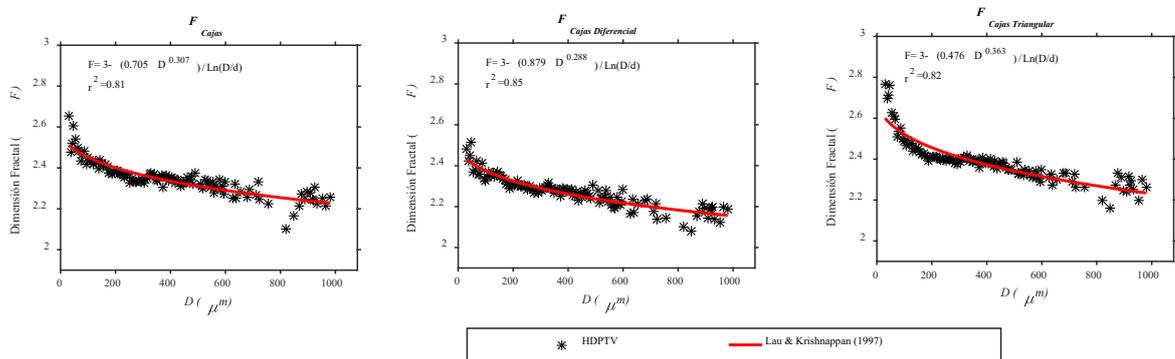


Figura 6.51 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

En la figura 6.56 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 30 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste utilizando el modelo de García et al. (2014), se puede observar que el método que más se ajusta es el triangular con

coeficientes de determinación de 0.55, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.16 a 1.25.

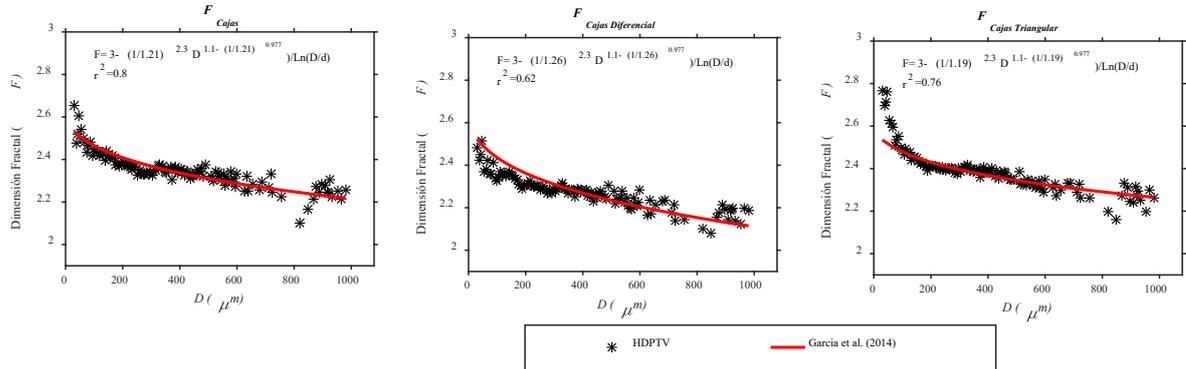


Figura 6.52 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.

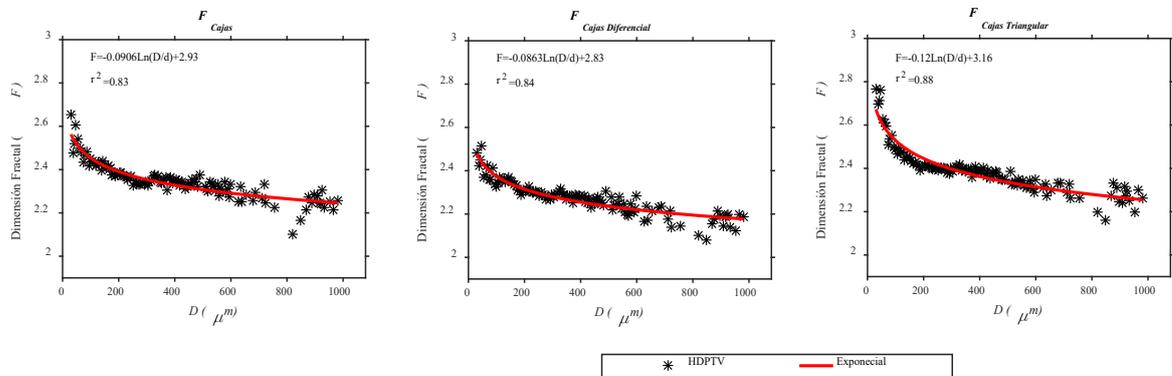


Figura 6.53 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 15 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

En la figura 6.57 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 30 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste utilizando la ecuación exponencial, se puede observar que los métodos que más se ajusta es el triangular, con coeficientes de correlación de 0.63.

En la figura 6.58 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observa que todos los métodos muestran datos atípicos, y las medianas oscilan entre 2.3 y 2.4 dependiendo el método y los

valores van de 2.19 a 2.6. se concluye por ello que el valor medio de las partículas en cuanto a dimensión fractal es de 2.3-2.4.

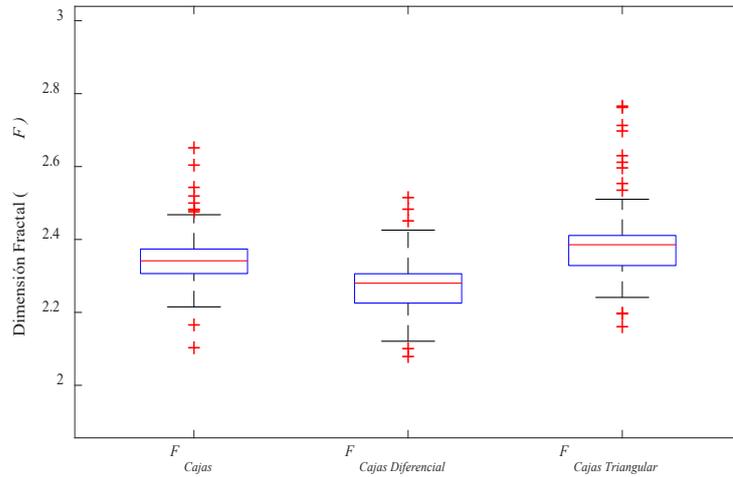


Figura 6.54 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 15 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal

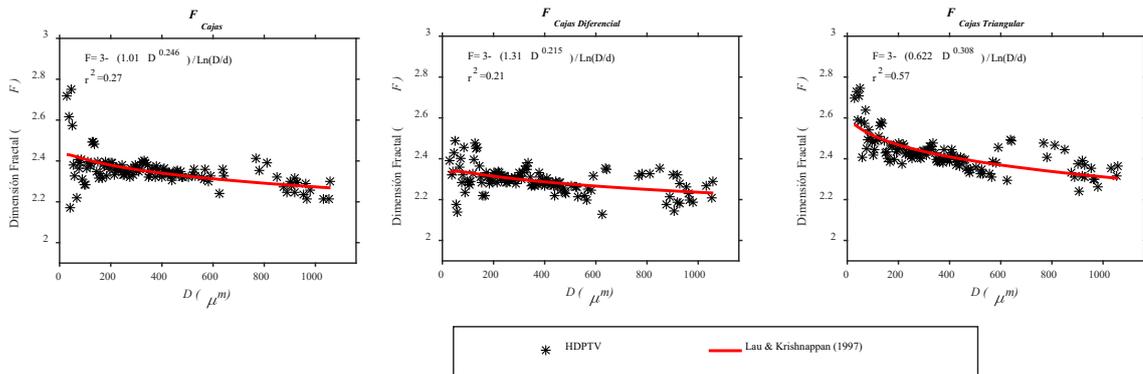


Figura 6.55 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

En la figura 6.59 se muestran los resultados totales obtenidos para el río Grijalva para 45 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado con el modelo de Lau & Krishnappan (1997), presentando coeficientes de determinación de 0.69 a 0.73 y para la cual, el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.1 a 0.4 y el coeficiente  $b$  de 0.4 a 1.3.

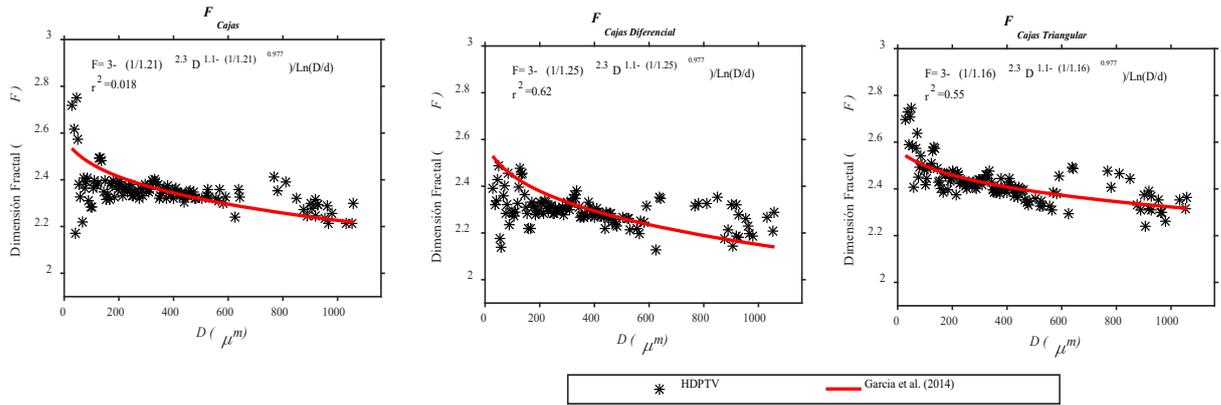


Figura 6.56 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.

En la figura 6.60 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 45 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste de datos utilizando el modelo de García et al. (2014), presentando coeficientes de determinación de 0.64 y 0.66, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

En la figura 6.61 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 45 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado utilizando la ecuación exponencial, presentando coeficientes de determinación de 0.75 y 0.76.

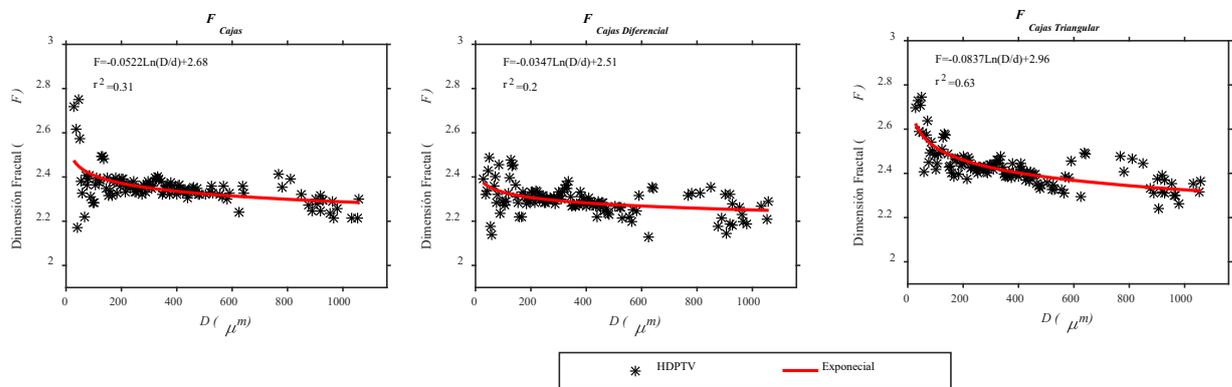


Figura 6.57 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 30 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

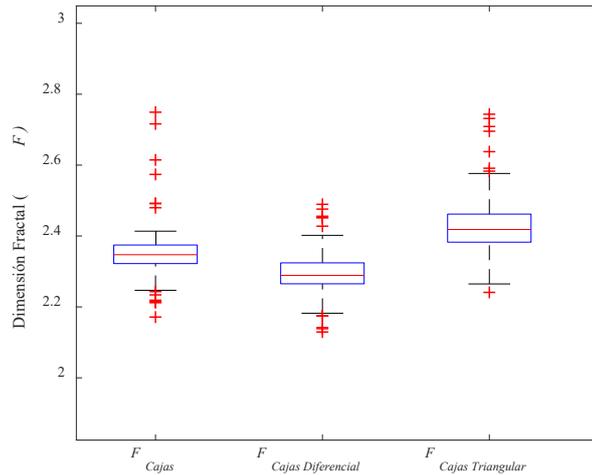


Figura 6.58 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 30 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

En la figura 6.62 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observar que el método de cajas presenta mayor dispersión de datos, presentado una mediana de todos los métodos de 2.4 y los datos oscilan de 2.1 a 2.7.

En la figura 6.63 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 60 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado utilizando del modelo de Lau & Krishnappan (1997), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas y el triangular, presentando coeficientes de determinación de 0.69 a 0.73 y para la cual el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.1 a 0.4 y el coeficiente  $b$  de 0.4 a 1.3.

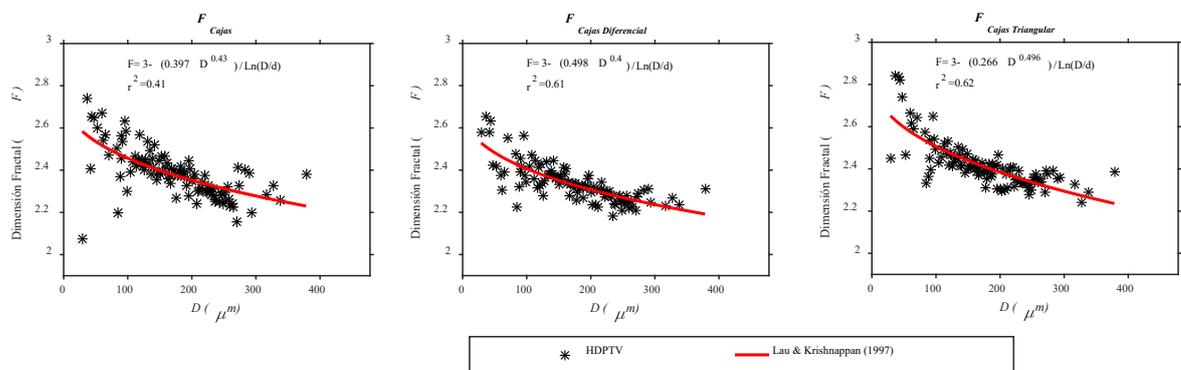


Figura 6.59 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

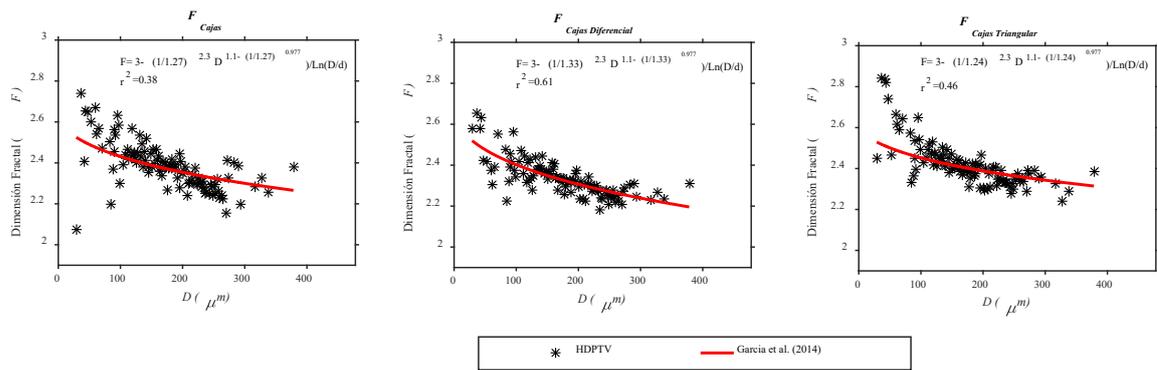


Figura 6.60 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.

En la figura 6.64 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 60 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos de cajas y el ajuste realizado utilizando el modelo de García et al. (2014), con coeficientes de determinación de 0.64 y 0.66, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

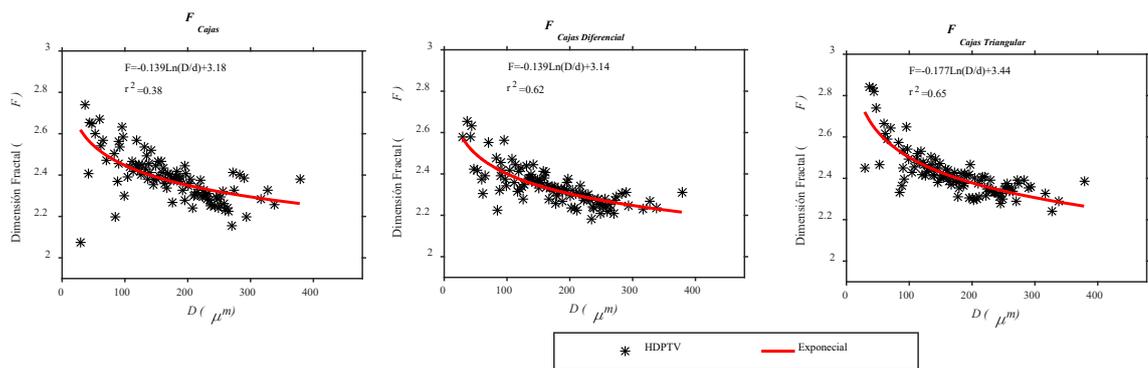


Figura 6.61 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 45 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

En la figura 6.65 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 60 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado utilizando la ecuación exponencial, con coeficientes de determinación de 0.75 y 0.76.

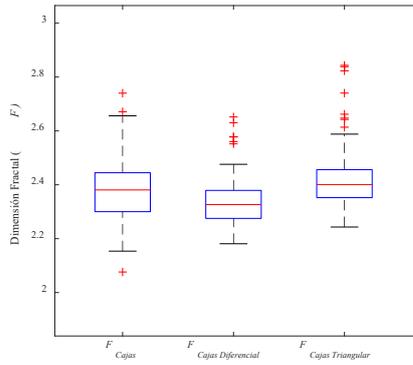


Figura 6.62 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 45 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

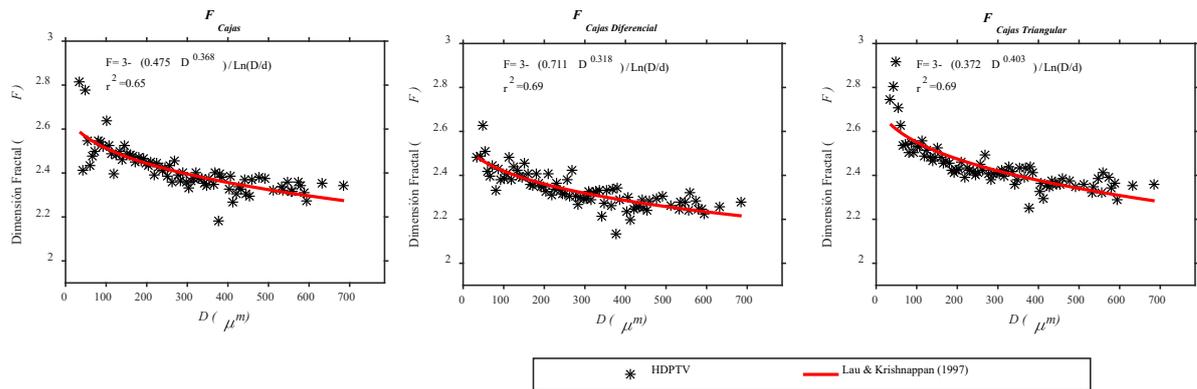


Figura 6.63 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

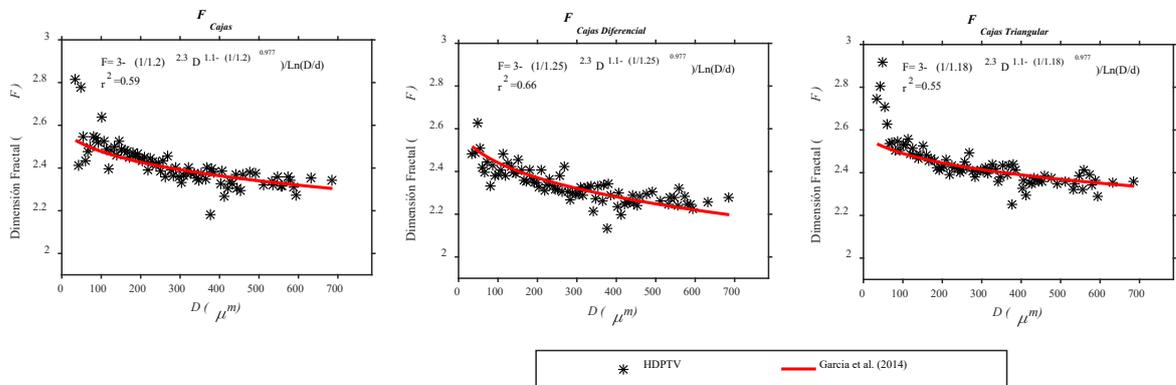


Figura 6.64 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste.

En la figura 6.66 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observa que el que muestra mayor dispersión de datos es el de cajas, resultando una mediana de 2.4 y los datos oscilan de 2.1 a 2.6.

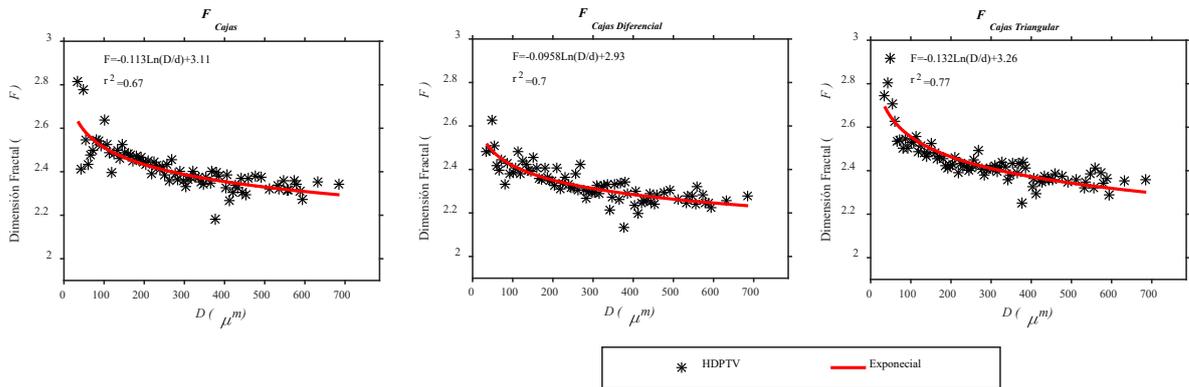


Figura 6.65 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 60 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

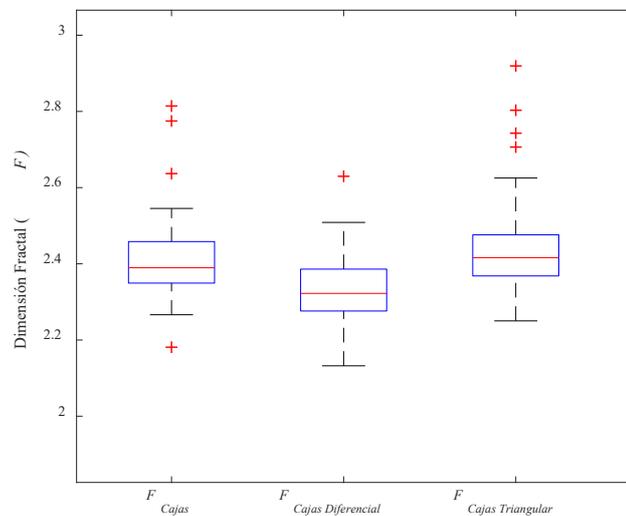


Figura 6.66 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 60 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

En la figura 6.67 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 75 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas y el triangular, presentando coeficientes de determinación de 0.69 a 0.73 y para la cual el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.1 a 0.4 y el coeficiente  $b$  de 0.4 a 1.3.

En la figura 6.68 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 75 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado utilizando el modelo de García et al. (2014), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas, con coeficientes de determinación de 0.64 y 0.66, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

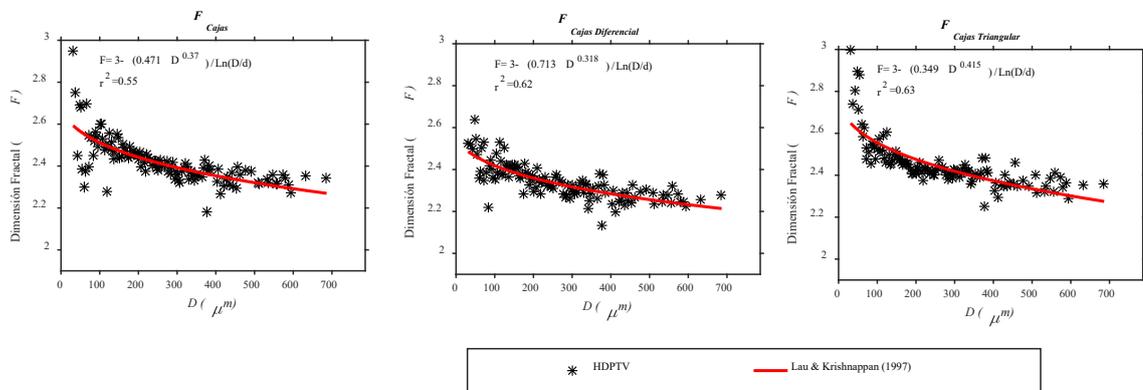


Figura 6.67 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

En la figura 6.69 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva a los 75 min, de la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado utilizando la ecuación exponencial, se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas diferencial y triangular, con coeficientes de determinación de 0.64 y 0.71.

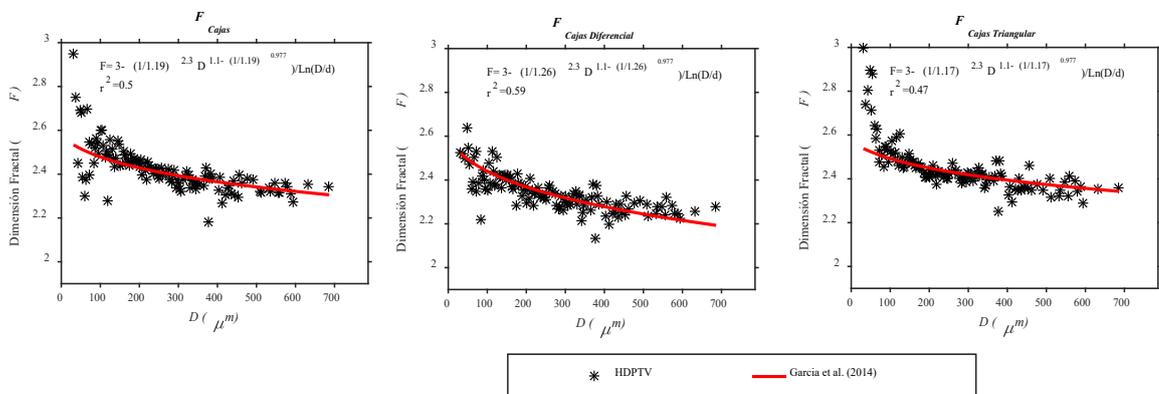


Figura 6.68 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste.

En la figura 6.70 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observa que el método triangular es el que muestra datos atípicos arriba del tercer cuartil que corresponde a un valor de 2.6 para la dimensión fractal.

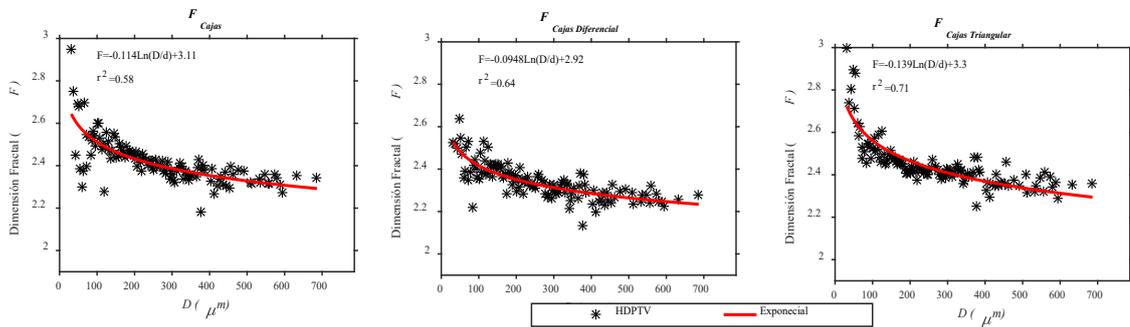


Figura 6.69 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 75 min, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

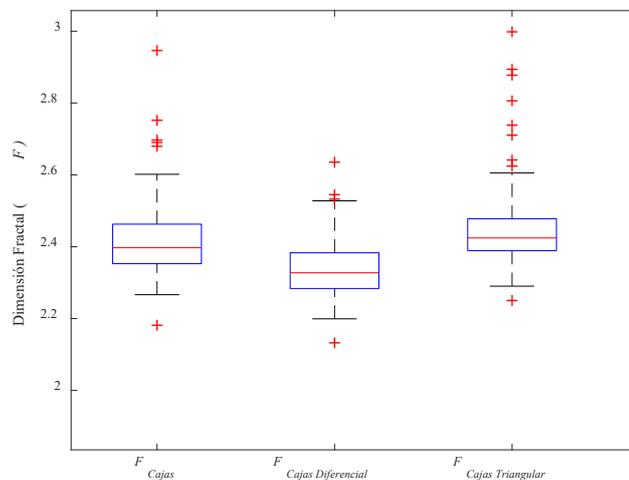


Figura 6.70 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva a los 75 min., considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

En la figura 6.71 se muestran los resultados acumulados para el río Grijalva, de la dimensión fractal es decir se concatenaron todos los valores de la dimensión fractal para todos los tiempos analizados y se realizó el ajuste utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas y el triangular, presentando coeficientes de determinación de 0.69 a 0.73 y el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.1 a 0.4 y el coeficiente  $b$  de 0.4 a 1.3.

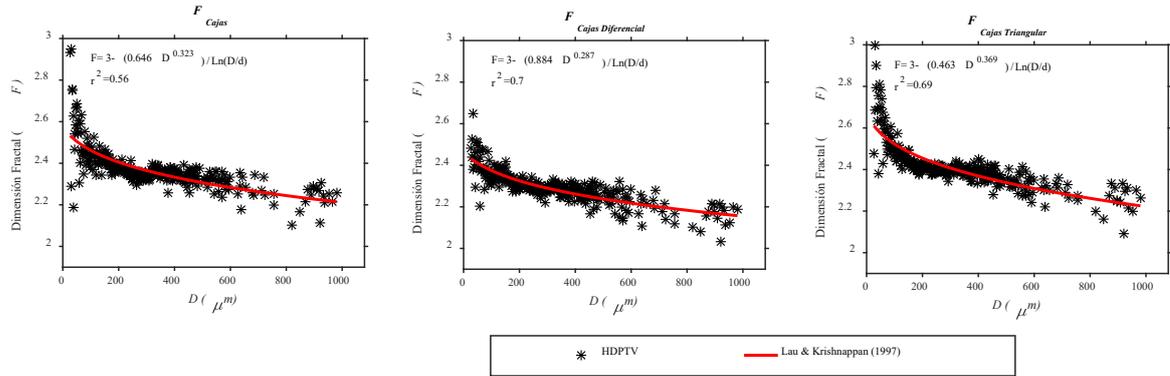


Figura 6.71 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

En la figura 6.72 se muestran los resultados acumulados para el río Grijalva, de la dimensión fractal, es decir se concatenaron todos los valores de la dimensión fractal para todos los tiempos analizados por cada uno de los métodos y se realizó el ajuste utilizando el modelo de García et al. (2014), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas, con coeficientes de determinación de 0.64 y 0.66, en este caso  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presentó mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

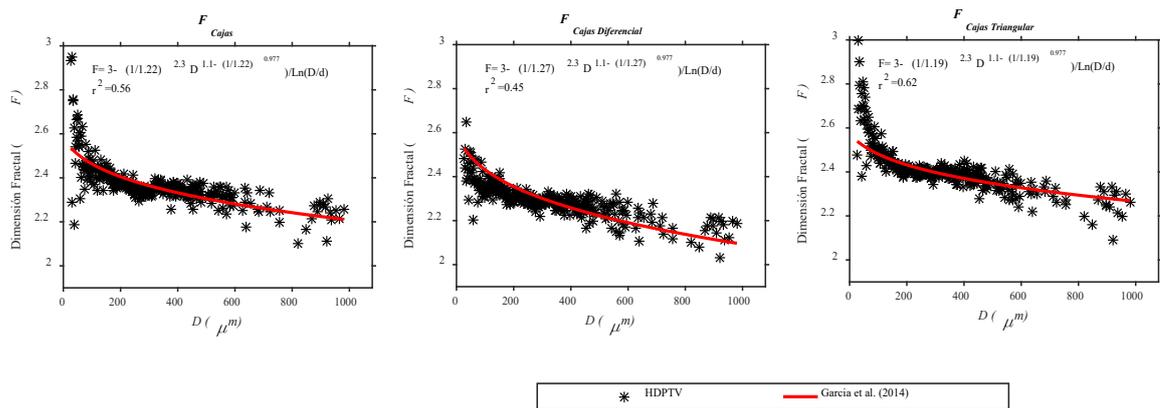


Figura 6.72 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014).

En la figura 6.73 se muestran los resultados obtenidos para el río Grijalva, se muestran la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste realizado utilizando la ecuación exponencial, se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas diferencial y el triangular, con coeficientes de determinación de 0.70 y 0.74 respectivamente.

En la figura 6.74 se muestra el diagrama de cajas para los datos experimentales acumulados en el cual se observa que todos los métodos muestran datos atípicos, además que todos tienen aproximadamente la misma dispersión de datos, sin embargo, el método de cajas triangular muestra una mediana de 2.4, mientras que los de cajas muestran una mediana menor (2.3).

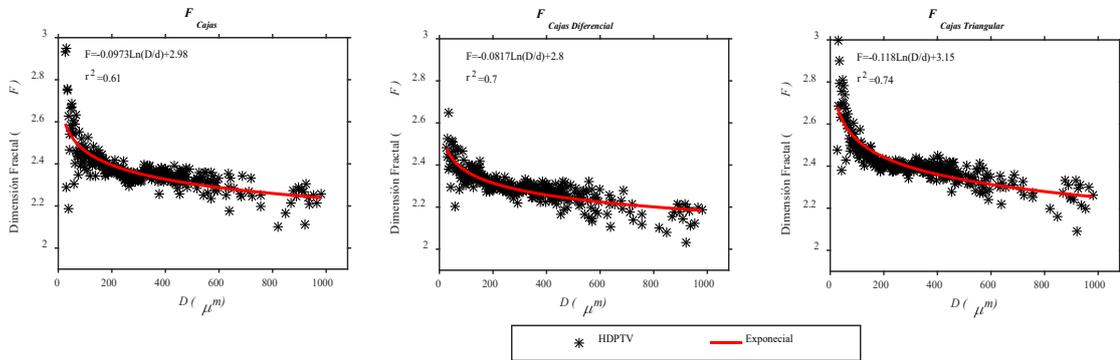


Figura 6.73 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

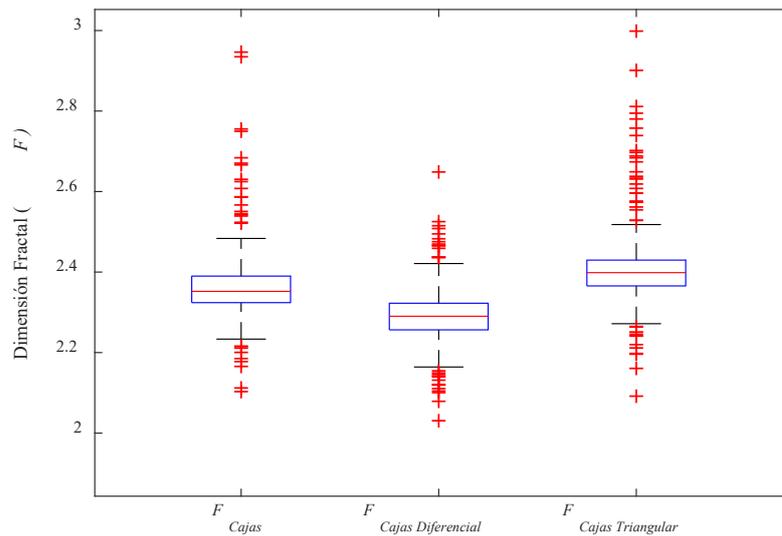


Figura 6.74 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el río Grijalva (total), considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

Finalmente, en la figura 6.75 se muestran las partículas en cuanto a su dimensión fractal y su posición de las partículas del río Grijalva para cada uno de los tiempos que se hizo el experimento.

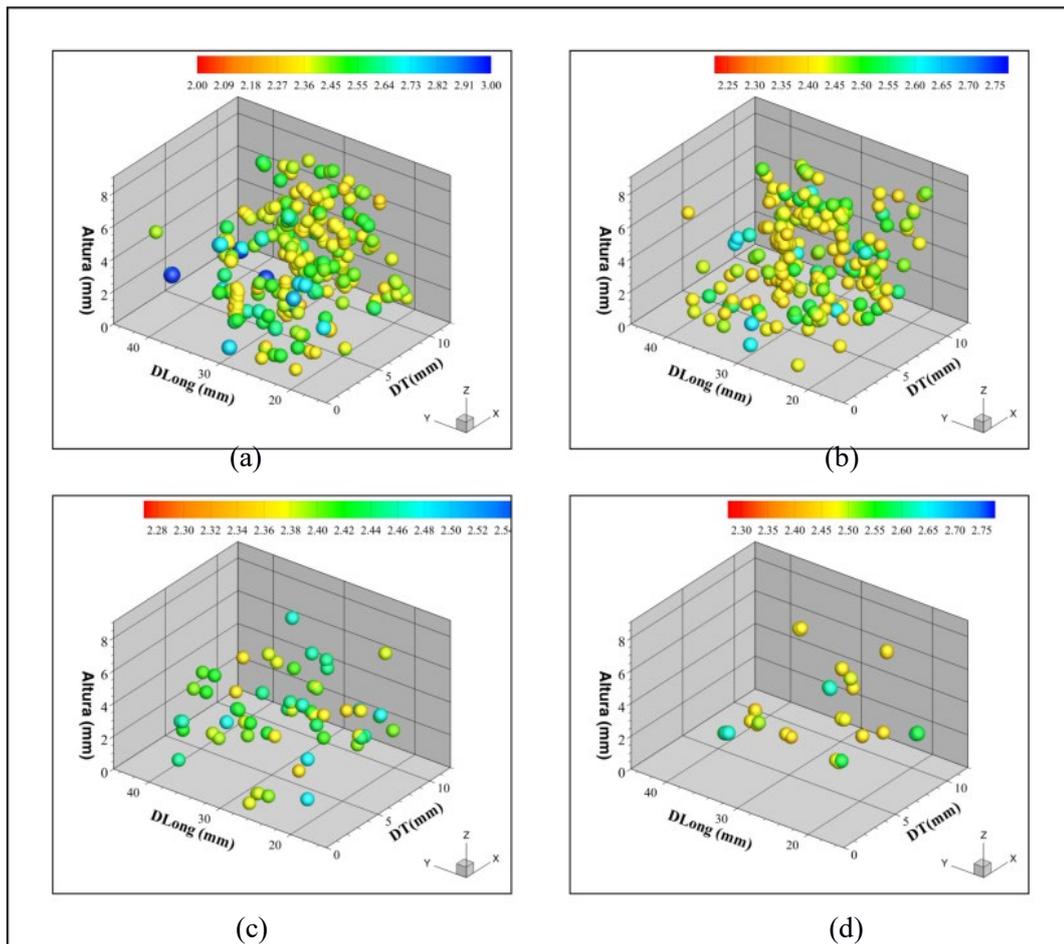


Figura 6.75 Dimensión fractal y distribución espacial de las partículas del río Grijalva en 3D; a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos y d) 60 minutos.

### 6.3.2.2.3 Velocidad de caída

La velocidad de caída se obtuvo de forma experimental y se muestra en la figura 6.76, donde se observa que para cada uno de los tiempos que las velocidades oscilan entre 0 y -6 mm/s.

### 6.3.2.3 Caracterización de partículas no esféricas provenientes de agua del Rastro de Toluca, Estado de México.

En este apartado se muestran los resultados obtenidos para el agua del Rastro de Toluca, primero se mostrarán los resultados obtenidos para forma y tamaño de los flóculos, posterior a ello se muestran los resultados obtenidos para la dimensión fractal.

En la figura 6.77 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para el cual se obtuvo una muestra de 318 partículas, con tamaños de partículas que oscilan entre los 52.14  $\mu\text{m}$  y los 828.58  $\mu\text{m}$  con una media de 319.08  $\mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución normal.

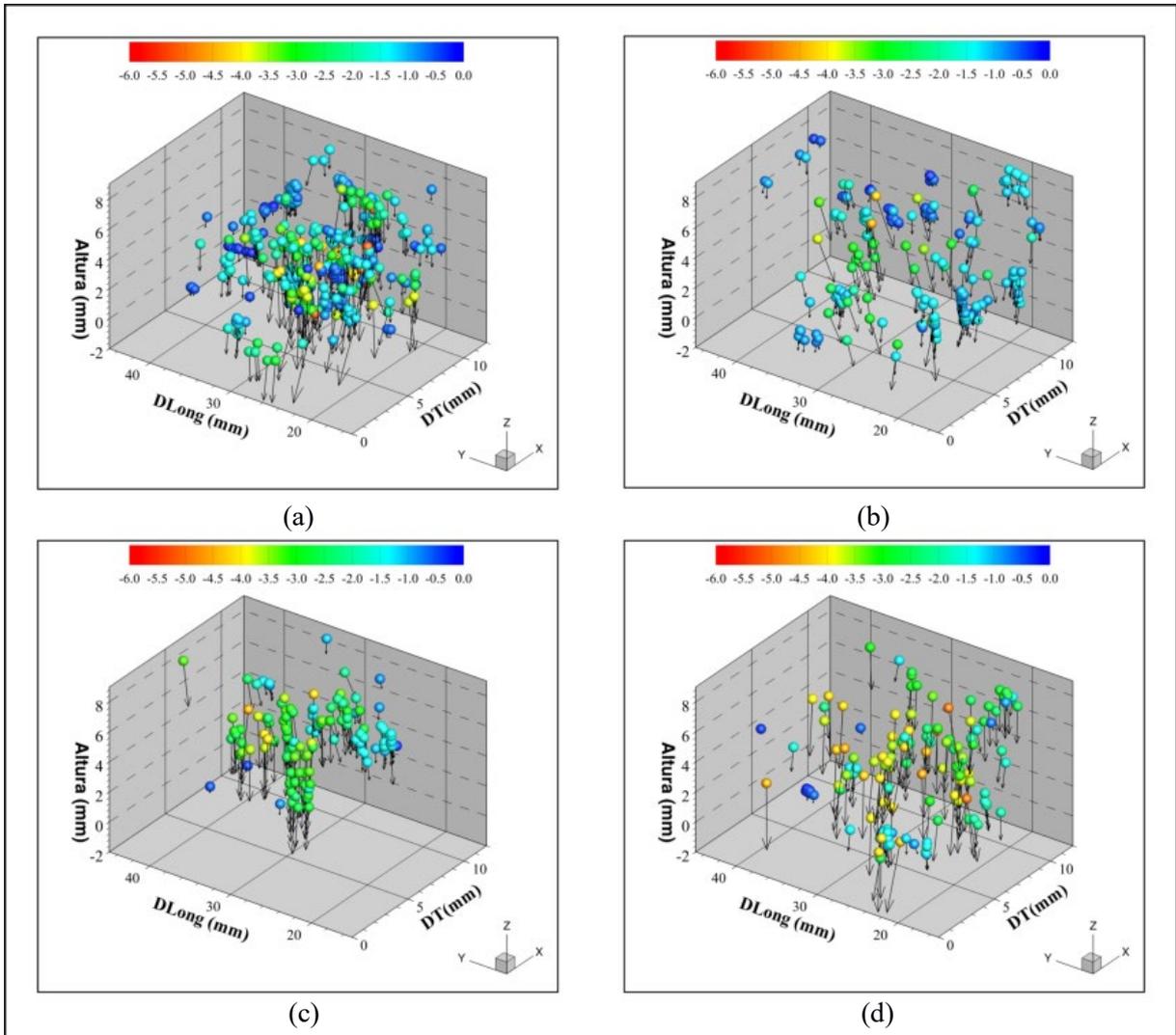


Figura 6.76. Velocidades experimentales para cada uno de los tiempos del río Grijalva; a) 15 minutos, b) 30 minutos, c) 45 minutos y d) 60 minutos

En la figura 6.78 se muestran los tamaños (diámetro) en 3D y la posición de las partículas d en 3D, en la cual puede observarse como se encuentran distribuidas en cada uno de los diferentes planos.

### 6.3.2.1.2 Dimensión fractal

En cuanto a la dimensión fractal, se muestran la gráfica del comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos considerando todas las partículas reconstruidas, así como los diferentes métodos por los cual se llevó a cabo la determinación de la dimensión fractal. En la figura 6.79, se muestra el ajuste de los datos utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas y el triangular, presentando coeficientes de determinación de 0.69 a 0.73 y para la cual el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.1 a 0.4 y el coeficiente  $b$  de 0.4 a 1.3.

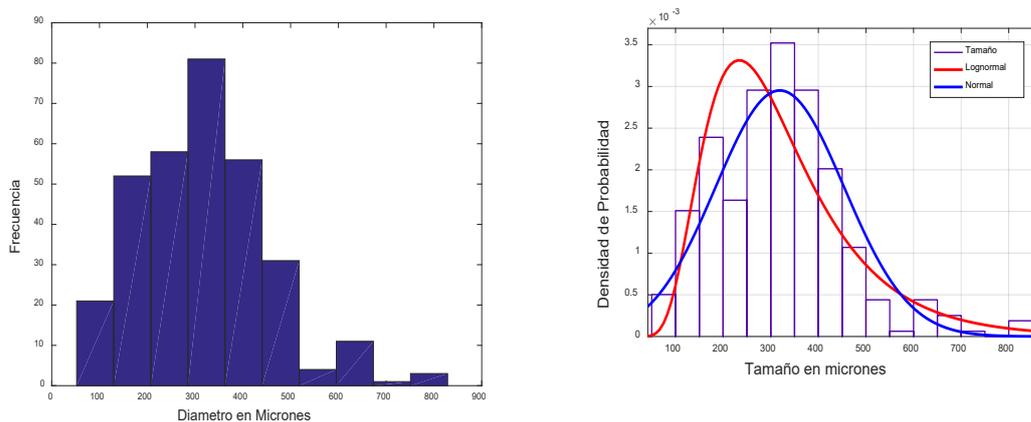


Figura 6.77. Datos obtenidos para los sedimentos del agua proveniente del Rastro de Toluca. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

En la figura 6.80 se muestra la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste utilizando el modelo de García et al. (2014), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas, con coeficientes de determinación de 0.64 y 0.66, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presento mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

En la figura 6.81 se muestra la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste exponencial, se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas, con coeficientes de correlación de 0.64 y 0.66, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presento mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

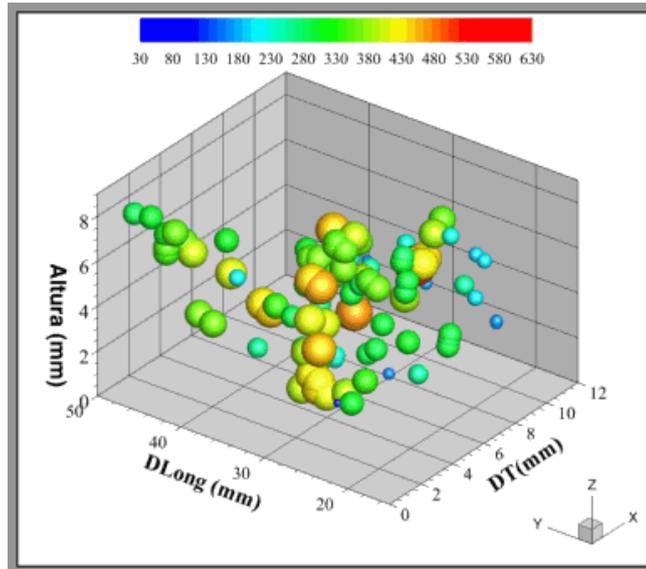


Figura 6.78 Distribución espacial de los flocos proveniente del agua del Rastro de Toluca en 3D.

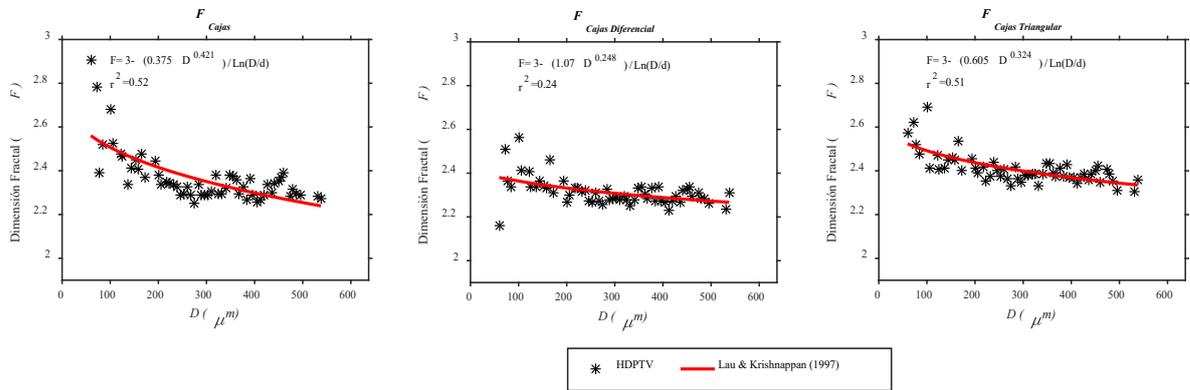


Figura 6.79 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flocos correspondientes al agua del Rastro de Toluca, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

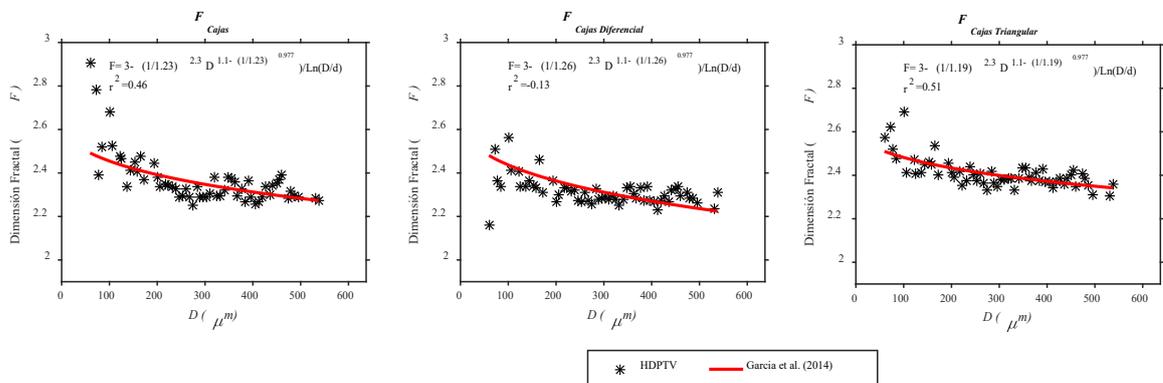


Figura .6.80 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flocos del provenientes del agua Rastro de Toluca, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de García et al. (2014) para el ajuste.

En la figura 6.82 se muestra el diagrama de cajas en él se observa que son muy pocos los datos atípicos, además que el método de cajas es el que muestra mayor dispersión en datos, y se observa que se tiene una dimensión fractal que oscila entre 2.3 y 2.5.

Finalmente, en la figura 6.83 se muestran las partículas en cuanto a su dimensión fractal y su posición en 3D de las partículas del provenientes del agua del Rastro.

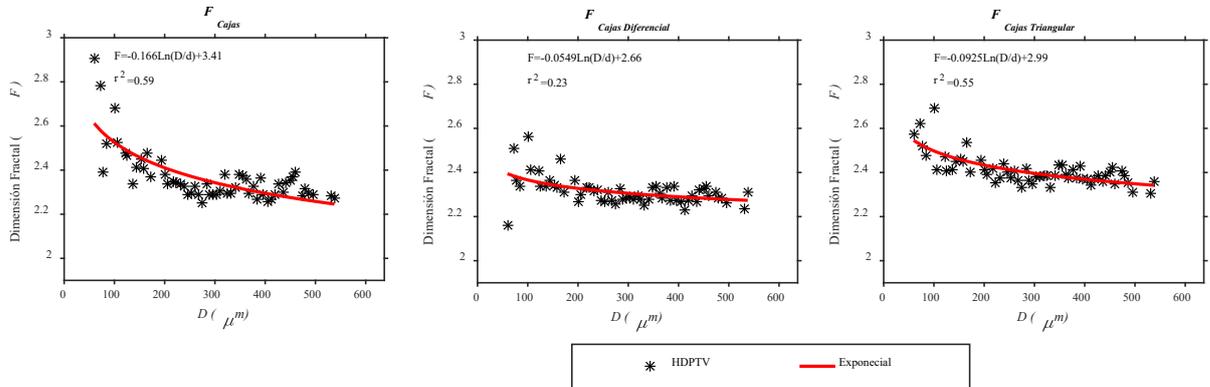


Figura 6.81 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos provenientes del agua del Rastro de Toluca, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

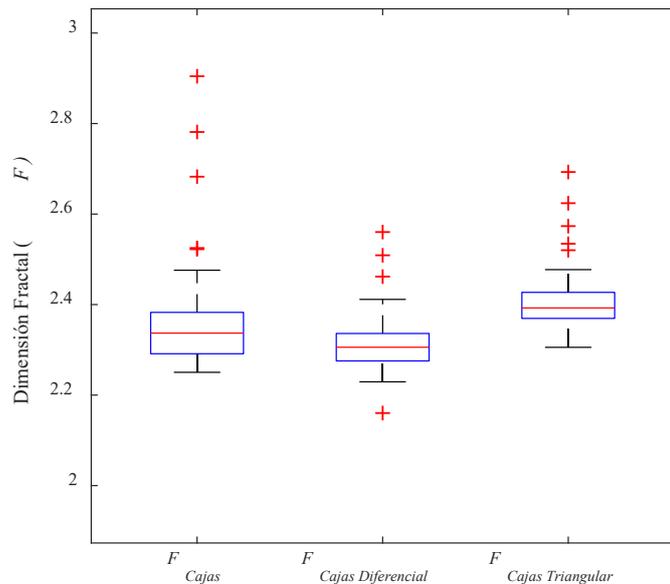


Figura 6.82 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos provenientes del agua del Rastro de Toluca, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

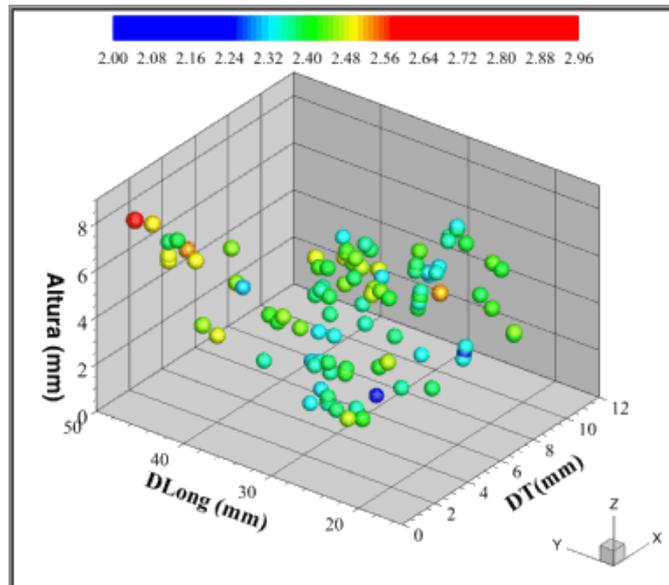


Figura 6.83 Dimensión fractal y distribución espacial en 3D de las partículas provenientes del agua del Rastro de Toluca.

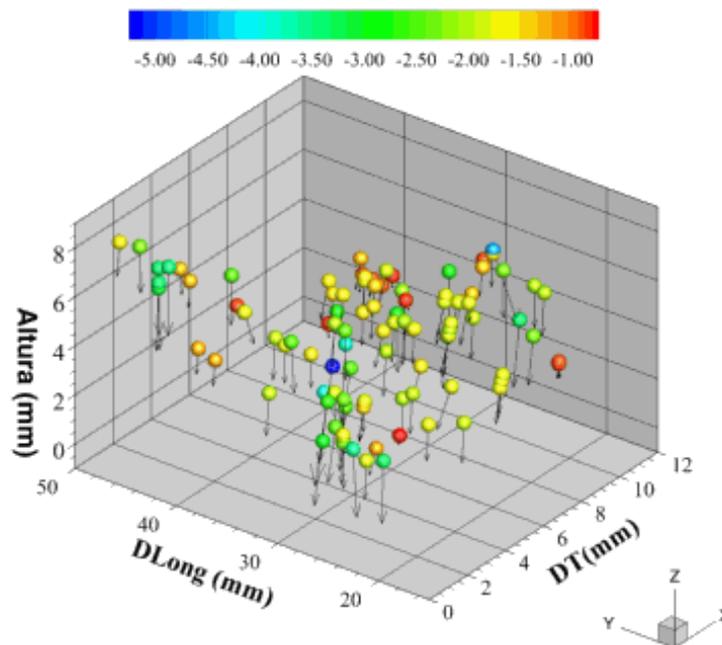


Figura 6.84. Velocidades experimentales para las partículas provenientes del agua del Rastro de Toluca.

### 6.3.2.4 Caracterización de partículas no esféricas provenientes del Zarco.

En este apartado se muestran los resultados obtenidos para el agua proveniente del centro acuícola “el Zarco”, primero se mostrarán los resultados obtenidos para forma y tamaño de los flocúlos, posterior a ello se muestran los resultados obtenidos para la dimensión fractal.

En la figura 6.85 se muestran en el inciso a) la gráfica de la frecuencia de los tamaños obtenidos en micrones, en el inciso b) la gráfica de las funciones de densidad de probabilidad que más se adaptan a los datos. Para este tipo de agua se obtuvo una muestra de 408 partículas, con tamaños de partículas que oscilan entre los 61.9253  $\mu\text{m}$  y los 712.2511  $\mu\text{m}$  con una media de 362.03  $\mu\text{m}$  correspondiente a un ajuste de una función de distribución log normal. En la figura 6.86 se muestran los tamaños (diámetro) en 3D y la posición de las partículas (flóculos).

### 6.3.2.1.2 Dimensión fractal

En cuanto a la dimensión fractal, se muestran la gráfica del comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos considerando todas las partículas reconstruidas, así como, los diferentes métodos por los cuales se determinó la dimensión fractal. En la figura 6.87 se muestra el ajuste de los datos utilizando el modelo de Lau & Krishnappan (1997), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas y el triangular presentando coeficientes de determinación de 0.69 a 0.73 y el coeficiente  $c$  toma valores promedio de 0.1 a 0.4 y el coeficiente  $b$  de 0.4 a 1.3.

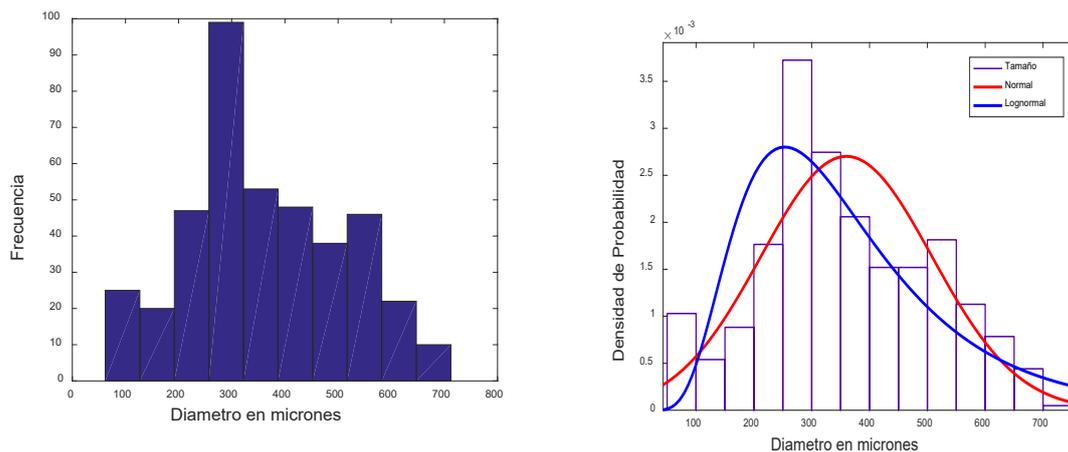


Figura 6.85. Datos obtenidos del agua del estanque de peces “El Zarco”. a) frecuencia relativa; b) funciones de densidad de probabilidad.

En la figura 6.88 se muestra la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste utilizando el modelo de García et al. (2014), se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas con coeficientes de determinación de 0.56 y 0.57, en este caso la  $n$  toma el valor de 1.15 dado que es el que presento mejor ajuste y el coeficiente  $a$  toma valores de 1.2 a 1.3.

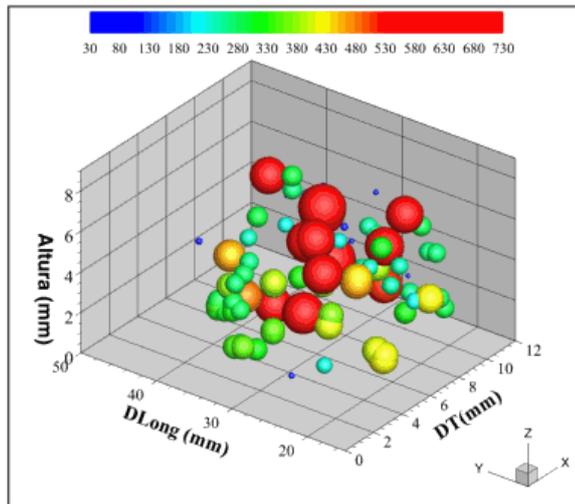


Figura 6.86 Distribución espacial de las partículas del agua proveniente del Zarco

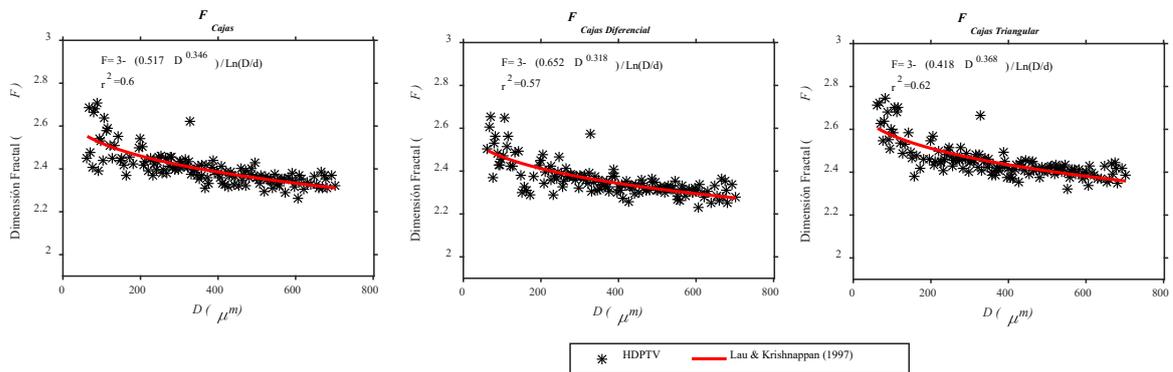


Figura 6.87 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Zarco, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación de Lau & Krishnappan (1997) para el ajuste.

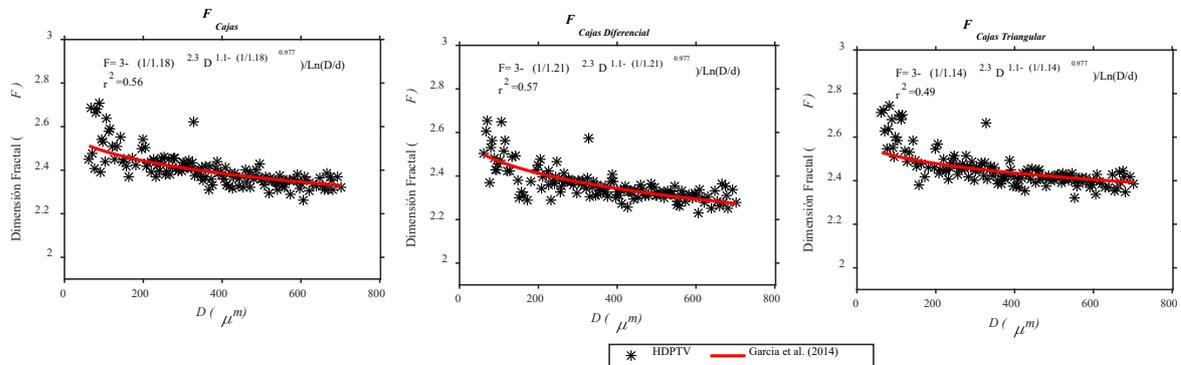


Figura 6.88 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Zarco, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación García et al. (2014) para el ajuste.

En la figura 6.89 muestra la dimensión fractal obtenida por cada uno de los métodos y el ajuste exponencial, se puede observar que los métodos que más se ajustan son los de cajas, con coeficientes de determinación de 0.61 y 0.66, donde los valores del coeficiente  $e$  varía de 0.097 a 0.111 y los valores de  $f$  van de 2.99 a 3.17.

En la figura 6.90 se muestra el diagrama de cajas en el cual se observa que se muestran datos atípicos en todos los métodos, y se tiene una mediana aproximada de 2.4. Finalmente, en la figura 6.91 se muestran las partículas en cuanto a su dimensión fractal y su posición en 3D de las partículas provenientes del agua del Zarco.

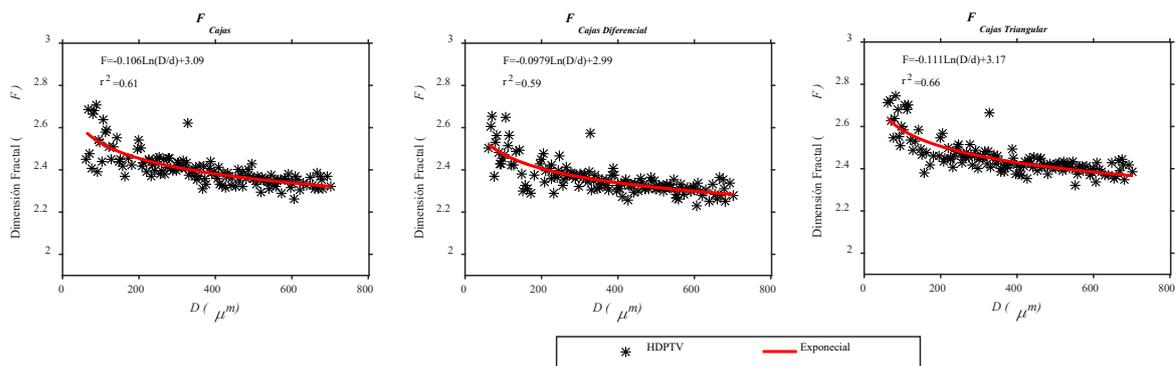


Figura 6.89 Comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Zarco, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal, usando la ecuación exponencial para el ajuste.

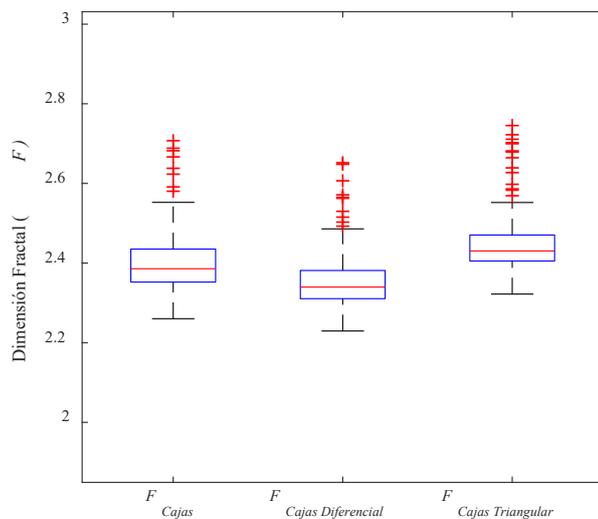


Figura 6.90 Diagrama de cajas que muestra el comportamiento de la dimensión fractal con respecto al tamaño de los flóculos para el Zarco, considerando cada uno de los métodos utilizados para determinar la dimensión fractal.

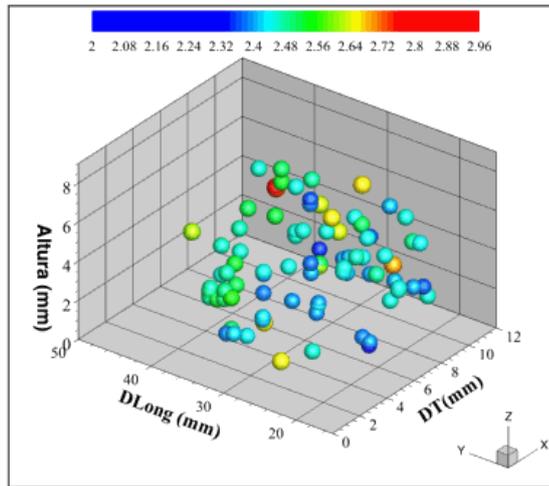


Figura 6.91 Dimensión fractal y distribución espacial de las partículas del Zarco.

### 6.3.2.4.3 Velocidad de caída

La velocidad de caída se obtuvo de forma experimental y se muestra en la figura 6.92, donde se observa que la velocidad de caída de las partículas entre 0 y -6 mm/s.

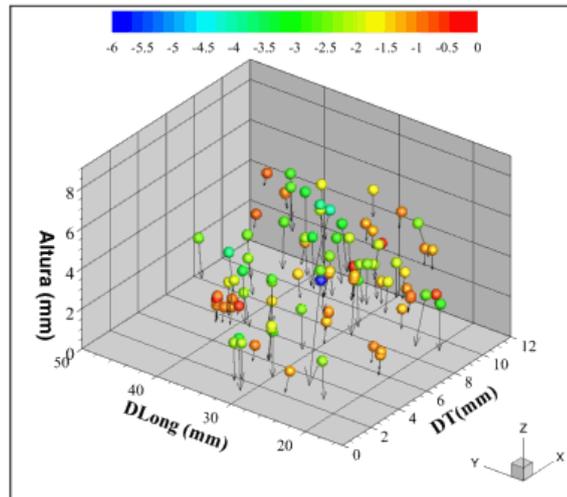


Figura 6.92. Velocidades experimentales para las partículas del Zarco

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección se presenta las tablas de datos de los resultados obtenidos y se hace el análisis de los mismos.

En la tabla 6.1 se observan los resultados que arrojaron los experimentos para el río Usumacinta, en la cual puede observarse que el tamaño promedio de los flóculos fue aumentando hasta los 45 minutos y posterior a esto bajo por lo cual se concluye que los flóculos se formaron a los 45 minutos y posterior a ello se disgregaron. En cuanto a la dimensión fractal puede notarse que para este río se tiene un valor medio de 2.3 y 2.4 para todos los tiempos, con respecto a ello se concluye que los flóculos si se compactan, pero siguen siendo porosos esto debido a que la dimensión fractal oscila entre 2.04 y 2.9 lo cual indica que hay unos que presentan mayor porosidad y otros que son más compactos.

**Tabla 6.1 Resultados de tamaños y dimensión fractal para el río Usumacinta**

Tiempo	Diámetro de los Flóculos ( $\mu\text{m}$ )			Dimensión fractal		
	máximo	mínimo	medio	máxima	mínima	media
<b>0 min</b>	<b>368.8208</b>	<b>11.8087</b>	<b>135.442</b>	-----	-----	-----
<b>15 min</b>	<b>436.0430</b>	<b>30.1064</b>	<b>150.865</b>	<b>2.9</b>	<b>2.04</b>	<b>2.4</b>
<b>30 min</b>	<b>447.4855</b>	<b>48.8065</b>	<b>161.6880</b>	<b>2.6</b>	<b>2.2</b>	<b>2.3</b>
<b>45 min</b>	<b>514.0512</b>	<b>39.1650</b>	<b>197.4230</b>	<b>2.65</b>	<b>2.1</b>	<b>2.35</b>
<b>60 min</b>	<b>484.0123</b>	<b>41.7500</b>	<b>167.4110</b>	<b>2.8</b>	<b>2.2</b>	<b>2.4</b>

Mientras que en la tabla 6.2 se observan los resultados que arrojaron los experimentos para el río Grijalva, en la cual puede observarse que el tamaño promedio de los flóculos fue aumentando hasta los 30 minutos, manteniéndose hasta los 45 minutos y posterior a esto bajo. Por lo que, se concluye que los flóculos se formaron a los 30 minutos, manteniéndose formados hasta a los 45 minutos y posterior a ello se disgregaron. En cuanto a la dimensión fractal puede notarse que el promedio esta entre 2.38 y 2.4 para todos los tiempos, con respecto a ello se concluye que los flóculos si se compactan, pero siguen siendo porosos, dado que la dimensión fractal oscila entre 2.05 y 2.9 lo cual indica que hay algunos flóculos que presentan mayor porosidad y otros que son más compactos. Es importante resaltar que para el caso de las partículas del río Grijalva hubo menor variabilidad para las partículas más compactas.

**Tabla 6.2 Resultados de tamaños y dimensión fractal para el río Grijalva**

Tiempo	Diámetro de los Flóculos ( $\mu\text{m}$ )			Dimensión Fractal		
	máximo	mínimo	medio	máxima	mínima	media
15 min	981.4	66.80	256.26	2.8	2.1	2.38
30 min	296.278	30.106	162.642	2.8	2.15	2.4
45 min	327.0389	20.453	162.709	2.85	2.05	2.4
60 min	718.1	16.7	213.714	2.9	2.1	2.4

En la tabla 6.3 se observan los resultados que arrojaron los experimentos para el Zarco y el Rastro, en la cual puede observarse que el tamaño promedio de los flóculos es de 362.03 y 319.08 respectivamente. En cuanto a la dimensión fractal puede notarse que el promedio esta entre 2.4 y 2.3, con respecto a ello se concluye que los flóculos si se compactan, pero siguen siendo porosos, sin embargo, a diferencia de los ríos, en este caso la dimensión fractal oscila entre 2.2 y 2.9, lo cual indica que los flóculos provenientes de este tipo de aguas son más compactos y presentan menor porosidad.

**Tabla 6.3 Resultados de tamaños y dimensión fractal del Zarco y el Rastro**

Sedimento de estudio	Diámetro de los Flóculos ( $\mu\text{m}$ )			Dimensión Fractal		
	máximo	mínimo	medio	máxima	mínima	media
Rastro	828.58	52.14	319.08	2.9	2.2	2.3
Zarco	712.25	61.92	362.03	2.7	2.2	2.4

Respecto al ajuste de los datos experimentales con los diferentes modelos presentados por los autores, en la tabla 6.4 se muestra los resultados obtenidos para el río Usumacinta, para el coeficiente de determinación y las constantes de cada uno de los modelos que se ocuparon para hacer el ajuste, esto para cada uno de los métodos empleados para determinar la dimensión fractal y en cada uno de los tiempos en los que se realizaron los experimentos.

Para el río Usumacinta se presentan coeficientes de determinación oscilan entre 0.35 y 0.73, es importante resaltar que para todos los ajustes la única constante que pudo mantenerse sin necesidad de que los otros parámetros se vieran afectados fue la constante  $n$  del modelo de García et al.

Analizando los datos de la tabla se puede observar que las variaciones de los valores de los parámetros “ $b$ ” y “ $c$ ”, considerando el valor promedio en los tiempos analizados y al compararlo

con el valor de la correlación del total de datos, en el modelo de Lau & Krishnappan son del orden del 8.5% y de 3.1 % respectivamente para el método de cajas, para el método diferencial de cajas son de 7.1% y 3.6% y para el triangular 0.12 % y 0.32%, resultando que el método para determinar la dimensión fractal de imágenes de partículas que mejor se ajusta al modelo de Lau & Krishnappan es el Método Triangular de Cajas.

Para el caso del modelo de García et al., el parámetro “ $n$ ” se mantuvo constante en todos los casos ( $n=1.15$ ) y el parámetro “ $a$ ” tuvo una variación de 1% para el método de cajas, 1.5% para el método diferencial y 1.9% para el método triangular, en este caso el método de cajas es el que mejor se ajustó al modelo.

Para el caso del modelo exponencial, los parámetros “ $e$ ” y “ $f$ ” tuvieron una variación de 18.8% y 2.1% respectivamente para el método de cajas, 23.4% y 4% para el método diferencial y 2.7% y 1.3 % para el método triangular. También en este caso el método triangular de Cajas es el que presento mejor ajuste, por lo que se puede considerar que este método se adecuó al análisis de la dimensión fractal para el río Usumacinta.

Si se pretende proponer unos parámetros para un modelo predictivo de la floculación en el río Usumacinta el modelo de García et al. con  $n=1.15$  y  $a= 1.25$  (promedio de  $a$  en los tres métodos) sería el más apropiado para calcular la dimensión fractal.

En la tabla 6.5 se muestra los resultados obtenidos para el río Grijalva, para el coeficiente de determinación y las constantes de cada uno de los modelos que se ocuparon para hacer el ajuste, esto para cada uno de los métodos empleados para determinar la dimensión fractal y en cada uno de los tiempos en los que se realizaron los experimentos.

Analizando la tabla se puede observar, que en el modelo de Lau & Krishnappan la variación de los parámetros “ $b$ ” y “ $c$ ” son de 0.1% y de 4.7 % respectivamente, para el método de cajas, para el método diferencial de cajas son de 3.9% y 6.4 % y para el método triangular de cajas 6.3 % y 6.4%., resultado ser adecuado el modelo de cajas.

Para el caso del modelo de García et al., el parámetro “ $n$ ” se mantuvo constante en todos los casos ( $n=1.15$ ) y el parámetro “ $a$ ” tuvo una variación de 0.2% para el método de cajas, 0.2%

para el método diferencial de cajas y 0.2% para el método triangular de cajas, para este caso los tres métodos de cajas son adecuados para este modelo.

Para el caso del modelo exponencial en el río Grijalva los parámetros “*e*” y “*f*” tuvieron una variación de 1.5% y 0.2 % respectivamente para el método de cajas, 9.3% y 18.8% para el método diferencial de cajas y 28.9 % y 1.8 % para el método triangular de cajas, aquí también el método de cajas resulto ser el adecuado.

Se puede apreciar que en el caso del Rio Grijalva, para todos los métodos, las menores variaciones en los parámetros los presenta el modelo de García et al. Si se pretende proponer unos parámetros para un modelo predictivo de la floculación en el río Grijalva el modelo de García et al. con  $n=1.15$  y  $a= 1.23$  (promedio de *a* en los tres métodos) sería el más apropiado para calcular la dimensión fractal.

Para el caso de los sedimentos provenientes de la planta acuícola del Zarco el valor promedio de  $a=1.23$  y  $n= 1.15$  se puede utilizar con la fórmula de García et al. (2014) para calcular la dimensión fractal en modelos de floculación. Mientras que, para el caso de los sedimentos proveniente del rastro de Toluca el valor promedio de  $a=1.18$  y  $n= 1.15$  se puede utilizar con la fórmula de García et al. (2014) para calcular la dimensión fractal en modelos de floculación

Tabla 6.4 Parámetros para cada modelo de ajuste considerando los diferentes métodos para determinar la dimensión fractal y los tiempos de análisis para el río Usumacinta.

Origen del Sedimento	Modelo de Ajuste	Método para determinar la Dimensión fractal	Parámetro	Tiempo de análisis					
				15 min	30 min	45 min	60 min	Todos	
Río Usumacinta	Lau & Krishnappan	Método de Cajas	$r^2$	0.71	0.74	0.55	0.45	0.56	
			$b$	0.409	0.519	0.538	0.375	0.424	
			$c$	0.415	0.370	0.363	0.411	0.409	
		Método de cajas Diferencial	$r^2$	0.73	0.70	0.55	0.70	0.58	
			$b$	0.737	0.778	0.758	0.569	0.765	
			$c$	0.323	0.310	0.317	0.363	0.317	
		Método Triangular de cajas	$r^2$	0.69	0.72	0.66	0.65	0.61	
			$b$	0.411	0.473	0.494	0.340	0.430	
			$c$	0.400	0.371	0.370	0.426	0.393	
		García et al.	Método de Cajas	$r^2$	0.66	0.73	0.54	0.35	0.52
				$n$	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15
				$a$	1.30	1.25	1.22	1.18	1.25
	Método de cajas Diferencial		$r^2$	0.64	0.58	0.46	0.70	0.47	
			$n$	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	
			$a$	1.25	1.29	1.30	1.28	1.30	
	Método Triangular de cajas		$r^2$	0.60	0.66	0.62	0.47	0.53	
			$n$	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	
			$a$	1.21	1.20	1.22	1.30	1.21	
	Exponencial	Método de Cajas	$r^2$	0.75	0.75	0.55	0.43	0.58	
			$e$	0.101	0.126	0.118	0.126	0.145	
			$f$	3.27	3.13	3.09	3.20	3.24	
		Método de cajas Diferencial	$r^2$	0.76	0.70	0.68	0.73	0.60	
			$e$	0.134	0.095	0.119	0.126	0.096	
			$f$	2.92	2.89	3.12	3.09	2.89	
Método Triangular de cajas		$r^2$	0.76	0.75	0.53	0.73	0.66		
		$e$	0.149	0.118	0.098	0.145	0.131		
		$f$	3.22	3.14	2.91	3.32	3.19		

Tabla 6.5 Parámetros para cada modelo de ajuste considerando los diferentes métodos para determinar la dimensión fractal y los tiempos de análisis para el río Grijalva

Tipo de Sedimento	Modelo de Ajuste	Método Dimensión fractal	Parámetro	Tiempo de análisis				
				15 min	30 min	45 min	60 min	Todos
Río Grijalva	Lau & Krishnappan	Método de Cajas	$r^2$	0.81	0.27	0.41	0.65	0.56
			$b$	0.705	1.01	0.397	0.475	0.646
			$c$	0.307	0.246	0.430	0.368	0.323
		Método de cajas Diferencial	$r^2$	0.85	0.21	0.61	0.69	0.70
			$b$	0.879	1.31	0.498	0.711	0.884
			$c$	0.288	0.215	0.400	0.318	0.287
		Método Triangular de cajas	$r^2$	0.82	0.57	0.62	0.69	0.69
			$b$	0.476	0.622	0.266	0.372	0.463
			$c$	0.363	0.308	0.496	0.403	0.369
	García et al.	Método de Cajas	$r^2$	0.80	0.018	0.38	0.59	0.56
			$n$	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15
			$a$	1.21	1.21	1.27	1.20	1.22
		Método de cajas Diferencial	$r^2$	0.62	0.62	0.61	0.66	0.45
			$n$	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15
			$a$	1.26	1.25	1.33	1.25	1.27
		Método Triangular de cajas	$r^2$	0.76	0.55	0.46	0.55	0.62
			$n$	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15
			$a$	1.19	1.16	1.24	1.18	1.19
	Exponencial	Método de Cajas	$r^2$	0.83	0.31	0.38	0.67	0.61
			$e$	0.090	0.052	0.139	0.113	0.097
			$f$	2.93	2.68	3.18	3.11	2.98
		Método de cajas Diferencial	$r^2$	0.84	0.20	0.62	0.70	0.70
			$e$	0.086	0.034	0.139	0.095	0.081
			$f$	2.83	0.20	3.14	2.93	2.80
		Método Triangular de cajas	$r^2$	0.88	0.63	0.65	0.77	0.74
			$e$	0.120	0.083	0.177	0.132	0.18
			$f$	3.16	2.96	3.44	3.26	3.15

Tabla 6.6 Parámetros para cada modelo de ajuste considerando los diferentes métodos para determinar la dimensión fractal y los tiempos de análisis para el Zarco y el Rastro de Toluca.

Modelo de Ajuste	Método Dimensión fractal	Parámetros	Tipo de Sedimento	
			El Zarco	Aguas del Rastro
Lau & Krishnappan	Método de Cajas	$r^2$	0.52	0.60
		$b$	0.375	0.517
		$c$	0.421	0.346
	Método de cajas Diferencial	$r^2$	0.24	0.57
		$b$	1.070	0.657
		$c$	0.245	0.318
	Método Triangular de cajas	$r^2$	0.51	0.62
		$b$	0.375	0.418
		$c$	0.421	0.365
García et al.	Método de Cajas	$r^2$	0.46	0.56
		$n$	1.15	1.15
		$a$	1.23	1.18
	Método de cajas Diferencial	$r^2$	0.13	0.57
		$n$	1.15	1.15
		$a$	1.26	1.21
	Método Triangular de cajas	$r^2$	0.51	0.49
		$n$	1.15	1.15
		$a$	1.19	1.14
Exponencial	Método de Cajas	$r^2$	0.59	0.61
		$e$	0.166	0.106
		$f$	3.41	3.09
	Método de cajas Diferencial	$r^2$	0.23	0.59
		$e$	0.054	0.097
		$f$	2.66	2.99
	Método Triangular de cajas	$r^2$	0.55	0.66
		$e$	0.092	0.111
		$f$	2.99	3.17

# CONCLUSIONES

Para la realización del presente trabajo se puede resaltar que el sistema de holografía en línea presentó mejores resultados con respecto al fuera de eje, dado que, el tiempo requerido para su montaje, así como, los requerimientos generales para llevar a cabo el mismo, mostraron menor complejidad. Además, el sistema de holografía en línea sin lentes permitió cumplir con la obtención de hologramas, tanto para partículas esféricas como no esféricas.

La aproximación de Fresnel y el método de convolución, fueron las técnicas elegidas para llevar a cabo la reconstrucción de partículas esféricas, siendo la del método de convolución el que presentó mejores resultados, así que, fue al que se le realizaron las adecuaciones necesarias para llevar a cabo la reconstrucción de partículas no esféricas.

Los métodos de conteo de cajas se usaron para la obtención de la dimensión fractal, los que presentaron mejores resultados y por ello los que fueron usados para la presente investigación fueron: el método de cajas, el método diferencial de cajas y el método triangular de cajas, dentro de ellos, el que presentó mejores resultados para determinar la dimensión fractal para las partículas no esféricas fue el métodos de conteo de cajas triangular, que es el que se propone para futuras investigaciones.

Los ajustes de la dimensión fractal mostraron que el que presenta menor índice de variación en el valor de sus constantes es el de García Aragón et al. (2014). En dicho modelo la variación de su parámetro “a” es pequeña entre 1.2 y 1.3, cuando se deja constante el valor de  $n=1.15$ , por lo cual es el modelo que se recomienda para calcular la dimensión fractal en modelos predictivos de floculación.

Se determinó de forma experimental la velocidad de caída de las partículas, dejando para futuros trabajos la determinación de modelos matemáticos que permitan relacionar la velocidad de caída con la dimensión fractal. Además de alimentar modelos ya existentes para verificar los resultados de velocidades de caída obtenidos.

Finalmente, se realizó una herramienta computacional con todos los algoritmos desarrollados, está permitió realizar el análisis de datos de todos los experimentos realizados, el cual arrojó los resultados que se tenían esperados. Puesto que, como puede observarse en la sección de resultados, esta herramienta permite llevar a cabo la reconstrucción de las partículas tanto esféricas como no esféricas, así como determinar la forma, tamaño, dimensión fractal, posición y velocidad de caída, cada una de estas en 3D de cada una de las partículas reconstruidas.

Se concluye que el presente trabajo logró cubrir los objetivos establecidos, dejando para futuros trabajos la obtención de la velocidad usando modelos matemáticos para corroborar que los resultados que se obtienen son o presentan similitud a los del presente trabajo.

## **RECOMENDACIONES**

Para llevar a cabo la instalación del sistema de holografía se recomienda contar con un lugar que pueda oscurecerse más, probar con diferentes tamaños de pinhole, así como hacer el montaje en línea con uso de lentes y un montaje fuera de eje para identificar si existen diferencias significativas en la obtención de resultados.

Para los métodos de conteo de cajas se recomienda estar al tanto de las nuevas modificaciones que se vayan haciendo a los métodos debido a que se mostró que las técnicas más recientes mostraron mejores resultados que las que ya tenían tiempo de haber sido propuestas.

Para el caso de la velocidad de caída se recomienda el uso de un prisma de mayor altura, dado que los resultados que se obtuvieron con el prisma utilizado en la presente investigación mostraron que debido a la altura es complicado determinar si las partículas estaban cayendo o eran partículas resuspendidas.

# REFERENCIAS

- Adrian, R. J. (1991). "Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics". *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23, pp. 262-30.
- Adams M; Kreis T; Juptner W (1997) Particle size and position measurement with digital holography. *Proc. SPIE*, 3098, 234-240
- Barja,S. and Fiaschetti,L. (2015) Una herramienta integral para el procesamiento de Velocimetría por Imágenes de Partículas aplicado a problemas de fluidodinámica. Trabajo final de la carrera de grado de Ingeniería de Sistemas de la Universidad del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- Chakraborti, R. K., Gardner, K. H., Atkinson, J. F. and Van Benschoten, J. E. (2003) Changes in Fractal Dimension During Aggregation. *Water Research* 37 873-883.
- Clarke, C. (1986). Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method. *Computers & Geosciences*, 12(5), 713-722.
- Coronel, A. (2011). Sistema para medir velocidad en flujo de fluidos en 3 dimensiones. Tesis para obtener el grado de maestro en Ciencias ópticas, Centro de investigaciones en Óptica (CIO)
- Droppo IG, Walling DE and Ongley ED. 2000. The influence of floc size, density and porosity on sediments and contaminant transport. In: Stone, M. (ed).*The Role of Erosion and Sediment Transport in Nutrient and Contaminant Transfer*, Waterloo, Canada. IAHS Publ. No. 263:141-147.
- Droppo I.G. (2001). Rethinking what constitutes suspended sediment. *Hydrological processes*, 14, 653-667.
- Dyer K.R., (1986).*Coastal and Estuarine Sediment Dynamics*, J. Wiley, London, UK, 342.
- Fox, J.M., Hill, P.S., Milliganb, T.G., Ogstonc, A.S., Boldrin,A., (2003). Floc fraction in the waters of the Po River prodelta. *Continental Shelf Research*, 24, 1699-1715.
- Gabor D (1948) A new microscopic principle. *Nature* 161:777-778
- Gabor, D., W.P. Goss, (1968) Interference microscope with total wavefront reconstruction. *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 56, n° 7, pp. 849-856.
- García Aragón J.A., Droppo I.G., Krishnappan B., Trapp B. Y Jaskot C. (2011b) Experimental assessment of Athabasca river cohesive sediment deposition dynamics. *Water Quality Research journal of Canada*. Vol. 46, No.1, pp: 87-96.

- García Aragon, J.A., Salinas T.H., j. Moreno G, Diaz P. V y Tejeda V.S., (2014) A model for the settling velocity of flocs; application to an aquaculture recirculation tank. *Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas.*, Vol. 2, No. 3, 313–322
- Gregory, J. (1998) The Role of Floc Density in Solid-Liquid Separation. *Filtration and Separation* 35, 367-371.
- Gorczyca, B. and Ganczarzyk, J. (1999). Structure and Porosity of Alum Coagulation Flocs. *Water Quality Research Journal of Canada* 34 653-666.
- Goodman JW; Lawrence RW (1967) Digital image formation from electronically detected holograms. *Appl. Phys. Lett.*, 11, 77-79.
- Harris C, K., Traykovski P, A., Geyer R, W. (2004) Including a near-bed turbid layer in a three-dimensional sediment transport model with application to the Eel River shelf, Northern California. In: Spaulding M(ed) *Proceedings of the eighth conference on estuarine and coastal modeling* Am Soc Civ Engr, Reston, VA, pp 784–803.
- Hawley, N. (1982) Settling velocity distribution of natural aggregates. *J. Geophys. Res.* 87 (C12). pp. 9489-9498.
- Hill, P.S, Newell ARM (1995) Comparison of two models of aggregation in continental-shelf bottom boundary layers. *J Geophys Res* 100(C11):22749–22763.
- Hecht, Eugene, (2005), *Optica*, Addison Wesley Iberoamericana, Madrid
- Hsu T-J, Traykovski PA, Kineke GC (2007) On modeling boundary layer and gravity-driven fluid mud transport. *J Geophys Res* 112(C04011): doi: 0.1029/2006JC003719.
- Izquierdo Ayala Klever (2019) Determinación del perfil de concentraciones para sedimentos cohesivos, validación: Grijalva y Usumacinta, Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias del Agua, Instituto Interamericano de Recursos del Agua (ITTCA).
- Kaewaramsri Y; Woraratpanya K (2015) Improved Triangle Box-Counting Method for Fractal Dimension Estimation. H. Unger et al. (eds.), *Recent Advances in Information and Communication Technology 2015*, 53 *Advances in Intelligent Systems and Computing* 361, DOI: 10.1007/978-3-319-19024-2\_6.
- Khelifa A, Hill PS (2006) Models for effective density and settling velocity of flocs. *J Hydraul Res* 44(3):390–401
- Kranenburg, C. (1994) On the fractal structure of cohesive sediment aggregates. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*. Vol. 31, pp 451-460.
- Kreis T; Adams M; Juptner W (1999) Digital in-line holography in particle measurement. *Proc. SPIE*, 3744, 54- 64.

- Lau, Y.L. and Krishnappan, B.G. (1997) Measurement of size distribution of settling flocs. NWRI Publication No. 97-223.
- Leith, E.N , J. Upatnieks, (1962) «Wavefront reconstruction and communication theory,» J. Opt. Soc. Am, vol. 52, n° 10, pp. 1123-1128.
- Li, D. H., Ganzarczyk J. (1989) Fractal geometry of particle aggregates generated in water and wastewater treatment processes[J]. Environ. Sci. Technol., 23(11): 1385-1389.
- Li, Jian, Du Qian and Sun Caixin (2009) An improved box-counting method for image fractal dimension estimation, Pattern Recognition, Vol 42, pp. 2460-2469.
- Long, M. and Peng, (2013) F A Box-counting Method with adaptable box height for measuring the fractal feature of images, Radio Engineering, Vol 22, No. 1, pp 208-213.
- Lopes, R., Betrouni, N. (2009) Fractal and multifractal analysis: A review.
- López-Rebollar, B.M., 2019. Optimización de parámetros hidrodinámicos en el diseño de estanques de acuicultura, aplicando dinámica de fluidos computacional. Tesis Doctoral. Instituto Interamericano de Tecnología y Ciencias del Agua, UAEM, México.
- Maggi, F., 2005, “Flocculation dynamics of cohesive sediment”. Report N° 05-1, Delft University of Technology.
- Maggi, F. (2007), Variable fractal dimensión: A major control for floc structure and flocculation kinematics of suspended cohesive sediment, J. Geophys. Res., 112, C07012, doi: 10.1029/2006JC003951.
- Maggi, F: (2013), The settling velocity of mineral, biomineral, and biological particles and aggregates in water, J. Geophys. Res.: Oceans, 118, doi:10.1002/jgrc.20086.
- Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain Statistical self-similarity and fractional dimension. Londres:
- Matter, P. and Tso, B. (2009). Classification Methods for Remotely Sensed Data, 2 ed.
- Mehta, A. J., McAnally, W. H. (2008). Chapter 4: Fine-grained sediment transport. Sedimentation engineering: process, measurements, modeling and practice; Manual of Practice 110.
- Merckelbach, L.M, Kranenburg C, Winterwerp JC (2002) Strength modeling of consolidating mud beds. In: Winterwerp JC, Kranenburg C (eds) Fine sediment dynamics in the marine environment. Elsevier, p 359.
- Milligan, T.G., and P.S. Hill (1998) A laboratory assessment of the relative importance of turbulence, particle composition, and concentration in limiting maximal floc size. Journal of Sea Research, 30(3/4), pp. 227-241.

- Murata S and Yasuda N (2000) Potential of digital holography in particle measurement Opt. Laser Technol. 32 567–74.
- Nishihara K; Hatano S; Nagayama K (1997) New method of obtaining particle diameter by the fast Fourier transform pattern of the in-line hologram. Opt. Eng., 36, 2429-2439
- Pentland A. (1984). Fractal based description of natural scenes. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6(6), 661-74.
- Prandle, D. (2009). Estuaries. Dynamics, Mixing, Sedimentation and Morphology. Cambridge University Press.
- Raffel, M., Willert, C. E. and Kompenhans, J. (1998). “Particle Image Velocimetry”. Ed. Springer.
- Salinas T. H. (2007) Determinación de parámetros para flujo bifásico (sólido-líquido) por medio de técnicas ópticas. Tesis de doctorado en Ingeniería, Centro Interamericano de Recursos del Agua, Fac. Ingeniería, UAEM, Toluca, México.
- Salinas T. H. Y García A. J. (2011) Fórmula experimental para la velocidad de caída de sedimentos en flujo transversal. Tecnología y ciencias del agua, vol II, núm. 2, abril - junio de 2011, pp175 – 182.
- Sarkar, C. (1992). An Efficient Approach to Estimate Fractal Dimension of Textural Images. Pattern Recognition, 25(9), 1035-1041.
- Schnars U, Jüptner W (1994) Direct recording of holograms by a CCD-target and numerical reconstruction. Applied Optics 33(2):179-181
- Selomulya, C., Amal, R., Bushell, G., and Waite, T.D. (2003) Evidence of Shear Rate Dependence on Restructuring and Break-up of Latex Aggregates. Journal of Colloid and Interface Science 236 67-77.
- Sullivan(1987), D. Differentiable structures on fractal like sets, determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets, AMS Proc. Symp. Pure Math., 48:15-23.
- Tambo, N. and Watanabe, Y. (1979) Physical Aspect of Flocculation Process- I. Fundamental Treatise. Water Res. 13. Pp 429-439.
- Theera, N. (2002). Fractal Dimension Estimation using Modified Differential BoxCounting and Its Application to MSTAR Target Classification.
- Toorman EA (1999) Sedimentation and self-weight consolidation: constitutive equations and numerical modeling. Geotechnique 49(6):709–726.
- Thompson BJ (1963) Diffraction by opaque and transparent particles. J. SPIE, 2, 43-46.

- Trolinger JD; Beltz RA; Farmer WM (1969) Holographic techniques for the study of dynamic particle fields. *Appl. Opt.*, 8, 957-961
- Trento A., Vinzon S, (2004) Modelo de partículas para el transporte de sedimentos finos. *Mecánica Computacional Vol. XXIII*, pp. 1357-1374 G. Buscaglia, E. Dari, O. Zamonsky (Eds.) Bariloche, Argentina
- Van Der Ham R, Winterwerp JC (2001) Turbulent exchange of fine sediments in a tidal channel in the Ems/Dollard estuary: Part II. Analysis with a 1DV numerical model. *Continental Shelf Res* 21:1629–1647.
- Van Leussen W. (1988), “The variability of settling velocities of suspended fine-grained sediment in the Sem estuary”, *J. of Sea Research*, 41, 109-118.
- Warner JC, Sherwood CR, Signell RP, Harris CK, Arango HG (2007) Development of a three-dimensional, regional, coupled wave, current and sediment-transport model. *Computers Geosci*, accepted.
- Wernet, M. P. (1999) Fuzzy logic enhanced digital PIV processing software, 18th International Congress on Instrumentation for Aerospace Simulation Facilities (ICIASF), Toulouse, France.
- Winterwerp JC (1998) A simple model for turbulence induced flocculation of cohesive sediment. *J Hydraul Res* 36(3):309–326 48.
- Winterwerp, J.C., (2002) On the flocculation and settling velocity of estuarine mud *Continental Shelf Res* 22:1339–1360.
- Winterwerp, J.C., Manning, A.J., Martens, C., Mulder, T., Vanlede, J., (2006) A heuristic formula for turbulence induced flocculation of cohesive sediment. *Estuarine Coastal Shelf Sci* 68:195–207
- Xiao, F., Ming, K. and Li, X., (2013) Investigation and visualization of internal flow through particle aggregates and microbial flocs using particle image velocimetry, *Journal of Colloid and Interface Science* 397, 163–168.
- Yaroslavskii LP, Merzlyakov NS (1980) *Methods of digital holography*. Consultants Bureau, New York.
- Yu, L., Lingyu, C., Wang, H., Jiang, L., Zhang, L., Zhao, J., Wang, D., Zhao, Y. and Song, Y. (2014). An improved differential box-counting method to estimate fractal dimensions of gray-level images. *Pattern Recognition*, 42, 2460-2469.

