



Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Valle de Chalco

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA DE NAKAJIMA-ZWANZIG PARA DISMINUIR LA DECOHERENCIA DE UN QUBIT EN UN AMBIENTE NO CONTROLADO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A

M. C. C. JOSÉ ELADIO HERNÁNDEZ VÁZQUEZ

TUTOR ACADÉMICO

DR. MANUEL ÁVILA AOKI

TUTORA ADJUNTA

DRA. MARÍA DE LOURDES LÓPEZ GARCÍA

TUTOR ADJUNTO

DR. JUVENAL RUEDA PAZ

VALLE DE CHALCO SOLIDARIDAD, MÉXICO MAYO 2022.



CUVCH

**SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN
MAESTRA DE
NAKAJIMA-ZWANZIG PARA
DISMINUIR LA
DECOHERENCIA DE UN QUBIT
EN UN AMBIENTE NO
CONTROLADO**

Resumen

En la actualidad, las computadoras se encuentran por doquier debido a su sorprendente y acelerado desarrollo; son el símbolo de nuestra era, es sólo cuestión de tiempo el contar con dispositivos de cálculo tan pequeños que requieran ser llamados computadoras cuánticas, así la computación cuántica ha despertado el interés de científicos e investigadores en todo el mundo. Para llegar a esa meta se necesita hacer investigación en varios tópicos que rodean a la computación cuántica, en la presente investigación se habla sobre el qubit que es la unidad mínima de información, concentrándonos en esta idea nosotros buscamos la ingeniería adecuada para disminuir la decoherencia de un qubit en un ambiente no controlado apoyándonos de la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig.

El esquema propuesto en esta tesis utiliza como herramienta principal, la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig. Siguiendo un proceso para obtener la expresión adecuada para poder observar la decoherencia de un qubit, se hicieron pruebas de las expresiones obtenidas utilizando estados aleatorios los cuales mostraron la evolución en el tiempo de la decoherencia.

Abstract

Nowadays, computers are everywhere due to their amazement and accelerated development; they are the symbol of our era, it is only a matter of time to have computing devices so small that they need to be called quantum computers, so Quantum Computing has sparked the interest of scientists and researchers around the world. To reach this goal, research is needed on various topics that surround Quantum Computing. In this research, we talk about the qubit, which is the minimum unit of information. Concentrating on this idea, we seek adequate engineering to decrease the decoherence of a qubit in an uncontrolled environment supported by the Nakajima-Zwanzig master equation.

The scheme proposed in this thesis uses the Nakajima-Zwanzig master equation as the main tool. Following a process to obtain the appropriate expression to be able to observe the decoherence of a qubit, tests were made of the expressions obtained using random states which showed the evolution in time of the decoherence.

Índice general

| | Página |
|--|---------------|
| Índice de tablas | III |
| Índice de figuras | V |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Antecedentes | 2 |
| 1.2. Planteamiento del problema | 4 |
| 1.3. Justificación | 5 |
| 1.4. Objetivos | 6 |
| 1.5. Hipótesis | 6 |
| 1.6. Metodología | 7 |
| 1.7. Organización del documento | 10 |
| 2. Conceptos básicos | 11 |
| 2.1. Qubit | 11 |
| 2.2. Sistema Spin | 15 |
| 2.3. Traza y Pureza | 17 |
| 2.4. Sistemas cuánticos abiertos | 18 |
| 2.5. Mecánica cuántica | 19 |

| | |
|--|------------|
| 2.6. Matriz densidad | 22 |
| 2.7. Decoherencia | 23 |
| 2.8. Dinámica cuántica | 26 |
| 3. Ecuación de Nakajima-Zwanzig | 28 |
| 3.1. Nakajima y Zwanzig | 28 |
| 3.2. Integración de la ecuación | 29 |
| 3.3. Desarrollo de la ecuación | 30 |
| 4. Discusión de los resultados | 39 |
| 4.1. Desarrollo | 39 |
| 4.2. Cálculo de la pureza | 40 |
| 4.3. Cálculo de la traza | 50 |
| 4.4. Análisis de los datos obtenidos | 60 |
| 4.5. Comparación con respecto al estado del arte | 61 |
| 5. Conclusiones y trabajo futuro | 63 |
| 5.1. Conclusiones | 63 |
| 5.2. Trabajo futuro | 64 |
| Anexos | 70 |
| A. Datos de gráficas 2D | 71 |
| A.1. Pureza del qubit | 72 |
| A.2. Traza del qubit | 97 |
| B. Publicaciones y participaciones | 122 |

Lista de Tablas

| | |
|---|-----|
| A.1. Valores de pureza en $p=10, q=20, r=30$ | 76 |
| A.2. Valores de pureza en $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | 81 |
| A.3. Valores de pureza en $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ | 86 |
| A.4. Valores de pureza en $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | 91 |
| A.5. Valores de pureza en $p=10, q=0.1, r=0.2$ | 96 |
| A.6. Valores de traza en $p=10, q=20, r=30$ | 101 |
| A.7. Valores de traza en $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | 106 |
| A.8. Valores de traza en $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ | 111 |
| A.9. Valores de traza en $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | 116 |
| A.10. Valores de traza en $p=10, q=0.1, r=0.2$ | 121 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Esfera de Bloch | 14 |
| 4.1. Pureza con valores $p = 10, q = 20$ y $r = 30$ | 40 |
| 4.2. Pureza con valores $p = 0.7, q = 0.21$ y $r = 0.22$ | 41 |
| 4.3. Pureza con valores $p=0.2, q=0.1$ y $r=0.2$ | 41 |
| 4.4. Pureza con valores $p=0.1, q=0.1$ y $r=0.1$ | 42 |
| 4.5. Pureza con valores $p=10, q=0.1$ y $r=0.2$ | 42 |
| 4.6. Pureza donde el valor de p cambia, $q=20$ y $r=30$ son fijos. | 43 |
| 4.7. Pureza donde el valor de q cambia, $p=10$ y $r=30$ son fijos. | 43 |
| 4.8. Pureza donde el valor de r cambia, $p=10$ y $q=20$ son fijos. | 44 |
| 4.9. Pureza donde el valor de p cambia, $q=0.21$ y $r=0.22$ son fijos. | 44 |
| 4.10. Pureza donde el valor de q cambia, $p=0.7$ y $r=0.22$ son fijos. | 45 |
| 4.11. Pureza donde el valor de r cambia, $p=0.7$ y $q=0.21$ son fijos. | 45 |
| 4.12. Pureza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.2$ son fijos. | 46 |
| 4.13. Pureza donde el valor de q cambia, $p=0.2$ y $r=0.2$ son fijos. | 46 |
| 4.14. Pureza donde el valor de r cambia, $p=0.2$ y $q=0.1$ son fijos. | 47 |
| 4.15. Pureza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.1$ son fijos. | 47 |
| 4.16. Pureza donde el valor de q cambia, $p=0.1$ y $r=0.1$ son fijos. | 48 |

| | |
|--|----|
| 4.17. Pureza donde el valor de r cambia, $p=0.1$ y $q=0.1$ son fijos. | 48 |
| 4.18. Pureza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.2$ son fijos. | 49 |
| 4.19. Pureza donde el valor de q cambia, $p=10$ y $r=0.2$ son fijos. | 49 |
| 4.20. Pureza donde el valor de r cambia, $p=10$ y $q=0.1$ son fijos. | 50 |
| 4.21. Traza con valores $p=10$, $q=20$ y $r=30$ | 50 |
| 4.22. Traza con valores $p=0.7$, $q=0.21$ y $r=0.22$ | 51 |
| 4.23. Traza con valores $p=0.2$, $q=0.1$ y $r=0.2$ | 51 |
| 4.24. Traza con valores $p=0.1$, $q=0.1$ y $r=0.1$ | 52 |
| 4.25. Traza con valores $p=10$, $q=0.1$ y $r=0.2$ | 52 |
| 4.26. Traza donde el valor de p cambia, $q=20$ y $r=30$ son fijos. | 53 |
| 4.27. Traza donde el valor de q cambia, $p=10$ y $r=30$ son fijos. | 53 |
| 4.28. Traza donde el valor de r cambia, $p=10$ y $q=20$ son fijos. | 54 |
| 4.29. Traza donde el valor de p cambia, $q=0.21$ y $r=0.22$ son fijos. | 54 |
| 4.30. Traza donde el valor de q cambia, $p=0.7$ y $r=0.22$ son fijos. | 55 |
| 4.31. Traza donde el valor de r cambia, $p=0.7$ y $q=0.21$ son fijos. | 55 |
| 4.32. Traza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.2$ son fijos. | 56 |
| 4.33. Traza donde el valor de q cambia, $p=0.2$ y $r=0.2$ son fijos. | 56 |
| 4.34. Traza donde el valor de r cambia, $p=0.2$ y $q=0.1$ son fijos. | 57 |
| 4.35. Traza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.1$ son fijos. | 57 |
| 4.36. Traza donde el valor de q cambia, $p=0.1$ y $r=0.1$ son fijos. | 58 |
| 4.37. Traza donde el valor de r cambia, $p=0.1$ y $q=0.1$ son fijos. | 58 |
| 4.38. Traza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.2$ son fijos. | 59 |
| 4.39. Traza donde el valor de q cambia, $p=10$ y $r=0.2$ son fijos. | 59 |
| 4.40. Traza donde el valor de r cambia, $p=10$ y $q=0.1$ son fijos. | 60 |

Capítulo 1

Introducción

En las últimas décadas se está desarrollando mucho la teoría de los sistemas cuánticos abiertos, esto se da por el desarrollo y los requerimientos de la tecnología. En consecuencia, una de las herramientas básicas para el análisis de sistemas cuánticos abiertos son las Ecuaciones Maestras o en inglés Master Equations (MEs), una de sus características principales de estas Ecuaciones es que ayudan a la comprensión de los sistemas físicos mediante el cálculo de las cantidades físicas promedio. Las Ecuaciones Maestras de Markovian nos proporcionan una buena descripción de una gran cantidad de procesos físicos. De estas Ecuaciones Maestras son muy conocidas sus características ya que han sido profundamente estudiadas debido a su estructura precisa [Breuer, 2007]. Sin embargo, en los últimos años la necesidad de comprender la dinámica cuántica más allá de la aproximación de Markov ha crecido, esto se debe al descubrimiento de muchos sistemas físicos para los cuales la descripción de Markovian está fallando.

Debido a la dificultad en el tratamiento de la dinámica no Markoviana, solo algunas Ecuaciones Maestras exactas se conocen en la literatura, de las cuales la

mayoría son formales, o relacionados a sistemas peculiares o procesos estocásticos. Ya que cada Ecuación Maestra permite un número infinito de desentraños estocásticos, las Ecuaciones de Stochastic Schrödinger (SSEs) son una herramienta igual de poderosa como las Ecuaciones Maestras. Las SSEs juegan un papel fundamental en algunos campos como, por ejemplo, medición cuántica continua, óptica cuántica, sistemas ligeros de cosecha, y fundamentos de la mecánica cuántica [Joos, 2003]. En este campo, los modelos de colapso proporcionan una solución de problemas de medición al describir la evolución de los sistemas cuánticos por medio de SSEs.

Estos modelos están experimentando un renovado interés porque podrían proporcionar una prueba de lo cuántico. Un paso importante hacia la comprensión general de la dinámica no Markovian que se ha llevado a cabo recientemente, donde los autores obtuvieron el súper operador más general para la SSE de Gaussian y la dinámica no Markovian. Es un resultado muy importante porque da una caracterización general de una amplia clase de dinámicas no Markovian, que se puede obtener heurísticamente de la estructura de Lindblad. Sin embargo, el resultado es bastante formal, y no puede ser explotado para calcular cantidades físicas, evitando el análisis explícito de sistemas físicos.

1.1. Antecedentes

En el campo del sistema cuántico abierto las ecuaciones maestras exactas para la descomposición no Markoviana de un qubit son de gran interés debido a su relevancia en aplicaciones de mecánica cuántica, así como en una comprensión más profunda de la teoría misma. En consecuencia, el estudio de la interacción

entre un sistema cuántico y su entorno es un esfuerzo común a muchos campos entre los cuales están la teoría de la medición cuántica, comunicación cuántica, óptica cuántica, la teoría de la materia condensada y la mecánica cuántica por mencionar algunos [Alicki, 2007].

El campo está bien evaluado en lo que respecta a la dinámica de Markovian el cual es generador de un semigrupo dinámico cuántico el cual proporciona un resultado de referencia para los enfoques tanto microscópico como fenomenológico. Pero la situación anterior no es satisfactoria cuando hay que ir más allá de la aproximación de Born-Markov considerando sistemas en los que no se puede suponer una separación de escalas de tiempo entre el sistema y el entorno en una descripción realista. Por consiguiente, los efectos de la memoria se vuelven importantes por lo tanto, una descripción no Markoviana es obligatoria [Weiss, 2008]. Para este caso, aún no se ha encontrado un marco teórico general consistente, en este caso se han obtenido resultados parciales a pesar de un intenso esfuerzo. Para el desarrollo de una teoría general se necesita la construcción de una medida adecuada que cuantifique el grado de no markovianidad para una evolución dinámica dada.

En este trabajo se obtendrá el núcleo exacto de Nakajima-Zwanzig para un sistema de dos niveles acoplado a un depósito Bosónico y compararlo con la ecuación maestra exacta sin convolución del tiempo, así como con la aproximación dinámica Markovian. Esto mostrará cuán involucrada puede ser la transición desde el nivel aproximado de la descripción de Markovian al régimen no Markoviano exacto. Por consiguiente, se encuentra que el kernel de memoria no Markovian tiene una estructura de operador que difiere de la que aparece en la aproximación de Born-Markov. En consecuencia, se intenta obtener ecuaciones de movimien-

to dinámico para sistemas no Markovianos mediante ligeras modificaciones con respecto al caso Markoviense.

1.2. Planteamiento del problema

Manipular los estados cuánticos es esencial para el avance de la tecnología relacionada con la computación cuántica, es la base para realizar cualquier procesamiento de la información cuántica, de tal forma que es de vital importancia ya que permite resolver una gran cantidad de problemas en esta área que no pueden ser resueltos en la computación clásica.

Actualmente, el proceso de manipulación de un estado cuántico puede medirse en un ambiente controlado, es decir, realizando experimentos en un laboratorio dedicado que permite controlar cada variable en la comunicación entre qubits. Dichas variables son comúnmente la traza y la pureza, con las cuales se mide el porcentaje de ruido de un qubit interactuando con otro, por lo cual, es relativamente sencillo eliminar completamente el ruido.

Por otro lado, si se considera un ambiente no controlado entonces el ruido es más difícil de controlar y prácticamente imposible de eliminar. Una forma de controlar las variables de la traza y la pureza en ambientes no controlados es utilizando la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig. Sin embargo, un escenario óptimo no ha sido encontrado. Por lo anterior, surge la siguiente pregunta de investigación. ¿De qué manera es posible reducir la decoherencia de un qubit en un ambiente no controlado?

Como puede observarse, la pregunta de investigación va encaminada a encontrar la pureza más alta en el qubit para disminuir la decoherencia de su intensidad

debido al ruido.

1.3. Justificación

Se han tenido grandes avances en la investigación respecto al procesamiento cuántico de la información correspondiente a un qubit aislado. No obstante, lo anterior es una situación ideal, ya que, en la práctica, el qubit está sujeto a interacciones con sus alrededores, de tal forma que es de vital importancia entender el comportamiento de un qubit en presencia de ruido.

En este proyecto de tesis utilizando la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig se pretende disminuir el ruido de un qubit sobre un ambiente no controlado, es decir, optimizar la pureza de un qubit en presencia de interacciones con sus alrededores. La pureza de un qubit en un ambiente no controlado es una parte importante para establecer las bases para poder fabricar computadoras cuánticas comerciales.

Desarrollando computadoras cuánticas se darán grandes avances en otras áreas del conocimiento para resolver cuestiones que con la computación clásica son imposibles. Por ejemplo, utilizando algoritmos cuánticos que son muy apropiados para problemas de aprendizaje automático, estos se podrán usar para encontrar soluciones a problemas en medicina o química, encontrar los métodos óptimos de tratamiento para un paciente o estudiar las posibles estructuras de moléculas complejas. Esto por mencionar una de las tantas aplicaciones donde se puede utilizar cómputo cuántico.

1.4. Objetivos

Esta tesis tiene como objetivo general, establecer el porcentaje de ruido en un qubit mediante la solución de la ecuación Nakajima-Zwanzig para disminuir la decoherencia en un ambiente no controlado.

Los objetivos particulares son los siguientes:

- Transformar la ecuación de Nakajima-Zwanzig de una ecuación íntegro diferencial que es difícil resolver a una ecuación diferencial simple de segundo orden que es fácil de resolver.
- Desarrollar la ecuación Maestra Nakajima-Zwanzig para operar las variables de traza y pureza en función del tiempo en un qubit.
- Proponer las ecuaciones de traza y pureza en función del tiempo de un qubit para evaluar su decaimiento en un ambiente no controlado.
- Determinar los valores de los parámetros en la ecuación de Nakajima-Zwanzig para los cuales se disminuye la decoherencia.
- Documentar los resultados obtenidos con gráficas en 2D y 3D.

1.5. Hipótesis

Dentro de la aproximación de Nakajima-Zwanzig si se ajustan los parámetros experimentales entonces es posible reducir la decoherencia de un qubit en un ambiente no controlado.

1.6. Metodología

Esta sección describe la metodología de investigación que se utilizó en este proyecto.

En este trabajo se propuso una investigación cuantitativa en la que fue necesario recabar, procesar y analizar la información obtenida de elementos como la traza y la pureza, para demostrar que a través de ellos es posible controlar la decoherencia de un qubit.

El objetivo de la investigación fue formular explicaciones para determinar la asociación o correlación entre estas variables y una realidad específica que experimenta un qubit en un ambiente no controlado y presentar los resultados con gráficas que muestren claramente la evolución de la decoherencia con respecto al tiempo.

Para garantizar lo anterior, nos apoyamos del método científico general que usa las siguientes etapas:

Etapa 1. Planteamiento del problema

- Definición del problema de estudio
- Delimitación del problema de investigación
- Determinación del objeto de estudio
- Formulación de preguntas de investigación

Etapa 2. Estado del arte sobre el tema

- Recopilación del documental del material (publicado o inédito) relacionado con el tema, lo que incluye libros, tesis, artículos, monografías, ensayos,

documentos de archivos, información de sitios web, entre otros.

Etapa 3. Definición del marco teórico-conceptual

- Antecedentes documentales del problema de estudio
- Definición del marco teórico-conceptual

Etapa 4. Definición del marco empírico-referencias

- Identificación del medio ambiente involucrado en el tema de estudio
- Definición del marco empírico-referencial donde se localiza el problema de estudio

Etapa 5. Definición de objetivos de estudio

- Definir objetivo general
- Definir objetivos específicos

Etapa 6. Formulación de hipótesis

- Formulación de hipótesis de trabajo, alternativas y nulas
- Identificación de variables de estudio
- Operacionalidad de las variables
- Determinación de las preguntas de investigación

Etapa 7. Levantamiento de información

- Diseño de métodos e instrumentos de recopilación de información

- Definición de universo y muestra de población en estudio
- Recopilación de información

Etapa 8. Análisis e interpretación de datos

- Concentración y tabulación de datos
- Análisis de información

Etapa 9. Comprobación de la hipótesis, teorías y conceptos

- Evaluación y análisis de resultados
- Conclusiones del estudio
- Comprobación de la hipótesis
- Comprobación, rechazo o actualización de teorías, conceptos y conocimientos

Etapa 10. Difusión de resultados

- Elaboración del informe de resultados
- Presentación y exposición de resultados

Lo que permitió desarrollar la investigación en tiempo y forma cumpliendo a si los objetivos presentados

1.7. Organización del documento

El resto del documento está organizado como sigue. En el capítulo 2 se presenta el fundamento de conceptos utilizados para la implementación de la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig. En el capítulo 3 son analizados los elementos de la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig y se analizan métodos para la solución de ecuaciones diferenciales. En el Capítulo 4 se explica la importancia de la propuesta, cálculos y análisis de los datos. Por último, en el capítulo 5 son enunciadas las conclusiones y el trabajo futuro que podría surgir de esta tesis.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capítulo se enunciarán los conceptos que nos interesa conocer para la comprensión del presente trabajo. El primer elemento que nos toca abordar es el de qubit, que no es otra cosa que la contracción de las palabras en inglés quantum bit, o bit cuántico y es la unidad lógica básica de procesamiento cuántico de la información. Para entender qué es un qubit es conveniente repasar previamente qué es un bit en informática clásica; para después seguir con temas como el sistema spin, traza y pureza, sistemas cuánticos abiertos, mecánica cuántica, la matriz densidad, decoherencia y finalmente con la dinámica cuántica.

2.1. Qubit

En las computadoras que utilizamos actualmente, un bit es la unidad mínima de información. Cada uno puede adoptar uno de los dos valores posibles: 0 o 1. Pero con un único bit apenas podemos hacer nada, de ahí que sea necesario agruparlos en conjuntos de 8 bits conocidos como bytes u octetos. Por otro lado,

los bytes pueden agruparse en “palabras”, que pueden tener una longitud de 8 bits (1 byte), 16 bits (2 bytes), 32 bits (4 bytes), y así sucesivamente.

Con un conjunto de dos bits podemos codificar cuatro valores diferentes, que serían 00,01,10,11. Con tres bits nuestras opciones se incrementan a ocho valores posibles, que serían 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, y así sucesivamente. Eso sí, un conjunto de bits solo puede adoptar un único valor o estado determinado en un instante dado. Es una restricción absolutamente razonable que parece tener un reflejo claro en el mundo que observamos porque una cosa es o no es, pero no puede tener ambas propiedades simultáneamente. Este principio tan evidente y básico, curiosamente, no se da en la computación cuántica. Y es que los qubits, que son la unidad mínima de información en esta disciplina, a diferencia de los bits no tienen un único valor en un momento dado; lo que tiene en una combinación de los estados cero y uno simultáneamente. Puede tener mucho de estado cero y poco de estado uno, o mucho de estado uno y poco de estado cero, o lo mismo de ambos, o cualquier otra combinación de estos dos estados.

¿Qué es entonces un qubit? Así como un bit clásico tiene un estado, ya sea 0 o 1, un qubit también tiene un estado. Dos estados posibles para un qubit son los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, que como se puede adivinar corresponden a los estados 0 y 1 para un bit clásico. La notación ‘ $| \rangle$ ’ Se llama notación de Dirac, y es la notación estándar para los estados en mecánica cuántica. La diferencia entre bits y qubits es que un qubit puede estar en un estado distinto de $|0\rangle$ o $|1\rangle$. También es posible formar combinaciones lineales de estados, a menudo llamadas superposiciones [Nielsen, 2010]:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.1)$$

Los números α y β son números complejos. Dicho de otra manera, el estado de un qubit es un vector en un espacio vectorial complejo bidimensional. Los estados especiales $|0\rangle$ o $|1\rangle$ se conocen como estados de base computacional y forman una base ortonormal para este espacio vectorial.

Entonces se dice que el estado de espín $\frac{1}{2}$ está en una combinación lineal de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Matemáticamente representamos esta propiedad como un sistema de la ecuación (2.1), así puede tomar cualquiera de los valores que resulte de las combinaciones de α y β , Es decir, con lo raro que son los sistemas cuánticos, no se puede decir con certidumbre cuánto valen α y β claro antes de medirlos. Solo se puede recurrir a la probabilidad. Entonces se dice que existe la probabilidad de que $|\alpha|^2$ de estar en el estado $|0\rangle$ y la probabilidad de $|\beta|^2$ de estar en el estado $|1\rangle$. Asumiendo que la partícula en cuestión existe, la probabilidad de encontrarla en cualquiera de tales estados debe ser $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ por ejemplo, el sistema puede estar en el estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \quad (2.2)$$

Entonces, como resultado de la medición, se tendrá probabilidad igual, es decir, 50 por cientos de encontrarlo en el estado $|0\rangle$ que en el $|1\rangle$.

Los entes cuánticos tienen espín, y algunos de ellos como el electrón y los átomos de plata, tienen espín $\frac{1}{2}$. Esto significa, como ya sabemos, que sólo pueden manifestarse dos posibles alineaciones del espín $\frac{1}{2}$ en presencia de campos magnéticos. En analogía con las variables booleanas llamaremos al vector ψ un qubit [Pavicic, 2006]. Así, un qubit no es más que un vector en un espacio complejo bidimensional. A los vectores especiales $|0\rangle$ y $|1\rangle$ se les conoce como base de estados computacional porque con ellos se puede construir cualquiera de los $|\psi\rangle$.

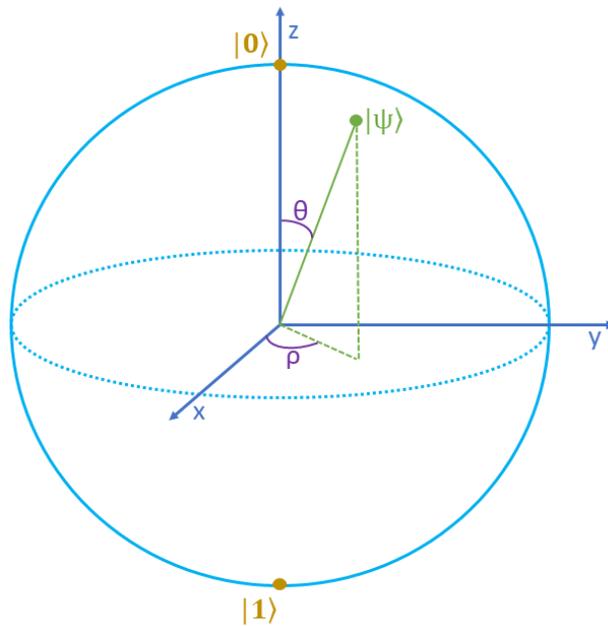


Figura 2.1: Esfera de Bloch

Como los vectores $|\psi\rangle$ son tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, diremos que tienen norma 1 y, geoméricamente, podemos representarlos como los puntos sobre la superficie de una esfera de radio 1 conocida como la esfera de Bloch (Figura 2.1). En esta perspectiva geométrica, el vector $|0\rangle$ corresponde al Polo Norte de la esfera mientras que $|1\rangle$ es el Polo Sur.

Esta relación entre el estado no observable de un qubit y las observaciones que podemos hacer se encuentra en el corazón de la computación cuántica y la información cuántica. En la mayoría de nuestros modelos abstractos del mundo, existe una correspondencia directa entre los elementos de la abstracción y el mundo real [Thomas, 2006]. La capacidad de un qubit para estar en un estado de superposición va en contra de nuestra comprensión del "sentido común" del mundo físico que nos rodea. Un bit clásico es como una moneda: cara o cruz. Por el contra-

rio, un qubit puede existir en un continuo de estados entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$, hasta que se observe, para comprender este tipo de conceptos podemos utilizar el llamado Gedankenexperiment que son experimentos mentales que nos ayudan a comprender ideas como esta.

En el presente trabajo se usa la imagen de Heisenberg para la representación de un qubit la cual se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \\
&= [C_0(t)|0\rangle + C_1(t)|1\rangle] + [C_0^*(t)\langle 0| + C_1^*(t)\langle 1|] \\
&= C_0(t)C_0^*(t)|0\rangle\langle 0| + \\
&\quad C_0(t)C_1^*(t)|0\rangle\langle 1| + \\
&\quad C_1(t)C_0^*(t)|1\rangle\langle 0| + \\
&\quad C_1(t)C_1^*(t)|1\rangle\langle 1| \\
&= \begin{pmatrix} C_0(t)C_0^*(t) & C_0(t)C_1^*(t) \\ C_1(t)C_0^*(t) & C_1(t)C_1^*(t) \end{pmatrix} \\
\rho(t) &= \begin{pmatrix} \rho_{00}(t) & \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) & \rho_{11}(t) \end{pmatrix} \tag{2.3}
\end{aligned}$$

La función anterior es la representación del qubit que se utilizó para la solución de la ecuación maestra de Nakajima-Zwining.

2.2. Sistema Spin

El sistema spin $\frac{1}{2}$ usa la base ket $|S_z; \pm\rangle$, la cual se puede expresar como $|\pm\rangle$ y este operador identidad también puede escribirse como $1 = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$, así podemos escribir a S_z como:

$$S_z = \left(\frac{\hbar}{2}\right)[(|+\rangle\langle +|) - (|-\rangle\langle -|)] \quad (2.4)$$

Para construir las representaciones matriciales del momento angular del operador, es habitual etiquetar los índices de columna (fila) en orden descendente a los componentes del momento angular, es decir, la primera entrada corresponde al componente de momento angular máximo, el segundo es el siguiente más alto, y así sucesivamente [Sakurai, 1994]. En este caso particular de sistema de giro, tenemos:

$$|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad S_z \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Retomando el momento angular como generador de rotaciones y usando el sistema de rotación right-handed; se obtiene:

$$S_x = \left(\frac{\hbar}{2}\right)[(|+\rangle\langle -|) + (|-\rangle\langle +|)] \quad (2.6)$$

$$S_y = \left(\frac{\hbar}{2}\right)[-i(|+\rangle\langle -|) + i(|-\rangle\langle +|)] \quad (2.7)$$

Los operadores S_x , S_y y S_z pueden demostrarse fácilmente que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}\hbar S_k \quad (2.8)$$

y la relación de anticonmutación

$$\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2, \delta_{ij} \quad (2.9)$$

Donde el conmutador $[,]$ y el anticonmutador $\{ , \}$ se definen como

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (2.10)$$

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (2.11)$$

2.3. Traza y Pureza

La traza de la matriz de densidad asociada a un qubit es la conservación de la probabilidad de que la magnitud $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. La traza se deriva del desarrollo matricial $\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}$ de la siguiente ecuación:

$$Tr\rho = \rho_{00} + \rho_{11} = 1 \quad (2.12)$$

donde la probabilidad de $|\rho_{00}|^2 + |\rho_{11}|^2 = 1$, ya que de lo contrario no sería un qubit.

Por otro lado, la pureza de un qubit se define como el operador de densidad para un estado $|\psi\rangle$ que está dado por $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, de tal forma que $P = Tr\rho^2 = (\rho_{00})^2 + 2\rho_{01}\rho_{10} + (\rho_{11})^2$. Se dice que se tiene un estado puro si $P = 1$, mientras que si $P < 1$ entonces es un estado mixto [Bernan, 1999].

Es importante mencionar que la pureza se ve afectada por el ruido el cual es una influencia nociva de los alrededores. En un ambiente controlado la pureza

siempre es 1 ya que no hay interferencia de otras partículas con el qubit, mientras que un ambiente no controlado lo que se busca es que el estado mixto se acerque lo más posible a 1.

Marc Hein, Wolfgang Dür y Hans Jürgen Briegel en el año 2018 investigaron las propiedades de entrelazamiento de estados multipartitos es decir estados cuánticos de 2 qubits o más, bajo la influencia de ruido. Mostraron que estos resultados son en gran parte independientemente del modelo específico del ruido y, en particular, son válidos para todos los modelos que tratan con acoplamientos individuales de partículas a ambientes independientes, descritos por algunos cuánticos. Para los estados GHZ que se representan para un estado de n qubit como $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000 \dots 0\rangle + |1111 \dots 1\rangle)$, derivaron expresiones analíticas para la vida útil del entrelazamiento destilable y determinar cuándo el estado se vuelve completamente separable. Todo esto en el artículo de Entanglement properties of multipartite entangled states under the influence of decoherence.

2.4. Sistemas cuánticos abiertos

Los sistemas cuánticos abiertos se caracterizan por estar sometidos a la interacción con el entorno, lo que provoca que su evolución deje de ser unitaria, en consecuencia, aparecen en numerosos campos del conocimiento, como la Física del Estado Sólido y la Dinámica Molecular por mencionar algunos [Hirvensalo, 2001]. Por tal motivo, en este trabajo se considera para un mejor entendimiento del tema. Para la descripción de un sistema cuántico abierto es necesario tener claro el significado tanto de los estados puros como a los estados mezcla.

Un sistema cuántico se llama abierto si no está aislado, es decir, si interactúa

con su entorno de alguna manera. Suponiendo que no hay cambios en el número de partículas en el sistema, las interacciones toman la forma de intercambios de energía e información. Considere, por ejemplo, la desintegración de un sistema cuántico, como un átomo o una molécula. Si el sistema está en un estado excitado, entonces tiene una cierta probabilidad de decaer al estado fundamental y emitir un fotón con la energía excedente. De esta forma, la energía se intercambia entre el sistema y el medio ambiente. Además, si la desintegración está sujeta a reglas probabilísticas, también hay un cambio en la entropía del sistema [Fannes, 2001].

En el estudio de los sistemas cuánticos abiertos se tiene que abordar la caracterización de los estados de los sistemas y la descripción de su evolución. Entonces, por definición, la información disponible sobre el estado real de un sistema cuántico abierto puede cambiar como resultado de la interacción con el entorno. En otras palabras, un estado puro puede evolucionar a un estado mixto y viceversa. Por esta razón, el estado del sistema tiene que ser descrito por conjuntos estadísticos.

2.5. Mecánica cuántica

A principios del siglo XX había una serie de problemas que la física no podía resolver, en el contexto de las teorías físicas existentes o para las cuales, en el mejor de los casos, se tenían soluciones erróneas. En otras palabras, las leyes de la física resultaban inadecuadas para determinados tipos de sistemas o fenómenos, se dejaba sin poder explicar una buena parte de la realidad física, que se volvía menos explicable mientras más se analizaba con las herramientas disponibles hasta entonces, esta situación condujo a un cuestionamiento de las propias teorías, y obligo a reconocer la necesidad de un cambio fundamental en la concepción del

mundo físico.

Una gran cantidad de científicos brillantes buscaron abordar la complejidad de los problemas en cuestión la cual llevo varias décadas de trabajo intenso y profundamente creativo la cual culminó con el establecimiento de una nueva teoría física para describir el comportamiento de los microsistemas. A esta nueva teoria se le dio el nombre de mecánica cuántica [Kitaev, 2002].

La mecánica cuántica difiere esencialmente de la mecánica clásica y se aplica a todo sistema cuántico, cualquiera que sea su estructura o tamaño (existen sistemas cuánticos macroscópicos, como puede ser un cristal, un superconductor, un láser, etc.). Para asentar esta teoría fue necesario abandonar muchas ideas viejas y cambiar principios bien establecidos; por ejemplo, se requirió primero convencerse de la realidad física de la estructura atómica de la materia, mostrar después que la mecánica newtoniana no es directamente aplicable al estudio del átomo, que la electrodinámica de Maxwell no describe exhaustivamente el proceso elemental de interacción entre un átomo y el campo de radiación, etcétera [Peña, 2014].

Entonces tenemos que la mecánica cuántica surge como necesidad para explicar hechos inexplicables en el mundo de la mecánica clásica y para explicar fenómenos atómicos. La mecánica clásica explica los fenómenos de escala intermedia entre lo macro y microscópico, pero no sirve para explicar modelos cosmológicos como el modelo del big-bang [Ras, 2016], la gravitación cuántica, los modelos del universo cíclico entre otros muchos, la mecánica cuántica se encarga de lo que se encuentra en el rango de lo macro y microscópico.

Esta profunda contradicción entre la teoría y el experimento muestra que la construcción de una teoría que explique el dominio de las masas, longitudes y tiempos muy pequeños o grandes exige un cambio radical en las leyes y en las

ideas clásicas fundamentales. Como punto de partida de este análisis resulta interesante analizar el fenómeno de difracción de electrones. Al pasar un haz homogéneo de electrones por un cristal, en el haz emergente se observa una figura formada por máximos y mínimos de intensidades separados por espacios, análogo a la difracción por ondas electromagnéticas. Es decir, en ciertas condiciones una partícula como el electrón se puede comportar como una onda. Este fenómeno debido a la interferencia no se reduce (como lo predice el comportamiento clásico) a la simple superposición de acciones individuales. Hacen falta nuevas explicaciones, con nociones de movimiento e interacción diferentes al que predicen las ideas clásicas. Así nace la mecánica cuántica, una cosmovisión del universo en micro y macroescala [Hecht, 2005].

Entonces tenemos que mientras en la mecánica clásica la partícula posee en cada momento una coordenada y velocidad bien determinada, en la mecánica cuántica es todo lo contrario. Si el electrón posee una coordenada determinada como resultado de una medición, en estas condiciones no tendrá ninguna velocidad determinada. Y al contrario, si el electrón posee una velocidad determinada, no podrá tener una posición determinada en el espacio. Entonces tenemos que la existencia simultánea, en un instante cualquiera, de coordenadas y velocidad significaría que existe una trayectoria determinada, que el electrón no posee. Entonces se dice que la posición y la velocidad son magnitudes que no existen simultáneamente. En general, el mundo clásico es continuo y casual, el cuántico discreto y aleatorio.

Uno de los pilares de la mecánica cuántica es el principio de incertidumbre o de indeterminación formulado en 1927 por Werner Heisenberg, tenemos que las indeterminaciones (o desvíos estándar) en la edición de las magnitudes de

posición (x) y momento proyectado a lo largo de esa coordenada (p_x) (velocidad) y donde h es la constante de Planck, se cumple que

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar \quad (2.13)$$

Las leyes fundamentales de la mecánica cuántica expresan la corrección existente entre los valores físicos que caracterizan las propiedades de la partícula como su energía o su impulso. Estos valores caracterizan sus propiedades ondulatorias de frecuencia y longitud de onda.

2.6. Matriz densidad

Desde el advenimiento de la mecánica cuántica y a lo largo de la historia de su desarrollo se ha tenido que lidiar con fenómenos y propiedades que nos son ajenos por la escala a la que interactuamos cotidianamente [Tegmark and Wheeler, 2001], una partícula se caracteriza por su función de onda ψ , para un operador Q relacionado con un observable, la partícula se encuentra en cierto eigenestado manifestando un valor al poder medirlo, dicho observable se puede expresar con la siguiente notación:

$$\langle \psi_i | Q | \psi_i \rangle \quad (2.14)$$

y así este es el valor esperado que podemos anticipar para una sola partícula que se encuentra en cierto eigenestado.

La matriz densidad también descrita en la literatura como el operador densidad [Peña, 2003], y se representa con ρ , lo usual para representar el spin que

está apuntando hacia arriba (+) y el spin que está apuntando hacia abajo (-) se representan con los vectores columna como sigue:

$$|+\frac{1}{2}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |-\frac{1}{2}\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Pero retomando la transpuesta del conjugado complejo de los vectores columna, estos se pueden representar como vectores renglón los bras que son duales a los kets de arriba:

$$\langle +\frac{1}{2}| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \langle -\frac{1}{2}| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Y para que un estado $|x\rangle$ este normalizado deberá cumplir:

$$\langle x|x\rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \quad (2.17)$$

En este punto al hablar de partículas con sus spins apuntando hacia arriba o hacia abajo tomamos como referencia la dirección del sping al eje z.

2.7. Decoherencia

En los últimos años, la decoherencia se ha convertido en un término científico muy recurrente en una gran diversidad de investigaciones, presente en las teorías fundamentales de la física cuántica. La decoherencia es la solución a problemas fundamentales de la mecánica cuántica. Pero tambien es el obstáculo para producir las tecnologías de próxima generación, como las computadoras cuánticas.

La decoherencia puede ser observada directamente en varios experimentos. De

manera más general, los sistemas para los que se observaron efectos cuánticos en los primeros días de la mecánica cuántica residían típicamente en el dominio microscópico en el que la aproximación del sistema aislado se mantuvo en un buen grado en muchos casos. Desde nuestra perspectiva moderna, ahora sabemos que la observación de los efectos cuánticos en estos primeros experimentos fue posible precisamente porque los sistemas que se estaban estudiando no interactuaban mucho con el entorno [Haroche, 1998].

La motivación del término decoherencia se da por la interacción con el medio ambiente el cual limita fuertemente, para todos los propósitos prácticos, que las cantidades físicas puedan observarse realmente en un sistema cuántico dado. Y así estas restricciones surgen dinámicamente de la interacción del sistema con su entorno y explican porque en nuestro mundo cotidiano solo observamos unas pocas cantidades robustas clásicas, como la posición y el momento, la decoherencia es un efecto distintivo y puramente mecánico-cuántico sin ningún análogo en la física clásica.

Muchos practicantes de la mecánica cuántica, especialmente los investigadores en disciplinas experimentales de la física y en el área de la computación cuántica, han adoptado ahora una actitud muy práctica hacia la decoherencia. Por ejemplo, la decoherencia a menudo se ve como una forma de ruido cuántico que dificulta la implementación experimental de dispositivos (por ejemplo, al introducir errores en los cálculos cuánticos). Se han desarrollado modelos de decoherencia cada vez más realistas y sus predicciones se han comparado con los fenómenos de decoherencia observados experimentalmente. Para todos los propósitos prácticos del físico que trabaja, la decoherencia proporciona un marco completo y autónomo para una descripción cualitativa y cuantitativa de la transición cuántica a

clásica [Schlosshauer, 2008].

Así tenemos que la decoherencia es un efecto omnipresente en la naturaleza, con consecuencias fascinantes y de gran alcance que deben tenerse en cuenta para llegar a una descripción realista de los sistemas físicos. El primer artículo sobre lo que más tarde se conocería como decoherencia fue escrito por H. Dieter Zeh en la Universidad de Heidelberg y publicado en 1970 en *Foundations of Physics*. Cabe mencionar que el término decoherencia no se introdujo hasta finales de la década de 1980.

La decoherencia es la pérdida de coherencia en un sistema cuántico debido a las interacciones con el entorno externo. Cuando la coherencia de las funciones de onda cuántica es demasiado frágil, por lo que es sencillo que se pierda el entrelazamiento cuántico, a este proceso se le denomina decoherencia, y puede ser fatal para un cómputo cuántico [Arriola, 2004].

Una de las características principales de la mecánica cuántica es el principio de superposición, que da lugar a la aparición del fenómeno de interferencia, que no tiene análogo en mecánica clásica. Así, el proceso de decoherencia cumple una doble función: por un lado, cancela los términos de interferencia, y por otro conduce a la regla que selecciona los candidatos a estados clásicos. Históricamente, la decoherencia concibe la cancelación de la interferencia a través de un proceso que convierte un estado puro en una mezcla estable sin términos de interferencia. Es decir, desde el punto de vista geométrico el estado de un sistema cuántico pasa de la frontera de un conjunto convexo de estados (estados puros) a su interior (estados mezcla) [Bengtsson, 2006]. Sobre esta base, la decoherencia fue estudiada en sistemas abiertos y cerrados.

La interacción con el entorno puede producir muchos efectos indeseables en

un qubit. Para lidiar con este hecho inevitable, necesitamos desarrollar técnicas de corrección de errores antes de poder construir una computadora cuántica útil. La mecánica cuántica no le permite duplicar o copiar un estado cuántico desconocido debido al teorema de no clonación. Así que vamos a tener que crear esquemas de corrección de errores más inteligentes en lugar de simplemente hacer copias múltiples de nuestra información, algo que no podemos hacer. Nuestra primera mirada a la corrección de errores implicará una mirada a la decoherencia [McMahon, 2008].

Por la influencia de los alrededores, el qubit empieza a oscilar o a vibrar, perdiendo con ello los números cuánticos que lo caracterizan como qubit, considerando así, la decoherencia del mismo. Lo anterior hace que el qubit deje de ser apto para el procesamiento cuántico de la información.

2.8. Dinámica cuántica

En la mecánica cuántica nace el principio de incertidumbre sin que quede muy claro si la incertidumbre subatómica es inherente a la naturaleza o es introducida por el observador, personajes como Einstein, Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Pauli y entre otros muchos más reflexionaron largamente sobre el asunto [Sahni, 2007].

La característica más importante en los sistemas cuánticos es que éstos se encuentran en una permanente superposición de estados, es decir, que su comportamiento dinámico, representado por su función de onda, puede expresarse como una combinación lineal de las funciones de onda que representa estados diferentes. En otras palabras, si Ψ_1 y Ψ_2 son funciones de onda admisibles para un sistema

cuántico, entonces una combinación de ellas de la forma $a\Psi_1 + b\Psi_2$, siendo a y b un par de constantes complejas arbitrarias, también es una función de onda del sistema.

Los tres principios más importantes en lo que se basa la mecánica cuántica son el principio de Von Neumann que sostiene que por cada estado dinámico de un sistema mecánico cuántico existe una probabilidad definida que representa la posibilidad de encontrar al sistema en dicho estado, el denominado valor propio del sistema, el principio de indeterminación de Heisenberg y el principio de complementariedad de Bohr [Williams, 2011].

Capítulo 3

Ecuación de Nakajima-Zwanzig

En este capítulo se enunciará el proceso para la solución de la ecuación maestra, los pasos para llegar de una ecuación integro diferencial a una ecuación diferencial de segundo orden, y así, ver el comportamiento de la decoherencia de un qubit en un ambiente no controlado.

3.1. Nakajima y Zwanzig

Nakajima y Zwanzig proporcionaron un método más conciso y elegante para obtener ecuaciones maestras generalizadas utilizando la técnica del operador de proyección. Una ecuación maestra es un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la evolución temporal de, generalmente, la probabilidad de que un sistema ocupe cada uno, un conjunto de estados con respecto a una variable temporal continua t ; Actualmente, las ecuaciones maestras han sido consideradas para el estudio de la interacción entre un sistema cuántico y su entorno.

La ecuación Nakajima-Zwanzig (fue hecha por los físicos Sadao Nakajima y Robert Zwanzig) es una ecuación integral que describe la evolución en el tiempo de la parte "relevante" de un sistema mecánico-cuántico. Está formulado en la matriz de densidad, la ecuación pertenece a la teoría Mori-Zwanzig dentro de la mecánica estadística de los procesos irreversibles.

3.2. Integración de la ecuación

La ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig está dada por:

$$\begin{aligned}
 K_{NZ}(\tau)\rho &= -i\varepsilon(\tau)[\sigma_+\sigma_-, \rho] + \\
 &k_1(\tau)[\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-, \rho] + \\
 &k_2(\tau)[\sigma_+\sigma_-\rho\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-, \rho] \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

La i representa los números imaginarios y las funciones $\varepsilon(\tau)$, $k_1(\tau)$ y $k_2(\tau)$ son parámetros reales, de modo que la ecuación maestra preserva la hermeticidad y la traza de un qubit. Los operadores σ_+ representan el estado $|1\rangle |0\rangle$ y el operador σ_- representa el estado $|0\rangle |1\rangle$, estos son operadores de subida y bajada del qubit y ρ es la representación de un qubit.

Los operadores σ_+ y σ_- están representados por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_+ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) \\
 \sigma_- &= \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)
 \end{aligned}$$

Las matrices de Pauli están dadas por:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El conmutador y el anticonmutador entre dos operadores A y B , se definen como sigue:

- Conmutador entre operador A y B : $[A, B] = AB - BA$
- Anticonmutador entre operadores A y B : $\{A, B\} = AB + BA$

3.3. Desarrollo de la ecuación

Teniendo todos los conceptos anteriores pasamos a resolver la Ecuación Maestra de Nakajima-Zwaing:

$$\begin{aligned} K_{NZ}(\tau)\rho &= -i\varepsilon(\tau)[\sigma_+\sigma_-, \rho] + \\ &k_1(\tau)[\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}] + \\ &k_2(\tau)[\sigma_+\sigma_-\rho\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}] \end{aligned}$$

En el siguiente paso igualaremos a $\tau=0$, y vamos a separar la Ecuación en tres partes

$$K_{NZ}(0)\rho = -i\varepsilon(0)[\sigma_+\sigma_-, \rho] + \quad (3.2)$$

$$k_1(0)[\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}] + \quad (3.3)$$

$$k_2(0)[\sigma_+\sigma_-\rho\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}] \quad (3.4)$$

Desarrollando la sección 3.2 de la Ecuación Maestra:

$$-i\varepsilon(0)[\sigma_+\sigma_-, \rho] +$$

Aplicamos el conmutador entre el operador $A = \sigma_+\sigma_-$ y $B = \rho$ y encontramos el siguiente resultado:

$$[\sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-]$$

Sustituimos los operadores anteriores quedando de la siguiente manera:

$$-i\varepsilon(0) \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Después multiplicamos las matrices:

$$-i\varepsilon(0) \left[\begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+0 & \rho_{00}+0 \\ 0+0 & \rho_{10}+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$-i\varepsilon(0) \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \rho_{00} \\ 0 & \rho_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$-i\varepsilon(0) \left[\begin{pmatrix} \rho_{00}+0 & \rho_{01}+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+\rho_{00} & 0+0 \\ 0+\rho_{10} & 0+0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -i\mathcal{E}(0) \left[\left(\begin{array}{cc} \rho_{00} & \rho_{01} \\ 0 & 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} \rho_{00} & 0 \\ \rho_{10} & 0 \end{array} \right) \right] \\
& -i\mathcal{E}(0) \left[\left(\begin{array}{cc} 0 & \rho_{01} \\ -\rho_{10} & 0 \end{array} \right) \right] \\
& \left(\begin{array}{cc} 0 & -i\mathcal{E}(0)\rho_{01} \\ i\mathcal{E}(0)\rho_{10} & 0 \end{array} \right) \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Desarrollando la sección 3.3 de la Ecuación Maestra:

$$k_1(0)[\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+ \sigma_-, \rho\}]$$

Aplicamos el anticonmutador entre el operador $A = \sigma_+ \sigma_-$ y $B = \rho$ y encontramos el siguiente resultado:

$$[-\frac{1}{2}\{\sigma_+ \sigma_- \rho + \rho \sigma_+ \sigma_-\}]$$

Desarrollamos la primera sección 3.3 de la Ecuación Maestra

$$\begin{aligned}
& [\sigma_- \rho \sigma_+] \\
& k_1(0) \left[\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right] \\
& k_1(0) \left[\left(\begin{array}{cc} 0+0 & 0+0 \\ \rho_{00}+0 & \rho_{01}+0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right] \\
& k_1(0) \left[\left(\begin{array}{cc} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & \rho_{00}+0 \end{array} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$k_1(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{00} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Desarrollamos la segunda sección 3.3 de la Ecuación Maestra

$$-\frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}$$

Ahora aplicamos los anticonmutadores

$$[-\frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho, +\rho\sigma_+\sigma_-\}]$$

Ahora sustituimos los operadores anteriores quedando de la siguiente manera:

$$\left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Después multiplicamos las matrices:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_{00} \\ 0 & \rho_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 \\ \rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \left[\begin{pmatrix} -\rho_{00} & -\frac{1}{2}\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para terminar la segunda sección de la Ecuación Maestra realizamos la suma algebraica de 3.6 y 3.7:

$$\begin{aligned}
& k_1(0) \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{00} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho_{00} & -\frac{1}{2}\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& k_1(0) \left[\begin{pmatrix} -\rho_{00} & -\frac{1}{2}\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}\rho_{10} & \rho_{00} \end{pmatrix} \right] \\
& \begin{pmatrix} -k_1(0)\rho_{00} & -\frac{1}{2}k_1(0)\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}k_1(0)\rho_{10} & k_1(0)\rho_{00} \end{pmatrix} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Desarrollando la sección 3.4 de la Ecuación Maestra:

$$k_2(0)[\sigma_+\sigma_-\rho\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}]$$

Aplicamos el anticonmutador entre el operador $A = \sigma_+\sigma_-$ y $B = \rho$ y encontramos el siguiente resultado:

$$[-\frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-\rho + \rho + \rho\sigma_+\sigma_-\}]$$

Desarrollamos la primera sección 3.4 de la Ecuación Maestra

$$\begin{aligned}
& [\sigma_+\sigma_-\rho\sigma_+\sigma_-] \\
& k_2(0) \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& k_2(0) \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& k_2(0) \left[\begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$k_2(0) \left[\begin{pmatrix} 0 & \rho_{00} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$k_2(0) \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Desarrollamos la segunda sección 3.4 de la Ecuación Maestra

$$-\frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}$$

Ahora aplicamos los anticonmutadores

$$[-\frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho, +\rho\sigma_+\sigma_-\}]$$

Ahora sustituimos los operadores anteriores quedando de la siguiente manera:

$$\left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Después multiplicamos las matrices:

$$\left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_{00} \\ 0 & \rho_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 \\ \rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[\begin{pmatrix} -\rho_{00} & -\frac{1}{2}\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (3.10)$$

Para terminar la segunda sección de la Ecuación Maestra realizamos la suma algebraica de 3.9 y 3.10:

$$\begin{aligned} & k_2(0) \left[\begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho_{00} & -\frac{1}{2}\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & k_2(0) \left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}k_2(0)\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}k_2(0)\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para terminar la Ecuación Maestra realizamos la suma algebraica de las tres secciones 3.5, 3.8 y 3.11

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & -i\varepsilon(0)\rho_{01} \\ i\varepsilon(0)\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} -k_1(0)\rho_{00} & -\frac{1}{2}k_1(0)\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}k_1(0)\rho_{10} & k_1(0)\rho_{00} \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}k_2(0)\rho_{01} \\ -\frac{1}{2}k_2(0)\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -k_1(0)\rho_{00} & -i\varepsilon(0)\rho_{01} - \frac{1}{2}k_1(0)\rho_{01} - \frac{1}{2}k_2(0)\rho_{01} \\ i\varepsilon(0)\rho_{10} - \frac{1}{2}k_1(0)\rho_{10} - \frac{1}{2}k_2(0)\rho_{10} & -k_1(0)\rho_{00} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\rho_{00}}{dt^2} & \frac{d^2\rho_{01}}{dt^2} \\ \frac{d^2\rho_{10}}{dt^2} & \frac{d^2\rho_{11}}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Con lo anterior obtenemos cuatro ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2\rho_{00}}{dt^2} = -k_1(0)\rho_{00} \quad (3.13)$$

$$\frac{d^2\rho_{01}}{dt^2} = -i\varepsilon(0)\rho_{01} - \frac{1}{2}k_1(0)\rho_{01} - \frac{1}{2}k_2(0)\rho_{01} \quad (3.14)$$

$$\frac{d^2\rho_{10}}{dt^2} = i\varepsilon(0)\rho_{10} - \frac{1}{2}k_1(0)\rho_{10} - \frac{1}{2}k_2(0)\rho_{10} \quad (3.15)$$

$$\frac{d^2\rho_{11}}{dt^2} = -k_1(0)\rho_{00} \quad (3.16)$$

Ahora para realizar los cálculos siguientes vamos a cambiar las siguientes variables:

$$i\varepsilon(0) = p$$

$$k_1(0) = q$$

$$k_2 = r$$

En el siguiente paso se generó la "ecuacion_nz" la cual se puede implementar en cualquier lenguaje, en nuestro caso se implemento en Maple y servirá para realizar

los cálculos posteriores.

$$\text{ecuacion_nz} = [\text{diff}(\rho_{00}(t), t, t) = -q \cdot \rho_{00}(t), \text{diff}(\rho_{01}(t), t, t) =$$

$$(-p - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}r) \cdot \rho_{01}(t), \text{diff}(\rho_{10}(t), t, t) =$$

$$(p - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}r) \cdot \rho_{10}(t), \text{diff}(\rho_{11}(t), t, t) =$$

$$q \cdot \rho_{00}(t), \rho_{00}(0) = 1, \rho_{01}(0) = 0, \rho_{10}(0) = 0, \rho_{11}(0) = 0,$$

$$D(\rho_{00})(0) = -2, D(\rho_{01})(0) = 0, 1, D(\rho_{10})(0) = 0, 1, D(\rho_{11})(0) = 0, 1] \quad (3.17)$$

Capítulo 4

Discusión de los resultados

En este capítulo se enunciará el proceso para obtener los resultados finales pasando por el desarrollo, cálculo de la pureza, cálculo de la traza, también se analizarán los datos en las variables de traza y pureza con su respectiva representación gráfica en 2D y 3D, los rangos utilizados para la traza y pureza, análisis de los datos obtenidos a través de los resultados y finalmente se hace una comparación con respecto al estado del arte

4.1. Desarrollo

Se inicio a trabajar con la ecuación 3.1 de Nakajima-Zwanzig, la cual es una ecuación integral que describe la evolución en el tiempo de la parte "relevante" de un sistema mecánico cuántico, para después hacer el procedimiento para poder obtener una ecuación diferencial simple de segundo orden la cual se implementó en el software Maple para realizar los cálculos posteriores, la "ecuacion_nz" 3.17 fue con la que se trabajó en Maple, esto para posteriormente seguir trabajando

con las variables de traza y pureza en función del comportamiento del qubit en el tiempo y así poder evaluar el decaimiento.

4.2. Cálculo de la pureza

En primer lugar, se muestra mediante gráficas 2D el comportamiento del qubit con relación a la pureza en un ambiente no controlado utilizando la ecuación 3.17, realizando los cálculos en valores aleatorios en el software Maple.

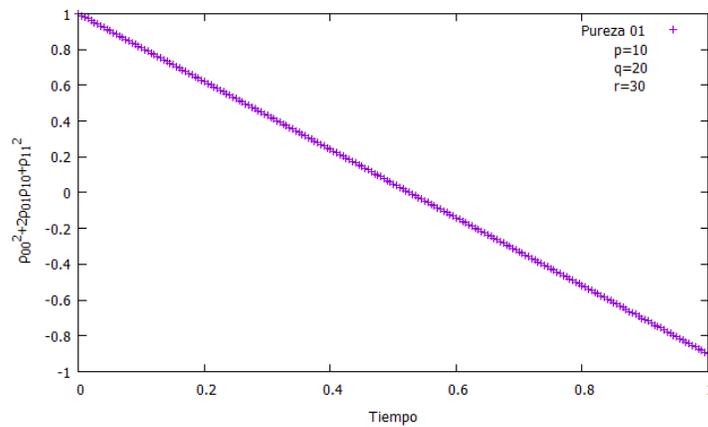


Figura 4.1: Pureza con valores $p = 10$, $q = 20$ y $r = 30$.

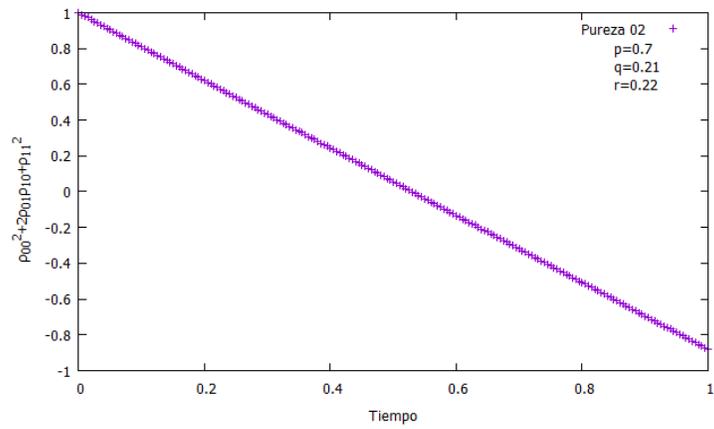


Figura 4.2: Pureza con valores $p = 0.7$, $q = 0.21$ y $r = 0.22$.

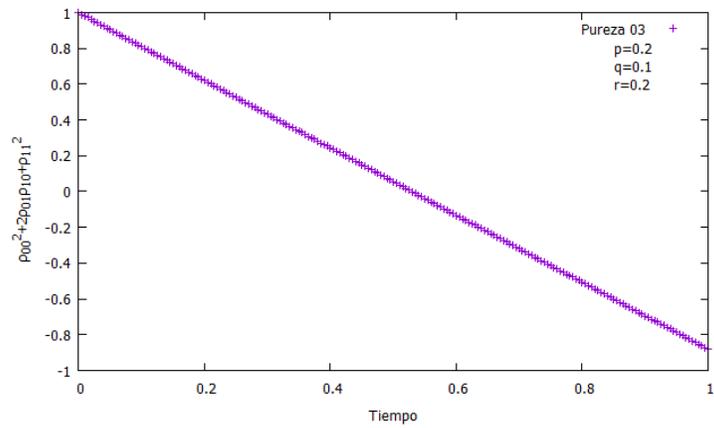


Figura 4.3: Pureza con valores $p=0.2$, $q=0.1$ y $r=0.2$.

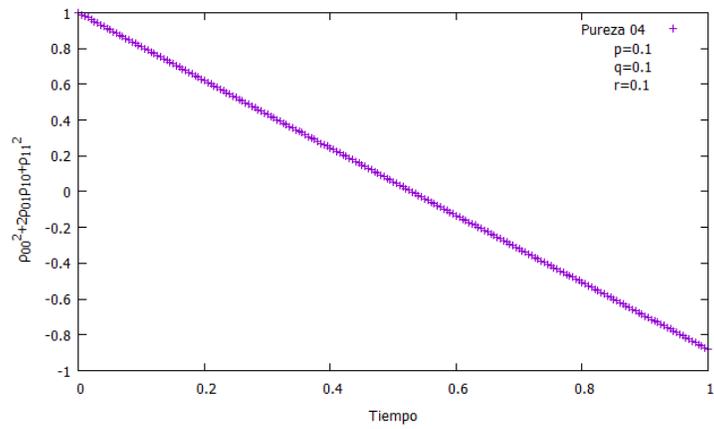


Figura 4.4: Pureza con valores $p=0.1$, $q=0.1$ y $r=0.1$.

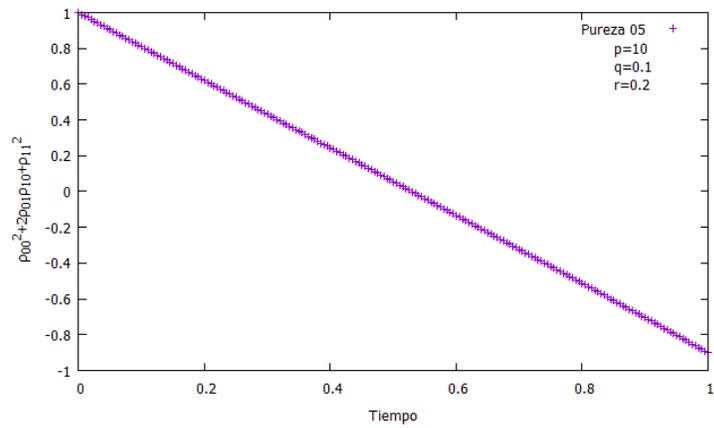


Figura 4.5: Pureza con valores $p=10$, $q=0.1$ y $r=0.2$.

En seguida se muestra el comportamiento del qubit con gráficas 3D utilizando la ecuación 3.17, realizando los cálculos donde en ocasiones un valor de p , q y r va cambiando mientras dos de ellos se mantienen fijos.

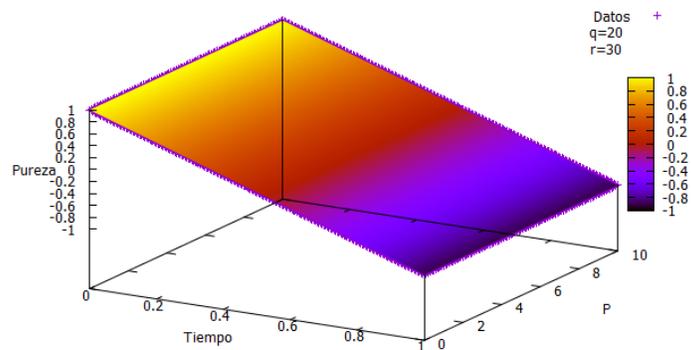


Figura 4.6: Pureza donde el valor de p cambia, $q=20$ y $r=30$ son fijos.

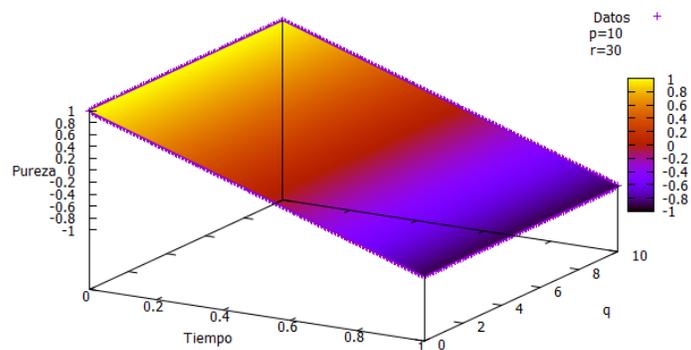


Figura 4.7: Pureza donde el valor de q cambia, $p=10$ y $r=30$ son fijos.

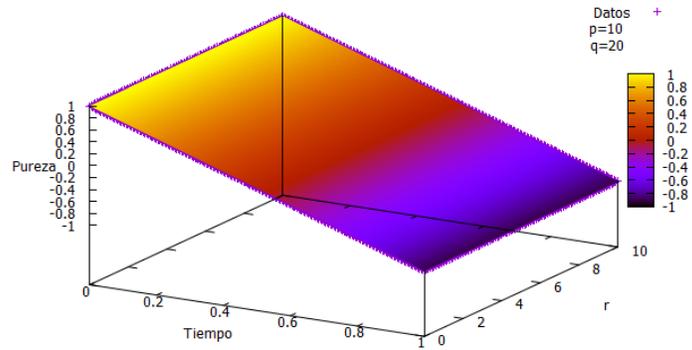


Figura 4.8: Pureza donde el valor de r cambia, $p=10$ y $q=20$ son fijos.

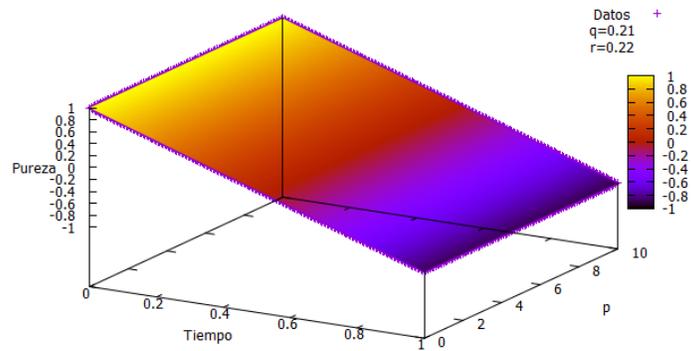


Figura 4.9: Pureza donde el valor de p cambia, $q=0.21$ y $r=0.22$ son fijos.

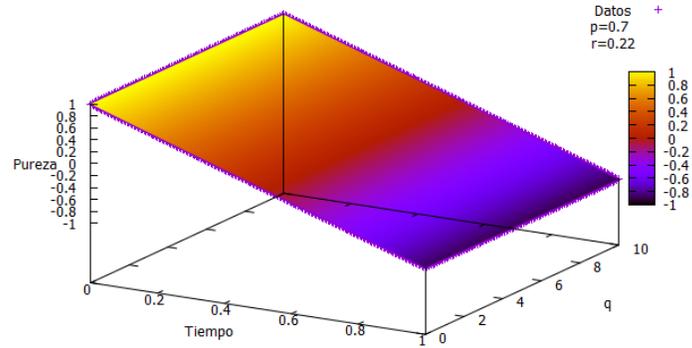


Figura 4.10: Pureza donde el valor de q cambia, $p=0.7$ y $r=0.22$ son fijos.

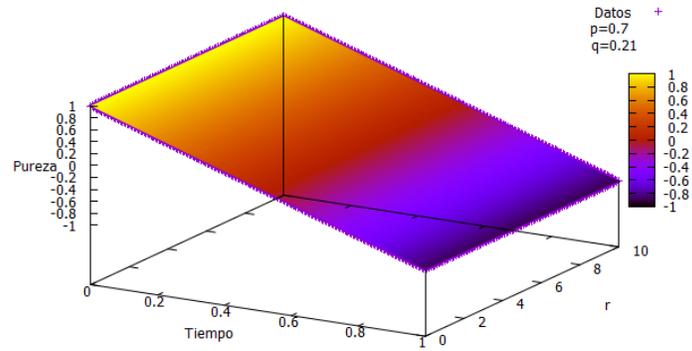


Figura 4.11: Pureza donde el valor de r cambia, $p=0.7$ y $q=0.21$ son fijos.

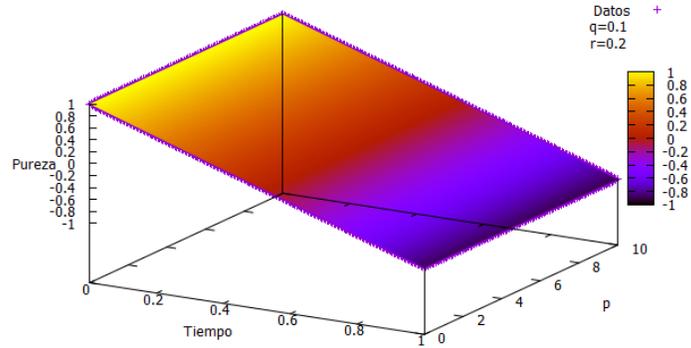


Figura 4.12: Pureza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.2$ son fijos.

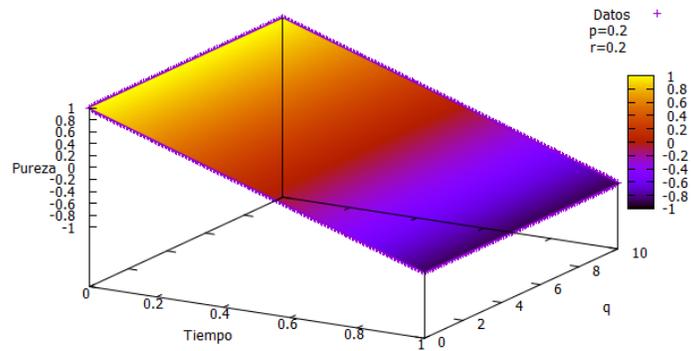


Figura 4.13: Pureza donde el valor de q cambia, $p=0.2$ y $r=0.2$ son fijos.

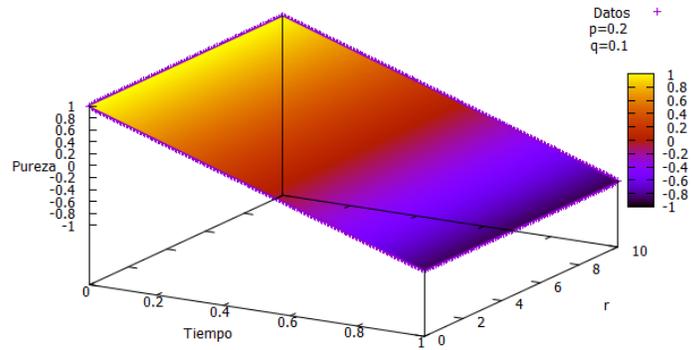


Figura 4.14: Pureza donde el valor de r cambia, $p=0.2$ y $q=0.1$ son fijos.

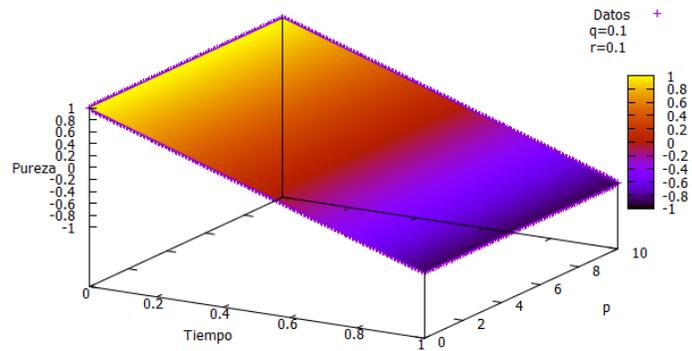


Figura 4.15: Pureza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.1$ son fijos.

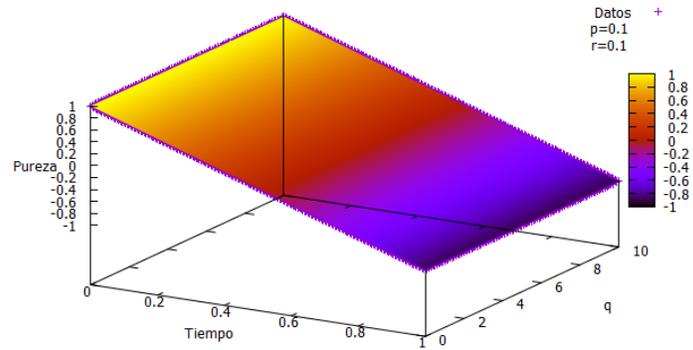


Figura 4.16: Pureza donde el valor de q cambia, $p=0.1$ y $r=0.1$ son fijos.

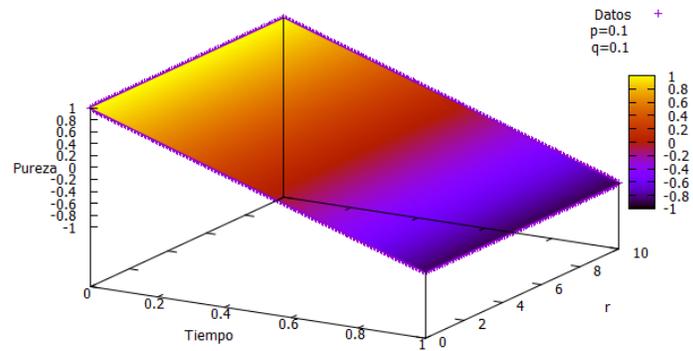


Figura 4.17: Pureza donde el valor de r cambia, $p=0.1$ y $q=0.1$ son fijos.

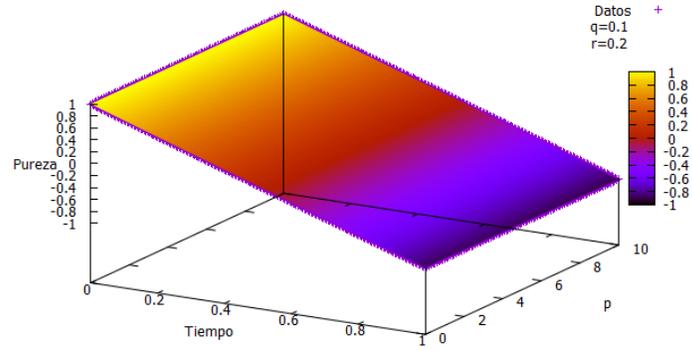


Figura 4.18: Pureza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.2$ son fijos.

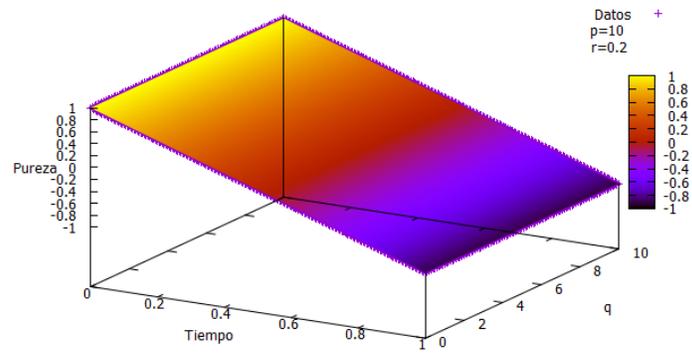


Figura 4.19: Pureza donde el valor de q cambia, $p=10$ y $r=0.2$ son fijos.

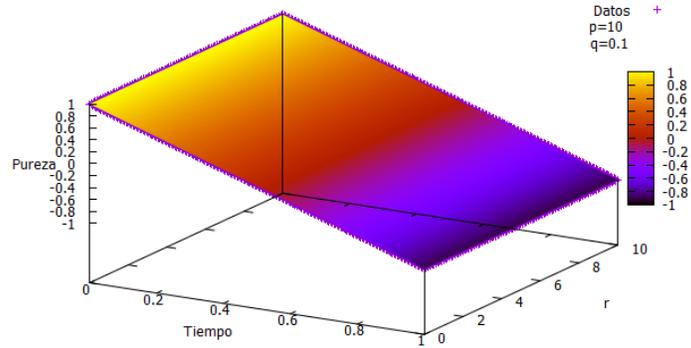


Figura 4.20: Pureza donde el valor de r cambia, $p=10$ y $q=0.1$ son fijos.

4.3. Cálculo de la traza

A continuación, se muestra el comportamiento del qubit con relación a la traza en un ambiente no controlado utilizando la ecuación 3.17, con valores aleatorios en p , q y r en el software Maple.

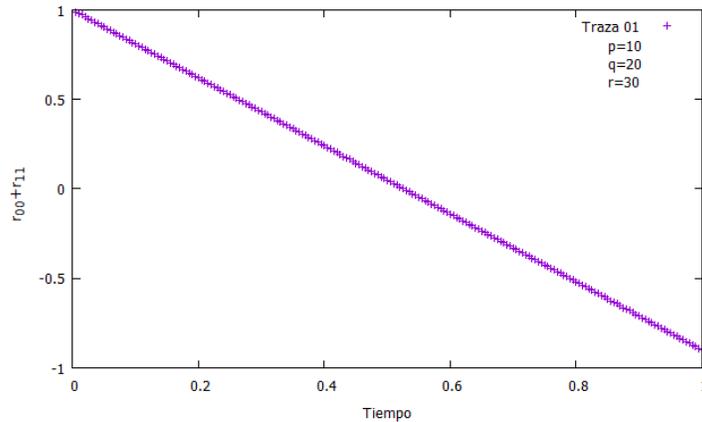


Figura 4.21: Traza con valores $p=10$, $q=20$ y $r=30$.

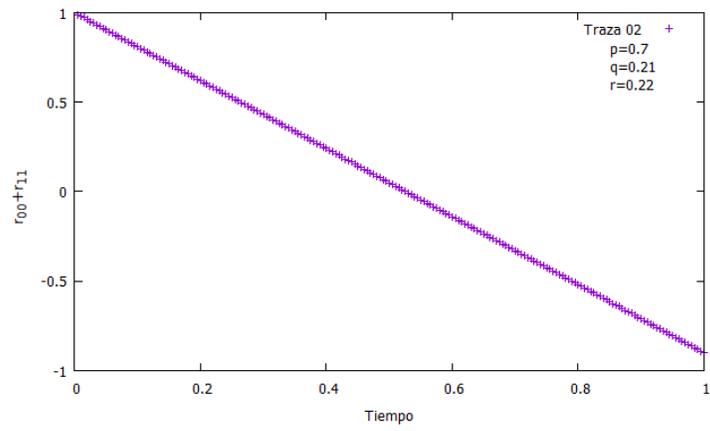


Figura 4.22: Traza con valores $p=0.7$, $q=0.21$ y $r=0.22$.

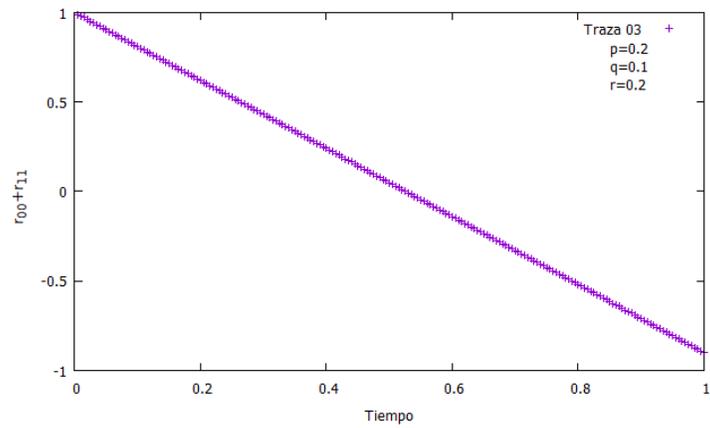


Figura 4.23: Traza con valores $p=0.2$, $q=0.1$ y $r=0.2$.

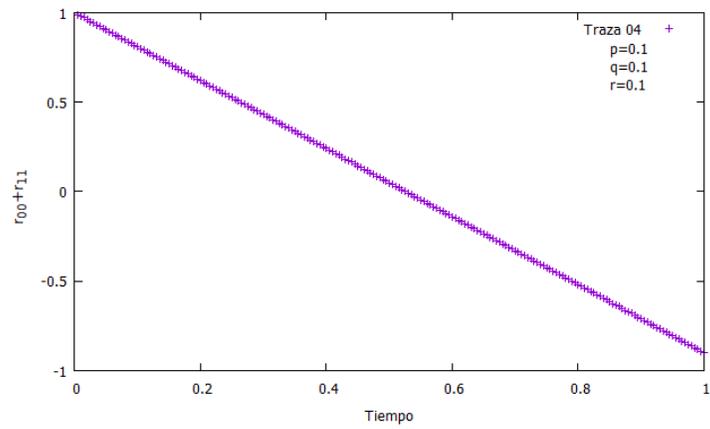


Figura 4.24: Traza con valores $p=0.1$, $q=0.1$ y $r=0.1$.

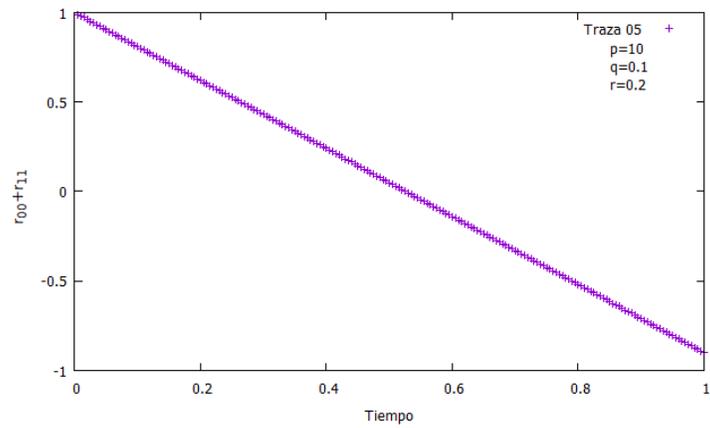


Figura 4.25: Traza con valores $p=10$, $q=0.1$ y $r=0.2$.

Finalizamos con las muestras en el comportamiento del qubit en la traza, con gráficas 3D utilizando la ecuación 3.17, calculando los valores de p , q y r donde una de estas variables cambia su valor mientras las dos restantes se establecerán como fijas.

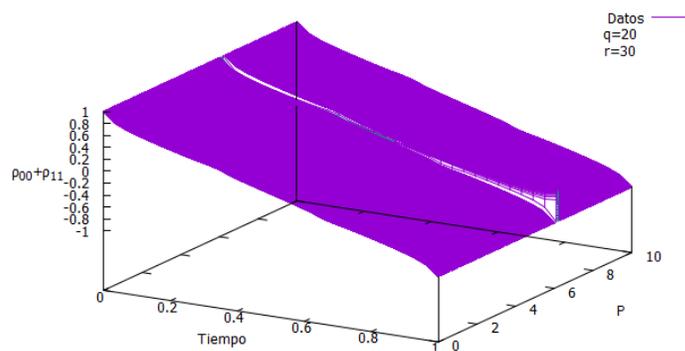


Figura 4.26: Traza donde el valor de p cambia, $q=20$ y $r=30$ son fijos.

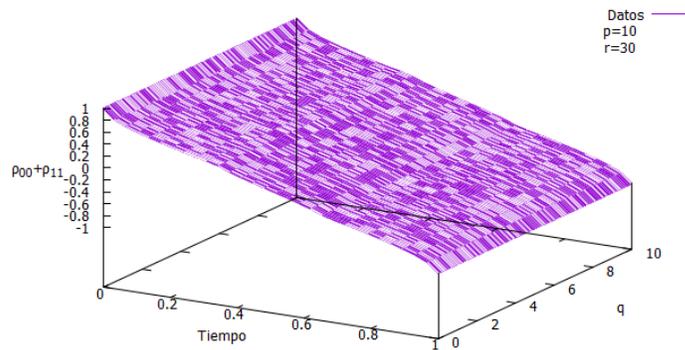


Figura 4.27: Traza donde el valor de q cambia, $p=10$ y $r=30$ son fijos.

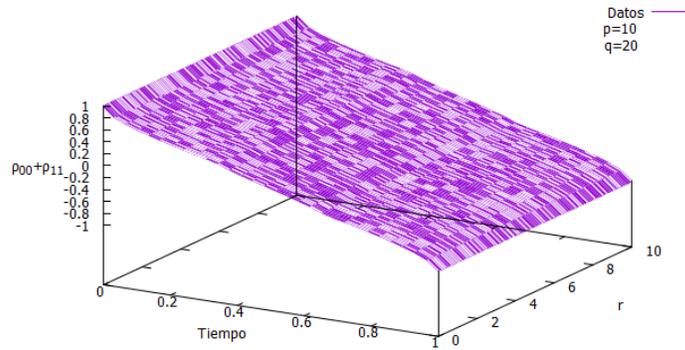


Figura 4.28: Traza donde el valor de r cambia, $p=10$ y $q=20$ son fijos.

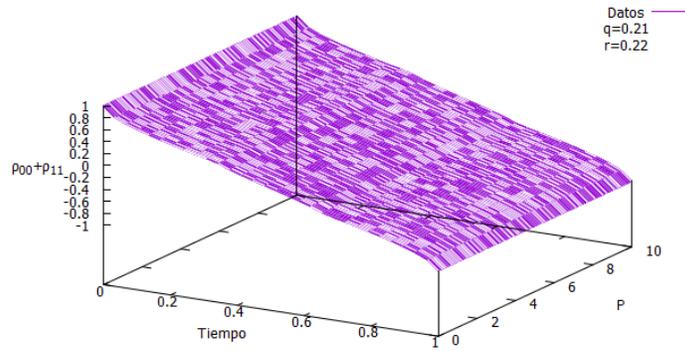


Figura 4.29: Traza donde el valor de p cambia, $q=0.21$ y $r=0.22$ son fijos.

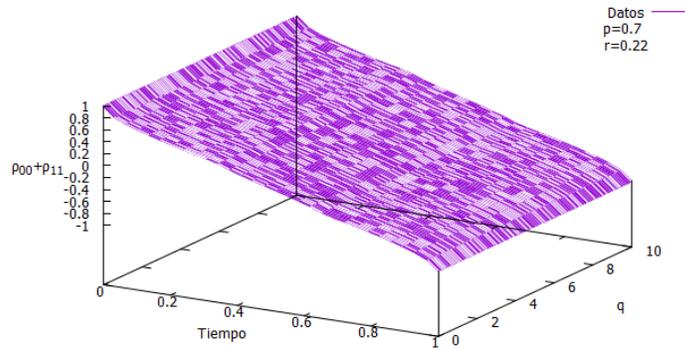


Figura 4.30: Traza donde el valor de q cambia, $p=0.7$ y $r=0.22$ son fijos.

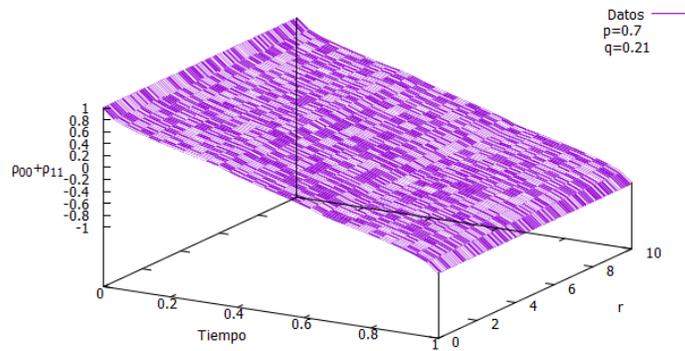


Figura 4.31: Traza donde el valor de r cambia, $p=0.7$ y $q=0.21$ son fijos.

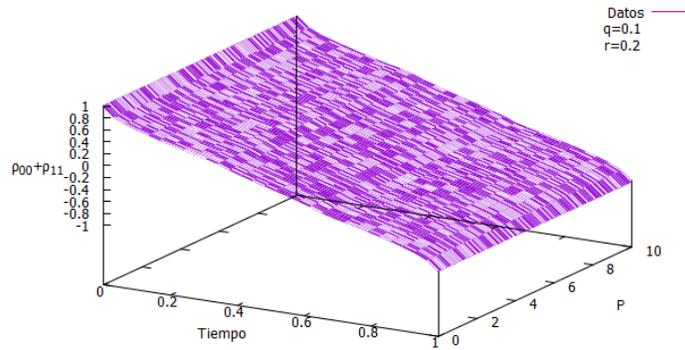


Figura 4.32: Traza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.2$ son fijos.

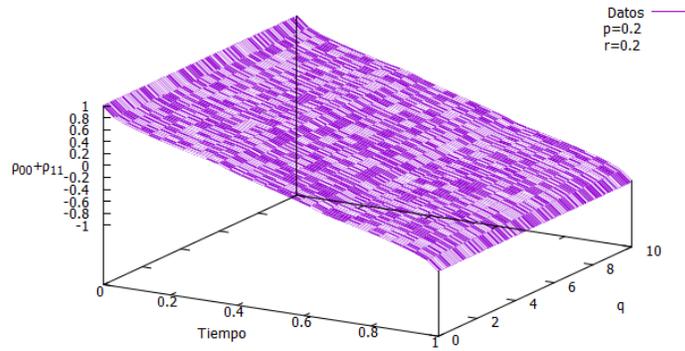


Figura 4.33: Traza donde el valor de q cambia, $p=0.2$ y $r=0.2$ son fijos.

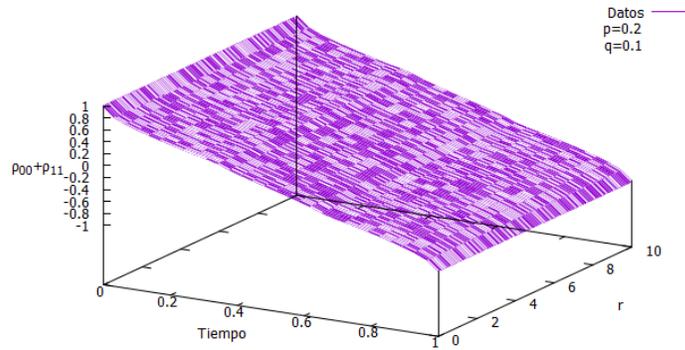


Figura 4.34: Traza donde el valor de r cambia, $p=0.2$ y $q=0.1$ son fijos.

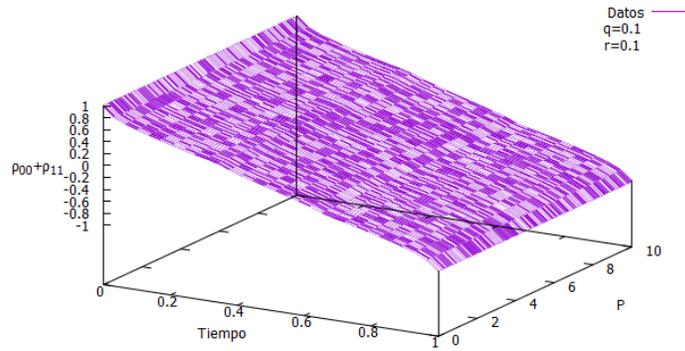


Figura 4.35: Traza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.1$ son fijos.

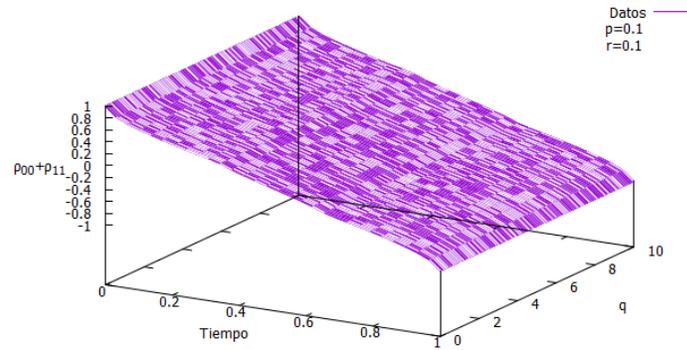


Figura 4.36: Traza donde el valor de q cambia, $p=0.1$ y $r=0.1$ son fijos.

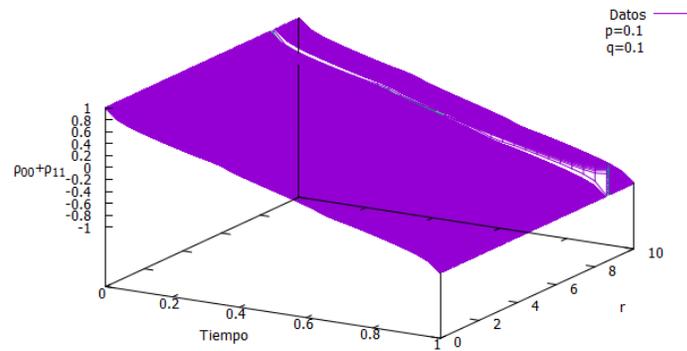


Figura 4.37: Traza donde el valor de r cambia, $p=0.1$ y $q=0.1$ son fijos.

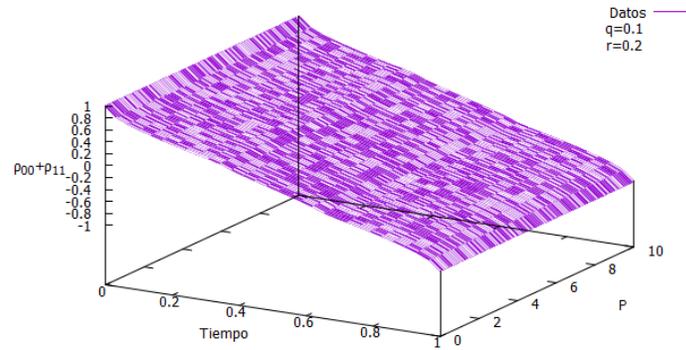


Figura 4.38: Traza donde el valor de p cambia, $q=0.1$ y $r=0.2$ son fijos.

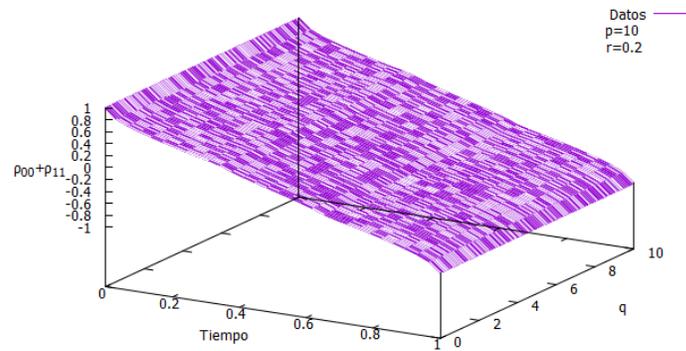


Figura 4.39: Traza donde el valor de q cambia, $p=10$ y $r=0.2$ son fijos.

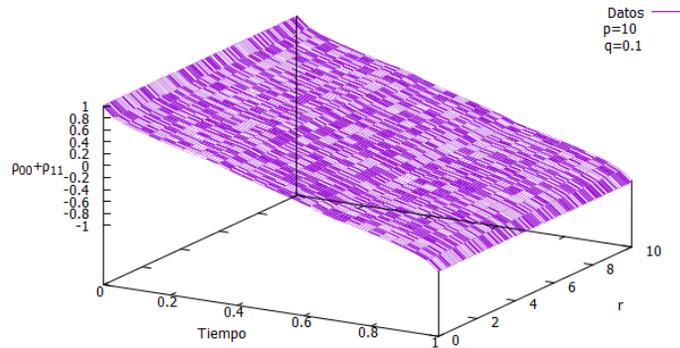


Figura 4.40: Traza donde el valor de r cambia, $p=10$ y $q=0.1$ son fijos.

4.4. Análisis de los datos obtenidos

Teniendo en cuenta las cinco gráficas 2D de la pureza con sus respectivas tablas que se pueden consultar en los anexos donde se encuentran los datos que se usaron para construir las mismas, estas muestran la pureza de un qubit, en todas las gráficas cuando el valor de $i=0.000$ se observó que en p , q y r siempre era 1 en cada una de ellas, pero conforme fue aumentando el valor de i el resultado se estaba acercando más a 0, al punto de que al llegar al valor de $i=0.530$ los resultados ya se volvieron negativos en todas las gráficas, observando que mientras los valores se movían más en el eje x , el cual representa el tiempo, la pureza deja de existir en el qubit. Mientras tanto en las quince gráficas 3D, los datos en la línea del tiempo representados por el eje x van de 0.0, 0.005, 0.010, 0.015 \dots 1 teniendo 200 puntos para graficar, pasando al eje y donde una de las variables de p , q y r va cambiando y las otras dos se mantienen fijas los valores van de 0.0, 0.1, 0.2, 0.3 \dots 10 donde se cuenta con un total de 101 puntos para graficar, en total se utilizaron

20,200 puntos en cada gráfica 3D, las cuales representan las cinco gráficas 2D intercalando los valores de p , q y r de igual forma también se puede observar que mientras más transcurre el tiempo la pureza tiende a disminuir.

Con lo que respecta a la traza se puede observar en las cinco gráficas 2D y sus tablas correspondientes que se encuentran en los anexos, al iniciar el valor de $i=0.000$ siempre el resultado es 1 para cada una de las gráficas, pero conforme va aumentando el valor de i el resultado se va acercando más a 0, se observó que al llegar a $i=0.530$ los resultados también se vuelven negativos en todas las gráficas, observando en esta sección que mientras más transcurre el tiempo (este representado por el eje x), la traza deja de existir en el qubit. También en estas quince gráficas 3D donde, el tiempo va de 0.0, 0.005, 0.010, 0.015 \dots 1, para así, tener 200 puntos para graficar en el eje x , en los cambios de p , q y r los valores van de 0.0, 0.1, 0.2, 0.3 \dots 10 en el eje y , para obtener 101 puntos para graficar, para así, tener un total de 20,200 puntos en cada gráfica 3D, de igual forma también se puede observar que mientras más transcurre el tiempo la traza tiende a disminuir.

4.5. Comparación con respecto al estado del arte

La pérdida de coherencia o decoherencia es causada por la interacción entre el sistema y su entorno, esto implica la supervivencia de sólo un pequeño subconjunto de estados de la totalidad que contiene el enorme espacio de Hilber. Un sistema cuántico macroscópico nunca se encuentra aislado de su entorno. La naturaleza de la interacción sistema-entorno permite que este último monitoree, sin perturbar, algunos estados del primero. Simultáneamente el sistema, que sí perturba al entorno, deja su huella sobre el mismo [Zurek, 1981].

En las últimas cuatro décadas, el papel del proceso de decoherencia en el mundo que nos rodea está establecida y muchas propiedades interesantes ya han sido comprendidas, ya se comprendió la naturaleza de las escalas temporales involucradas en el proceso de pérdida de coherencia y como el entorno influye en ello, algunos experimentos que pretenden encontrar la frontera entre lo cuántico y lo clásico están dando resultados. Una vez que el sistema cuántico realiza una interacción con su entorno, es decir, una vez que el sistema ha sido abierto, es la decoherencia quien previene la localización de la función de distribución y elimina estados.

Durante la medición, la superposición cuántica colapsa a una mezcla estadística de estados clásicos dando paso a que la pérdida de coherencia es instantánea. La interacción con el entorno destruye la pureza del sistema puesto que este último se entrelaza con el primero. Entonces, información que inicialmente está almacenada en el sistema se escapa hacia el entorno y por consiguiente la decoherencia está siempre acompañada por producción de entropía [Zurek and Paz, 1994].

Con la aparición de la decoherencia se ha avanzado mucho en el entendimiento del proceso de pérdida de coherencia de un sistema, pero actualmente no hay consenso acerca de si es posible comparar postulados, aunque se acepta que conceptualmente la medición no es nada más que otra evolución en el tiempo. Sin embargo, independientemente de esta cuestión, la decoherencia ya se ha ganado el status de herramienta fundamental para el entendimiento de la transición desde lo cuántico a lo clásico.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se enunciarán las conclusiones obtenidas, la justificación de dichas conclusiones y su relación con la pregunta de investigación, la hipótesis del trabajo y los objetivos perseguidos en esta investigación, además de las líneas de investigación que se pueden continuar.

5.1. Conclusiones

En esta investigación se analizó el problema relacionado con la decoherencia de un qubit en un ambiente no controlado utilizando como herramienta la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig. Transformando la ecuación N-Z de una ecuación íntegro diferencias a una ecuación diferencial de segundo orden para después realizar simulaciones con datos aleatorios, para así operar las variables de traza y pureza en función del tiempo en un qubit.

Usando la ecuación de traza y pureza en función del tiempo de un qubit se obtuvieron datos que sirvieron para evaluar su decaimiento en un ambiente no controlado, observando que los datos tienden a cero cuando la línea de tiempo se aleja del cero, estos resultados se reflejaron en gráficas 2D y 3D.

Los parámetros experimentales que se ajustaron más a la pureza y la traza fueron los más cercanos a cero en la línea del tiempo, entonces se observó que la decoherencia crece a medida que el tiempo transcurre, por lo tanto, el porcentaje de ruido en un qubit es proporcional al tiempo que transcurre.

Además, obtuvimos una ventaja significativa con la solución de la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig la cual se puede utilizar en otras investigaciones relacionadas con el universo cuántico relacionado con la decoherencia de un qubit en un ambiente no controlado.

Finalmente, la ecuación de Nakajima-Zwanzig fue una propuesta innovadora para poder saber el nivel de ruido que puede existir en un qubit en un ambiente no controlado y poder simular el comportamiento de este, ayudando a los investigadores teóricos para diversos cálculos relacionados con el mundo cuántico.

5.2. Trabajo futuro

Esta investigación cubrió en gran medida el estado del arte en el tema de la decoherencia de un qubit en un ambiente no controlado, utilizando la ecuación maestra de Nakajima-Zwanzig como base para el análisis; dejando una ecuación que ayudara en el análisis del ruido en el qubit en la rama de la informática cuántica, unos aspectos interesantes que se podrían analizar en trabajos futuros son los siguientes:

- Realizar investigación en la rama de la informática cuántica en el tema de las comunicaciones cuánticas.
- Comparar los resultados con nuevos métodos que se enfoquen en la decoherencia de un qubit.
- Realizar análisis más extensos con los datos aleatorios de p , q y r .
- La solución de la ecuación maestra de Nakajima-Zwansig ayudará a entender mejor la comunicación que existe entre los qubit.

Bibliografía

- [Agarwal, 1973] Agarwal, G. S. (1973). *Master Equation Methods in Quantum Optics*. North-Holland.
- [Alicki, 2007] Alicki, R. (2007). *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*. Springer.
- [Arriola, 2004] Arriola, V. (2004). *Computación Cuántica*. Facultad de Ciencias, UNAM.
- [Bengtsson, 2006] Bengtsson, I. (2006). *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press.
- [Bennett, 195] Bennett, C. (195). Fundamental physical limits of computation.
- [Bernan, 1999] Bernan, G. P. (1999). *Introduction to Quantum Computers*. Singapore: World Scientific. Springer.
- [Breuer, 2007] Breuer, H.-P. (2007). *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford.
- [Breuer and Petruccione, 2002] Breuer, H. P. and Petruccione, F. (2002). *Theory of open quantum systems*. Oxford University Press.

- [Brion, 2005] Brion, E. (2005). *Coherence proteccion by the quantum zeno effect Decoherence, Entanglement and Information Protection in Complex Quantum System*. Springer.
- [Dirac, 1947] Dirac, P. A. M. (1947). *The principles of quantum mechanics*. Clarendon.
- [Douglas, 1972] Douglas, R. G. (1972). *Algebra Techniques in Operator Theory*. Academic Press.
- [Everett, 1973] Everett, H. (1973). *The Many World Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton University Press.
- [Fannes, 2001] Fannes, K. (2001). *Quantum Dynamical Systems*. Oxford University Press.
- [Gillespie, 1976] Gillespie, D. T. (1976). *Introducción a la mecánica cuántica*. Reverté.
- [Haake, 1973] Haake, F. (1973). *Statistical Treatment of Open Systems by Generalized Master Equations*. Springer.
- [Haroche, 1998] Haroche, S. (1998). Decoherence and the quantum/classical boundary. *Physics Today*.
- [Hecht, 2005] Hecht, J. P. (2005). *Fundamentos de Computación Cuántica*. Universidad de Buenos Aires-Argentina.
- [Hewitt, 1995] Hewitt, P. (1995). *Física Conceptual*. Addison-Wesley.
- [Hirvensalo, 2001] Hirvensalo, M. (2001). *Quantum Computing*. Springer.

- [Joos, 2003] Joos, E. (2003). *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer.
- [Kitaev, 2002] Kitaev, A. Y. (2002). *Classical and Quantum Computation*. American Mathematical Society Providence.
- [McMahon, 2008] McMahon, D. (2008). *Quantum computing explained*. John Wiley and Sons.
- [Nielsen, 2010] Nielsen, M. A. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.
- [Orszag, 2008] Orszag, M. (2008). *Topics in Quantum Information Theory*. American Institute of Physics.
- [Pavicic, 2006] Pavicic, M. (2006). *Quantum Computation and Quantum Communication: Theory and Experiments*. Springer University of Zagreb.
- [Peña, 2003] Peña, L. (2003). La descripción cuántica es no local. la naturaleza es local. *Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*.
- [Peña, 2014] Peña, L. (2014). *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Fondo de Cultura Económica.
- [Ras, 2016] Ras, J. (2016). *Quantum Computing Systems*. LULU Press.
- [Sahni, 2007] Sahni, V. (2007). *Quantum Computing*. McGraw-Hill.
- [Sakurai, 1994] Sakurai, J. J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*. University of Hawaii.

- [Schlosshauer, 2008] Schlosshauer, M. (2008). *Decoherence and the quantum to classical transition*. Springer.
- [Tegmark and Wheeler, 2001] Tegmark, M. and Wheeler, J. A. (2001). 100 years of quantum mysteries. *Scientific American*.
- [Thomas, 2006] Thomas, J. R. (2006). *Cálculo*. Pearson.
- [Weiss, 2008] Weiss, U. (2008). *Quantum Dissipative Systems*. World Scientific.
- [Williams, 2011] Williams, C. (2011). *Explorations in Quantum Computing*. Springer.
- [Zurek, 1981] Zurek, W. H. (1981). *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?* Phys. Rev. D 24, 1516.
- [Zurek and Paz, 1994] Zurek, W. H. and Paz, J. P. (1994). *Decoherence, chaos, and the second law*. Phys. Rev. Lett 72, 2508.
- [Zygelman, 2018] Zygelman, B. (2018). *A First Introduction to Quantum Computing and Information*. University of Nevada.

Anexos

Anexo A

Datos de gráficas 2D

A.1. Pureza del qubit

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0.000 | 1.000000000000000000 | 0.115 | 0.781736556033146000 |
| 0.005 | 0.990500499895992000 | 0.120 | 0.772254993926331000 |
| 0.010 | 0.981001998334383000 | 0.125 | 0.762773790947103000 |
| 0.015 | 0.971504491569007000 | 0.130 | 0.753292899547015000 |
| 0.020 | 0.962007973367505000 | 0.135 | 0.743812271337058000 |
| 0.025 | 0.952512435026535000 | 0.140 | 0.734331857196296000 |
| 0.030 | 0.943017865391242000 | 0.145 | 0.724851607394978000 |
| 0.035 | 0.933524250878122000 | 0.150 | 0.715371471677337000 |
| 0.040 | 0.924031575514371000 | 0.155 | 0.705891399416966000 |
| 0.045 | 0.914539820976552000 | 0.160 | 0.696411339752220000 |
| 0.050 | 0.905048966632956000 | 0.165 | 0.686931241701841000 |
| 0.055 | 0.895558989592747000 | 0.170 | 0.677451054279753000 |
| 0.060 | 0.886069864746400000 | 0.175 | 0.667970726617237000 |
| 0.065 | 0.876581564844429000 | 0.180 | 0.658490208068240000 |
| 0.070 | 0.867094060564898000 | 0.185 | 0.649009448322650000 |
| 0.075 | 0.857607320580325000 | 0.190 | 0.639528397568037000 |
| 0.080 | 0.848121311629281000 | 0.195 | 0.630047006604934000 |
| 0.085 | 0.838635998594664000 | 0.200 | 0.620565226958597000 |
| 0.090 | 0.829151344569945000 | 0.205 | 0.611083010988846000 |
| 0.095 | 0.819667310976477000 | 0.210 | 0.601600312009806000 |
| 0.100 | 0.810183857657000000 | 0.215 | 0.592117084363715000 |

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0.230 | 0.563663791108792000 | 0.345 | 0.345256807624734000 |
| 0.235 | 0.554178017337433000 | 0.350 | 0.335748408318228000 |
| 0.240 | 0.544691506363478000 | 0.355 | 0.326238971325292000 |
| 0.245 | 0.535204221120102000 | 0.360 | 0.316728512509474000 |
| 0.250 | 0.525716126284434000 | 0.365 | 0.307217050103923000 |
| 0.255 | 0.516227188385908000 | 0.370 | 0.297704604680266000 |
| 0.260 | 0.506737375889354000 | 0.375 | 0.288191199102075000 |
| 0.265 | 0.497246659268786000 | 0.380 | 0.278676858433420000 |
| 0.270 | 0.487755011076779000 | 0.385 | 0.269161609889929000 |
| 0.275 | 0.478262406006148000 | 0.390 | 0.259645482786100000 |
| 0.280 | 0.468768820944069000 | 0.395 | 0.250128508477937000 |
| 0.285 | 0.459274235036365000 | 0.400 | 0.240610720266446000 |
| 0.290 | 0.449778629740057000 | 0.405 | 0.231092153374702000 |
| 0.295 | 0.440281988869062000 | 0.410 | 0.221572844818491000 |
| 0.300 | 0.430784298634422000 | 0.415 | 0.212052833288047000 |
| 0.305 | 0.421285547673263000 | 0.420 | 0.202532159070872000 |
| 0.310 | 0.411785727078484000 | 0.425 | 0.193010863971175000 |
| 0.315 | 0.402284830415840000 | 0.430 | 0.183488991225803000 |
| 0.320 | 0.392782853741593000 | 0.435 | 0.173966585370369000 |
| 0.325 | 0.383279795616760000 | 0.440 | 0.164443692212628000 |
| 0.330 | 0.373775657114598000 | 0.445 | 0.154920358669311000 |
| 0.335 | 0.364270441811060000 | 0.450 | 0.145396632604962000 |
| 0.340 | 0.354764155794021000 | 0.455 | 0.135872562735721000 |

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.460 | 0.126348198531104000 | 0.575 | -0.092677901163328100 |
| 0.465 | 0.116823590113883000 | 0.580 | -0.102194607000296000 |
| 0.470 | 0.107298788139008000 | 0.585 | -0.111710470510181000 |
| 0.475 | 0.097773843680107200 | 0.590 | -0.121225463188948000 |
| 0.480 | 0.088248808140054800 | 0.595 | -0.130739558617053000 |
| 0.485 | 0.078723733038197900 | 0.600 | -0.140252732581221000 |
| 0.490 | 0.069198669902021600 | 0.605 | -0.149764963130489000 |
| 0.495 | 0.059673670163578100 | 0.610 | -0.159276230613662000 |
| 0.500 | 0.050148785055553900 | 0.615 | -0.168786517714551000 |
| 0.505 | 0.040624065491358000 | 0.620 | -0.178295809488098000 |
| 0.510 | 0.031099561959367800 | 0.625 | -0.187804093391891000 |
| 0.515 | 0.021575324390023400 | 0.630 | -0.197311359344061000 |
| 0.520 | 0.012051401990047300 | 0.635 | -0.206817599739231000 |
| 0.525 | 0.002527843143676820 | 0.640 | -0.216322809456620000 |
| 0.530 | -0.006995304683979910 | 0.645 | -0.225826985867774000 |
| 0.535 | -0.016517995052437200 | 0.650 | -0.235330128831530000 |
| 0.540 | -0.026040182643120500 | 0.655 | -0.244832240719585000 |
| 0.545 | -0.035561823391246500 | 0.660 | -0.254333326405375000 |
| 0.550 | -0.045082874611462200 | 0.665 | -0.263833393244210000 |
| 0.555 | -0.054603295081578700 | 0.670 | -0.273332451056255000 |
| 0.560 | -0.064123045133936500 | 0.675 | -0.282830512079905000 |
| 0.565 | -0.073642086729900800 | 0.680 | -0.292327590969162000 |
| 0.570 | -0.083160383559309100 | 0.685 | -0.301823704759411000 |

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.690 | -0.311318872819322000 | 0.805 | -0.529520782170725000 |
| 0.695 | -0.320813116799427000 | 0.810 | -0.539003894705094000 |
| 0.700 | -0.330306460581027000 | 0.815 | -0.548487081909070000 |
| 0.705 | -0.339798930201863000 | 0.820 | -0.557970394222408000 |
| 0.710 | -0.349290553812491000 | 0.825 | -0.567453881775444000 |
| 0.715 | -0.358781361609541000 | 0.830 | -0.576937594268219000 |
| 0.720 | -0.368271385758615000 | 0.835 | -0.586421580852692000 |
| 0.725 | -0.377760660313901000 | 0.840 | -0.595905890015762000 |
| 0.730 | -0.387249221134999000 | 0.845 | -0.605390569453421000 |
| 0.735 | -0.396737105796959000 | 0.850 | -0.614875665957431000 |
| 0.740 | -0.406224353499861000 | 0.855 | -0.624361225303944000 |
| 0.745 | -0.415711004978898000 | 0.860 | -0.633847292143579000 |
| 0.750 | -0.425197102404307000 | 0.865 | -0.643333909894249000 |
| 0.755 | -0.434682689278633000 | 0.870 | -0.652821120637996000 |
| 0.760 | -0.444167810331741000 | 0.875 | -0.662308965014476000 |
| 0.765 | -0.453652511412036000 | 0.880 | -0.671797482123506000 |
| 0.770 | -0.463136839374904000 | 0.885 | -0.681286709431009000 |
| 0.775 | -0.472620841974041000 | 0.890 | -0.690776682677850000 |
| 0.780 | -0.482104567739532000 | 0.895 | -0.700267435794767000 |
| 0.785 | -0.491588065861099000 | 0.900 | -0.709759000816463000 |
| 0.790 | -0.501071386070622000 | 0.905 | -0.719251407807224000 |
| 0.795 | -0.510554578523725000 | 0.910 | -0.728744684789588000 |
| 0.800 | -0.520037693676582000 | 0.915 | -0.738238857675376000 |

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.920 | -0.747733950200092000 | 0.965 | -0.833233940581452000 |
| 0.925 | -0.757229983864989000 | 0.970 | -0.842739021893782000 |
| 0.930 | -0.766726977883964000 | 0.975 | -0.852245127734919000 |
| 0.935 | -0.776224949127763000 | 0.980 | -0.861752252830672000 |
| 0.940 | -0.785723912100884000 | 0.985 | -0.871260389419938000 |
| 0.945 | -0.795223878904549000 | 0.990 | -0.880769527275460000 |
| 0.950 | -0.804724859202484000 | 0.995 | -0.890279653704918000 |
| 0.955 | -0.814226860190579000 | 1.000 | -0.899790753610391000 |
| 0.960 | -0.823729886582019000 | | |

Tabla A.1: Valores de pureza en $p=10, q=20, r=30$.

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.000 | 1.000000000000000000 | 0.115 | 0.781764249361976000 |
| 0.005 | 0.990500499999105000 | 0.120 | 0.772287702794302000 |
| 0.010 | 0.981001999985668000 | 0.125 | 0.762812150019227000 |
| 0.015 | 0.971504499927439000 | 0.130 | 0.753337590508137000 |
| 0.020 | 0.962007999770663000 | 0.135 | 0.743864023710767000 |
| 0.025 | 0.952512499440088000 | 0.140 | 0.734391449055183000 |
| 0.030 | 0.943017998839151000 | 0.145 | 0.724919865947750000 |
| 0.035 | 0.933524497851241000 | 0.150 | 0.715449273773116000 |
| 0.040 | 0.924031996337212000 | 0.155 | 0.705979671894171000 |
| 0.045 | 0.914540494135903000 | 0.160 | 0.696511059652023000 |
| 0.050 | 0.905049991064447000 | 0.165 | 0.687043436365958000 |
| 0.055 | 0.895560486918296000 | 0.170 | 0.677576801333405000 |
| 0.060 | 0.886071981471238000 | 0.175 | 0.668111153829894000 |
| 0.065 | 0.876584474475423000 | 0.180 | 0.658646493109015000 |
| 0.070 | 0.867097965661378000 | 0.185 | 0.649182818402367000 |
| 0.075 | 0.857612454738022000 | 0.190 | 0.639720128919514000 |
| 0.080 | 0.848127941392674000 | 0.195 | 0.630258423847932000 |
| 0.085 | 0.838644425291069000 | 0.200 | 0.620797702352953000 |
| 0.090 | 0.829161906077358000 | 0.205 | 0.611337963577711000 |
| 0.095 | 0.819680383374114000 | 0.210 | 0.601879206643081000 |
| 0.100 | 0.810199856782332000 | 0.215 | 0.592421430647615000 |
| 0.105 | 0.800720325881427000 | 0.220 | 0.582964634671379000 |
| 0.110 | 0.791241790229229000 | 0.225 | 0.573508817776401000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.230 | 0.564053978992819000 | 0.345 | 0.346860080730633000 |
| 0.235 | 0.554600117328167000 | 0.350 | 0.337428367449635000 |
| 0.240 | 0.545147231767763000 | 0.355 | 0.327997600734829000 |
| 0.245 | 0.535695321274693000 | 0.360 | 0.318567779027655000 |
| 0.250 | 0.526244384789796000 | 0.365 | 0.309138900746163000 |
| 0.255 | 0.516794421231641000 | 0.370 | 0.299710964284927000 |
| 0.260 | 0.507345429496504000 | 0.375 | 0.290283968014965000 |
| 0.265 | 0.497897408458342000 | 0.380 | 0.280857910283650000 |
| 0.270 | 0.488450356968765000 | 0.385 | 0.271432789414623000 |
| 0.275 | 0.479004273857004000 | 0.390 | 0.262008603707699000 |
| 0.280 | 0.469559157929877000 | 0.395 | 0.252585351438778000 |
| 0.285 | 0.460115007971754000 | 0.400 | 0.243163030859742000 |
| 0.290 | 0.450671822744513000 | 0.405 | 0.233741640198362000 |
| 0.295 | 0.441229600987505000 | 0.410 | 0.224321177658656000 |
| 0.300 | 0.431788341417504000 | 0.415 | 0.214901641437258000 |
| 0.305 | 0.422348042728662000 | 0.420 | 0.205483029694922000 |
| 0.310 | 0.412908703592459000 | 0.425 | 0.196065340558621000 |
| 0.315 | 0.403470322657650000 | 0.430 | 0.186648572131564000 |
| 0.320 | 0.394032898550210000 | 0.435 | 0.177232722493149000 |
| 0.325 | 0.384596429873278000 | 0.440 | 0.167817789698905000 |
| 0.330 | 0.375160915207095000 | 0.445 | 0.158403771780442000 |
| 0.335 | 0.365726353108939000 | 0.450 | 0.148990666745386000 |
| 0.340 | 0.356292742113065000 | 0.455 | 0.139578472577326000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.460 | 0.130167187235741000 | 0.575 | -0.086046599097561400 |
| 0.465 | 0.120756808655942000 | 0.580 | -0.095436748780674000 |
| 0.470 | 0.111347334749002000 | 0.585 | -0.104826048718915000 |
| 0.475 | 0.101938763401683000 | 0.590 | -0.114214501609619000 |
| 0.480 | 0.092531092476364300 | 0.595 | -0.123602110176841000 |
| 0.485 | 0.083124319810969200 | 0.600 | -0.132988877171476000 |
| 0.490 | 0.073718443218883600 | 0.605 | -0.142374805371401000 |
| 0.495 | 0.064313460488877600 | 0.610 | -0.151759897581135000 |
| 0.500 | 0.054909369385023100 | 0.615 | -0.161144156606700000 |
| 0.505 | 0.045506167646607500 | 0.620 | -0.170527585297313000 |
| 0.510 | 0.036103852988047500 | 0.625 | -0.179910186545721000 |
| 0.515 | 0.026702423098798400 | 0.630 | -0.189291963271008000 |
| 0.520 | 0.017301875643262600 | 0.635 | -0.198672918418680000 |
| 0.525 | 0.007902208260694240 | 0.640 | -0.208053054960749000 |
| 0.530 | -0.001496581434896850 | 0.645 | -0.217432375895821000 |
| 0.535 | -0.010894495854845000 | 0.650 | -0.226810884249185000 |
| 0.540 | -0.020291537435930300 | 0.655 | -0.236188583072906000 |
| 0.545 | -0.029687708640482200 | 0.660 | -0.245565475445916000 |
| 0.550 | -0.039083011956486000 | 0.665 | -0.254941564474111000 |
| 0.555 | -0.048477449897691600 | 0.670 | -0.264316853290448000 |
| 0.560 | -0.057871025003724300 | 0.675 | -0.273691345055047000 |
| 0.565 | -0.067263739840197600 | 0.680 | -0.283065042955292000 |
| 0.570 | -0.076655596998830000 | 0.685 | -0.292437950205932000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.690 | -0.301810070049192000 | 0.805 | -0.517159379164450000 |
| 0.695 | -0.311181405754877000 | 0.810 | -0.526513647385635000 |
| 0.700 | -0.320551960620485000 | 0.815 | -0.535867218534696000 |
| 0.705 | -0.329921737971316000 | 0.820 | -0.545220096600165000 |
| 0.710 | -0.339290741160589000 | 0.825 | -0.554572285575007000 |
| 0.715 | -0.348658973569556000 | 0.830 | -0.563923789526336000 |
| 0.720 | -0.358026438607623000 | 0.835 | -0.573274612555136000 |
| 0.725 | -0.367393139712465000 | 0.840 | -0.582624758792218000 |
| 0.730 | -0.376759080350152000 | 0.845 | -0.591974232398332000 |
| 0.735 | -0.386124264015275000 | 0.850 | -0.601323037564268000 |
| 0.740 | -0.395488694231064000 | 0.855 | -0.610671178510971000 |
| 0.745 | -0.404852374549525000 | 0.860 | -0.620018659489650000 |
| 0.750 | -0.414215308551563000 | 0.865 | -0.629365484781892000 |
| 0.755 | -0.423577499847116000 | 0.870 | -0.638711658699779000 |
| 0.760 | -0.432938952075291000 | 0.875 | -0.648057185585998000 |
| 0.765 | -0.442299668904496000 | 0.880 | -0.657402069813967000 |
| 0.770 | -0.451659654032578000 | 0.885 | -0.666746315787946000 |
| 0.775 | -0.461018911186965000 | 0.890 | -0.676089927943167000 |
| 0.780 | -0.470377444124802000 | 0.895 | -0.685432910745947000 |
| 0.785 | -0.479735256633100000 | 0.900 | -0.694775268693821000 |
| 0.790 | -0.489092352528875000 | 0.905 | -0.704117006315659000 |
| 0.795 | -0.498448735659300000 | 0.910 | -0.713458128171802000 |
| 0.800 | -0.507804409901849000 | 0.915 | -0.722798638854181000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.920 | -0.732138542986454000 | 0.965 | -0.816171164200896000 |
| 0.925 | -0.741477845224136000 | 0.970 | -0.825505264208455000 |
| 0.930 | -0.750816550254729000 | 0.975 | -0.834838810658544000 |
| 0.935 | -0.760154662797858000 | 0.980 | -0.844171808566161000 |
| 0.940 | -0.769492187605408000 | 0.985 | -0.853504262979844000 |
| 0.945 | -0.778829129461659000 | 0.990 | -0.862836178981820000 |
| 0.950 | -0.788165493183424000 | 0.995 | -0.872167561688153000 |
| 0.955 | -0.797501283620191000 | 1.000 | -0.881498416248898000 |
| 0.960 | -0.806836505654262000 | | |

Tabla A.2: Valores de pureza en $p=0.7, q=0.21, r=0.22$.

| valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.000 | 1.000000000000000000 | 0.115 | 0.781764325228739000 |
| 0.005 | 0.990500499999375000 | 0.120 | 0.772287792784195000 |
| 0.010 | 0.981001999990000000 | 0.125 | 0.762812256019453000 |
| 0.015 | 0.971504499949375000 | 0.130 | 0.753337714567213000 |
| 0.020 | 0.962007999840001000 | 0.135 | 0.743864168045223000 |
| 0.025 | 0.952512499609377000 | 0.140 | 0.734391616056291000 |
| 0.030 | 0.943017999190065000 | 0.145 | 0.724920058188286000 |
| 0.035 | 0.933524498500057000 | 0.150 | 0.715449494014144000 |
| 0.040 | 0.924031997442081000 | 0.155 | 0.705979923091867000 |
| 0.045 | 0.914540495903748000 | 0.160 | 0.696511344964534000 |
| 0.050 | 0.905049993757621000 | 0.165 | 0.687043759160303000 |
| 0.055 | 0.895560490861230000 | 0.170 | 0.677577165192411000 |
| 0.060 | 0.886071987057077000 | 0.175 | 0.668111562559183000 |
| 0.065 | 0.876584482172641000 | 0.180 | 0.658646950744033000 |
| 0.070 | 0.867097976020384000 | 0.185 | 0.649183329215467000 |
| 0.075 | 0.857612468397757000 | 0.190 | 0.639720697427089000 |
| 0.080 | 0.848127959087209000 | 0.195 | 0.630259054817600000 |
| 0.085 | 0.838644447856187000 | 0.200 | 0.620798400810808000 |
| 0.090 | 0.829161934457147000 | 0.205 | 0.611338734815625000 |
| 0.095 | 0.819680418627555000 | 0.210 | 0.601880056226070000 |
| 0.100 | 0.810199900089896000 | 0.215 | 0.592422364421278000 |
| 0.105 | 0.800720378551677000 | 0.220 | 0.582965658765498000 |
| 0.110 | 0.791241853705435000 | 0.225 | 0.573509938608094000 |

| valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.230 | 0.564055203283554000 | 0.345 | 0.346866352062675000 |
| 0.235 | 0.554601452111485000 | 0.350 | 0.337435014479427000 |
| 0.240 | 0.545148684396623000 | 0.355 | 0.328004640268510000 |
| 0.245 | 0.535696899428827000 | 0.360 | 0.318575228379396000 |
| 0.250 | 0.526246096483090000 | 0.365 | 0.309146777746906000 |
| 0.255 | 0.516796274819533000 | 0.370 | 0.299719287291228000 |
| 0.260 | 0.507347433683413000 | 0.375 | 0.290292755917918000 |
| 0.265 | 0.497899572305120000 | 0.380 | 0.280867182517914000 |
| 0.270 | 0.488452689900184000 | 0.385 | 0.271442565967545000 |
| 0.275 | 0.479006785669271000 | 0.390 | 0.262018905128539000 |
| 0.280 | 0.469561858798189000 | 0.395 | 0.252596198848034000 |
| 0.285 | 0.460117908459297000 | 0.400 | 0.243174445958582000 |
| 0.290 | 0.450674933811980000 | 0.405 | 0.233753645278166000 |
| 0.295 | 0.441232933997217000 | 0.410 | 0.224333795610200000 |
| 0.300 | 0.431791908141035000 | 0.415 | 0.214914895743545000 |
| 0.305 | 0.422351855354686000 | 0.420 | 0.205496944452513000 |
| 0.310 | 0.412912774734667000 | 0.425 | 0.196079940496877000 |
| 0.315 | 0.403474665362723000 | 0.430 | 0.186663882621878000 |
| 0.320 | 0.394037526305860000 | 0.435 | 0.177248769558238000 |
| 0.325 | 0.384601356616360000 | 0.440 | 0.167834600022160000 |
| 0.330 | 0.375166155331784000 | 0.445 | 0.158421372715344000 |
| 0.335 | 0.365731921474986000 | 0.450 | 0.149009086324991000 |
| 0.340 | 0.356298654054126000 | 0.455 | 0.139597739523811000 |

| valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.460 | 0.130187330970030000 | 0.575 | -0.085996411299440400 |
| 0.465 | 0.120777859307402000 | 0.580 | -0.095384741920306900 |
| 0.470 | 0.111369323165210000 | 0.585 | -0.104772172518052000 |
| 0.475 | 0.101961721158279000 | 0.590 | -0.114158704808363000 |
| 0.480 | 0.092555051886980700 | 0.595 | -0.123544340520997000 |
| 0.485 | 0.083149313937240700 | 0.600 | -0.132929081399767000 |
| 0.490 | 0.073744505880546900 | 0.605 | -0.142312929202527000 |
| 0.495 | 0.064340626273955200 | 0.610 | -0.151695885701160000 |
| 0.500 | 0.054937673660097400 | 0.615 | -0.161077952681557000 |
| 0.505 | 0.045535646567187600 | 0.620 | -0.170459131943609000 |
| 0.510 | 0.036134543509028800 | 0.625 | -0.179839425301188000 |
| 0.515 | 0.026734362985020200 | 0.630 | -0.189218834582135000 |
| 0.520 | 0.017335103480163100 | 0.635 | -0.198597361628245000 |
| 0.525 | 0.007936763465067350 | 0.640 | -0.207975008295253000 |
| 0.530 | -0.001460658604041790 | 0.645 | -0.217351776452819000 |
| 0.535 | -0.010857164285317900 | 0.650 | -0.226727667984516000 |
| 0.540 | -0.020252755151287100 | 0.655 | -0.236102684787812000 |
| 0.545 | -0.029647432787031900 | 0.660 | -0.245476828774061000 |
| 0.550 | -0.039041198786150400 | 0.665 | -0.254850101868487000 |
| 0.555 | -0.048434054764371100 | 0.670 | -0.264222506010169000 |
| 0.560 | -0.057826002352635000 | 0.675 | -0.273594043152030000 |
| 0.565 | -0.067217043196045100 | 0.680 | -0.282964715260823000 |
| 0.570 | -0.076607178953852800 | 0.685 | -0.292334524317114000 |

| valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.690 | -0.301703472315276000 | 0.805 | -0.516956416591027000 |
| 0.695 | -0.311071561263467000 | 0.810 | -0.526305333167476000 |
| 0.700 | -0.320438793183626000 | 0.815 | -0.535653442993820000 |
| 0.705 | -0.329805170111450000 | 0.820 | -0.545000748409686000 |
| 0.710 | -0.339170694096390000 | 0.825 | -0.554347251770995000 |
| 0.715 | -0.348535367201634000 | 0.830 | -0.563692955455367000 |
| 0.720 | -0.357899191504094000 | 0.835 | -0.573037861853602000 |
| 0.725 | -0.367262169094394000 | 0.840 | -0.582381973369666000 |
| 0.730 | -0.376624302076858000 | 0.845 | -0.591725292420664000 |
| 0.735 | -0.385985592569497000 | 0.850 | -0.601067821436825000 |
| 0.740 | -0.395346042703996000 | 0.855 | -0.610409562861479000 |
| 0.745 | -0.404705654625702000 | 0.860 | -0.619750519151039000 |
| 0.750 | -0.414064430493613000 | 0.865 | -0.629090692774978000 |
| 0.755 | -0.423422372480364000 | 0.870 | -0.638430086215810000 |
| 0.760 | -0.432779482772216000 | 0.875 | -0.647768701969074000 |
| 0.765 | -0.442135763569045000 | 0.880 | -0.657106542543309000 |
| 0.770 | -0.451491217084326000 | 0.885 | -0.666443610460035000 |
| 0.775 | -0.460845845545128000 | 0.890 | -0.675779908253736000 |
| 0.780 | -0.470199651192095000 | 0.895 | -0.685115438471840000 |
| 0.785 | -0.479552636279439000 | 0.900 | -0.694450203674697000 |
| 0.790 | -0.488904803074928000 | 0.905 | -0.703784206435560000 |
| 0.795 | -0.498256153859873000 | 0.910 | -0.713117449340571000 |
| 0.800 | -0.507606690929118000 | 0.915 | -0.722449934988732000 |

| valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=0.2, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.920 | -0.731781665991895000 | 0.965 | -0.815733723285226000 |
| 0.925 | -0.741112644974738000 | 0.970 | -0.825058054302793000 |
| 0.930 | -0.750442874574747000 | 0.975 | -0.834381660248154000 |
| 0.935 | -0.759772357442196000 | 0.980 | -0.843704543885844000 |
| 0.940 | -0.769101096240131000 | 0.985 | -0.853026707993002000 |
| 0.945 | -0.778429093644349000 | 0.990 | -0.862348155359349000 |
| 0.950 | -0.787756352343379000 | 0.995 | -0.871668888787177000 |
| 0.955 | -0.797082875038464000 | 1.000 | -0.880988911091324000 |
| 0.960 | -0.806408664443541000 | | |

Tabla A.3: Valores de pureza en $p=0.2, q=0.1, r=0.2$.

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.000 | 1.000000000000000000 | 0.115 | 0.781764383448152000 |
| 0.005 | 0.990500499999583000 | 0.120 | 0.772287861815402000 |
| 0.010 | 0.981001999993333000 | 0.125 | 0.762812337302640000 |
| 0.015 | 0.971504499966250000 | 0.130 | 0.753337809665015000 |
| 0.020 | 0.962007999893334000 | 0.135 | 0.743864278647703000 |
| 0.025 | 0.952512499739585000 | 0.140 | 0.734391743985911000 |
| 0.030 | 0.943017999460023000 | 0.145 | 0.724920205404879000 |
| 0.035 | 0.933524498999807000 | 0.150 | 0.715449662619882000 |
| 0.040 | 0.924031998294012000 | 0.155 | 0.705980115336230000 |
| 0.045 | 0.914540497267676000 | 0.160 | 0.696511563249273000 |
| 0.050 | 0.905049995835821000 | 0.165 | 0.687044006044405000 |
| 0.055 | 0.895560493903463000 | 0.170 | 0.677577443397062000 |
| 0.060 | 0.886071991365610000 | 0.175 | 0.668111874972728000 |
| 0.065 | 0.876584488107263000 | 0.180 | 0.658647300426933000 |
| 0.070 | 0.867097984003421000 | 0.185 | 0.649183719405262000 |
| 0.075 | 0.857612478919084000 | 0.190 | 0.639721131543350000 |
| 0.080 | 0.848127972709253000 | 0.195 | 0.630259536466891000 |
| 0.085 | 0.838644465218932000 | 0.200 | 0.620798933791635000 |
| 0.090 | 0.829161956283134000 | 0.205 | 0.611339323123393000 |
| 0.095 | 0.819680445726879000 | 0.210 | 0.601880704058039000 |
| 0.100 | 0.810199933365199000 | 0.215 | 0.592423076181513000 |
| 0.105 | 0.800720419003141000 | 0.220 | 0.582966439069821000 |
| 0.110 | 0.791241902435765000 | 0.225 | 0.573510792289041000 |

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.230 | 0.564056135395321000 | 0.345 | 0.346871066689883000 |
| 0.235 | 0.554602467934886000 | 0.350 | 0.337440008178403000 |
| 0.240 | 0.545149789444036000 | 0.355 | 0.328009925240583000 |
| 0.245 | 0.535698099449150000 | 0.360 | 0.318580817175694000 |
| 0.250 | 0.526247397466692000 | 0.365 | 0.309152683273204000 |
| 0.255 | 0.516797683003205000 | 0.370 | 0.299725522812792000 |
| 0.260 | 0.50734895555323000 | 0.375 | 0.290299335064346000 |
| 0.265 | 0.497901214609765000 | 0.380 | 0.280874119287971000 |
| 0.270 | 0.488454459643345000 | 0.385 | 0.271449874733997000 |
| 0.275 | 0.479008690122965000 | 0.390 | 0.262026600642980000 |
| 0.280 | 0.469563905505628000 | 0.395 | 0.252604296245712000 |
| 0.285 | 0.460120105238885000 | 0.400 | 0.243182960763225000 |
| 0.290 | 0.450677288760990000 | 0.405 | 0.233762593406795000 |
| 0.295 | 0.441235455499163000 | 0.410 | 0.224343193377947000 |
| 0.300 | 0.431794604870697000 | 0.415 | 0.214924759868466000 |
| 0.305 | 0.422354736283019000 | 0.420 | 0.205507292060396000 |
| 0.310 | 0.412915849133696000 | 0.425 | 0.196090789126049000 |
| 0.315 | 0.403477942810439000 | 0.430 | 0.186675250228011000 |
| 0.320 | 0.394041016691112000 | 0.435 | 0.177260674519144000 |
| 0.325 | 0.384605070143733000 | 0.440 | 0.167847061142596000 |
| 0.330 | 0.375170102526486000 | 0.445 | 0.158434409231804000 |
| 0.335 | 0.365736113187717000 | 0.450 | 0.149022717910500000 |
| 0.340 | 0.356303101465949000 | 0.455 | 0.139611986292715000 |

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.460 | 0.130202213482790000 | 0.575 | -0.085960134611018400 |
| 0.465 | 0.120793398575373000 | 0.580 | -0.095347189819161300 |
| 0.470 | 0.111385540655432000 | 0.585 | -0.104733311743179000 |
| 0.475 | 0.101978638798258000 | 0.590 | -0.114118501528738000 |
| 0.480 | 0.092572692069468600 | 0.595 | -0.123502760330974000 |
| 0.485 | 0.083167699525016300 | 0.600 | -0.132886089314475000 |
| 0.490 | 0.073763660211193000 | 0.605 | -0.142268489653281000 |
| 0.495 | 0.064360573164635200 | 0.610 | -0.151649962530869000 |
| 0.500 | 0.054958437412330000 | 0.615 | -0.161030509140145000 |
| 0.505 | 0.045557251971620500 | 0.620 | -0.170410130683439000 |
| 0.510 | 0.036157015850211400 | 0.625 | -0.179788828372492000 |
| 0.515 | 0.026757728046174600 | 0.630 | -0.189166603428449000 |
| 0.520 | 0.017359387547954400 | 0.635 | -0.198543457081852000 |
| 0.525 | 0.007961993334373640 | 0.640 | -0.207919390572627000 |
| 0.530 | -0.001434455625361430 | 0.645 | -0.217294405150078000 |
| 0.535 | -0.010829960371655200 | 0.650 | -0.226668502072879000 |
| 0.540 | -0.020224521954517000 | 0.655 | -0.236041682609062000 |
| 0.545 | -0.029618141432968000 | 0.660 | -0.245413948036012000 |
| 0.550 | -0.039010819873723100 | 0.665 | -0.254785299640455000 |
| 0.555 | -0.048402558355610400 | 0.670 | -0.264155738718451000 |
| 0.560 | -0.057793357967320800 | 0.675 | -0.273525266575385000 |
| 0.565 | -0.067183219807063000 | 0.680 | -0.282893884525958000 |
| 0.570 | -0.076572144982555900 | 0.685 | -0.292261593894178000 |

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.690 | -0.301628396013351000 | 0.805 | -0.516817648922856000 |
| 0.695 | -0.310994292226072000 | 0.810 | -0.526163101078275000 |
| 0.700 | -0.320359283884220000 | 0.815 | -0.535507682313555000 |
| 0.705 | -0.329723372348942000 | 0.820 | -0.544851394197596000 |
| 0.710 | -0.339086558990650000 | 0.825 | -0.554194238309291000 |
| 0.715 | -0.348448845189010000 | 0.830 | -0.563536216239324000 |
| 0.720 | -0.357810232332935000 | 0.835 | -0.572877329587327000 |
| 0.725 | -0.367170721820574000 | 0.840 | -0.582217579961877000 |
| 0.730 | -0.376530315059303000 | 0.845 | -0.591556968980472000 |
| 0.735 | -0.385889013465718000 | 0.850 | -0.600895498269530000 |
| 0.740 | -0.395246818465626000 | 0.855 | -0.610233169464370000 |
| 0.745 | -0.404603731494034000 | 0.860 | -0.619569984209202000 |
| 0.750 | -0.413959753995145000 | 0.865 | -0.628905944157116000 |
| 0.755 | -0.423314887422343000 | 0.870 | -0.638241050970069000 |
| 0.760 | -0.432669133238189000 | 0.875 | -0.647575306318873000 |
| 0.765 | -0.442022492914409000 | 0.880 | -0.656908711883182000 |
| 0.770 | -0.451374967931888000 | 0.885 | -0.666241269351481000 |
| 0.775 | -0.460726559780659000 | 0.890 | -0.675572980421075000 |
| 0.780 | -0.470077269959897000 | 0.895 | -0.684903846798076000 |
| 0.785 | -0.479427099977906000 | 0.900 | -0.694233870197389000 |
| 0.790 | -0.488776051352114000 | 0.905 | -0.703563052342703000 |
| 0.795 | -0.498124125609061000 | 0.910 | -0.712891394966478000 |
| 0.800 | -0.507471324284394000 | 0.915 | -0.722218899809932000 |

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.920 | -0.731545568623029000 | 0.965 | -0.815448259633132000 |
| 0.925 | -0.740871403164470000 | 0.970 | -0.824766666306373000 |
| 0.930 | -0.750196405201675000 | 0.975 | -0.834084256772702000 |
| 0.935 | -0.759520576510778000 | 0.980 | -0.843401032886103000 |
| 0.940 | -0.768843918876608000 | 0.985 | -0.852716996509153000 |
| 0.945 | -0.778166434092684000 | 0.990 | -0.862032149513003000 |
| 0.950 | -0.787488123961197000 | 0.995 | -0.871346493777373000 |
| 0.955 | -0.796808990293000000 | 1.000 | -0.880660031190534000 |
| 0.960 | -0.806129034907597000 | | |

Tabla A.4: Valores de pureza en $p=0.1, q=0.1, r=0.1$.

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0.000 | 1.000000000000000000 | 0.115 | 0.781764273958356000 |
| 0.005 | 0.990500499999433000 | 0.120 | 0.772287726656864000 |
| 0.010 | 0.981001999990210000 | 0.125 | 0.762812171557602000 |
| 0.015 | 0.971504499949434000 | 0.130 | 0.753337607669956000 |
| 0.020 | 0.962007999838772000 | 0.135 | 0.743864033916503000 |
| 0.025 | 0.952512499603982000 | 0.140 | 0.734391449126280000 |
| 0.030 | 0.943017999175846000 | 0.145 | 0.724919852027438000 |
| 0.035 | 0.933524498478647000 | 0.150 | 0.715449241239265000 |
| 0.040 | 0.924031997401397000 | 0.155 | 0.705979615263604000 |
| 0.045 | 0.914540495806468000 | 0.160 | 0.696510972475660000 |
| 0.050 | 0.905049993532621000 | 0.165 | 0.687043311114180000 |
| 0.055 | 0.895560490394292000 | 0.170 | 0.677576629271043000 |
| 0.060 | 0.886071986180264000 | 0.175 | 0.668110924883558000 |
| 0.065 | 0.876584480651708000 | 0.180 | 0.658646195784739000 |
| 0.070 | 0.867097973539601000 | 0.185 | 0.649182439563025000 |
| 0.075 | 0.857612464541521000 | 0.190 | 0.639719653603061000 |
| 0.080 | 0.848127953317819000 | 0.195 | 0.630257835116181000 |
| 0.085 | 0.838644439487166000 | 0.200 | 0.620796981130880000 |
| 0.090 | 0.829161922621481000 | 0.205 | 0.611337088482668000 |
| 0.095 | 0.819680402240232000 | 0.210 | 0.601878153803333000 |
| 0.100 | 0.810199877804114000 | 0.215 | 0.592420173509592000 |
| 0.105 | 0.800720348732552000 | 0.220 | 0.582963143791144000 |
| 0.110 | 0.791241814372009000 | 0.225 | 0.573507060598140000 |

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0.230 | 0.564051919628047000 | 0.345 | 0.346829033539507000 |
| 0.235 | 0.554597716311937000 | 0.350 | 0.337394336728554000 |
| 0.240 | 0.545144445800191000 | 0.355 | 0.327960355281237000 |
| 0.245 | 0.535692102947630000 | 0.360 | 0.318527073775526000 |
| 0.250 | 0.526240682303930000 | 0.365 | 0.309094476172834000 |
| 0.255 | 0.516790178176389000 | 0.370 | 0.299662545797850000 |
| 0.260 | 0.507340584439774000 | 0.375 | 0.290231265317960000 |
| 0.265 | 0.497891894604462000 | 0.380 | 0.280800616722256000 |
| 0.270 | 0.488444101850148000 | 0.385 | 0.271370581300169000 |
| 0.275 | 0.478997199011830000 | 0.390 | 0.261941139619728000 |
| 0.280 | 0.469551178565199000 | 0.395 | 0.252512271562080000 |
| 0.285 | 0.460106032611483000 | 0.400 | 0.243083956217844000 |
| 0.290 | 0.450661752861727000 | 0.405 | 0.233656171850203000 |
| 0.295 | 0.441218330620527000 | 0.410 | 0.224228895968104000 |
| 0.300 | 0.431775756769220000 | 0.415 | 0.214802105305189000 |
| 0.305 | 0.422334021748558000 | 0.420 | 0.205375775798324000 |
| 0.310 | 0.412893115540844000 | 0.425 | 0.195949882565796000 |
| 0.315 | 0.403453027651577000 | 0.430 | 0.186524399885199000 |
| 0.320 | 0.394013747090584000 | 0.435 | 0.177099301171050000 |
| 0.325 | 0.384575262372678000 | 0.440 | 0.167674558952145000 |
| 0.330 | 0.375137561537214000 | 0.445 | 0.158250144848705000 |
| 0.335 | 0.365700631975571000 | 0.450 | 0.148826029549318000 |
| 0.340 | 0.356264460539298000 | 0.455 | 0.139402182791196000 |

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.460 | 0.129978573398317000 | 0.575 | -0.086786642198690700 |
| 0.465 | 0.120555169123673000 | 0.580 | -0.096216749139880500 |
| 0.470 | 0.111131936705025000 | 0.585 | -0.105647765960642000 |
| 0.475 | 0.101708841888283000 | 0.590 | -0.115079755387049000 |
| 0.480 | 0.092285849404566700 | 0.595 | -0.124512781571485000 |
| 0.485 | 0.082862922947112400 | 0.600 | -0.133946910113841000 |
| 0.490 | 0.073440025148093800 | 0.605 | -0.143382208082173000 |
| 0.495 | 0.064017117555374600 | 0.610 | -0.152818744032733000 |
| 0.500 | 0.054594160609244200 | 0.615 | -0.162256588029297000 |
| 0.505 | 0.045171113619173800 | 0.620 | -0.171695811661739000 |
| 0.510 | 0.035747934740638200 | 0.625 | -0.181136488063744000 |
| 0.515 | 0.026324580952998700 | 0.630 | -0.190578691929602000 |
| 0.520 | 0.016901008091763100 | 0.635 | -0.200022499516707000 |
| 0.525 | 0.007477170717499610 | 0.640 | -0.209467988645730000 |
| 0.530 | -0.001946977857907550 | 0.645 | -0.218915238807841000 |
| 0.535 | -0.011371485537678800 | 0.650 | -0.228364331087299000 |
| 0.540 | -0.020796401463226100 | 0.655 | -0.237815348168309000 |
| 0.545 | -0.030221776037089600 | 0.660 | -0.247268374351745000 |
| 0.550 | -0.039647660945670800 | 0.665 | -0.256723495570816000 |
| 0.555 | -0.049074109181707800 | 0.670 | -0.266180799405567000 |
| 0.560 | -0.058501175066435800 | 0.675 | -0.275640375096118000 |
| 0.565 | -0.067928914271375000 | 0.680 | -0.285102313554562000 |
| 0.570 | -0.077357383839689500 | 0.685 | -0.294566707375412000 |

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.690 | -0.304033650844492000 | 0.805 | -0.522719536674277000 |
| 0.695 | -0.313503239944291000 | 0.810 | -0.532280416634253000 |
| 0.700 | -0.322975572345740000 | 0.815 | -0.541846760147433000 |
| 0.705 | -0.332450747466015000 | 0.820 | -0.551418705612570000 |
| 0.710 | -0.341928866431451000 | 0.825 | -0.560996393077507000 |
| 0.715 | -0.351410032073295000 | 0.830 | -0.570579964042651000 |
| 0.720 | -0.360894348936904000 | 0.835 | -0.580169561506722000 |
| 0.725 | -0.370381923289231000 | 0.840 | -0.589765330001222000 |
| 0.730 | -0.379872863124492000 | 0.845 | -0.599367415568679000 |
| 0.735 | -0.389367278167890000 | 0.850 | -0.608975965737318000 |
| 0.740 | -0.398865279877284000 | 0.855 | -0.618591129492000000 |
| 0.745 | -0.408366981442676000 | 0.860 | -0.628213057241285000 |
| 0.750 | -0.417872497783408000 | 0.865 | -0.637841900780421000 |
| 0.755 | -0.427381945542927000 | 0.870 | -0.647477813250136000 |
| 0.760 | -0.436895443093090000 | 0.875 | -0.657120949091027000 |
| 0.765 | -0.446413110538130000 | 0.880 | -0.666771463993408000 |
| 0.770 | -0.455935069659418000 | 0.885 | -0.676429514949753000 |
| 0.775 | -0.465461443940510000 | 0.890 | -0.686095260114927000 |
| 0.780 | -0.474992358566742000 | 0.895 | -0.695768858594309000 |
| 0.785 | -0.484527940420568000 | 0.900 | -0.705450470641170000 |
| 0.790 | -0.494068318074290000 | 0.905 | -0.715140257615109000 |
| 0.795 | -0.503613621780016000 | 0.910 | -0.724838381932712000 |
| 0.800 | -0.513163983456724000 | 0.915 | -0.734545007013368000 |

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.920 | -0.744260297220087000 | 0.965 | -0.832115339236204000 |
| 0.925 | -0.753984417795139000 | 0.970 | -0.841926478935913000 |
| 0.930 | -0.763717534790311000 | 0.975 | -0.851748134288917000 |
| 0.935 | -0.773459814991634000 | 0.980 | -0.861580475748673000 |
| 0.940 | -0.783211425838365000 | 0.985 | -0.871423673830371000 |
| 0.945 | -0.792972535411286000 | 0.990 | -0.881277899005639000 |
| 0.950 | -0.802743312476332000 | 0.995 | -0.891143321590489000 |
| 0.955 | -0.812523925877297000 | 1.000 | -0.901020111626275000 |
| 0.960 | -0.822314544896763000 | | |

Tabla A.5: Valores de pureza en $p=10, q=0.1, r=0.2$.

A.2. Traza del qubit

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|------------------------|--------------|------------------------|
| 0.000 | 1.00000000000000000000 | 0.105 | 0.80050000000000000000 |
| 0.005 | 0.99050000000000000000 | 0.110 | 0.79100000000000000000 |
| 0.010 | 0.98100000000000000000 | 0.115 | 0.78150000000000000000 |
| 0.015 | 0.97150000000000000000 | 0.120 | 0.77200000000000000000 |
| 0.020 | 0.96200000000000000000 | 0.125 | 0.76250000000000000000 |
| 0.025 | 0.95250000000000000000 | 0.130 | 0.75300000000000000000 |
| 0.030 | 0.94300000000000000000 | 0.135 | 0.74350000000000000000 |
| 0.035 | 0.93350000000000000000 | 0.140 | 0.73400000000000000000 |
| 0.040 | 0.92400000000000000000 | 0.145 | 0.72450000000000000000 |
| 0.045 | 0.91450000000000000000 | 0.150 | 0.71500000000000000000 |
| 0.050 | 0.90500000000000000000 | 0.155 | 0.70550000000000000000 |
| 0.055 | 0.89550000000000000000 | 0.160 | 0.69600000000000000000 |
| 0.060 | 0.88600000000000000000 | 0.165 | 0.68650000000000000000 |
| 0.065 | 0.87650000000000000000 | 0.170 | 0.67700000000000000000 |
| 0.070 | 0.86700000000000000000 | 0.175 | 0.66750000000000000000 |
| 0.075 | 0.85750000000000000000 | 0.180 | 0.65800000000000000000 |
| 0.080 | 0.84800000000000000000 | 0.185 | 0.64850000000000000000 |
| 0.085 | 0.83850000000000000000 | 0.190 | 0.63900000000000000000 |
| 0.090 | 0.82900000000000000000 | 0.195 | 0.62950000000000000000 |
| 0.095 | 0.81950000000000000000 | 0.200 | 0.62000000000000000000 |
| 0.100 | 0.81000000000000000000 | 0.205 | 0.61050000000000000000 |

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0.210 | 0.601000000000000000 | 0.325 | 0.382500000000000000 |
| 0.215 | 0.591500000000000000 | 0.330 | 0.373000000000000000 |
| 0.220 | 0.582000000000000000 | 0.335 | 0.363500000000000000 |
| 0.225 | 0.572500000000000000 | 0.340 | 0.354000000000000000 |
| 0.230 | 0.563000000000000000 | 0.345 | 0.344500000000000000 |
| 0.235 | 0.553500000000000000 | 0.350 | 0.335000000000000000 |
| 0.240 | 0.544000000000000000 | 0.355 | 0.325500000000000000 |
| 0.245 | 0.534500000000000000 | 0.360 | 0.316000000000000000 |
| 0.250 | 0.525000000000000000 | 0.365 | 0.306500000000000000 |
| 0.255 | 0.515500000000000000 | 0.370 | 0.297000000000000000 |
| 0.260 | 0.506000000000000000 | 0.375 | 0.287500000000000000 |
| 0.265 | 0.496500000000000000 | 0.380 | 0.278000000000000000 |
| 0.270 | 0.487000000000000000 | 0.385 | 0.268500000000000000 |
| 0.275 | 0.477500000000000000 | 0.390 | 0.259000000000000000 |
| 0.280 | 0.468000000000000000 | 0.395 | 0.249500000000000000 |
| 0.285 | 0.458500000000000000 | 0.400 | 0.240000000000000000 |
| 0.290 | 0.449000000000000000 | 0.405 | 0.230500000000000000 |
| 0.295 | 0.439500000000000000 | 0.410 | 0.221000000000000000 |
| 0.300 | 0.430000000000000000 | 0.415 | 0.211500000000000000 |
| 0.305 | 0.420500000000000000 | 0.420 | 0.202000000000000000 |
| 0.310 | 0.411000000000000000 | 0.425 | 0.192500000000000000 |
| 0.315 | 0.401500000000000000 | 0.430 | 0.183000000000000000 |
| 0.320 | 0.392000000000000000 | 0.435 | 0.173499999999999000 |

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.440 | 0.164000000000000000 | 0.555 | -0.054500000000000700 |
| 0.445 | 0.154500000000000000 | 0.560 | -0.064000000000000500 |
| 0.450 | 0.145000000000000000 | 0.565 | -0.073500000000000100 |
| 0.455 | 0.135500000000000000 | 0.570 | -0.083000000000000400 |
| 0.460 | 0.126000000000000000 | 0.575 | -0.092500000000000500 |
| 0.465 | 0.116500000000000000 | 0.580 | -0.102000000000000000 |
| 0.470 | 0.107000000000000000 | 0.585 | -0.111500000000000000 |
| 0.475 | 0.097500000000000100 | 0.590 | -0.121000000000000000 |
| 0.480 | 0.088000000000000200 | 0.595 | -0.130500000000000000 |
| 0.485 | 0.078500000000000100 | 0.600 | -0.140000000000000000 |
| 0.490 | 0.069000000000000200 | 0.605 | -0.149500000000000000 |
| 0.495 | 0.059500000000000100 | 0.610 | -0.159000000000000000 |
| 0.500 | 0.050000000000000000 | 0.615 | -0.168500000000000000 |
| 0.505 | 0.040500000000000000 | 0.620 | -0.178000000000000000 |
| 0.510 | 0.031000000000000000 | 0.625 | -0.187500000000000100 |
| 0.515 | 0.021499999999999600 | 0.630 | -0.197000000000000000 |
| 0.520 | 0.012000000000000000 | 0.635 | -0.206500000000000100 |
| 0.525 | 0.002499999999999720 | 0.640 | -0.216000000000000100 |
| 0.530 | -0.007000000000000340 | 0.645 | -0.225500000000000000 |
| 0.535 | -0.016500000000000200 | 0.650 | -0.235000000000000100 |
| 0.540 | -0.026000000000000500 | 0.655 | -0.244500000000000100 |
| 0.545 | -0.035500000000000500 | 0.660 | -0.254000000000000100 |
| 0.550 | -0.045000000000000800 | 0.665 | -0.263500000000000100 |

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.670 | -0.273000000000001000 | 0.785 | -0.491500000000001000 |
| 0.675 | -0.282500000000001000 | 0.790 | -0.501000000000001000 |
| 0.680 | -0.292000000000001000 | 0.795 | -0.510500000000001000 |
| 0.685 | -0.301500000000001000 | 0.800 | -0.520000000000001000 |
| 0.690 | -0.311000000000001000 | 0.805 | -0.529500000000001000 |
| 0.695 | -0.320500000000001000 | 0.810 | -0.539000000000001000 |
| 0.700 | -0.330000000000001000 | 0.815 | -0.548500000000000000 |
| 0.705 | -0.339500000000001000 | 0.820 | -0.558000000000001000 |
| 0.710 | -0.349000000000000000 | 0.825 | -0.567500000000000000 |
| 0.715 | -0.358500000000001000 | 0.830 | -0.577000000000000000 |
| 0.720 | -0.368000000000000000 | 0.835 | -0.586500000000001000 |
| 0.725 | -0.377500000000001000 | 0.840 | -0.596000000000001000 |
| 0.730 | -0.387000000000000000 | 0.845 | -0.605500000000000000 |
| 0.735 | -0.396500000000000000 | 0.850 | -0.615000000000000000 |
| 0.740 | -0.406000000000000000 | 0.855 | -0.624500000000000000 |
| 0.745 | -0.415500000000000000 | 0.860 | -0.634000000000000000 |
| 0.750 | -0.425000000000000000 | 0.865 | -0.643500000000000000 |
| 0.755 | -0.434500000000001000 | 0.870 | -0.653000000000001000 |
| 0.760 | -0.444000000000001000 | 0.875 | -0.662500000000001000 |
| 0.765 | -0.453500000000001000 | 0.880 | -0.672000000000001000 |
| 0.770 | -0.463000000000001000 | 0.885 | -0.681500000000001000 |
| 0.775 | -0.472500000000001000 | 0.890 | -0.691000000000001000 |
| 0.780 | -0.482000000000001000 | 0.895 | -0.700500000000001000 |

| valor de i | $p=10, q=20, r=30$ | valor de i | $p=10, q=20, r=30$ |
|--------------|------------------------|--------------|-----------------------|
| 0.900 | -0.710000000000000000 | 0.955 | -0.814500000000001000 |
| 0.905 | -0.719500000000000000 | 0.960 | -0.824000000000001000 |
| 0.910 | -0.7290000000000001000 | 0.965 | -0.833500000000001000 |
| 0.915 | -0.7385000000000001000 | 0.970 | -0.843000000000001000 |
| 0.920 | -0.7480000000000001000 | 0.975 | -0.852500000000001000 |
| 0.925 | -0.7575000000000001000 | 0.980 | -0.862000000000001000 |
| 0.930 | -0.7670000000000001000 | 0.985 | -0.871500000000001000 |
| 0.935 | -0.7765000000000001000 | 0.990 | -0.881000000000001000 |
| 0.940 | -0.786000000000000000 | 0.995 | -0.890500000000001000 |
| 0.945 | -0.795500000000000000 | 1.000 | -0.900000000000001000 |
| 0.950 | -0.8050000000000001000 | | |

Tabla A.6: Valores de traza en $p=10, q=20, r=30$

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.000 | 1.0000000000000000 | 0.115 | 0.7815000000000000 |
| 0.005 | 0.9905000000000000 | 0.120 | 0.7720000000000000 |
| 0.010 | 0.9810000000000000 | 0.125 | 0.7625000000000000 |
| 0.015 | 0.9715000000000000 | 0.130 | 0.7530000000000000 |
| 0.020 | 0.9620000000000000 | 0.135 | 0.7435000000000000 |
| 0.025 | 0.9525000000000000 | 0.140 | 0.7340000000000000 |
| 0.030 | 0.9430000000000000 | 0.145 | 0.7245000000000000 |
| 0.035 | 0.9335000000000000 | 0.150 | 0.7150000000000000 |
| 0.040 | 0.9240000000000000 | 0.155 | 0.7055000000000000 |
| 0.045 | 0.9145000000000000 | 0.160 | 0.6960000000000000 |
| 0.050 | 0.9050000000000000 | 0.165 | 0.6865000000000000 |
| 0.055 | 0.8955000000000000 | 0.170 | 0.6770000000000000 |
| 0.060 | 0.8860000000000000 | 0.175 | 0.6675000000000000 |
| 0.065 | 0.8765000000000000 | 0.180 | 0.6580000000000000 |
| 0.070 | 0.8670000000000000 | 0.185 | 0.6485000000000000 |
| 0.075 | 0.8575000000000000 | 0.190 | 0.6390000000000000 |
| 0.080 | 0.8480000000000000 | 0.195 | 0.6295000000000000 |
| 0.085 | 0.8385000000000000 | 0.200 | 0.6200000000000000 |
| 0.090 | 0.8290000000000000 | 0.205 | 0.6105000000000000 |
| 0.095 | 0.8195000000000000 | 0.210 | 0.6010000000000000 |
| 0.100 | 0.8100000000000000 | 0.215 | 0.5915000000000000 |
| 0.105 | 0.8005000000000000 | 0.220 | 0.5820000000000000 |
| 0.110 | 0.7910000000000000 | 0.225 | 0.5725000000000000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.230 | 0.563000000000000000 | 0.345 | 0.344500000000000000 |
| 0.235 | 0.553500000000000000 | 0.350 | 0.335000000000000000 |
| 0.240 | 0.544000000000000000 | 0.355 | 0.325500000000000000 |
| 0.245 | 0.534500000000000000 | 0.360 | 0.316000000000000000 |
| 0.250 | 0.525000000000000000 | 0.365 | 0.306500000000000000 |
| 0.255 | 0.515500000000000000 | 0.370 | 0.297000000000000000 |
| 0.260 | 0.506000000000000000 | 0.375 | 0.287500000000000000 |
| 0.265 | 0.496500000000000000 | 0.380 | 0.278000000000000000 |
| 0.270 | 0.487000000000000000 | 0.385 | 0.268500000000000000 |
| 0.275 | 0.477500000000000000 | 0.390 | 0.259000000000000000 |
| 0.280 | 0.468000000000000000 | 0.395 | 0.249500000000000000 |
| 0.285 | 0.458500000000000000 | 0.400 | 0.240000000000000000 |
| 0.290 | 0.449000000000000000 | 0.405 | 0.230500000000000000 |
| 0.295 | 0.439500000000000000 | 0.410 | 0.221000000000000000 |
| 0.300 | 0.430000000000000000 | 0.415 | 0.211500000000000000 |
| 0.305 | 0.420500000000000000 | 0.420 | 0.202000000000000000 |
| 0.310 | 0.411000000000000000 | 0.425 | 0.192500000000000000 |
| 0.315 | 0.401500000000000000 | 0.430 | 0.183000000000000000 |
| 0.320 | 0.392000000000000000 | 0.435 | 0.173500000000000000 |
| 0.325 | 0.382500000000000000 | 0.440 | 0.164000000000000000 |
| 0.330 | 0.373000000000000000 | 0.445 | 0.154500000000000000 |
| 0.335 | 0.363500000000000000 | 0.450 | 0.145000000000000000 |
| 0.340 | 0.354000000000000000 | 0.455 | 0.135500000000000000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.460 | 0.126000000000000000 | 0.575 | -0.092499999999999900 |
| 0.465 | 0.116500000000000000 | 0.580 | -0.102000000000000000 |
| 0.470 | 0.107000000000000000 | 0.585 | -0.111500000000000000 |
| 0.475 | 0.0975000000000000100 | 0.590 | -0.121000000000000000 |
| 0.480 | 0.0880000000000000100 | 0.595 | -0.130500000000000000 |
| 0.485 | 0.078500000000000000 | 0.600 | -0.140000000000000000 |
| 0.490 | 0.069000000000000000 | 0.605 | -0.149500000000000000 |
| 0.495 | 0.059500000000000000 | 0.610 | -0.159000000000000000 |
| 0.500 | 0.050000000000000000 | 0.615 | -0.168500000000000000 |
| 0.505 | 0.040500000000000000 | 0.620 | -0.178000000000000000 |
| 0.510 | 0.031000000000000000 | 0.625 | -0.187500000000000000 |
| 0.515 | 0.021500000000000000 | 0.630 | -0.197000000000000000 |
| 0.520 | 0.012000000000000000 | 0.635 | -0.206500000000000000 |
| 0.525 | 0.002499999999999970 | 0.640 | -0.216000000000000000 |
| 0.530 | -0.0070000000000000050 | 0.645 | -0.225500000000000000 |
| 0.535 | -0.016500000000000000 | 0.650 | -0.235000000000000000 |
| 0.540 | -0.0260000000000000100 | 0.655 | -0.244500000000000000 |
| 0.545 | -0.0355000000000000100 | 0.660 | -0.254000000000000000 |
| 0.550 | -0.0450000000000000100 | 0.665 | -0.263500000000000000 |
| 0.555 | -0.0545000000000000100 | 0.670 | -0.273000000000000000 |
| 0.560 | -0.0640000000000000200 | 0.675 | -0.282500000000000000 |
| 0.565 | -0.073500000000000000 | 0.680 | -0.292000000000000000 |
| 0.570 | -0.082999999999999900 | 0.685 | -0.301500000000000000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.690 | -0.311000000000000000 | 0.805 | -0.529500000000000000 |
| 0.695 | -0.320500000000000000 | 0.810 | -0.539000000000000000 |
| 0.700 | -0.330000000000000000 | 0.815 | -0.548500000000000000 |
| 0.705 | -0.339500000000000000 | 0.820 | -0.558000000000000000 |
| 0.710 | -0.349000000000000000 | 0.825 | -0.567500000000000000 |
| 0.715 | -0.358500000000000000 | 0.830 | -0.577000000000000000 |
| 0.720 | -0.368000000000000000 | 0.835 | -0.586500000000000000 |
| 0.725 | -0.377500000000000000 | 0.840 | -0.596000000000000000 |
| 0.730 | -0.387000000000000000 | 0.845 | -0.605500000000000000 |
| 0.735 | -0.396500000000000000 | 0.850 | -0.615000000000000000 |
| 0.740 | -0.406000000000000000 | 0.855 | -0.624500000000000000 |
| 0.745 | -0.415500000000000000 | 0.860 | -0.634000000000000000 |
| 0.750 | -0.425000000000000000 | 0.865 | -0.643500000000000000 |
| 0.755 | -0.434500000000000000 | 0.870 | -0.653000000000000000 |
| 0.760 | -0.444000000000000000 | 0.875 | -0.662500000000000000 |
| 0.765 | -0.453500000000000000 | 0.880 | -0.672000000000000000 |
| 0.770 | -0.463000000000000000 | 0.885 | -0.681500000000000000 |
| 0.775 | -0.472500000000000000 | 0.890 | -0.691000000000000000 |
| 0.780 | -0.482000000000000000 | 0.895 | -0.700500000000000000 |
| 0.785 | -0.491500000000000000 | 0.900 | -0.710000000000000000 |
| 0.790 | -0.501000000000000000 | 0.905 | -0.719500000000000000 |
| 0.795 | -0.510500000000000000 | 0.910 | -0.729000000000000000 |
| 0.800 | -0.520000000000000000 | 0.915 | -0.738500000000000000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.920 | -0.748000000000000000 | 0.965 | -0.833500000000000000 |
| 0.925 | -0.757500000000000000 | 0.970 | -0.843000000000000000 |
| 0.930 | -0.767000000000000000 | 0.975 | -0.852500000000000000 |
| 0.935 | -0.776500000000000000 | 0.980 | -0.862000000000000000 |
| 0.940 | -0.786000000000000000 | 0.985 | -0.871500000000000000 |
| 0.945 | -0.795500000000000000 | 0.990 | -0.881000000000000000 |
| 0.950 | -0.805000000000000000 | 0.995 | -0.890500000000000000 |
| 0.955 | -0.814500000000000000 | 1.000 | -0.900000000000000000 |
| 0.960 | -0.824000000000000000 | | |

Tabla A.7: Valores de traza en $p=0.7, q=0.21, r=0.22$

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.000 | 1.0000000000000000 | 0.115 | 0.7815000000000000 |
| 0.005 | 0.9905000000000000 | 0.120 | 0.7720000000000000 |
| 0.010 | 0.9810000000000000 | 0.125 | 0.7625000000000000 |
| 0.015 | 0.9715000000000000 | 0.130 | 0.7530000000000000 |
| 0.020 | 0.9620000000000000 | 0.135 | 0.7435000000000000 |
| 0.025 | 0.9525000000000000 | 0.140 | 0.7340000000000000 |
| 0.030 | 0.9430000000000000 | 0.145 | 0.7245000000000000 |
| 0.035 | 0.9335000000000000 | 0.150 | 0.7150000000000000 |
| 0.040 | 0.9240000000000000 | 0.155 | 0.7055000000000000 |
| 0.045 | 0.9145000000000000 | 0.160 | 0.6960000000000000 |
| 0.050 | 0.9050000000000000 | 0.165 | 0.6865000000000000 |
| 0.055 | 0.8955000000000000 | 0.170 | 0.6770000000000000 |
| 0.060 | 0.8860000000000000 | 0.175 | 0.6675000000000000 |
| 0.065 | 0.8765000000000000 | 0.180 | 0.6580000000000000 |
| 0.070 | 0.8670000000000000 | 0.185 | 0.6485000000000000 |
| 0.075 | 0.8575000000000000 | 0.190 | 0.6390000000000000 |
| 0.080 | 0.8480000000000000 | 0.195 | 0.6295000000000000 |
| 0.085 | 0.8385000000000000 | 0.200 | 0.6200000000000000 |
| 0.090 | 0.8290000000000000 | 0.205 | 0.6105000000000000 |
| 0.095 | 0.8195000000000000 | 0.210 | 0.6010000000000000 |
| 0.100 | 0.8100000000000000 | 0.215 | 0.5915000000000000 |
| 0.105 | 0.8005000000000000 | 0.220 | 0.5820000000000000 |
| 0.110 | 0.7910000000000000 | 0.225 | 0.5725000000000000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.230 | 0.563000000000000000 | 0.345 | 0.344500000000000000 |
| 0.235 | 0.553500000000000000 | 0.350 | 0.335000000000000000 |
| 0.240 | 0.544000000000000000 | 0.355 | 0.325500000000000000 |
| 0.245 | 0.534500000000000000 | 0.360 | 0.316000000000000000 |
| 0.250 | 0.525000000000000000 | 0.365 | 0.306500000000000000 |
| 0.255 | 0.515500000000000000 | 0.370 | 0.297000000000000000 |
| 0.260 | 0.506000000000000000 | 0.375 | 0.287500000000000000 |
| 0.265 | 0.496500000000000000 | 0.380 | 0.278000000000000000 |
| 0.270 | 0.487000000000000000 | 0.385 | 0.268500000000000000 |
| 0.275 | 0.477500000000000000 | 0.390 | 0.259000000000000000 |
| 0.280 | 0.468000000000000000 | 0.395 | 0.249500000000000000 |
| 0.285 | 0.458500000000000000 | 0.400 | 0.240000000000000000 |
| 0.290 | 0.449000000000000000 | 0.405 | 0.230500000000000000 |
| 0.295 | 0.439500000000000000 | 0.410 | 0.221000000000000000 |
| 0.300 | 0.430000000000000000 | 0.415 | 0.211500000000000000 |
| 0.305 | 0.420500000000000000 | 0.420 | 0.202000000000000000 |
| 0.310 | 0.411000000000000000 | 0.425 | 0.192500000000000000 |
| 0.315 | 0.401500000000000000 | 0.430 | 0.183000000000000000 |
| 0.320 | 0.392000000000000000 | 0.435 | 0.173500000000000000 |
| 0.325 | 0.382500000000000000 | 0.440 | 0.164000000000000000 |
| 0.330 | 0.373000000000000000 | 0.445 | 0.154500000000000000 |
| 0.335 | 0.363500000000000000 | 0.450 | 0.145000000000000000 |
| 0.340 | 0.354000000000000000 | 0.455 | 0.135500000000000000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.460 | 0.126000000000000000 | 0.575 | -0.092499999999999800 |
| 0.465 | 0.116500000000000000 | 0.580 | -0.102000000000000000 |
| 0.470 | 0.107000000000000000 | 0.585 | -0.111500000000000000 |
| 0.475 | 0.097500000000000100 | 0.590 | -0.121000000000000000 |
| 0.480 | 0.088000000000000100 | 0.595 | -0.130500000000000000 |
| 0.485 | 0.078500000000000000 | 0.600 | -0.140000000000000000 |
| 0.490 | 0.069000000000000000 | 0.605 | -0.149500000000000000 |
| 0.495 | 0.059500000000000100 | 0.610 | -0.159000000000000000 |
| 0.500 | 0.050000000000000000 | 0.615 | -0.168500000000000000 |
| 0.505 | 0.040500000000000000 | 0.620 | -0.178000000000000000 |
| 0.510 | 0.031000000000000000 | 0.625 | -0.187500000000000000 |
| 0.515 | 0.021499999999999900 | 0.630 | -0.197000000000000000 |
| 0.520 | 0.012000000000000000 | 0.635 | -0.206500000000000000 |
| 0.525 | 0.002499999999999960 | 0.640 | -0.216000000000000000 |
| 0.530 | -0.007000000000000020 | 0.645 | -0.225500000000000000 |
| 0.535 | -0.016500000000000000 | 0.650 | -0.235000000000000000 |
| 0.540 | -0.026000000000000100 | 0.655 | -0.244500000000000000 |
| 0.545 | -0.035500000000000100 | 0.660 | -0.254000000000000000 |
| 0.550 | -0.045000000000000100 | 0.665 | -0.263500000000000000 |
| 0.555 | -0.054500000000000100 | 0.670 | -0.273000000000000000 |
| 0.560 | -0.064000000000000100 | 0.675 | -0.282500000000000000 |
| 0.565 | -0.073499999999999800 | 0.680 | -0.292000000000000000 |
| 0.570 | -0.082999999999999800 | 0.685 | -0.301500000000000000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.690 | -0.311000000000000000 | 0.805 | -0.529500000000000000 |
| 0.695 | -0.320500000000000000 | 0.810 | -0.539000000000000000 |
| 0.700 | -0.330000000000000000 | 0.815 | -0.548500000000000000 |
| 0.705 | -0.339500000000000000 | 0.820 | -0.558000000000000000 |
| 0.710 | -0.349000000000000000 | 0.825 | -0.567500000000000000 |
| 0.715 | -0.358500000000000000 | 0.830 | -0.577000000000000000 |
| 0.720 | -0.368000000000000000 | 0.835 | -0.586500000000000000 |
| 0.725 | -0.377500000000000000 | 0.840 | -0.596000000000000000 |
| 0.730 | -0.387000000000000000 | 0.845 | -0.605500000000000000 |
| 0.735 | -0.396500000000000000 | 0.850 | -0.615000000000000000 |
| 0.740 | -0.406000000000000000 | 0.855 | -0.624500000000000000 |
| 0.745 | -0.415500000000000000 | 0.860 | -0.634000000000000000 |
| 0.750 | -0.425000000000000000 | 0.865 | -0.643500000000000000 |
| 0.755 | -0.434500000000000000 | 0.870 | -0.653000000000000000 |
| 0.760 | -0.444000000000000000 | 0.875 | -0.662500000000000000 |
| 0.765 | -0.453500000000000000 | 0.880 | -0.672000000000000000 |
| 0.770 | -0.463000000000000000 | 0.885 | -0.681500000000000000 |
| 0.775 | -0.472500000000000000 | 0.890 | -0.691000000000000000 |
| 0.780 | -0.482000000000000000 | 0.895 | -0.700500000000000000 |
| 0.785 | -0.491500000000000000 | 0.900 | -0.710000000000000000 |
| 0.790 | -0.501000000000000000 | 0.905 | -0.719500000000000000 |
| 0.795 | -0.510500000000000000 | 0.910 | -0.729000000000000000 |
| 0.800 | -0.520000000000000000 | 0.915 | -0.738500000000000000 |

| valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ | valor de i | $p=0.7, q=0.21, r=0.22$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.920 | -0.748000000000000000 | 0.965 | -0.833500000000000000 |
| 0.925 | -0.757500000000000000 | 0.970 | -0.843000000000000000 |
| 0.930 | -0.767000000000000000 | 0.975 | -0.852500000000000000 |
| 0.935 | -0.776500000000000000 | 0.980 | -0.862000000000000000 |
| 0.940 | -0.786000000000000000 | 0.985 | -0.871500000000000000 |
| 0.945 | -0.795500000000000000 | 0.990 | -0.881000000000000000 |
| 0.950 | -0.805000000000000000 | 0.995 | -0.890500000000000000 |
| 0.955 | -0.814500000000000000 | 1.000 | -0.900000000000000000 |
| 0.960 | -0.823999999999999000 | | |

Tabla A.8: Valores de traza en $p=0.2, q=0.1, r=0.2$

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.000 | 1.0000000000000000 | 0.115 | 0.7815000000000000 |
| 0.005 | 0.9905000000000000 | 0.120 | 0.7720000000000000 |
| 0.010 | 0.9810000000000000 | 0.125 | 0.7625000000000000 |
| 0.015 | 0.9715000000000000 | 0.130 | 0.7530000000000000 |
| 0.020 | 0.9620000000000000 | 0.135 | 0.7435000000000000 |
| 0.025 | 0.9525000000000000 | 0.140 | 0.7340000000000000 |
| 0.030 | 0.9430000000000000 | 0.145 | 0.7245000000000000 |
| 0.035 | 0.9335000000000000 | 0.150 | 0.7150000000000000 |
| 0.040 | 0.9240000000000000 | 0.155 | 0.7055000000000000 |
| 0.045 | 0.9145000000000000 | 0.160 | 0.6960000000000000 |
| 0.050 | 0.9050000000000000 | 0.165 | 0.6865000000000000 |
| 0.055 | 0.8955000000000000 | 0.170 | 0.6770000000000000 |
| 0.060 | 0.8860000000000000 | 0.175 | 0.6675000000000000 |
| 0.065 | 0.8765000000000000 | 0.180 | 0.6580000000000000 |
| 0.070 | 0.8670000000000000 | 0.185 | 0.6485000000000000 |
| 0.075 | 0.8575000000000000 | 0.190 | 0.6390000000000000 |
| 0.080 | 0.8480000000000000 | 0.195 | 0.6295000000000000 |
| 0.085 | 0.8385000000000000 | 0.200 | 0.6200000000000000 |
| 0.090 | 0.8290000000000000 | 0.205 | 0.6105000000000000 |
| 0.095 | 0.8195000000000000 | 0.210 | 0.6010000000000000 |
| 0.100 | 0.8100000000000000 | 0.215 | 0.5915000000000000 |
| 0.105 | 0.8005000000000000 | 0.220 | 0.5820000000000000 |
| 0.110 | 0.7910000000000000 | 0.225 | 0.5725000000000000 |

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.230 | 0.563000000000000000 | 0.345 | 0.344500000000000000 |
| 0.235 | 0.553500000000000000 | 0.350 | 0.335000000000000000 |
| 0.240 | 0.544000000000000000 | 0.355 | 0.325500000000000000 |
| 0.245 | 0.534500000000000000 | 0.360 | 0.316000000000000000 |
| 0.250 | 0.525000000000000000 | 0.365 | 0.306500000000000000 |
| 0.255 | 0.515500000000000000 | 0.370 | 0.297000000000000000 |
| 0.260 | 0.506000000000000000 | 0.375 | 0.287500000000000000 |
| 0.265 | 0.496500000000000000 | 0.380 | 0.278000000000000000 |
| 0.270 | 0.487000000000000000 | 0.385 | 0.268500000000000000 |
| 0.275 | 0.477500000000000000 | 0.390 | 0.259000000000000000 |
| 0.280 | 0.468000000000000000 | 0.395 | 0.249500000000000000 |
| 0.285 | 0.458500000000000000 | 0.400 | 0.240000000000000000 |
| 0.290 | 0.449000000000000000 | 0.405 | 0.230500000000000000 |
| 0.295 | 0.439500000000000000 | 0.410 | 0.221000000000000000 |
| 0.300 | 0.430000000000000000 | 0.415 | 0.211500000000000000 |
| 0.305 | 0.420500000000000000 | 0.420 | 0.202000000000000000 |
| 0.310 | 0.411000000000000000 | 0.425 | 0.192500000000000000 |
| 0.315 | 0.401500000000000000 | 0.430 | 0.183000000000000000 |
| 0.320 | 0.392000000000000000 | 0.435 | 0.173500000000000000 |
| 0.325 | 0.382500000000000000 | 0.440 | 0.164000000000000000 |
| 0.330 | 0.373000000000000000 | 0.445 | 0.154500000000000000 |
| 0.335 | 0.363500000000000000 | 0.450 | 0.145000000000000000 |
| 0.340 | 0.354000000000000000 | 0.455 | 0.135500000000000000 |

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.460 | 0.126000000000000000 | 0.575 | -0.092499999999999800 |
| 0.465 | 0.116500000000000000 | 0.580 | -0.102000000000000000 |
| 0.470 | 0.107000000000000000 | 0.585 | -0.111500000000000000 |
| 0.475 | 0.097500000000000100 | 0.590 | -0.121000000000000000 |
| 0.480 | 0.088000000000000100 | 0.595 | -0.130500000000000000 |
| 0.485 | 0.078500000000000000 | 0.600 | -0.140000000000000000 |
| 0.490 | 0.069000000000000000 | 0.605 | -0.149500000000000000 |
| 0.495 | 0.059500000000000100 | 0.610 | -0.159000000000000000 |
| 0.500 | 0.050000000000000000 | 0.615 | -0.168500000000000000 |
| 0.505 | 0.040500000000000000 | 0.620 | -0.178000000000000000 |
| 0.510 | 0.031000000000000000 | 0.625 | -0.187500000000000000 |
| 0.515 | 0.021499999999999900 | 0.630 | -0.197000000000000000 |
| 0.520 | 0.012000000000000000 | 0.635 | -0.206500000000000000 |
| 0.525 | 0.002499999999999960 | 0.640 | -0.216000000000000000 |
| 0.530 | -0.007000000000000020 | 0.645 | -0.225500000000000000 |
| 0.535 | -0.016500000000000000 | 0.650 | -0.235000000000000000 |
| 0.540 | -0.026000000000000100 | 0.655 | -0.244500000000000000 |
| 0.545 | -0.035500000000000100 | 0.660 | -0.254000000000000000 |
| 0.550 | -0.045000000000000100 | 0.665 | -0.263500000000000000 |
| 0.555 | -0.054500000000000100 | 0.670 | -0.273000000000000000 |
| 0.560 | -0.064000000000000100 | 0.675 | -0.282500000000000000 |
| 0.565 | -0.073499999999999800 | 0.680 | -0.292000000000000000 |
| 0.570 | -0.082999999999999800 | 0.685 | -0.301500000000000000 |

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.690 | -0.311000000000000000 | 0.805 | -0.529500000000000000 |
| 0.695 | -0.320500000000000000 | 0.810 | -0.539000000000000000 |
| 0.700 | -0.330000000000000000 | 0.815 | -0.548500000000000000 |
| 0.705 | -0.339500000000000000 | 0.820 | -0.558000000000000000 |
| 0.710 | -0.349000000000000000 | 0.825 | -0.567500000000000000 |
| 0.715 | -0.358500000000000000 | 0.830 | -0.577000000000000000 |
| 0.720 | -0.368000000000000000 | 0.835 | -0.586500000000000000 |
| 0.725 | -0.377500000000000000 | 0.840 | -0.596000000000000000 |
| 0.730 | -0.387000000000000000 | 0.845 | -0.605500000000000000 |
| 0.735 | -0.396500000000000000 | 0.850 | -0.615000000000000000 |
| 0.740 | -0.406000000000000000 | 0.855 | -0.624500000000000000 |
| 0.745 | -0.415500000000000000 | 0.860 | -0.634000000000000000 |
| 0.750 | -0.425000000000000000 | 0.865 | -0.643500000000000000 |
| 0.755 | -0.434500000000000000 | 0.870 | -0.653000000000000000 |
| 0.760 | -0.444000000000000000 | 0.875 | -0.662500000000000000 |
| 0.765 | -0.453500000000000000 | 0.880 | -0.672000000000000000 |
| 0.770 | -0.463000000000000000 | 0.885 | -0.681500000000000000 |
| 0.775 | -0.472500000000000000 | 0.890 | -0.691000000000000000 |
| 0.780 | -0.482000000000000000 | 0.895 | -0.700500000000000000 |
| 0.785 | -0.491500000000000000 | 0.900 | -0.710000000000000000 |
| 0.790 | -0.501000000000000000 | 0.905 | -0.719500000000000000 |
| 0.795 | -0.510500000000000000 | 0.910 | -0.729000000000000000 |
| 0.800 | -0.520000000000000000 | 0.915 | -0.738500000000000000 |

| valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ | valor de i | $p=0.1, q=0.1, r=0.1$ |
|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 0.920 | -0.74800000000000000000 | 0.965 | -0.83350000000000000000 |
| 0.925 | -0.75750000000000000000 | 0.970 | -0.84300000000000000000 |
| 0.930 | -0.76700000000000000000 | 0.975 | -0.85250000000000000000 |
| 0.935 | -0.77650000000000000000 | 0.980 | -0.86200000000000000000 |
| 0.940 | -0.78600000000000000000 | 0.985 | -0.87150000000000000000 |
| 0.945 | -0.79550000000000000000 | 0.990 | -0.88100000000000000000 |
| 0.950 | -0.80500000000000000000 | 0.995 | -0.89050000000000000000 |
| 0.955 | -0.81450000000000000000 | 1.000 | -0.90000000000000000000 |
| 0.960 | -0.82399999999999990000 | | |

Tabla A.9: Valores de traza en $p=0.1, q=0.1, r=0.1$

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0.000 | 1.0000000000000000 | 0.115 | 0.7815000000000000 |
| 0.005 | 0.9905000000000000 | 0.120 | 0.7720000000000000 |
| 0.010 | 0.9810000000000000 | 0.125 | 0.7625000000000000 |
| 0.015 | 0.9715000000000000 | 0.130 | 0.7530000000000000 |
| 0.020 | 0.9620000000000000 | 0.135 | 0.7435000000000000 |
| 0.025 | 0.9525000000000000 | 0.140 | 0.7340000000000000 |
| 0.030 | 0.9430000000000000 | 0.145 | 0.7245000000000000 |
| 0.035 | 0.9335000000000000 | 0.150 | 0.7150000000000000 |
| 0.040 | 0.9240000000000000 | 0.155 | 0.7055000000000000 |
| 0.045 | 0.9145000000000000 | 0.160 | 0.6960000000000000 |
| 0.050 | 0.9050000000000000 | 0.165 | 0.6865000000000000 |
| 0.055 | 0.8955000000000000 | 0.170 | 0.6770000000000000 |
| 0.060 | 0.8860000000000000 | 0.175 | 0.6675000000000000 |
| 0.065 | 0.8765000000000000 | 0.180 | 0.6580000000000000 |
| 0.070 | 0.8670000000000000 | 0.185 | 0.6485000000000000 |
| 0.075 | 0.8575000000000000 | 0.190 | 0.6390000000000000 |
| 0.080 | 0.8480000000000000 | 0.195 | 0.6295000000000000 |
| 0.085 | 0.8385000000000000 | 0.200 | 0.6200000000000000 |
| 0.090 | 0.8290000000000000 | 0.205 | 0.6105000000000000 |
| 0.095 | 0.8195000000000000 | 0.210 | 0.6010000000000000 |
| 0.100 | 0.8100000000000000 | 0.215 | 0.5915000000000000 |
| 0.105 | 0.8005000000000000 | 0.220 | 0.5820000000000000 |
| 0.110 | 0.7910000000000000 | 0.225 | 0.5725000000000000 |

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0.230 | 0.563000000000000000 | 0.345 | 0.344500000000000000 |
| 0.235 | 0.553500000000000000 | 0.350 | 0.335000000000000000 |
| 0.240 | 0.544000000000000000 | 0.355 | 0.325500000000000000 |
| 0.245 | 0.534500000000000000 | 0.360 | 0.316000000000000000 |
| 0.250 | 0.525000000000000000 | 0.365 | 0.306500000000000000 |
| 0.255 | 0.515500000000000000 | 0.370 | 0.297000000000000000 |
| 0.260 | 0.506000000000000000 | 0.375 | 0.287500000000000000 |
| 0.265 | 0.496500000000000000 | 0.380 | 0.278000000000000000 |
| 0.270 | 0.487000000000000000 | 0.385 | 0.268500000000000000 |
| 0.275 | 0.477500000000000000 | 0.390 | 0.259000000000000000 |
| 0.280 | 0.468000000000000000 | 0.395 | 0.249500000000000000 |
| 0.285 | 0.458500000000000000 | 0.400 | 0.240000000000000000 |
| 0.290 | 0.449000000000000000 | 0.405 | 0.230500000000000000 |
| 0.295 | 0.439500000000000000 | 0.410 | 0.221000000000000000 |
| 0.300 | 0.430000000000000000 | 0.415 | 0.211500000000000000 |
| 0.305 | 0.420500000000000000 | 0.420 | 0.202000000000000000 |
| 0.310 | 0.411000000000000000 | 0.425 | 0.192500000000000000 |
| 0.315 | 0.401500000000000000 | 0.430 | 0.183000000000000000 |
| 0.320 | 0.392000000000000000 | 0.435 | 0.173500000000000000 |
| 0.325 | 0.382500000000000000 | 0.440 | 0.164000000000000000 |
| 0.330 | 0.373000000000000000 | 0.445 | 0.154500000000000000 |
| 0.335 | 0.363500000000000000 | 0.450 | 0.145000000000000000 |
| 0.340 | 0.354000000000000000 | 0.455 | 0.135500000000000000 |

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.460 | 0.126000000000000000 | 0.575 | -0.092500000000000000 |
| 0.465 | 0.116500000000000000 | 0.580 | -0.102000000000000000 |
| 0.470 | 0.107000000000000000 | 0.585 | -0.111500000000000000 |
| 0.475 | 0.097500000000000000 | 0.590 | -0.121000000000000000 |
| 0.480 | 0.088000000000000000 | 0.595 | -0.130500000000000000 |
| 0.485 | 0.078500000000000000 | 0.600 | -0.140000000000000000 |
| 0.490 | 0.069000000000000000 | 0.605 | -0.149500000000000000 |
| 0.495 | 0.059500000000000000 | 0.610 | -0.159000000000000000 |
| 0.500 | 0.049999999999999900 | 0.615 | -0.168500000000000000 |
| 0.505 | 0.040499999999999900 | 0.620 | -0.178000000000000000 |
| 0.510 | 0.030999999999999900 | 0.625 | -0.187500000000000000 |
| 0.515 | 0.021499999999999900 | 0.630 | -0.197000000000000000 |
| 0.520 | 0.011999999999999900 | 0.635 | -0.206500000000000000 |
| 0.525 | 0.002499999999999870 | 0.640 | -0.216000000000000000 |
| 0.530 | -0.007000000000000120 | 0.645 | -0.225500000000000000 |
| 0.535 | -0.016500000000000100 | 0.650 | -0.235000000000000000 |
| 0.540 | -0.026000000000000100 | 0.655 | -0.244500000000000000 |
| 0.545 | -0.035500000000000200 | 0.660 | -0.254000000000000000 |
| 0.550 | -0.045000000000000200 | 0.665 | -0.263500000000000000 |
| 0.555 | -0.054500000000000200 | 0.670 | -0.273000000000000000 |
| 0.560 | -0.064000000000000200 | 0.675 | -0.282500000000000000 |
| 0.565 | -0.073500000000000000 | 0.680 | -0.292000000000000000 |
| 0.570 | -0.083000000000000000 | 0.685 | -0.301500000000000000 |

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.690 | -0.311000000000000000 | 0.805 | -0.529500000000000000 |
| 0.695 | -0.320500000000000000 | 0.810 | -0.539000000000000000 |
| 0.700 | -0.330000000000000000 | 0.815 | -0.548500000000000000 |
| 0.705 | -0.339500000000000000 | 0.820 | -0.558000000000000000 |
| 0.710 | -0.349000000000000000 | 0.825 | -0.567500000000000000 |
| 0.715 | -0.358500000000000000 | 0.830 | -0.577000000000000000 |
| 0.720 | -0.368000000000000000 | 0.835 | -0.586500000000000000 |
| 0.725 | -0.377500000000000000 | 0.840 | -0.596000000000000000 |
| 0.730 | -0.387000000000000000 | 0.845 | -0.605500000000000000 |
| 0.735 | -0.396500000000000000 | 0.850 | -0.615000000000000000 |
| 0.740 | -0.406000000000000000 | 0.855 | -0.624500000000000000 |
| 0.745 | -0.415500000000000000 | 0.860 | -0.634000000000000000 |
| 0.750 | -0.425000000000000000 | 0.865 | -0.643500000000000000 |
| 0.755 | -0.434500000000000000 | 0.870 | -0.653000000000000000 |
| 0.760 | -0.444000000000000000 | 0.875 | -0.662500000000000000 |
| 0.765 | -0.453500000000000000 | 0.880 | -0.672000000000000000 |
| 0.770 | -0.463000000000000000 | 0.885 | -0.681500000000000000 |
| 0.775 | -0.472500000000000000 | 0.890 | -0.691000000000000000 |
| 0.780 | -0.482000000000000000 | 0.895 | -0.700500000000000000 |
| 0.785 | -0.491500000000000000 | 0.900 | -0.710000000000000000 |
| 0.790 | -0.501000000000000000 | 0.905 | -0.719500000000000000 |
| 0.795 | -0.510500000000000000 | 0.910 | -0.729000000000000000 |
| 0.800 | -0.520000000000000000 | 0.915 | -0.738500000000000000 |

| valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ | valor de i | $p=10, q=0.1, r=0.2$ |
|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0.920 | -0.748000000000000000 | 0.965 | -0.833500000000000000 |
| 0.925 | -0.757500000000000000 | 0.970 | -0.843000000000000000 |
| 0.930 | -0.767000000000000000 | 0.975 | -0.852500000000000000 |
| 0.935 | -0.776500000000000000 | 0.980 | -0.862000000000000000 |
| 0.940 | -0.786000000000000000 | 0.985 | -0.871500000000000000 |
| 0.945 | -0.795500000000000000 | 0.990 | -0.881000000000000000 |
| 0.950 | -0.805000000000000000 | 0.995 | -0.890500000000000000 |
| 0.955 | -0.814500000000000000 | 1.000 | -0.900000000000000000 |
| 0.960 | -0.824000000000000000 | | |

Tabla A.10: Valores de traza en $p=10, q=0.1, r=0.2$

Anexo B

Publicaciones y participaciones

En esta sección se muestran los artículos publicados durante la investigación y algunas participaciones que tuvieron lugar en universidades del país:

Publicaciones de artículos:

Manuel Ávila Aoki, Carlos Gerardo Honorato, José Eladio Hernández Vázquez (2019). Time Evolution of the 3-Tangle of a System of 3-Qubit Interacting Through a XY Hamiltonian. *Computación y Sistemas*, Vol. 23, No.2, 2019, pp.469-476. doi: 10.13053/CyS-23-2-2309.

Manuel Ávila Aoki, José Eladio Hernández Vázquez (2022). Population rate quantum states and the reverse of the arrow of time. *Nova Scientia*, ISSN 2007-0705.

A continuación se enlistan las participaciones en universidades del país:

Se participó en la XII Reunión de la División de Información Cuántica del 4 al 6 de Septiembre de 2019, Puebla, Puebla.

La Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
otorga la presente:

CONSTANCIA

A: **José Eladio Hernández Vázquez**

Por su valiosa participación en la **XII Reunión de la División de Información Cuántica** del 4 al 6 de Septiembre de 2019, Puebla, Puebla.

"Pensar bien, para vivir mejor"
H. Puebla de Z., a 6 de Septiembre de 2019



Dra. **María Alicia Palomino Ovando**
Investigador Responsable del Congreso



BUAP

Se participó en el LXII Congreso Nacional de Física del 7 al 11 de octubre de 2019, Centro Internacional de Vinculación y Enseñanza de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Villahermosa, Tabasco.



 **LA SOCIEDAD MEXICANA DE FÍSICA**

Agradece la asistencia y participación de:

José Eladio Hernández Vázquez
UAEméx



en el **LXII Congreso Nacional de Física**
del 7 al 11 de octubre de 2019
Centro Internacional de Vinculación y Enseñanza de la
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,
Villahermosa, Tabasco


Dr. Tonatiuh Matos Chassin
Presidente de la SMF

Se participó en el LXIII Congreso Nacional de Física del 5 al 9 de octubre de 2020, Morelia, Michoacán.

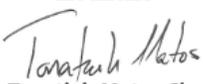
LXIII Congreso Nacional
de Física
Morelia, Michoacán 2020



LA SOCIEDAD MEXICANA DE FÍSICA
Agradece la participación de:

José Eladio Hernández Vázquez
Centro Universitario, Valle de Chalco
Universidad Autónoma del Estado de México

en el **LXIII Congreso Nacional de Física**
del 5 al 9 de octubre de 2020
MORELIA, MICHOACÁN
EN LINEA



Dr. Tonatiuh Matos Chassin
Presidente de la SMF

Se participó en el Primer Congreso Politécnica UPAtlautla el 28 de octubre de 2021, en la Universidad Politécnica de Atlautla.



Primer Congreso Politécnica UPAtlautla 2021
La Universidad Politécnica de Atlautla otorga el presente reconocimiento a:

M. C. José Eladio Hernández Vargués

Por su valiosa participación con la ponencia: **Probabilidad de la transferencia de una sola señal en una cadena lineal de N qubits**, en el marco del Primer Congreso Politécnica UPAtlautla 2021.


Lic. Elizabeth Torres Ramos
Rectora de la Universidad Politécnica de Atlautla


Dra. Claudia Pérez Martínez
Presidente del Congreso


Dra. Doricela Cortés Cruz
Secretario del Congreso

Atlatlula, Estado de México a 28 de Octubre de 2021



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE ATLAUTLA
ORGANISMO PÚBLICO DESCENTRALIZADO DEL ESTADO DE MÉXICO
Carretera Atlautla-Ozumba No. 12, Barrio de San Jacinto, C.P. 55970, Atlautla, Estado de México.
Tel.: 597 97 6 11 30