UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS COCIENTE

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Jessica Lourdes Dávila Solís

ASESOR DE TESIS:
Dr.Félix Capulín Pérez

COASESORA DE TESIS:
Dra.Lucero Madrid Mendoza

El Cerrillo, Piedras Blancas, México
Fecha de presentación: 31 de Agosto del 2023

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Sean X un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \to Y$ una función suprayectiva. La colección τ_g subconjunto del conjunto potencia de Y definida por $\tau_g = \{U \subseteq Y : g^{-1}(U) \text{ es abierto } en Y\}$ es una topología en Y llamada la topología de identificación inducida por g en Y. Uno de los temas principales que se analizan en cursos básicos de Topología general es el de espacio de identificación. Esta topología fue estudiada por R.L.Moore y R.D. Anderson en 1948 (Concerning upper semicontinuous collections of Continua) y P.Alexandroff en 1927 (*über* stetige Abkildung Kompakter R*ä*ume). La importancia de este tipo de espacios radica en su uso; es decir, con ellos principalmente se pueden construir espacios topológicos con ciertas propiedades especiales que permiten mostrar ejemplos o contraejemplos a conjeturas importantes y que sin esta herramienta podría ser imposible resolverlos. Los espacios de identificación más usados son aquellos generados por un espacio X una partición $\mathcal{D}$ o una relación de equivalencia y la función natural entre ellos, en la cual a cada elemento del dominio X le corresponde como imagen al único elemento de la partición $\mathcal{D}$ que lo contiene. Estos últimos espacios también son llamados espacios de descomposición o espacios cociente.

Aquí desarrollaremos resultados generales relacionados a la topología de identificación, así como determinar cuando un espacio topológico Y tiene la topología de identificación generada por un espacio X y una función g suprayectiva entre ellos. Veremos también si las propiedades que tiene X son preservadas, o no, en Y bajo funciones de identificación. Mostraremos resultados adicionales cuando el espacio X es un continuo y el conjunto Y es una partición $\mathcal{D}$ de él, así como también cuando un espacio de descomposición es semicontinuo superiormente.

Y de manera muy particular trabajaremos con espacios cociente llamados espacios de adjunción. Estos últimos muy utilizados para construir ejemplos muy interesantes.

Finalmente dedicamos una sección a ejemplos geométricos de espacios de descomposición sin dar una demostración rigurosa, pero sí dando una idea intuitiva,no menos importante, de espacios cociente.

Capítulo 2

Preliminares

Definición 2.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una* ***topología*** *para X es una familia $\tau \subseteq P(X)$ tal que:*

1. *$\emptyset, X \in \tau$.*

2. *Si $\mathcal{B}$ es una familia arbitraria de elementos de τ, entonces $\bigcup \mathcal{B} \in \tau$.*

3. *Si $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...B_n\}$, $B_i \in \tau$ con $i = 1 \ldots n$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \tau$.*

   A la pareja ordenada (X, τ) se le llama ***espacio topológico****.*

Definición 2.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Diremos que $\mathcal{B}$ es una* ***base*** *para τ si cada elemento no vacío de τ se puede ver como una unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

Definición 2.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Definimos a la* ***Topología del subespacio*** **Y** *como la familia*

$$\{U \cap Y : U \in \tau\}$$

Definición 2.4. *Sea $F \subseteq X$, diremos que F es un conjunto* ***cerrado*** *si $X \backslash F \in \tau$.*

Denotaremos a la **familia de cerrados** de la topología τ_1 como $\mathcal{F}_1(X)$

Proposición 2.1. *Sea X un espacio topológico y τ_1 y τ_2 dos topológicas en X y $\mathcal{F}_1(X)$ $\mathcal{F}_2(X)$ los cerrados de X con respecto a τ_1 y τ_2 respectivamente. Entonces $\tau_1 \subseteq \tau_2$ si y sólo si $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{F}_2(X)$.*

Demostración. Primero probaremos que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{F}_2(X)$. Sea $F \in \mathcal{F}_1(X)$, entonces $X \backslash F \in \tau_1$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$ se tiene que $X \backslash F \in \tau_2$, por lo cual $F \in \mathcal{F}_2(X)$. De modo que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{F}_2(X)$.

Veamos ahora que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Sea $U \in \tau_1$, entonces $X \backslash U \in \mathcal{F}_1(X)$, como $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{F}_2(X)$ se tiene que $X \backslash U \in \mathcal{F}_2(X)$, de modo que $U \in \tau_2$. $\square$

Definición 2.5. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Diremos que f es **continua** si para todo $V \in \tau_Y$ se tiene que $f^{-1}(V) \in \tau_X$.*

Definición 2.6. *Sea $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función. Diremos que f es*

- ***abierta** si para cada $U \in \tau_X$ se tiene que $f(U) \in \tau_Y$.*
- ***cerrada** si para cada K subconjunto cerrado de X se tiene que $f(K)$ es un subconjunto cerrado de Y.*

Definición 2.7. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Una **sucesión** en X es una función $S : \mathbb{N} \to X$, la denotaremos como $S \equiv (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Definición 2.8. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x \in X$. Diremos que la sucesión **converge** a x si para cada $U \in \tau_X$ que contiene a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in U$.*

Si la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x lo escribiremos de la siguiente manera: $x_n \to x$

Teorema 2.1. *Sean $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ y $x \in X$. Si f es continua en x y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $x_n \to x$, entonces $f(x_n) \to f(x)$.*

Demostración. Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $x \in X$, y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$. Por la continuidad de f, existe $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Dado que $x_n \to x$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $x_n \in U$, para toda $n \geq N$, así $f(x_n) \in V$ para toda $n \geq N$. Por lo tanto $f(x_n) \to f(x)$. $\square$

Definición 2.9. *Sea $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función biyectiva . Diremos que f es **un homeomorfismo** si f y f^{-1} son continuas. En tal caso diremos que X y Y son homeomorfos denotado por $X \approx Y$.*

Proposición 2.2. *Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva y continua. Entonces f es un homeomorfismo si y sólo si f es abierta.*

Demostración. Supongamos que f es un homeomorfismo. Sea $U \in \tau_X$, como f^{-1} es continua, entonces $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \tau_Y$. Por lo tanto f es función abierta. Supongamos ahora que f es abierta. Sea $U \in \tau_X$, como f es abierta se tiene que $f(U) \in \tau_Y$, donde $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, por lo tanto f^{-1} es continua. En consecuencia, f es un homeomorfismo. $\square$

Definición 2.10. *Un espacio Y se **encaja** es un espacio X si existe una función inyectiva $f : Y \to X$ tal que f es un homeomorfismo entre Y y $f(Y)$, como subespacio de X. A tal función se le llama **encaje**.*

Algunos de los axiomas de separación que estaremos usando en este trabajo son los siguientes.

Definición 2.11. *Diremos que un espacio topológico (X, τ_X) es un espacio $\mathbf{T_0}$ si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$.*

Definición 2.12. *Diremos que un espacio topológico (X, τ_X) es un espacio $\mathbf{T_1}$ si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existen dos abiertos $U, V \in \tau_X$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.*

Definición 2.13. *Diremos que (X, τ_X) es un espacio $\mathbf{T_2}$ o de **Hausdorff** si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, existen dos abiertos ajenos U y V de X tales que $x \in U$ y $y \in V$.*

Si una sucesión converge en un espacio T_2, entonces el límite es único.

Definición 2.14. *Un espacio topológico (X, τ_X) es un **espacio regular** si dados $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$. Si además es un espacio T_1, diremos que el espacio es $\mathbf{T_3}$.*

No es difícil ver que T_3 implica ser T_2 lo que implica ser T_1 lo que implica ser T_0.

Definición 2.15. *Un espacio topológico (X, τ_X) es **normal** si dados dos conjuntos cerrados ajenos $F_1, F_2 \subseteq X$, existen abiertos ajenos U y V tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Diremos que un espacio topológico (X, τ_X) es $\mathbf{T_4}$ si es T_1 y normal.*

Definición 2.16. *Un espacio topológico* (X, τ_X) *es un* ***espacio completamente regular****, también denominado* ***espacio de Tychonoff*** *o espacio* $\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}$*, si es un espacio* T_1 *y dados* $F \subseteq X$ *cerrado y* $x \in X \backslash F$*, existe una función continua* $f : X \to [0, 1]$ *tal que* $f(F) = \{0\}$ *y* $f(x) = 1$.

Observemos que $T_{3\frac{1}{2}}$ implica ser T_3.

El siguiente teorema caracteriza a los espacios T_1. Este resultado será usado de manera considerable durante todo el trabajo.

Teorema 2.2. *Un espacio topológico* (X, τ_X) *es* T_1 *si y sólo si para cada* $x \in X$ *se tiene que* $\{x\}$ *es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X$, probaremos que $X \backslash \{x\}$ es abierto. Supongamos lo contrario, de esta manera existe $y \in X \backslash \{x\}$ tal que para todo $U \in \tau$ tal que $y \in U$ y $U \nsubseteq X \backslash \{x\}$, esto es $U \cap \{x\} \neq \emptyset$; es decir, $x \in U$ para todo $U \in \tau$ donde $y \in U$. Por otra parte como X es T_1, entonces existen $V, W \in \tau$ de modo que $x \in V \backslash W$ y $y \in W \backslash V$, lo cual es una contradicción pues $x \in W$.

Supongamos ahora que $\{x\}$ es cerrado. Sean $x, y \in X$ y $U = X \backslash \{x\}$ y $V = X \backslash \{y\} \in \tau$, entonces $y \in U \backslash V = (X \backslash \{x\}) \backslash (X \backslash \{y\}) = \{y\}$. Similarmente $x \in V \backslash U = \{x\}$. $\square$

Si $V \subseteq X$, entonces $\overline{V}$ denotará la cerradura de V en X.

Teorema 2.3. *Un espacio topológico* (X, τ) *es regular si y sólo si para todo* $x \in U$ *con* $U \in \tau$*, existen* $V \in \tau$ *tal que* $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$*. [1, Proposición 14.3(b), p.94]*

El siguiente resultado caracteriza a los espacios normales, su prueba se puede consultar en [4, Proposición 5.19, p.84].

Teorema 2.4. *Un espacio* X *que es* T_1 *es un espacio normal si y sólo si siempre que* F *es un subconjunto cerrado y* U *es un subconjunto abierto tal que* $F \subseteq U$*, existe un subconjunto abierto* V *tal que* $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Ahora definiremos lo que es un espacio compacto, para ello necesitamos lo siguiente.

Definición 2.17. *Sean* (X, τ_X) *un espacio topológico y* $\mathcal{C} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ *una familia de subconjuntos de* X*. Diremos que* $\mathcal{C}$ *es una* ***cubierta*** *de* X *si* $X = \bigcup \mathcal{C}$.

Definición 2.18. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una cubierta de X. Diremos que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ es una **subcubierta** de $\mathcal{C}$ si $X = \bigcup \mathcal{C}'$. Si $\mathcal{C}'$ es finita, diremos que $\mathcal{C}'$ es una subcubierta finita de $\mathcal{C}$. Si cada elemento de $\mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de X, diremos que $\mathcal{C}$ un una cubierta abierta de X.*

Definición 2.19. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Diremos que X es **compacto** si para toda cubierta abierta $\mathcal{C} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ existe una subcubierta finita de $\mathcal{C}$.*

Un subconjunto K de X es compacto si como subespacio es compacto.

Teorema 2.5. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $K \subseteq X$. Si K es cerrado y X es compacto, entonces K es compacto.*

Demostración. Sean K cerrado en X y $\mathcal{C} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de K. Dado que K es cerrado $X \backslash K$ es abierto. Entonces $\mathcal{C} \cup \{X \backslash K\}$ es una cubierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita de $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C} \cup \{X \backslash K\}$. De esta manera $X \backslash K$ junto con una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$ cubren a X, digamos $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}$. Así $\mathcal{C}' = \{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}, X \backslash K\}$ es una cubierta abierta finita de X. Así $\mathcal{C}'' = \{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ es una cubierta abierta finita de K. Por lo tanto, K es compacto.

□

Teorema 2.6. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $K \subseteq X$. Si X es de Hausdorff y K es compacto, entonces K es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X \backslash K$. Dado que X es de Hausdorff, para cada $y \in K$, existen dos abiertos U_y y V_y ajenos y no vacíos tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$, de esta manera $\mathcal{C} = \{V_y : y \in K\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$.

Sea $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \in \tau$, entonces $x \in U$. Afirmamos que $U \subseteq X \backslash K$. Consideremos $z \in U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \subseteq U_{y_i}$. Así, $z \notin V_{y_i}$ para todo $i =, 1 \ldots, n$, esto implica que $z \notin \bigcup_{i=1}^n V_{yi}$. Por lo que $z \notin K$. Por lo tanto $U \subseteq X \backslash K$ y así $X \backslash K$ es abierto, de donde se concluye que K es cerrado. □

Teorema 2.7. *Sea $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función suprayectiva, si f es continua y X es compacto, entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de Y. Dado que f es continua, $f^{-1}(V_\alpha) \in \tau_X$ para todo $\alpha \in I$ y además
$\mathcal{K} = \{f^{-1}(V_\alpha) = U_\alpha : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de X, pues como $Y = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, entonces $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha)$.

Por la compacidad de X, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$. De esta manera $Y = f(X) = f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(V_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$.

Por lo tanto $\mathcal{C}' = \{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$ es una cubierta finita. $\square$

Teorema 2.8. *Sea $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Si f es continua, X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado en X. Como X es compacto, entonces F es compacto. Dado que f es continua, $f(F)$ es compacto y como Y es de Hausdorff, $f(F)$ es cerrado. $\square$

Definición 2.20. *Un espacio topológico X es un **espacio de** **Lindelöf** si cada cubierta abierta para X contiene una subcubierta numerable.*

Definición 2.21. *Un espacio topológico (X, τ) es **segundo numerable** si X tiene una base numerable.*

La prueba del siguiente teorema se puede consultar en [1, Teorema 16,p.112]

Teorema 2.9. *Si (X, τ) es un espacio topológico el cual es segundo numerable, entonces toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable; es decir, es un espacio de Lindelöf.*

El siguientes Teorema es conocido, su prueba se puede consultar en [1, Teorema 16.8, p.111]

Teorema 2.10. *Si (X, τ) es un espacio topológico regular y Lindelöf , entonces X es normal.*

Lema 2.1. ***Lema de Urysohn**. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es normal.*

b) *Si C_1 y C_2 son conjuntos cerrados y ajenos, entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[C_1] = \{0\}$ y $f[C_2] = \{1\}$.*

c) *Si C_1 y C_2 son conjuntos cerrados y ajenos y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces existe una función continua $f : X \to (a, b)$ tal que $f(C_1) = \{a\}$ y $F(C_2) = \{b\}$.*

Demostración. Supongamos que X es normal y probaremos que si C_1 y C_2 son conjuntos cerrados y ajenos, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(C_1) = \{0\}$ y $f(C_2) = \{1\}$. Sean C_1 y C_2 conjuntos cerrados y ajenos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $D_n = \left\{\frac{k}{2^n} : k \in \{0,1,2,3,\ldots 2^n\}\right\}$. Sea $D = \bigcup D_n = \left\{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N} \; y \; k \in \{0,1,2,3,\ldots 2^n\}\right\}$.

Veamos en primer lugar que para todo $r \in D_n$ existe un subconjunto M_r de X tal que:

I. $M_0 = C_1$ y $M_1 = X \backslash C_2$

II. Para todo $r' \in D$ con $r < r'$ se verifica que $\overline{M_r} \subseteq \mathring{M}_{r'}$.

La prueba se hará por inducción sobre n. Observemos que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $D_n \subseteq D_{n+1}$. Note que para $n = 0$, $D_0 = \left\{\frac{k}{2^0} : k \in \{0,1\}\right\} = \{0,1\}$. Tomemos $M_0 = C_1$ y $M_1 = X \backslash C_2$, entonces $\overline{M_0} = \overline{C_1} = C_1 \subseteq X - C_2 = M_1 = \mathring{M}_1$, lo cual cumple la base de inducción.

Hipótesis de inducción: Supongamos que tenemos construidos los conjuntos M_r, para cada $r \in D_{n-1}$ verificándose I y II. Veamos la construcción de los M_r para n. Sea $r \in D_n$, entonces $r = \frac{k}{2^n}$ con $k \in \{0,1,\ldots 2^n\}$. Supongamos primero que K es un múltiplo de 2, se tiene que $r = \frac{2k'}{2^n} = \frac{k'}{2^{n-1}}$ donde $k' \in \{0,1,2,\ldots 2^{n-1}\}$. En este caso $r \in D_{n-1}$, por la hipótesis de inducción existe $\frac{M_{k'}}{2^{n-1}}$ que cumple I y II. Así, se define $M_r = \frac{M_{k'}}{2^{n-1}}$. Si k no es múltiplo de 2 se tiene que $k-1$ y $k+1$ son múltiplos de 2, por lo que $k-1 = 2k_1$ y $k+1 = 2k_2$ para algunos k_1 y $k_2 \in \mathbb{N}$.

Sean $s = r - \frac{1}{2^n}$ y $t = r + \frac{1}{2^2}$, $r \in D_n$. Veamos que $s = r - \frac{1}{2^n} = \frac{k}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k_1}{2^n} = \frac{k_1}{2^{n-1}}$ y $t = r + \frac{1}{2^n} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{k+1}{2^n} = \frac{2k_2}{2n} = \frac{k_2}{2^{n-1}}$. Probemos que $s, t \in D_{n-1}$. Para esto veamos que $k_1, k_2 \in \{0,1,2,\ldots 2^{n-1}\}$ en efecto, como k no es múltiplo de 2, $k \in \{1,3,\ldots 2^{n-1}\}$, entonces $\frac{k-1}{2} = k_1 \in \{0,1,2,\ldots 2^{n-1}-1\}$ y $\frac{k+1}{2} = k_2 \in \{1,2,3,\ldots 2^{n-1}\}$. Así $k_1, k_2 \in \{0,1,2,\ldots 2^{n-1}\}$. Por lo tanto $s, t \in D_{n-1}$.

Usando la hipótesis de inducción existen los conjuntos M_s y M_t que cumplen I y II y como $s < t$, entonces $\overline{M_s} \subseteq \mathring{M}_t$. Como X es normal y por la Proposición 1, existe un conjunto abierto que llamaremos M_r tal que $\overline{M}_s \subseteq M_r \subseteq \overline{M}_r \subseteq \mathring{M}_t$. Donde t es el inmediato sucesor de r en D_n. Sea r' un número arbitrario en D_n tal que $r < r'$, entonces existe un número natural m tal que $t + m(\frac{1}{2^n}) = r'$.

Llamemos r_1 a el inmediato sucesor de r en D_n, r_2 el inmediato sucesor de r_1 en D_n y r_m el inmediato sucesor de r_{m-1} en D_n. Repitiendo el proceso anterior para el sucesor tenemos $\overline{M_r} \subseteq \overset{\circ}{M}_{r_1} \subseteq \overline{M}_{r_1} \subseteq \overset{\circ}{M}_{r_2} \subseteq \cdots \subseteq \overline{M}_{r_{m-1}} \subseteq \overset{\circ}{M}_{r_m} = \overset{\circ}{M}_{r'}$. Por lo que $\overline{M}_r \subseteq \overset{\circ}{M}_{r'}$.

Definamos ahora una función $f : X \to [0,1]$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} & si \quad x \notin C_2 \\ \\ 1 & si \quad x \in C_2 \end{cases}$$

Bajo esta definición se tiene que f ya que si $x \in C_1 = M_0$, entonces $x \in \overline{M}_0$ y $x \notin C_2$. Por lo que $inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} = \{0\}$ y por construcción $f(C_2) = \{1\}$.

Veamos que f es continua. Basta probar que la imagen inversa de intervalos de la forma $[0,a)$ y $(b,1]$ son abiertos donde $a < 1$ y $b > 0$.

Note que $f^{-1}([0,a)) = \{x \in X : 0 \leq f(x) < a\} =$
$\left\{x \in X : o \leq inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} < a\right\}$.

Afirmación 1. $f(x) < a$ si y sólo si existe $r_0 < a$ tal que $x \in \overset{\circ}{M}_{r_0}$. Supongamos primero que $f(x) < a$. De esto, $inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} < a$ por lo que a no es cota inferior de $\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$, así que existe $p \in \left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$ tal que $p < a$. Por la densidad de D en el intervalo $[0,1]$ existe $r_0 \in D$ tal que $p < r_0 < a$. Como $p < r_0$, entonces $\overline{M}_p \subseteq \overset{\circ}{M}_{r_0}$. Como $p \in \left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$, se tiene que $x \in \overline{M}_p$, por lo tanto $x \in \overline{M}_{r_0}$ pues $\overline{M_p} \subseteq \overset{\circ}{M}_{r_0} \subseteq \overline{M}_{r_0}$. Para el regreso supongamos que si existe $r_0 < a$ tal que $x \in \overset{\circ}{M}_{r_0}$ tendremos que $x \in \overline{M}_{r_0}$, entonces $r_0 \in \left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$, por lo que $inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} \leq r_0 < a$.

Afirmación 2. Veamos que $f^{-1}\left[[0,a)\right] = \bigcup\left\{\overset{\circ}{M}_r : r < a\right\}$. En efecto, $x \in f^{-1}\left[[0,a)\right]$ si y sólo si $0 \leq f(x) < a$ si y sólo si existe $r_0 < a$ tal que $x \in \overset{\circ}{M}_{r_0}$ si y sólo si $x \in \bigcup\left\{\overset{\circ}{M}_r : r < a\right\}$. Como cada conjunto $\overset{\circ}{M}_r$ es abierto, entonces $\bigcup\left\{\overset{\circ}{M}_r : r < a\right\}$ es abierto. De este modo $f^{-1}\left[[0,a)\right]$ es abierto. Ahora veamos que $f^{-1}\left\{(b,1]\right\} = \{x \in X : b < f(x) \leq 1\}$
$= \left\{x \in X : b < inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} o\ f(x) = 1\right\}$.

Afirmación 3. $b < f(x)$ si y sólo si existe $r_0 > b$ tal que $x \notin \overline{M}_{r_0}$. Supongamos que $b < f(x)$. Si $f(x) = 1$, se tiene que $x \in C_2$ por lo que $x \notin X - C_2 = M_1$. Como $b < 1$, existe $r_0 \in D$ tal que $b < r_0 < 1$, de esta manera $\overline{M}_{r_0} \subseteq \overset{\circ}{M}_1 = M_1$ y si $x \notin M_1$, entonces $x \notin \overline{M}_{r_0}$. Si $f(x) = inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$, entonces $b < inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$. Como $\overline{D} = [0,1]$ existe $r_0 \in D$ tal que $b < r_0 < inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$. Veamos que $x \notin \overline{M}_{r_0}$ pues si $r_0 \in \left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$, entonces se tiene que

$inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} \leq r_0$, lo cual es una contradicción. Para el regreso supongamos que existe $r_0 > b$ tal que $x \notin \overline{M}_{r_0}$. Supongamos primero que $f(x) = 1$, si ocurre que $b \geq f(x) = 1$, entonces $r_0 > b \geq 1$ lo cual es una contradicción pues $r \in [0,1]$, por lo tanto $b < f(x)$.

Supongamos ahora que $f(x) \neq 1$. Veamos que r_0 es cota inferior de $\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$; es decir, que para todo $p \in \left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$, $r_0 \leq p$. Notemos que si $p \in \left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$, entonces $r_0 \leq p$, ya que si $r_0 > p$, se tendría que $\overline{M}_p \subseteq \mathring{M}_{r_0} \subseteq \overline{M}_{r_0}$ y como $x \notin \overline{M}_{r_0}$, entonces $x \notin \overline{M}_p$ por lo que $p \notin \left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\}$ lo cual es una contradicción. Así $r_0 \leq \left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} = f(x)$. Por lo que $b < r_0 \leq inf\left\{r \in D : x \in \overline{M}_r\right\} = f(x)$.

Afirmación 4. $f^{-1}((b,1]) = \bigcup\left\{X \backslash \overline{M}_r : r > b\right\} = X \backslash \bigcap\left\{\overline{M}_r : r > b\right\}$. En efecto, $x \in f^{-1}((b,1])$ si y sólo si $b < f(x) \leq 1$ si y sólo si existe $r_0 > b$ tal que $x \notin \overline{M}_{r_0}$ si y sólo si $x \in X \backslash \overline{M}_{r_0}$ si y sólo si $x \in \bigcup\left\{X \backslash \overline{M}_r : r > b\right\}$.

Ahora como $\overline{M}_r$ es cerrado para todo r, entonces $\bigcap\left\{\overline{M}_r : r > b\right\}$ es cerrado lo cuál implica que $X \backslash \bigcap\left\{\overline{M}_r : r > b\right\}$ es abierto. Así $f^{-1}((b,1])$ es abierto. Por lo tanto f es continua.

Supongamos ahora b) si C_1 y C_2 son conjuntos cerrados y ajenos y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$,entonces existe una función continua $f : X \to [a,b]$ tal que $f(C_1) = \{a\}$ y $f(C_2) = \{b\}$. Para ello consideremos un homeomorfismo $h : [0,1] \to [a,b]$. Entonces la función buscada es la composición de h con $f : X \to [a,b]$.

Probemos que X es normal suponiendo c). Sean C_1 y C_2 conjuntos cerrados y disjuntos. Por hipótesis existe una función continua f de X en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(C_1) = \{a\}$ y $f(C_2) = \{b\}$. Note que $C_1 \subseteq G_1 = f^{-1}\left(\left[a, \frac{b-a}{2}\right)\right)$ pues si $x \in C_1$, entonces $f(x) = 0$. Similarmente $C_2 \subseteq G_2 = f^{-1}\left(\left(\frac{b-a}{2}, b\right]\right)$ ya que si $x \in C_2$, entonces $f(x) = 1$. Además $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, pues $\left[a, \frac{b-a}{2}\right] \cap \left(\frac{b-a}{2}, b\right] = \emptyset$.

Por lo tanto, X es normal. □

Definiremos ahora lo que es un espacio conexo.

Definición 2.22. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Diremos que X es **disconexo** si existen dos abiertos U y V de X ajenos no vacíos tales que $X = U \cup V$. Diremos que X es **conexo** si no es disconexo.*

Definición 2.23. *Un subespacio* **A** *de X es **conexo** si con la topología relativa de A resulta ser un espacio conexo.*

Teorema 2.11. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Si $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$ es una familia de subconjuntos conexos tales que $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ es disconexo, entonces existen dos abiertos relativos U y V en $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ ajenos y no vacíos tales que $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = U \cup V$. Así, $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}$ para cada $\alpha \in I$, de esta manera $A_\alpha \subseteq U \cup V$ para todo $\alpha \in I$.

Como A_α es conexo se tiene que $A_\alpha \subseteq U$ o $A_\alpha \subseteq V$ para todo $\alpha \in I$. Si para alguna $\alpha' \in I$, $A_{\alpha'} \subseteq U$, entonces tenemos que $A_\alpha \subseteq U$ para todo $\alpha \in I$, pues como $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq A_{\alpha'} \subseteq U$ y además $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq A_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, de esta manera se tiene que $A_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A_\alpha \subseteq U$ para todo $\alpha \in I$. Así $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq U$ y $V = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

De lo que se concluye que $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ es conexo. □

Definición 2.24. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $p \in X$. La* ***componente conexa*** *de p en X es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a p. Notación: $C_p = \bigcup\{C \subseteq X; p \in C$ y C es conexo de $X\}$*

Note que por el Teorema 2.11 C_p es un conjunto conexo.

Proposición 2.3. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Las componentes son conjuntos cerrados en X.*

Demostración. Sea C_p una componente conexa de X. Como C_p es conexo, entonces $\overline{C_p}$ es un conjunto conexo que contiene a p, además sabemos que $C_p \subseteq \overline{C_p}$. Dado que las componentes son conjuntos conexos maximales se tiene que $C_p = \overline{C_p}$. Por lo tanto C_p es un conjunto cerrado. □

A continuación definiremos lo que es un espacio métrico, para ello comencemos con la definición de métrica

Definición 2.25. *Sea X un conjunto. Una* ***métrica*** *en X (también llamada distancia) es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que satisface las siguientes condiciones:*

a) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

b) $d(x, y) = d(y, x)$ *para cada* $x, y \in X$.

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in X$. *Esta propiedad es conocida como la desigualdad del triángulo*

Definición 2.26. *Un **espacio métrico** es una pareja ordenada (X, d) donde X es un conjunto y d es una métrica.*

Si X es un espacio métrico, entonces d genera una topología τ_d que tiene como base a la familia $\mathcal{B} = \{B_\epsilon(x) : x \in X, \epsilon > 0\}$, donde $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$.

No es difícil ver que si X es métrico y $Y \subseteq X$, entonces Y es métrico, y ser métrico se preserva bajo homeomorfismos.

Definición 2.27. *Un espacio topológico (X, τ_X) es **metrizable** si existe una métrica d sobre X que es compatible con la topología de X; es decir, la topología τ_d es igual a τ_X.*

Teorema 2.12. *(**Teorema de Urysohn 1925**.) Un espacio topológico X regular y con una base numerable es metrizable.*

Demostración. Probaremos que X es metrizable construyendo un encaje X en un espacio metrizable Y.

Como primer paso probaremos que existe una colección numerable de funciones continuas $f_n : X \to [0, 1]$ con la propiedad de que dado cualquier punto x_0 de X y cualquier abierto U de X que contiene a x_0, existe un índice n tal que f_n es positivo en x_0 y nulo fuera de U, como X es regular y Lindelöf, entonces por el Teorema 2.10 X es normal. Por el Lema de Urysohn, para cualquier x_0 y U un abierto de x_0 existe un función continua que es positiva en $\{0\}$ y se anula en $X \backslash U$. Podemos notar que si se eligen dichas funciones para cada par (x_0, U), la colección resultante no tiene porque ser numerable. Lo que se hará será disminuir el tamaño de esta colección.

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable para X. Sea $x \in X$ y $u \in \tau$ tal que $x \in U$, entonces existe B_n un básico tal que $x \in B_n \subseteq U$. Como X es regular del Teorema 1.3 existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq B_n \subseteq U$, así para n, m índices se tiene que $x \in B_m \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq B_n \subseteq U$, entonces $\overline{B_n} \subseteq B_m$, con $\overline{B_n} \cap (X \backslash B_m) = \emptyset$. Notemos que $\overline{B_n}$, $X \backslash B_m$ son subconjuntos cerrados de X, por el Lema de Urysohn ,existe una función continua $h_{n,m} : X \to [0, 1]$ tal que $h_{n,m}(\{\overline{B_n}\}) = \{1\}$ y $h_{n,m}(\{X \backslash B_m\}) = \{0\}$.

Renumeremos a la familia de funciones $\{h_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ de la forma $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Consideremos a $\mathbb{R}^w$ con la topología producto y definamos una función $f : X \to \mathbb{R}^w$ tal que $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$. Veamos que f es un encaje demostrando que f es continua, suprayectiva y que X es homeomorfo a $f[X]$.

Como $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ tiene la topología producto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que f_n es continua. Por lo tanto f es continua.

Veamos que f es inyectiva. Sean $x \neq y$. Como X es de Hausdorff existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Así existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(x) > 0$ y $f_k[X \backslash U] = 0$. Como $y \notin U$, $f_k(y) = 0$. Por lo que $f(x) = (f_1(X), f_2(x), \dots f_k(x), \dots) \neq (f_1(y), f_2(y), \dots f_k(y), \dots) = f(y)$. Por lo cual f es inyectiva.

De esta manera f es continua y biyectiva en su imagen.

Falta probar que f^{-1} es continua. Para ello mostraremos que f es una función abierta. Sea $U \in \tau_X$, veamos que $f[U] \in \tau_z$. Sea $z_0 \in f(U)$ y x_0 el elemento de U tal que $f(x_0) = z_0$. Como $U \in \tau_x$ y $x_0 \in U$ podemos encontrar una función continua f_N tal que $f_N(x_0) > 0$ y $f_n[X \backslash U] = 0$. Consideremos el rayo abierto $(0, \infty)$ de $\mathbb{R}$ y sea $V = \pi_N^{-1}[(0, \infty)]$ de $\mathbb{R}^w$. Sea $W = V \cap Z$, entonces W es un abierto de Z. Afirmamos que $z_0 \in W \subseteq f(U)$. En efecto, sea $z_0 \in W$ ya que $\pi_N(z_0) = \pi_N(f(x_0)) = f_N(x_0) > 0$, por lo que $\pi_N(z_0) \in (0, \infty)$.

Así, $z_0 \in V$ y $z_0 \in f(U) \subseteq Z$, por lo tanto $z_0 \in V \cap Z = W$. Por otro lado si $z \in W$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = z$ y como $z \in V$,entonces $\pi_N(z) \in (0, \infty)$. Pero $\pi_N(z) = \pi_N(f(x)) = f_N(x)$ y f_N es nulo fuera de U. Por lo que x debe de estar en U, es decir, $z \in f(x) \in f(U)$. Por lo tanto, f es un encaje de X en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el cual es metrizable, de donde $f(X)$ es metrizable, por lo que Entonces, X es también metrizable. $\square$

Definición 2.28. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío.*

Definición 2.29. *Un* ***subcontinuo*** *es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo. Es decir, es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de un continuo.*

Capítulo 3

Topología de identificación

Definición 3.1. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico, Y un conjunto arbitrario no vacío y $p : X \to Y$ una función suprayectiva.*

La topología de identificación *en Y determinada por la función p es la familia $\tau_p = \{U \subset Y : p^{-1}(U)$ es abierto en $X\}$*

Veamos que τ_p es una topología para Y. Como $\emptyset \subset Y$ y $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X$ entonces $\emptyset \in \tau_p$. Por otra parte, como $Y \subseteq Y$ y como p es suprayectiva, entonces $p^{-1}(Y) = X \in \tau_X$. Por lo tanto, $Y \in \tau_p$. Sea β una familia arbitraria de elementos de τ_p, probaremos que $\bigcup_{B\in\beta} B \in \tau_p$; es decir, $p^{-1}(\bigcup_{B\in\beta} B) \in \tau_X$. Notemos $p^{-1}(\bigcup_{B\in\beta} B) = \bigcup_{B\in\beta} p^{-1}(B)$. Como $p^{-1}(B) \in \tau_X$ para todo $B \in \beta$, entonces $\bigcup_{B\in\beta} p^{-1}(B) \in \tau_X$. Así, $p^{-1}(\bigcup_{B\in\beta} B) \in \tau_X$. Por lo tanto, $\bigcup_{B\in\beta} B \in \tau_p$. Sean, $B_1, B_2 \in \tau_p$. Notemos que $p^{-1}(B_1 \cap B_2) = p^{-1}(B_1) \cap p^{-1}(B_2)$. Como $p^{-1}(B_1), p^{-1}(B_2) \in \tau_X$ entonces $p^{-1}(B_1) \cap p^{-1}(B_2) \in \tau_X$, por lo cual $B_1 \cap B_2 \in \tau_p$. Por tanto, τ_p es una topología en Y.

Ejemplo 3.1. *Sea $p : I \to \{0, 1\}$ la función característica de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. La topología de identificación en $\{0, 1\}$ coincide con la topología de Sierpinski.*
Sea $Y = \{0, 1\}$, en efecto, $U = \{0\} \subseteq Y$, y $p^{-1}(U) = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ donde $\left[0, \frac{1}{2}\right) = (-1, \frac{1}{2}) \cap [0, 1]$. Así, $U \in \tau_p$.
Sea $V = \{1\} \subseteq Y$, y $p^{-1}(V) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que $V \notin \tau_p$, pues $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \notin \tau_I$, donde τ_I es la topología relativa en el intervalo $[0, 1]$.
Así $\tau_p = \{\emptyset, I, U\}$.

Observación 3.1. *Con esta topología, $B \subseteq Y$ cerrado si y sólo si $p^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

Demostración. Si $B \subseteq Y$ cerrado, entonces $Y \backslash B \in \tau_p$; es decir, $p^{-1}(Y \backslash B) \in \tau_X$. Como $p^{-1}(Y \backslash B) = p^{-1}(Y) \backslash p^{-1}(B) = X \backslash p^{-1}(B)$ y $p^{-1}(Y) = X$, entonces $X \backslash p^{-1}(B) \in \tau_X$. Así, $X \backslash (X \backslash p^{-1}(B)) = p^{-1}(B)$ es cerrado en X. Supongamos ahora que $p^{-1}(B)$ es cerrado en X, entonces $X \backslash p^{-1}(B) \in \tau_X$. Como $X \backslash p^{-1}(B) = p^{-1}(Y) \backslash p^{-1}(B) = p^{-1}(Y \backslash B)$, entonces $Y \backslash B \in \tau_p$. Por tanto B es cerrado. □

Una consecuencia inmediata que se desprende de tener esta topología en Y, la da el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *La topología de identificación es la topología más grande en Y tal que $p : X \to Y$ es continua.*

Demostración. Sea τ_Y una topología en Y tal que p es continua. Vamos a probar que $\tau_Y \subseteq \tau_p$. Sea $V \in \tau_Y$, entonces $p^{-1}(V) \in \tau_X$. Así, $V \in \tau_p$. Por lo tanto $\tau_Y \subseteq \tau_p$. □

Definición 3.2. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Una función continua y suprayectiva $p : X \to Y$ es llamada* ***función de identificación*** *siempre que la topología en Y es exactamente τ_p, es decir, $\tau_Y = \tau_p$.*

Notemos que bajo esta definición, se tiene que $U \in \tau_Y$ si y sólo si $p^{-1}(U) \in \tau_X$. Por otra parte, notemos que si queremos mostrar que p es una identificación, basta con probar que $\tau_p \subseteq \tau_Y$, pues por la Proposición 3.1 se tiene que siempre se cumple que $\tau_Y \subseteq \tau_p$. Mostraremos solo este hecho cuando se requiera demostrar que una función p es de identificación sin mencionarlo explícitamente y si no causa confusión al lector.

Ejemplo 3.2. *Sean* $X = [0,1] \cup [2,3]$ *un espacio topológico (con la topología relativa de* $\mathbb{R}$ *con la topología usual) y* $A = \{0,1\}$ *con la topología discreta. Afirmamos que la función* $p : X \to A$ *dada por*

$$p(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0,1] \\ \\ 1 & si \quad x \in [2,3] \end{cases}$$

es una función de identificación.
Observemos que la función p es suprayectiva, veamos que p es continua pues $p^{-1}(\{0\}) = [0,1] \in \tau_X$ *y* $p^{-1}(\{1\}) = [2,3] \in \tau_X$*. Así, p es continua y suprayectiva.*
Falta ver que $\tau_p = \tau_d$*. Como p es continua, por la Proposición 3.1 basta con ver que* $\tau_p \subseteq \tau_d$*.*
Como $\tau_p = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}\}$*, pues* $p^{-1}(\{0\}) = [0,1]$ *y* $p^{-1}(\{1\}) = [2,3]$*, de aquí que* $\{0\}$ *y* $\{1\} \in \tau_p$*, entonces* $\tau_p = \tau_d$
Por lo tanto p es una función de identificación.

Ejemplo 3.3. *Sean* $(\mathbb{R}, \tau_S)$ *el espacio topológico, con* τ_S *la topología de Sorgenfrey y* $(\mathbb{R}, \tau_U)$ *el espacio topológico, con* τ_U *la topología usual. Afirmamos que* $i : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_U)$ *la función identidad no es función de identificación. Claramente es suprayectiva y continua.*
Veamos que τ_i*, la topología de identificación con la función i, no coincide con* τ_U*.*
Sea $V = [a,b)$ *,* $a, b \in \mathbb{R}$*, notemos que* $V \notin \tau_U$*. Como* $i^{-1}(V) = V \in \tau_S$ *se tiene que* $V \in \tau_i$*.*
Por lo tanto i no es función de identificación.

Proposición 3.2. *Si la función identidad* $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ *es continua, entonces i es una identificación si y sólo si* $\tau_1 = \tau_2$*.*

Demostración. Primero veamos que $\tau_1 = \tau_2$. Sea $V \in \tau_1$, como $V = i^{-1}(V) \in \tau_1$ y la función i es de identificación, entonces $V \in \tau_2$ de donde $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Ahora, sea $U \in \tau_2$. Como i es continua, entonces $i^{-1}(U) = U \in \tau_1$. Así, $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Por tanto $\tau_1 = \tau_2$.

Probaremos que la función identidad i es una identificación. Probaremos que $\tau_i \subseteq \tau_2$. Sea $V \in \tau_i$, dado que i es continua, entonces $i^{-1}(V) \in \tau_1 = \tau_2$, así , $V = i^{-1}(V) \in \tau_2$. □

Proposición 3.3. *Sea $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ la función identidad dada por $i(x) = x$. La función i es un homeomorfismo si y sólo si $\tau_1 = \tau_2$.*

Demostración. Sea $U \in \tau_1$, veamos que $U \in \tau_2$. Como i es un homeomorfismo se tiene que $i^{-1} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ es continua, entonces $(i^{-1})^{-1}(U) = U \in \tau_2$. De manera análoga, si $U \in \tau_2$, entonces $U = i^{-1}(U) \in \tau_1$. Por lo tanto $\tau_1 = \tau_2$.

Supongamos ahora que $\tau_1 = \tau_2$. Mostraremos que i es un homeomorfismo. Claramente i es biyectiva. Sea $U \in \tau_2$. Como $U = i^{-1}(U)$ y $\tau_1 = \tau_2$, entonces $U \in \tau_1$. Así, i es continua. De manera similar se prueba que i^{-1} es continua.

Por lo tanto i es un homeomorfismo. □

Corolario 3.1. *Sea $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ la función identidad. Entonces i es un homeomorfismo si y sólo si la función i es una identificación.*

Demostración. La prueba se sigue de la Proposición 3.2 y de la Proposición 3.3 □

Veamos algunos resultados para los cuales dada una función p se tiene una función de identificación.

Proposición 3.4. *Si $p : X \to Y$ es una función abierta, continua y suprayectiva, entonces p es una identificación.*

Demostración. Vamos a probar que $\tau_Y = \tau_p$. Probaremos que $\tau_p \subseteq \tau_Y$. Sea $V \in \tau_p$, de donde $p^{-1}(V) \in \tau_X$. Como p es abierta y suprayectiva, entonces $V = p(p^{-1}(V)) \in \tau_Y$. Por tanto $\tau_p \subseteq \tau_Y$. De lo anterior $\tau_p = \tau_Y$. □

Proposición 3.5. *Si $p : X \to Y$ es una función continua, cerrada y suprayectiva, entonces p es una identificación*

Demostración. Mostraremos que $\tau_p \subseteq \tau_Y$. Sea $V \in \tau_p$, entonces $p^{-1}(V) \in \tau_X$. Notemos que $X \backslash p^{-1}(V)$ es cerrado en X. Al ser p una función cerrada se tiene que $p(X \backslash p^{-1}(V))$ es un conjunto cerrado en Y. Como p es suprayectiva $p(X \backslash p^{-1}(V)) = p(X) \backslash p(p^{-1}(V)) = Y \backslash V$ es cerrado en Y. Así, $V \in \tau_Y$. Por tanto $\tau_p = \tau_Y$. □

Nótese que como un homeomorfismo es abierto y cerrado tenemos como consecuencia que todo homeomorfismo es una función de identificación.

Corolario 3.2. *Sean X y Y continuos. Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces f es una identificación.*

Demostración. Afirmamos que $f : X \to Y$ es una función cerrada. Como X es un continuo, se tiene que X es un espacio compacto y dado que Y es un espacio métrico, es de Hausdorff. Así, por el Teorema 2.8 se tiene que f es cerrada y por la Proposición 3.5 concluimos que f es una identificación. $\square$

Una manera de determinar cuando una función es de identificación es haciendo uso del siguiente resultado.

Proposición 3.6. *Sea $p : X \to Y$ continua. Si existe $s : Y \to X$ continua tal que $p \circ s = I_y$, entonces p es una identificación.*

Demostración. Supongamos que existe una función $s : Y \to X$ continua tal que $p \circ s = I_y$. Probaremos que $\tau_p \subseteq \tau_Y$. Sea $V \in \tau_p$, entonces $p^{-1}(V) \in \tau_X$. Como s es continua, $s^{-1}(p^{-1}(V)) \in \tau_Y$. Dado que $s^{-1}(p^{-1}(V)) = (p \circ s)^{-1}(V) = (I_y)^{-1}(V) = V$, se tiene que $V \in \tau_Y$. Por lo tanto, p es una identificación. $\square$

Definición 3.3. *Diremos que $A \subseteq X$ es un **retracto** de X si y sólo si existe una función continua $r : X \to A$ dada por $r(a) = a$ para cada $a \in A$, a la cual llamaremos **retracción**.*

Ejemplo 3.4. *Sea $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = A$ definida por $r(\overline{x}) = \frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}$, entonces r es una retracción.*

Demostración. Note que $r(\overline{x}) \in A$ y si $\overline{a} \in A$, entonces $r(\overline{a}) = \frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|} = \overline{a}$ pues $\|\overline{a}\| = 1$, Así $r(\overline{a}) = \overline{a}$. Por lo tanto r es una retracción. $\square$

Proposición 3.7. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio cerrado de X. $r : X \to A$ es una retracción de X a A, entonces r es una función de identificación.*

Demostración. Sea $r : X \to A$ una función continua tal que $r(a) = a$ para toda $a \in A$ y sea $s : A \to X$ la función inclusión, es decir $s(a) = a$, la cual es continua. Observemos que $r \circ s(a) = r(a) = a = I_A$. Así, por la Proposición 3.6, r es una identificación. $\square$

Notemos que la función r de la Proposición 3.4 es una función de identificación, por ser un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ a S^1.

Definición 3.4. *Consideremos X,Y espacios topológicos y $p : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Diremos que $A \subseteq X$ es **p-saturado** si y sólo si $A = p^{-1}(C)$, para algún subconjunto C de Y.*

Definición 3.5. *El conjunto **p-cargado de A** es el conjunto $B = p^{-1}(p(A))$. Nótese que $A \subseteq B$.*

Proposición 3.8. *A es p-saturado si y sólo si $A = p^{-1}(p(A))$.*

Demostración. Supongamos que A es p-saturado, entonces $A = p^{-1}(C)$ para algún $C \subseteq Y$. Así, $p(A) = p(p^{-1}(C))$. Por lo que $p^{-1}(p(A)) = p^{-1}(p(p^{-1}(C)) = p^{-1}(C) = A$ debido a que p es suprayectiva. Por lo tanto $A = p^{-1}(p(A))$.

Por otra parte si $A = p^{-1}(p(A))$, entonces A es p-saturado usando $C = p(A)$ □

Proposición 3.9. *Sea $p : X \to Y$ una identificación, entonces la función p es abierta si y sólo si el conjunto p-cargado de cada abierto en X es abierto en X.*

Demostración. Supongamos que p es abierta. Veamos que $p^{-1}(p(U)) \in \tau_X$. Sea $U \in \tau_X$. Como p es abierta, entonces $p(U) \in \tau_Y$. Dado que p es una identificación se tiene que el conjunto p-cargado $p^{-1}(p(U)) \in \tau_X$. Ahora veamos que p es abierta. Sea $U \in \tau_X$, entonces $p^{-1}(p(U)) \in \tau_X$. Como p es una identificación se tiene que $p(U) \in \tau_Y$. Por tanto p es abierta. □

Proposición 3.10. *Sea $p : X \to Y$ una identificación. La función p es cerrada si y sólo si el conjunto p-cargado de cada cerrado en X, es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que p es cerrada. Sea F un conjunto cerrado en X, veamos que $p^{-1}(p(F))$ es cerrado en X. Al ser p cerrada, $p(F)$ es cerrado en Y. Como p es una identificación se tiene por la Observación 3.1 que el conjunto p- cargado $p^{-1}(p(F))$ es cerrado en X. Ahora veamos que p es cerrada. Si F conjunto cerrado en X, entonces por hipótesis $p^{-1}(p(F))$ es cerrado en X. Como p es una identificación se tiene que $p(F)$ es cerrado en Y. Por tanto p es cerrada. □

Se sabe que la composición de funciones continuas es continua. Una pregunta natural es bajo que condiciones la continuidad de una composición implica la continuidad de los elementos que componen la composición. La propiedad fundamental de las funciones de identificación da una respuesta parcial a dicha pregunta.

Teorema 3.1. *Sea $p : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función continua y suprayectiva. La función p es una identificación si y sólo si para cada espacio (Z, τ_Z) y para cada función $g : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$ la continuidad de $g \circ p$ implica la continuidad de g.*

Demostración. Sean (Z, τ_Z) un espacio topológico y $g : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$ una función tal que $g \circ p$ es continua. Probaremos que g es continua. Sea $U \in \tau_Z$. Como $g \circ p$ es continua, entonces $(g \circ p)^{-1}(U) \in \tau_X$. Dado que $(g \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau_X$ y p es una función de identificación se tiene que $g^{-1}(U) \in \tau_Y$. Por lo tanto g es una función continua. Ahora probaremos que p es una función de identificación. Sean $p^* : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_p)$ donde Y tiene la topología de identificación dada por p, marcaremos a p con asterisco en esta ocasión solo para hacer la diferencia que Y tiene la topología τ_p dada por la función p. Sea $i : (Y, \tau_Y) \to (Y, \tau_p)$ la función identidad. Afirmamos que (Y, τ_Y) es homeomorfo a (Y, τ_p). Notemos que $i \circ p = p^*$. Como p y p^* son continuas, entonces aplicando la hipótesis que tenemos i es una función continua. Por otra parte como $i^{-1} \circ p^* = p$, y p^* y p son continuas dado que p^* es una función de identificación, la primer parte de este teorema asegura que i^{-1} es una función continua. Dado que i e i^{-1} son inversas y continuas, tenemos que (Y, τ_Y) es homeomorfo a (Y, τ_p) con la función identidad. Por la Proposición 3.2 se tiene que $\tau_i = \tau_Y$. Por lo tanto se tiene que p es una identificación. □

Uno de los resultados más usados e importantes dentro de la teoría de funciones de identificación es el siguiente.

Teorema 3.2. ***Teorema de transgresión.*** *Sea $p : X \to Y$ una identificación y $h : X \to Z$ una función continua. Supongamos que hp^{-1} tiene valor único; esto es, h es constante en cada fibra $p^{-1}(y)$. Entonces:*

1. *$hp^{-1} : Y \to Z$ es continua y el diagrama de abajo conmuta.*
2. *$hp^{-1} : Y \to Z$ es abierta (cerrada) si y sólo si $h(U)$ es abierto (cerrado) siempre que U es abierto (cerrado) y satisface que $U = p^{-1}(p(U))$, esto es, si $h(U)$ es abierto (cerrado) siempre que U sea un conjunto abierto (cerrado) p-saturado.*

Demostración. 1. Para probar que hp^{-1} es continua, probaremos que $hp^{-1} \circ p = h$ y haciendo uso del Teorema 3.1 se concluirá que hp^{-1} es continua. Sea $x \in X$, notemos que $p^{-1}(p(x)) = \{w \in X : p(w) = p(x)\}$,

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, "hp^{-1}"] \\
Z &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.1: Diagrama del Teorema de Transgresión (1)

de donde $x \in p^{-1}(p(x)$. Ahora bien, como h es constante en cada fibra, entonces $h(p^{-1}(p(x))) = z$ para algún $z \in Z$. Así, $((hp^{-1}) \circ p)(x) = h(p^{-1}(p(x))) = z = h(x)$. Dado que h y p son continuas, $((hp^{-1}) \circ p)$ es continua, entonces por Teorema 3.1 se tiene que hp^{-1} es continua.

2. $\Rightarrow$) Supongamos que $hp^{-1} : Y \to Z$ es abierta. Sea $U \in \tau_X$ tal que $U = p^{-1}(p(U)) \in \tau_X$. Como p es función de identificación $p(U) \in \tau_Y$, además como hp^{-1} es abierta se tiene que $hp^{-1}(p(U)) \in \tau_Z$. Así, $hp^{-1}(p(U)) = h(U) \in \tau_Z$.

   $\Leftarrow$) Ahora probaremos que $hp^{-1} : Y \to Z$ es abierta. Sea $V \in \tau_Y$. Como p es una función continua y suprayectiva, entonces $U = p^{-1}(V) \in \tau_X$ y $p^{-1}(p(U)) = p^{-1}(p(p^{-1}(V))) = p^{-1}(V) = U$, de donde U es un conjunto p-saturado. Así, por hipótesis, $h(U) \in \tau_Z$. Por otra parte $h(U) = h(p^{-1}(p(U))) = h(p^{-1}(V)) = (hp^{-1})(V)$. De esta manera $(hp^{-1})(V) \in \tau_Z$, por lo que hp^{-1} es una función abierta. $\Rightarrow$) Ahora supongamos que si $hp^{-1} : Y \to Z$ es cerrada y F es un subconjunto cerrado de X tal que $F = p^{-1}(p(F))$. Como p es función de identificación, se tiene por la observación 3.1 que $p(F)$ es un subconjunto cerrado de Y, además dado que hp^{-1} es cerrada se tiene que $hp^{-1}(p(F))$ es un subconjunto cerrado de Z. Así $hp^{-1}(p(F)) = h(F)$ es un subconjunto cerrado de Z. $\Leftarrow$) Probaremos que $hp^{-1} : Y \to Z$ es cerrada. Sea K subconjunto cerrado de Y. Como p es una función continua y suprayectiva, entonces $F = p^{-1}(K)$ cerrado en X y $p^{-1}(p(F)) = p^{-1}(p(p^{-1}(K))) = p^{-1}(K) = F$, de donde F es un conjunto p-saturado. Así por hipótesis $h(F)$ es un subconjunto cerrado de Z. Por otra parte $h(F) = h(p^{-1}(p(F))) = h(p^{-1}(K)) = (hp^{-1})(K)$. De esta manera , $(hp^{-1})(K)$ es un subconjunto cerrado de Z. Así, hp^{-1} es una función cerrada.

$\square$

Teorema 3.3. ***Teorema de transitividad.*** *Sean $p : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_p)$ es una función de identificación , Z un conjunto no vacío y $g : (Y, \tau_Y) \to Z$ una función suprayectiva entonces $\tau_g = \tau_{g\circ p}$. En particular, $g \circ p$ es una función de identificación si y sólo si g es una identificación.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g \circ p"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Figura 3.2: Diagrama del Teorema de transitividad

Demostración. Primero probaremos que $\tau_g \subseteq \tau_{g\circ p}$. Notemos $g \circ p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_g)$ es continua y suprayectiva pues p y $g : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_g)$ son continuas y suprayectivas. Por otro lado como la función $g \circ p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_{g\circ p})$ es continua y $\tau_{g\circ p}$ es la topología más grande en Z que hace continua a $g \circ p$, entonces por la Proposición 3.1 se tiene que $\tau_g \subseteq \tau_{g\circ p}$.

Ahora veamos que $\tau_{g\circ p} \subseteq \tau_g$. Como $g\circ p : (X, \tau_X) \to (Z, T_{g\circ p})$ es continua y p es una función de identificación, entonces $g : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_{g\circ p})$ es continua. Por otro lado, $g : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_g)$ es continua. Así, por la Proposición 3.1 obtenemos que τ_g es la topología más grande en Z tal que g es continua, de modo que $\tau_{g\circ p} \subseteq \tau_g$. Por tanto, $\tau_Y = \tau_{g\circ p}$.

Como $\tau_g = \tau_{g\circ p}$, entonces g es también función de identificación si y sólo si $\tau_g = \tau_Z$ si y sólo si $\tau_z = \tau_{g\circ p}$ si y sólo si $g \circ p$ es una función de identificación. $\square$

Capítulo 4

Subespacios y topología de identificación

Sea $p : X \to Y$ una función de identificación y sea $F \subset Y$. Asignemos a F dos topologías:

- La topología de subespacio de Y que denotamos por $\tau(F)$
- La topología de identificación $\tau(p, F)$, donde $\tau(p, F)$ está determinada por la función suprayectiva $p : p^{-1}(F) \to F$. Realmente en esta parte estamos haciendo un abuso de notación pues la función definida aquí sería una función $q : p^{-1}(F) \to F$ dada por $q = p|_{p-1(F)}$. Si no causa confusión mantendremos la notación usando la misma letra p.

Uno de los objetivos principales de esta sección es determinar cual es la relación entre las topologías $\tau(F)$ y $\tau(p, F)$.

Proposición 4.1. *Sea $p : X \to Y$ una función de identificación, entonces la función $p : p^{-1}(F) \to F$ es continua cuando F tiene la topología $\tau(F)$.*

Demostración. Como $p : X \to Y$ es continua con τ_Y, entonces $p|_{p-1(F)} : p^{-1}(F) \to F$ es continua cuando F tiene la topología τ_F. $\square$

Observemos que por el Lema 4.1, $p : p^{-1}(F) \to F$ es continua y aplicando la Proposición 3.1 se tiene que $\tau(F) \subseteq \tau(p, F)$.

Veamos un ejemplo en donde $\tau(F) \neq \tau(p, F)$.

Ejemplo 4.1. *Sean* $F = \mathbb{I} \cap [0,1]$ *y* $Y = \{1\} \cup F$ *donde* $\mathbb{I}$ *son los números irracionales. Sea* $p : [0,1] \to Y$ *determinada por:*

$$p(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in F \\ \\ 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Consideremos a Y *con la topología de identificación. Notemos primero que si* $U \in \tau_Y$*, entonces* $p^{-1}(U)$ *contiene a* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$*, pues como* $p^{-1}(U)$ *es abierto en* $[0,1]$*, entonces existe* $x \in \mathbb{Q} \cap p^{-1}(U)$ *por la densidad de* $\mathbb{Q}$ *en* $[0,1]$ *con la topología usual. Así,* $x \in p^{-1}(U)$ *y* $p(x) = 1 \in U$*. De esta forma* $\mathbb{Q} \cap [0,1] = p^{-1}(\{1\}) \subseteq p^{-1}(U)$*.*
Consideremos a $q = p|_{p^{-1}(F)} : p^{-1}(F) \to F$ *la función de identificación sobre* F*. Veamos que* $\tau(p,F) \neq \tau(F)$*. Observemos que* $q = I_{p^{-1}(F)}$*. De esta manera el conjunto* $F \cap (0, \frac{1}{2})$ *es un abierto de* $\tau(p,F)$*, pues* $F \cap (0, \frac{1}{2}) = q^{-1}(F \cap (0, \frac{1}{2}))$ *es abierto en* $p^{-1}(F) = F$*. Sin embargo* $F \cap (0, \frac{1}{2}) = (F \cap (0, \frac{1}{2})) \cap F \notin \tau(F)$ *ya que* $F \cap (0, \frac{1}{2}) \notin \tau_Y$*. Por lo que* $\tau(F) \neq \tau(p,F)$*.*

En este capítulo denotaremos a $\mathcal{F}(p,F)$ a la familia de cerrados con la topología de identificación y a $\mathcal{F}(X)$ a la familia de cerrados con la topología de subespacios y si τ_1 y τ_2 son dos topologías en X, entonces $\mathcal{F}_1(X)$ y $\mathcal{F}_2(X)$ denotarán los cerrados de X con respecto a τ_1 y τ_2 respectivamente.

Teorema 4.1. *Sean* $p : X \to Y$ *una identificación y* $F \subseteq Y$*. Si* F *es un conjunto abierto (cerrado) en* Y *(sin restricción en* p*), entonces* $\tau(F) = \tau(p,F)$

Demostración. Supongamos que $F \in \tau_Y$. Por la Proposición 3.1, es suficiente con mostrar que $\tau(p,F) \subseteq \tau(F)$. Sea $U \in \tau(p,F)$, entonces $p^{-1}(U) \in \tau_{p^{-1}(F)}$; es decir $p^{-1}(U) = p^{-1}(F) \cap V$, donde $V \in \tau_X$. Como $F \in \tau_Y$ y p es continua, se tiene que $p^{-1}(F) \in \tau_X$. Así, $p^{-1}(U) \in \tau_X$. Por lo que $U \in \tau_p = \tau_Y$. Dado que $U = U \cap F$, se tiene que $U \in \tau_F$.

Ahora, sea F es cerrado en Y. De la continuidad de p y por la Proposición 2.1, basta con probar que $\mathcal{F}(p,F) \subseteq \mathcal{F}(F)$. Sea $C \in \mathcal{F}(p,F)$, entonces $p^{-1}(C)$ es cerrado en $p^{-1}(F)$. Como F es cerrado en Y y p es continua entonces $p^{-1}(F)$ es cerrado en X. Así, $p^{-1}(C)$ es cerrado en X, esto implica que C es cerrado en Y y como F es cerrado y $C = C \cap F$, entonces $C \in \mathcal{F}(F)$. De ahí que $\tau(p, F) \subseteq \tau(F)$ y de la Proposición 2.1, $\tau(p, F) \subseteq \tau(F)$. $\square$

Teorema 4.2. *Sean $p : X \to Y$ una identificación y $F \subseteq Y$ si p es una función abierta (cerrada) (sin restricción en F), entonces $\tau(F) = \tau(p, F)$*

Demostración. Supongamos que $p : X \to Y$ es una función abierta. Solo es necesario probar que $\tau(p, F) \subseteq \tau(F)$. Sea $U \in \tau(p, F)$, entonces $p^{-1}(U) \in \tau_{p^{-1}(F)}$. De ahí que $p^{-1}(U) = p^{-1}(F) \cap V$, con $V \in \tau_X$. Dado que $p(p^{-1}(U)) = p(p^{-1}(F) \cap V)$, entonces $U = F \cap p(V)$. Como $V \in \tau_X$ y p es una función abierta, entonces $p(V) \in \tau_Y$. Así, $U \in \tau_F$.

Ahora supongamos que p es una función cerrada. De la Proposición 2.1, basta con probar que $\mathcal{F}(p, F) \subseteq \mathcal{F}(F)$. Sea $C \in \mathcal{F}(p, F)$. De la continuidad de p, $p^{-1}(C)$ es cerrado en $p^{-1}(F)$, además $p^{-1}(C) = p^{-1}(F) \cap G$, con G cerrado en X. Notemos que $p(p^{-1}(C)) = p(p^{-1}(F) \cap G)$ de lo cual se tiene que $C = F \cap p(G)$, con $p(G)$ cerrado en Y. Así $C \in \mathcal{F}(F)$. De ahí que $\mathcal{F}(p, F) \subseteq \mathcal{F}(F)$. Por tanto $\tau(F) \supseteq \tau(p, F)$. $\square$

Teorema 4.3. *Sea $p : X \to Y$ una función continua y abierta (cerrada), si $p^{-1}(y)$ es conexo para todo $F \subseteq Y$, F es conexo si y sólo si $p^{-1}(F)$ es conexo.*

Demostración. Basta con probar que si F es conexo, entonces $p^{-1}(F)$ es conexo. Por el Teorema 4.2, F tiene la topología de identificación determinada por $q = p|_{p^{-1}(F)}$. Si $p^{-1}(F)$ no es conexo, existe una función continua y suprayectiva $h : p^{-1}(F) \to (\{0, 1\}, \tau_d)$; dado que h es continua y cada fibra $q^{-1}(y)$ es conexo, entonces $h(q^{-1}(y))$ es conexo; esto es $h(q^{-1}(y)) = \{0\}$ ó $h(q^{-1}(y)) = \{1\}$, es decir, h es constante en cada fibra de $q^{-1}(y)$. Por el Teorema de Transgresión 3.2 la función $hp^{-1} : F \to (\{0, 1\}, \tau_d)$ es continua y suprayectiva. Por lo que F es disconexo, lo cuál es una contradicción.

Probemos ahora que $F \subseteq Y$ es conexo. Por hipótesis $p^{-1}(F)$ es conexo en X entonces $p(p^{-1}(F)) = F$ es conexo en Y dado que p es continua y suprayectiva. Por lo tanto F es conexo. $\square$

Corolario 4.1. *Sea $p : X \to Y$ una identificación tal que $p^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$. Entonces $F \subseteq Y$ abierto (cerrado) es conexo si y sólo si $p^{-1}(F)$ es conexo.*

Demostración. Sea $F \subseteq Y$ abierto y conexo. Primero probaremos que $p^{-1}(F)$ es conexo.

Supongamos $p^{-1}(F)$ no es conexo, entonces existe una función $h : p^{-1}(F) \to (\{0,1\}\ , \tau_{dis})$ continua y suprayectiva. Usaremos el Teorema de la Transgresión para llegar a una contradicción. Veamos que h es constante en cada fibra $p^{-1}(y)$. Sea $y \in F$. Notemos $p^{-1}(y) \subseteq p^{-1}(F)$. Como F es abierto (cerrado) , entonces por el Teorema 4.1 podemos tomar a la función q : $p^{-1}(F) \to F$ que es una función de identificación dada como $q = p|_{p^{-1}(F)}$. Así, $q^{-1}(y) = p^{-1}(y)$. Por hipótesis , $p^{-1}(y)$ es conexo. De esta manera $h(q^{-1}(y))$ es conexo en $\{0,1\}$. Como $\{0,1\}$ es disconexo con τ_{dis}, entonces $h(q^{-1}(y)) \neq \{0,1\}$. De ahí, $h(q^{-1}(y)) = \{0\}$ o $h(q^{-1}(y)) = \{1\}$. Por lo tanto h es constante en cada fibra. Dado que q es una función de identificación tenemos por el Teorema de la Transgresión que $hq^{-1} : F \to (\{0,1\}, \tau_{dis})$ es continua y suprayectiva, esto es una contradicción pues F es conexo. Por tanto $p^{-1}(F)$ es conexo. Probemos ahora que $F \subseteq Y$ es conexo. Por hipótesis $p^{-1}(F)$ es conexo en X entonces $p(p^{-1}(F)) = F$ es conexo en Y dado que p es continua y suprayectiva. Por lo tanto F es conexo. $\square$

Definición 4.1. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Diremos que* ***f*** *es* ***monótona*** *si $f^{-1}(y)$ es conexo en X para cada $y \in Y$.*

Corolario 4.2. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Entonces f es monótona si y sólo si $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X para cada subcontinuo K de Y.*

Demostración. Notemos primero que del Corolario 3.2, f es una identificación. Supongamos que f es monótona y sea $K \subseteq Y$ un subcontinuo de Y, entonces K es cerrado y conexo entonces por el Teorema 4.3 se tiene que $f^{-1}(K)$ es conexo y $f^{-1}(K)$ es un cerrado en un continuo. Por lo tanto $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X. Veamos ahora que f es monótona. Sea $y \in Y$, como Y es un continuo en particular es T_1. Así, $\{y\}$ es cerrado en Y y además es conexo, por lo que $f^{-1}(\{y\})$ es un subcontinuo de X. Como $f^{-1}(\{y\})$ es un subcontinuo de X, entonces $f^{-1}(\{y\})$ es conexo en X para cada $y \in Y$. Por lo tanto F es monótona. $\square$

Proposición 4.2. *Sea X un espacio métrico y compacto. Si*

$$\mathcal{D} = \{D \subseteq \mathcal{X} : \mathcal{D} \text{ es componente conexa de } \mathcal{X}\}$$

, entonces $\mathcal{D}$ es totalmente disconexo.

Demostración. Sea $p : X \to \mathcal{D}$ la función natural que como sabemos es una función de identificación. Mostraremos que cada componente de $\mathcal{D}$ es degenerada. Notemos primero que $p^{-1}(\{D\}) = D$ es conexo por ser una componente de X. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ una componente. Como $\mathcal{C}$ es componente es un conjunto cerrado. De esta manera por el Corolario 4.1 $p^{-1}(\mathcal{C})$ es conexo en X.

Ahora bien si $x \in p^{-1}(F)$ y C_p es la componente conexa de X que contiene a x, $p^{-1}(F) \subseteq C_x$. Esto implica que $p(p^{-1}(F)) \subseteq p(C_x) = \{C_x\}$, pero $p(p^{-1}(F)) = F$. Así, $F = \{C_x\}$, es decir, F es degenerado. Por lo tanto $\mathcal{D}$ es totalmente disconexo.

$\square$

Capítulo 5

Espacios cociente de descomposición

En este capítulo estudiaremos una clase especial de espacios de identificación determinados por una partición (ó relación de equivalencia). En la práctica estos espacios son muy usados para determinar ejemplos o contraejemplos a teoremas o conjeturas dentro de la Topología General y el Álgebra. A estos espacios se les llama **espacios de descomposición** o **espacios cocientes**. Seguiremos ahora nuestro análisis usando esta clase de espacios.

Definición 5.1. *Para un conjunto A no vacío, diremos que una familia $\mathcal{D} = \{A_i \subseteq A : i \in I\}$ de subconjuntos de A constituyen una partición de A si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $A = \bigcup \mathcal{D}$.
2. $A_i \neq \emptyset$*; para todo* $i \in I$.
3. $A_i \cap A_j = \emptyset$*; para todo* $i \neq j$ *e* $i, j \in I$.

Si A es un espacio topológico y si cada A_i es un conjunto cerrado (abierto) de A, decimos que $\mathcal{D}$ es una partición cerrada (abierta) de A.

Para un espacio topológico (X, τ_X) y $\mathcal{D}$ una partición de X definamos la siguiente familia $\tau(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D} : \bigcup \mathcal{U} \in \tau_X\}$.

Proposición 5.1. $\tau(\mathcal{D})$ *es una topología para* $\mathcal{D}$.

Demostración. Como $\emptyset \subseteq \mathcal{D}$ y $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \tau_X$, entonces $\emptyset \in \tau(\mathcal{D})$. Por otra parte $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ y $\bigcup \mathcal{D} = X \in \tau_X$, entonces $\mathcal{D} \in \tau(\mathcal{D})$.

Sea $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia arbitraria de elementos de $\tau_{\mathcal{D}}$, probaremos que $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha \in \tau(\mathcal{D})$ es decir $\bigcup(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha) \in \tau_X$.

Afirmamos que $\bigcup(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I}(\bigcup \mathcal{B}_\alpha)$. Sea $x \in \bigcup(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha)$, entonces $x \in A$ para algún $A \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha$; es decir, existe, $\alpha_0 \in I$ tal que $A \in \mathcal{B}_{\alpha_0}$, de modo que $A \subseteq \bigcup \mathcal{B}_{\alpha_0}$. Como $x \in A$ y $A \in \mathcal{B}_{\alpha_0}$, se tiene que $x \in \bigcup \mathcal{B}_{\alpha_0}$. Por lo cual $x \in \bigcup_{\alpha \in I}(\bigcup \mathcal{B}_\alpha)$. Por tanto $\bigcup(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I}(\bigcup \mathcal{B}_\alpha)$.

Por otra parte, sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I}(\bigcup \mathcal{B}_\alpha)$, entonces $x \in \bigcup \mathcal{B}_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in I$, luego $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{B}_{\alpha_0}$. Como $A \in \mathcal{B}_{\alpha_0}$ se tiene $A \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha$. Dado que $x \in A$ y $A \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha$, entonces $x \in \bigcup(\bigcup_{\mathcal{B} \in I} \beta_\alpha)$. Con lo cual queda demostrada la afirmación. Como $\bigcup_{\alpha \in I}(\bigcup \mathcal{B}_\alpha) \in \tau_X$, entonces $\bigcup(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha) \in \tau_X$.

Ahora, sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \tau(\mathcal{D})$, entonces $\bigcup \mathcal{B}_1, \bigcup \mathcal{B}_2 \in \tau_X$. Probaremos $(\bigcup \mathcal{B}_1) \cap (\bigcup \mathcal{B}_2) = \bigcup(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$.

Sea $x \in (\bigcup \mathcal{B}_1) \bigcap (\bigcup \mathcal{B}_2)$, entonces existen $A_1 \in \mathcal{B}_1$ y $A_2 \in \mathcal{B}_2$ tales que $x \in A_1$ y $x \in A_2$, así $x \in A_1 \bigcap A_2$. Como $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$ se tiene que $A_1 = A_2$, por lo que $A_1 \in \mathcal{B}_1 \bigcap \mathcal{B}_2$. De esta manera $x \in \bigcup(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$.

Por otra parte si $x \in \bigcup(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$, entonces $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{B}_1 \bigcap \mathcal{B}_2$. Por lo tanto $x \in \bigcup \mathcal{B}_1$ y $x \in \bigcup \mathcal{B}_2$ es decir $x \in (\bigcup \mathcal{B}_1) \bigcap (\bigcup \mathcal{B}_2)$.

Dado que $(\bigcup \mathcal{B}_1) \bigcap (\bigcup \mathcal{B}_2) = \bigcup(\mathcal{B}_1 \bigcap \mathcal{B}_2)$ y $(\bigcup \mathcal{B}_1) \bigcap (\bigcup \mathcal{B}_2) \in \tau_X$, entonces $\bigcup(\mathcal{B}_1 \bigcap \mathcal{B}_2) \in \tau_X$.

Con lo cuál podemos concluimos que $\tau(\mathcal{D})$ es una topología para $\mathcal{D}$. $\square$

Definición 5.2. *Sea $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural dada por $\pi(x) = D$, donde D es el único $D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D$. Notemos que D es único pues $\mathcal{D}$ es una partición por lo cual π está bien definida.*

Proposición 5.2. *La proposición natural $\pi : X \to \mathcal{D}$ es una función de identificación; es decir $\tau_\pi = \tau(\mathcal{D})$,*

Demostración. Probaremos primero que para todo $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, $\bigcup \mathcal{U} = \pi^{-1}(U)$. Notemos que $x \in \bigcup \mathcal{U}$, si y sólo si existe $D \in \mathcal{U}$ tal que $x \in D$, esto ocurre si y sólo si $\pi(x) = D$; esto pasa si y sólo si $x \in \pi^{-1}(U)$. De esta manera si $\mathcal{U} \in \tau(\mathcal{D})$, $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_X$. De la igualdad probada tenemos que $\mathcal{U} \in \tau_\pi$. Inversamente si $\mathcal{U} \in \tau_\pi$, $\pi^{-1}(U) \in \tau_X$ y de la igualdad anterior tenemos que $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_X$. Así, $\mathcal{U} \in \tau(\mathcal{D})$. $\square$

Note que bajo lo probado aquí $\mathcal{U} \in \tau(\mathcal{D})$ si y sólo si $\bigcup \mathcal{U} = \pi^{-1}(\mathcal{U})$ y por la Proposición 3.1 $\tau(\mathcal{D})$ es la topología más grande en $\mathcal{D}$ que hace continua a π.

El espacio topológico $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es llamado espacio de descomposición de X, más simple, una descomposición de X. La topología $\tau(\mathcal{D})$ es llamada la topología de descomposición. Intuitivamente, una descomposición es un espacio obtenido del espacio original "pegando"todos los puntos de cada miembro de una partición dada.

Proposición 5.3. *Un espacio de descomposición $\mathcal{D}$ de X es T_1 si y sólo si la descomposición es cerrada.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Notemos que para cada $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $\pi^{-1}(\{D\}) = D$. De esta manera, D es cerrado en X si y sólo si $\mathcal{D}$ es T_1, es decir, la descomposición es cerrada si y sólo si $\mathcal{D}$ es T_1. $\square$

El siguiente resultado relaciona a los espacios de identificación con los espacios de descomposición. Además es una herramienta muy usada para determinar en muchos casos modelos geométricos de espacios cociente.

Teorema 5.1. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una identificación. Si $\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$, entonces $\mathcal{D}_f$ es homeomorfo a Y.*

Demostración. Sea $\pi : X \to \mathcal{D}_f$ la función natural. Veamos primero que π es constante en cada fibra $f^{-1}(y)$, pues $\pi(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y)$. Dado que f es una identificación, se tiene por el Teorema de la Transgresión que $h = \pi f^{-1}$ es continua. Por otra parte, f es constante en cada fibra $\pi^{-1}(f^{-1}(y))$ $(y \in Y)$, pues $f(\pi^{-1}(f^{-1})(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$. Como π es una función de identificación, por el Teorema de la Transgresión se tiene que $g = f\pi^{-1}$ es continua. Finalmente probaremos que las funciones $h : Y \to \mathcal{D}_f$ y $g : \mathcal{D}_f \to Y$ son funciones inversas. Sea $f^{-1}(y) \in \mathcal{D}_f$, entonces $h \circ g(f^{-1}(y))$ $= h(g(f^{-1}(y))) = h(f(\pi^{-1}(f^{-1}(y)))) = h(f(f^{-1}(y))) = h(y) = \pi f^{-1}(y) = f^{-1}(y) = Id_{\mathcal{D}_F}(f^{-1}(y))$.

Por otra parte si, $y \in Y$, entonces $(g \circ h)(y) = g(h(y)) = g(\pi(f^{-1}(y))) = g(f^{-1}(y)) = f(\pi^{-1}(f^{-1}(y))) = f(f^{-1}(y)) = y$. Por lo que h y g son funciones continuas e inversas. De modo que $\mathcal{D}_f$ y Y son homeomorfos. $\square$

Veamos un ejemplo

Ejemplo 5.1. *Sea* $f : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ *función continua y* $Y = S^1 \times [0, 1]$ *dada por* $f(t, r) = (cos(t), sen(t), r)$, *y* $\mathcal{D}_f = \{\{(t, r)\} : t \in (0, 2\pi), r \in [0, 1]\} \cup \{\{(0, r), (2\pi, r)\} : r \in [0, 1]\}$ *una descomposición de* $[0, 2\pi] \times [0, 1]$. *Notemos que* f *es una función cerrada ya que* $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ *es compacto y* $\mathbb{R}^3$ *es de Hausdorff. Así, por la Proposición 3.5* f *es una función de identificación, por lo tanto* $\mathcal{D}_f$ *es homeomorfo a* Y.

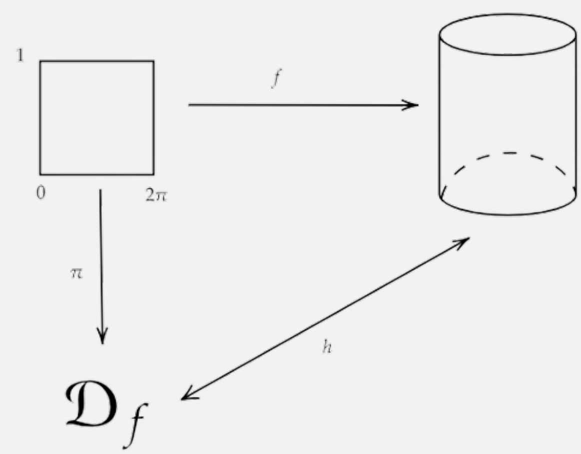

Figura 5.1: Ejemplo 7.1

Recordemos que dada una partición $\mathcal{D}$ podemos definir una relación de equivalencia R, en donde dos elementos en X están relacionados entre sí, si y sólo si pertenecen al mismo elemento de la partición, y viceversa, dada una relación de equivalencia R en X, esta nos determina una partición $\mathcal{D} = X/R$ (conjunto cociente), donde las clases de equivalencia forman una partición de X. Si $a, b \in X$ y a, b están relacionadas con la relación R, escribiremos aRb

Regularmente cuando se trabaja con $\mathcal{D} = X/R$ se le suele llamar a $(X/R, \pi)$ el espacio cociente usando la notación algebraica de cocientes. Y $\tau(\mathcal{D}) = \tau_\pi$ es llamada también la topología cociente. Escribiremos a las clases de equivalencia como Ra, donde R denotará la correspondiente relación.

De esta manera, en algunas ocasiones usaremos una u otra notación de manera indistinta ya sea para describir teoremas o ejemplos, si eso no causa confusión al lector. Los siguientes teoremas son prácticamente una aplicación de la primer parte del Teorema de la Transgresión, de las Proposiciones 3.9, 3.10 y de la segunda parte del Teorema de la Transgresión, respectivamente aplicado a este tipo especial de espacios de identificación.

Por comodidad en esta primera parte usaremos la notación de cociente para la descripción y prueba de los siguientes teoremas.

Teorema 5.2. *Sea R una relación de equivalencia en X. Sea $\mathcal{B} \subset X/R$ es abierto (cerrado), entonces $\mathcal{B}$ es homeomorfo al espacio $p^{-1}(\mathcal{B})/R_0$ donde R_0 es la relación en $p^{-1}(\mathcal{B})$ inducida por R.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} \subseteq X/R$ un conjunto abierto, donde $\mathcal{B}$ tiene la topología de identificación (ver Teorema 4.1) dada por la función $s : p|p^{-1}(\mathcal{B}) : p^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$, y sea $q : p^{-1}(\mathcal{B}) \to p^{-1}(\mathcal{B})/R_0$ la función proyección. Veamos primero que s es constante en las fibras de q. Sea $R_0a \in p^{-1}(\mathcal{B})/R_0$. Notemos que $q^{-1}(R_0a) = Ra \subset X$. Así, $s(q^{-1}(R_0a)) = s(Ra) = R_0a \in \mathcal{B}$. De manera similar se puede probar que q es constante en las fibras de s. Por el Teorema de la Transgresión se tiene que $(q \circ s^{-1})$ y $(s \circ q^{-1})$ son continuas. Además, como $(q \circ s^{-1}) \circ (s \circ q^{-1})(R_0a) = R_0a$ y $(s \circ q^{-1}) \circ (q \circ s^{-1})(Ra) = Ra$, se concluye que $\mathcal{B}$ es homeomorfo al espacio $p^{-1}(\mathcal{B})/R_0$.

Similarmente para el caso en que $\mathcal{B} \subset X/R$ es cerrado se puede probar que $\mathcal{B}$ es homeomorfo al espacio $p^{-1}(\mathcal{B})/R_0$ usando el Teorema 4.1 y el Teorema de la Transgresión. $\square$

Proposición 5.4. *Sean X un espacio topológico, R una relación de equivalencia en X y $p : X \to X/R$ la función natural. Si $R \subseteq X \times X$ es cerrado en $X \times X$ y p es abierta, entonces X/R es de Hausdorff.*

Demostración. Sea $p(x), p(y) \in X/R$ de forma que $p(x) \neq p(y)$, esto implica que x no está relacionado con y y como R es una relación de equivalencia, entonces $(x, y) \notin R$. Como $R \subseteq X \times X$ cerrado, existe un abierto básico $U \times V$ de $X \times X$, tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X)\backslash R$. Notemos que $p(U)$, $p(V)$ son abiertos en X/R pues p es una función abierta. Veamos que $p(U)$ y $p(V)$ son ajeno. Supongamos que $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$, entonces existe un elemento de la partición $D \in p(U) \cap p(V)$, es decir, existen $x_1 \in U$ tal que $p(x_1) = D$ y $x_2 \in V$ tal que $p(x_2) = D$. De este modo x_1 está relacionado con x_2, es decir, $(x_1, x_2) \in R$, lo cual es una contradicción pues $(x_1, x_2) \in U \times V \subseteq (X \times X)\backslash R$. Por lo que $p(U) \cap p(V) = \emptyset$. Esto concluye que X/R es de Hausdorff. $\square$

La prueba del siguiente lema se encuentra en [3, Teorema 11.2(1), p.86]

Lema 5.1. *Sean $p : X \to Y$ una función cerrada y $S \subseteq Y$ y $U \subseteq p^{-1}(S)$, entonces existe un abierto V, $V \subseteq S$ tal que $p^{-1}(V) \subseteq U$.*

Proposición 5.5. *Si X es T_3 y la proyección $p : X \to X/R$ es cerrada, entonces $R \subseteq X \times X$ es cerrado en $X \times X$.*

Demostración. Sea $(x, y) \notin R$, entonces x no está relacionado con y, por lo que $p(x) \neq p(y)$. Así $x \notin p^{-1}(p(y))$. Como $y \in X$ y X es T_1, entonces $\{y\}$ es cerrado en X, además p es una función cerrada lo que implica que $p(\{y\})$ es cerrado en X/R, de aquí que $p^{-1}(p(\{y\}))$ es cerrado en X pues p es continua.

Ahora como X es T_3, existen U, V abiertos ajenos de X tales que $x \in U$ y $p^{-1}(p(\{y\})) \subseteq V$. Como p es cerrada, del Lema 5.1 existe $W \in \tau_{X/R}$ tal que $p(\{y\}) \subseteq W$ y $p^{-1}(p(\{y\})) \subseteq p^{-1}(W) \subseteq V$. De esta manera $(x, y) \in U \times p^{-1}(W)$, el cual es un abierto en $X \times X$.

Falta ver que $U \times p^{-1}(W) \subseteq (X \times X)\backslash R$. Sea $(x_1, x_2) \in U \times p^{-1}(W)$, supongamos que $(x_1, x_2) \in R$. Como $(x_1, x_2) \in U \times p^{-1}(W)$, se tiene que $x_1 \in U$ y $x_2 \in p^{-1}(W)$. Así $p(x_1) = p(x_2) \in W$, entonces $x_1 \in p^{-1}(W) \subseteq V$, lo cual es una contradicción pues $x_1 \in U$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto $U \times p^{-1}(W) \subseteq (X \times X)\backslash R$, es decir, R es cerrada en $X \times X$. $\square$

Proposición 5.6. *Sean X regular y $p : X \to X/R$ una función cerrada y abierta, entonces X/R es de Hausdorff.*

Demostración. Como p es una función cerrada, por el resultado anterior $R \subseteq X \times X$ es cerrado en $X \times X$. Así X/R es de Hausdorff pues p es una función abierta. $\square$

Proposición 5.7. *Si X es T_3 y $A \subseteq X$ es un conjunto cerrado, entonces X/A es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $\pi : X \to X/A$ la función natural, observemos que para cualquier abierto W en X tal que $W \subseteq X/A$, si $A \subseteq W$ se tiene que $\pi(W) = \{A\} \cup \{\{x\} : x \in W\backslash A\}$, esto implica que $\cup\pi(W) = W$ y si $A \cap W = \emptyset$ se tiene que $\pi(W) = \{\{x\} : x \in W\}$. En ambos casos $\pi(W) \in \tau_{X/A}$, pues $\cup\pi(W) = \pi^{-1}(\pi(W)) = W \in \tau_X$ Sean $D_1, D_2 \in X/A$ tales $D_1 \neq D_2$. Si $D_1 = \{y_1\}$, $D_2 = \{y_2\}$, con $D_1, D_2 \neq A$, entonces $\pi^{-1}(\{y_1\}) = y_1$ y $\pi^{-1}(\{y_2\}) = y_2 \in X$, además $y_1 \neq y_2$. Como $y_1 \notin A$ y X es regular, entonces existen $U_1, V_1 \in \tau_X$ ajenos tales que $A \subseteq U_1$ y $y_1 \in V_1$, similarmente para $y_2 \notin A$, así $A \subseteq U_2$ y $y_2 \in V_2$, con $U_2, V_2 \in \tau_X$ ajenos.

Además X es de Hausdorff, de ahí que para $y_1 \neq y_2$ existen $U_3, V_3 \in \tau_X$ ajenos con $y_1 \in U_3$, $y_2 \in V_3$.

Tomemos $U = V_1 \cap U_3 \in \tau_X$ tal que $y_1 \in U$ y $V = V_2 \cap V_3 \in \tau_X$ con $y_2 \in V$, notemos que $U \cap V = \emptyset$, luego por la observado al principio de la prueba tenemos que $\pi(U)$ y $\pi(V) \in \tau_{X/A}$, donde claramente $D_1 \in \pi(U)$ y $D_2 \in \pi(V)$, con $\pi(U) \cap p(V) = \emptyset$.

Si $D_1 = A$ y $D_2 = \{y_2\}$ se tiene que $\pi^{-1}(D_1) = A$ y $\pi^{-1}(\{y_2\}) = y_2$, con $y_2 \notin A$. Como X es regular existen $U_1, V_1 \in \tau_X$ ajenos de modo que $y_2 \in U_1$ y $A \subseteq V_1$. Notemos que por la observación de arriba $\pi(U_1) \in \tau_{X/A}$ y $\pi(V_1) \in \tau_{X/A}$ y son tales que $D_1 \in \pi(U_1)$ y $D_2 \in \pi(V_1)$, con $\pi(U_1) \cap \pi(V_1) = \emptyset$.

Por lo tanto X/A es de Hausdorff. $\square$

Teorema 5.3. *$p : X \to X/R$ es abierta (cerrada) si y sólo si $R(U) = \bigcup\{R_u : u \in U\}$ es abierto (cerrado) en X para cada abierto (cerrado) $U \subseteq X$*

Demostración. Sea $U \subseteq X$. Mostraremos primero que $R(U)$ es el conjunto p-cargado de U. Veamos primero que $R(U) \subseteq p^{-1}(p(U))$. Sea $a \in R(U)$, entonces $a \in \bigcup\{R_u : u \in U\}$ de donde $a \in R_u$ para algún $u \in U$. Notemos que $a \in R_u = p(u) \in p(U)$. Como $a \in R_u$ y $p(a) = R_a$, entonces $R_a = R_u \in p(U)$. Así $a \in p^{-1}(p(U))$, por lo tanto $R(U) \subseteq p^{-1}(p(U))$.

Ahora sea $a \in p^{-1}(p(U))$, entonces $p(a) \in p(U)$, como $p(a) = R_a \in p(U)$ existe $u \in U$ de tal forma que $R_a = R_u$, con $a \in R_u$. De donde $a \in \bigcup\{R_u : u \in U\}$. Así $a \in R(U)$ de donde $p^{-1}(p(U)) \subseteq R(U)$.

Por lo tanto $R(U) = p^{-1}(p(U))$. Ahora bien, si U es abierto (cerrado) la prueba del resultado se sigue directamente de las Proposiciones 3.9 y 3.10.

$\square$

Teorema 5.4. *Si $h : X \to Z$ es una función continua y hp^{-1} es valor único, entonces $hp^{-1} : X/R \to Z$ es continua, y la función es abierto (cerrado) si y sólo si $h(U)$ es abierto (cerrado) para cada abierto (cerrado) $U \subset X$ tal que $U = R(U)$.*

Demostración. La prueba es consecuencia del Teorema de la Transgresión 3.2, usando el caso especial en donde $Y = X/R$. $\square$

Enseguida mostraremos una relación que existe entre espacios cocientes de espacios topológicos cuando tenemos funciones continuas entre ellos que preserva relaciones de equivalencia.

Definición 5.3. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos y sean R, S relaciones de equivalencia en A y en B, respectivamente y $f : A \to B$ una función. Diremos que f* ***preserva las relaciones*** *R y S, si siempre que aRb se tiene que $f(a)Sf(b)$.*

Lema 5.2. *Sean $f : A \to B$ suprayectiva. Si $g, g' : B \to C$ son dos funciones tales que $g \circ f = g' \circ f$, entonces $g = g'$.*

Demostración. La demostración la haremos por contrapuesta. Supongamos que existe $b \in B$ tal que $g(b) \neq g'(b)$. Dado que f es suprayectiva, entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. De esta manera $g(f(a)) = g(b) \neq g'(b) = g'(f(a))$. Por lo que $g \circ f \neq g' \circ f$. □

Proposición 5.8. *Sea $f : X \to Y$ una función que preserva las relaciones R y S. Entonces existe una única función $f_* : X/R \to Y/S$ tal que $p_S \circ f = f_* \circ p_R$, donde p_S y p_R son la proyección natural del espacio X y Y a su espacio cociente respectivamente. A f_* se le llama* ***función inducida*** *por F* ***en el paso cociente****. Inversamente para cualesquiera dos funciones f y f_* si el diagrama de arriba conmuta, entonces f necesariamente preserva relaciones y f_* es la función inducida por f.*

Demostración. Definamos $f_* : X/R \to Y/S$ como $f_*(R_a) = S_{f(a)}$ para cada $R_a \in X/R$. Veamos que f_* está bien definida. Para ver que f_* está bien definida hay que mostrar que la clase $S_{f(a)}$ no depende del representante a elegido de la clase R_a.

Sea $R_a \in X/R$ y $a' \in R_a$, entonces $a'Ra$ y $R_{a'} = R_a$. Dado que f preserva relaciones tenemos que $f(a)Sf(a')$. Por lo tanto $S_{f(a)} = S_{f(a')}$. Por lo tanto f_* está bien definida.

Que el diagrama conmute implica que $(p_S \circ f)(a) = p_S(f(a)) = S_{f(a)} = F_*(R_a) = f_*(p_R(a)) = (f_* \circ p_R)(a)$. Probemos que f_* es única. Si g_* fuera otra función tal que hace que el diagrama conmute, entonces $p_B \circ f = g_* \circ P_A$. Por otra parte $p_B \circ f = f_* \circ p_A$. Así, $g_* \circ p_A = f_A \circ p_A$. Aplicando el Lema 5.2 se tiene que $g_* = f_*$. Para probar el inverso, asumamos que las funciones f y f_* tienen un diagrama conmutativo como el de arriba. Sea aRa', entonces $p_R(a) = p_R(a')$. Por la conmutatividad del diagrama se tiene que $p_B \circ f(a) = p_B \circ f(a')$. Así, $f(a)Sf(a')$ y f^* es la inducida por f debido a la unicidad. Por tanto F preserva relaciones. □

Teorema 5.5. *Sean X, Y espacios topológicos con relaciones de equivalencia R, S respectivamente, y sea $f : X \to Y$ una función continua que preserva relaciones, entonces, la función inducida por f en el paso cociente*

$f_* : X/R \to Y/S$ es continua. Mas aún, f_* es una función de identificación cuando f es una función de identificación.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_R"'] & Y \arrow[d, "p_S"] \\
X/R \arrow[r, "f*"] & Y/S
\end{tikzcd}$$

Figura 5.2: Figura 4

Demostración. Sea $p_R : X \to X/R$ y $q_S : Y \to Y/S$ las funciones naturales. Como f es una función que preserva relaciones se tiene que $f_* : X/R \to Y/S$ está bien definida. Como $f_* \circ p_R = q_S \circ f$, $q_S \circ F$ es continua y p_R es una función de identificación, se tiene por el Teorema 3.1 que f_* es continua. Finalmente, si f es una identificación y dado que p_R es una identificación, tenemos por el Teorema de Transitividad 3.3 que $q_S \circ f$ es una identificación. Como $f_* \circ p_R = q_S \circ f$, entonces $f_* \circ p_R$ es una identificación y dado que p_R es una es una función de identificación, aplicando de nuevo el Teorema de Transitividad 3.1, f_* es de identificación. $\square$

El siguiente resultado será usado para mostrar algunos casos en donde los espacios de descomposición son metrizables.

Lema 5.3. *Si un espacio Hausdorff es la imagen continua de un espacio métrico compacto, entonces el espacio es metrizable.*

Demostración. Sean Y un espacio Hausdorff, X un espacio métrico compacto y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Para probar que Y es metrizable, usaremos el Teorema de metrizabilidad de Urysohn (ver en 2.12) solo basta mostrar que τ_Y tiene una base numerable. Como f es continua y X es compacto, entonces Y es compacto, Y es compacto y Hausdorff por lo que Y es regular. Sean $\mathcal{C}$ una base numerable para X y $\mathcal{L}$ subconjunto finito de $\mathcal{C}$. Definamos $E(\mathcal{L}) = Y \backslash f(X \backslash \bigcup \mathcal{L})$. Note que $E(\mathcal{L})$ es un abierto en Y, pues $X\backslash\bigcup\mathcal{L}$ es un abierto en X, y al ser f una función definida de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff es cerrado por lo que $f(X\backslash\bigcup\mathcal{L})$ es cerrado en Y y por lo tanto $Y\backslash f(X\backslash\bigcup\mathcal{L})$ es abierto en Y. Sea $\beta = \{E(\mathcal{L}) : \mathcal{L}\subseteq\mathcal{C}$ finito $\}$. Claramente β es numerable. Mostraremos que β es una base para la topología en Y. Sea U un abierto en Y y $q\in U$. Probaremos que existe $E(\mathcal{L})\in\beta$ tal que $q\in E(\mathcal{L})\subseteq U$. Notemos primero que $f^{-1}(q)$ es compacto. Dado que Y es de Hausdorff, $\{q\}$ es cerrado, y de la continuidad de f, $f^{-1}(q)$ es cerrado en X y como X es compacto, entonces $f^{-1}(q)$ es compacto. Por otra parte como $f^{-1}(q)\subseteq f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(U)$ es abierto para cada $p\in f^{-1}(q)$, existe $B_p\in\mathcal{C}$, tal que $p\in B_p\subseteq f^{-1}(U)$. De la compacidad de $f^{-1}(q)$, existe $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{C}$ finito tal que $f^{-1}(q)\subseteq\bigcup\mathcal{L}\subseteq f^{-1}(U)$. Afirmamos que $q\in E(\mathcal{L})$. Supongamos que $q\notin E(\mathcal{L})$ de aquí $q\in f(X\backslash\bigcup\mathcal{L})$; esto es, existe $r\in X\backslash\bigcup\mathcal{L}$ de tal forma que $f(r)=q$; es decir, $r\in f^{-1}(q)$. Dado que $f^{-1}(q)\subseteq\bigcup\mathcal{L}$, se tiene que $r\in\bigcup\mathcal{L}$, contradicción. Por lo que $q\in E(\mathcal{L})$. Ahora probaremos que $E(\mathcal{L})\subseteq U$. Supongamos $E(\mathcal{L})\nsubseteq U$; esto es, existe $a\in Y\backslash f(X\backslash\bigcup\mathcal{L})$ tal que $a\notin U$. Así $f^{-1}(a)\nsubseteq f^{-1}(U)$, por lo que existe $b\in f^{-1}(U)$ tal que $b\notin f^{-1}(U)$. De esta manera $b\notin\bigcup\mathcal{L}$; o bien $b\in X\backslash\bigcup\mathcal{L}$, de donde $f(b)\in f(X\bigcup\mathcal{L})$. De lo anterior $f(b)=a\in f(X\backslash\bigcup\mathcal{L})$, por lo que $a\notin Y\backslash f(X\backslash\bigcup\mathcal{L})$ lo cual contradice lo supuesto. De modo que $E(\mathcal{L})\subseteq U$. Por lo tanto β es una base numerable para Y. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que imágenes de identificaciones de espacios metrizables, no necesariamente son metrizable.

Ejemplo 5.2. *El espacio cociente de un espacio T_2 no necesariamente es T_2.*

Demostración. Sea $X=[-1,1]$ con la topología usual y $\mathcal{D}=\{\{x,-x\}:0\leq x<1\}\cup\{\{1\},\{-1\}\}$ una descomposición. Afirmación $\mathcal{D}$ no es T_2. Veamos que el axioma de ser T_2 falla en los puntos $\{1\}$, $\{-1\}\in\mathcal{D}$. Probaremos que para todo par de abiertos $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\tau_{\mathcal{D}}$ tal que $\{1\}\in\mathcal{U}$ y $\{-1\}\in\mathcal{V}$ se tiene que $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\neq\emptyset$. Mostraremos primero que la familia de conjuntos de la forma $\{\{1\}\}\cup\{\{x,-x\}:0\leq a<x<1\}$ y $\{\{-1\}\}\cup\{\{x,-x\}:0\leq b<x<1\}$ son un sistema básico local de vecindades de $\{1\}$ y $\{-1\}$ respectivamente.

Veamos primero que cada elemento de esas familias es un abierto en $\mathcal{D}$. Sean $\mathcal{U} = \{\{1\}\} \cup \{\{x, -x\} : 0 \leq a < x < 1\}$ y $\mathcal{V} = \{\{-1\}\} \cup \{\{x, -x\} : 0 \leq b < x < 1\}$. Como $\bigcup \mathcal{U} = (-1, -a) \cup (a, 1]$ y $\bigcup \mathcal{V} = [-1, b) \cup (b, 1]$, entonces $\bigcup \mathcal{U}$ y $\bigcup \mathcal{V}$ son abiertos en $[-1, 1]$. Probaremos ahora que si $\mathcal{B}$ es un abierto en $\mathcal{D}$ que contiene a $\{1\}$, entonces existe un abierto $\mathcal{U} = \{\{1\}\} \cup \{\{x, -x\} : 0 \leq a < x < 1\}$ tal que $\{1\} \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ y si $\mathcal{B}'$ es un abierto en $\mathcal{D}$ que contiene a $\{-1\}$, entonces existe un abierto $\mathcal{V} = \{\{1\}\} \cup \{\{x, -x\} : 0 \leq b < x < 1\}$ tal que $\{-1\} \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}'$. Sea $\mathcal{B} \in \tau_{\mathcal{D}}$ tal que $\{1\} \in \mathcal{B}$, entonces $\bigcup \mathcal{B} \in \tau_{[-1,1]}$ y además $1 \in \bigcup \mathcal{B}$. Nótese que si $x \in \bigcup \mathcal{B}$ y $x \neq 1, -1$, entonces $-x \in \bigcup \mathcal{B}$, pues si $x \in D$ para algún $D \in \mathcal{B}$, entonces $-x \in D \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Como $\bigcup \mathcal{B}$ es abierto que contiene a 1, existe $a > 0$ tal que $(a, 1] \in \tau_{[-1,1]}$ y cumple con que $1 \in (a, 1] \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. De lo anterior se tiene que si $x \in (a, 1)$, entonces $-x \in \bigcup \mathcal{B}$. Así $(-1, -a) \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.
De esta manera $\{\{1\}\} \cup \{\{x, -x\} : 0 \leq a < x < 1\} \subseteq \mathcal{B}$. De forma similar existe $\mathcal{V} = \{\{1\}\} \cup \{\{x, -x\} : 0 \leq b < x < 1\}$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}'$. Notemos que cualesquiera dos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de esta forma se intersectan. Sea $m = max\,\{a, b\}$, entonces $\{\{x, -x\} : m \leq x < 1\} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. De todo lo anterior tenemos que cualesquiera dos abiertos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ que contienen a $\{1\}$ y $\{-1\}$ respectivamente tienen intersección no vacía, por lo que $\mathcal{D}$ no puede ser T_2, pero X es T_2. Este mismo ejemplo muestra que cocientes de espacios métricos no necesariamente son metrizables. □

Para las siguientes definiciones y resultados usaremos la notación de partición y a la topología $\tau(\mathcal{D})$.

Veamos un caso en donde si se tiene la metrización de un espacio cociente.

Teorema 5.6. *Una descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ de un espacio métrico compacto X es metrizable si y sólo si es de Hausdorff.*

Demostración. Probaremos que la descomposición $\mathcal{D}$ es metrizable. Dado que la función natural $\pi : X \to \mathcal{D}$ es continua y suprayectiva y como X es un espacio métrico compacto, y $\mathcal{D}$ es de Hausdorff, entonces aplicando el Lema 5.3 podemos concluir que $\mathcal{D}$ es metrizable. Para la otra implicación dado que $\mathcal{D}$ es metrizable, se tiene que $\mathcal{D}$ es de Hausdorff. □

Teorema 5.7. *La descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ de un continuo X es un continuo si y sólo si es de Hausdorff.*

Demostración. Para probar que $\mathcal{D}$ es un continuo, note que la función natural $\pi : X \to \mathcal{D}$ es continua, suprayectiva. Como X es un continuo, es métrico, compacto y conexo. De esta manea $\mathcal{D}$ es compacto y conexo y como por hipótesis $\mathcal{D}$ es de Hausdorff, entonces $\mathcal{D}$ es metrizable, por el Teorema 5.6. Por tanto, $\mathcal{D}$ es un continuo con la topología $\tau(\mathcal{D})$. Supongamos ahora que $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un continuo, entonces $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es de Hausdorff con lo que la prueba queda concluida. $\square$

Capítulo 6

Descomposición usc

Veamos ahora un tipo especial de espacio de descomposición que es muy útil y usado en la Teoría de Continuos que sirve para construir ejemplos diversos de continuos. Para ello necesitamos primero lo siguiente.

En este capítulo seguiremos usando la función natural $\pi : X \to \mathcal{D}$.

Definición 6.1. *Sea $\mathcal{D}$ es una descomposición de X. Un subconjunto A de X es $\mathcal{D}-$* **saturado** *si $A = \bigcup \mathcal{D}$.*

Obsérvese que de la Proposición 5.4 cualquier $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ con $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ es $\mathcal{D}$-saturado, pues $\pi^{-1}(\mathcal{C}) = \bigcup \mathcal{C}$

Nótese que según la Proposición 3.8 esta definición de $\mathcal{D}-$ **saturado** es otra forma de escribir que un conjunto es $\pi - saturado$ sin usar la función π.

Dicho de otra manera $A \subseteq X$ es $\mathcal{D}-saturado$ si y sólo si A es $\pi-saturado$, esto es $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Pues en la Proposición 5.4 se probó que si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, entonces $\bigcup \mathcal{U} = \pi^{-1}(\mathcal{U})$, esto es, $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es $\mathcal{D}$-saturado. De esta manera si $A \subseteq X$ y A es $\mathcal{D}$-saturado, entonces $A = \bigcup \mathcal{U}$ con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, esto implica que $\pi(A) = \mathcal{U}$ y como $\bigcup \mathcal{U} = \pi^{-1}(\mathcal{U})$, entonces $A = \bigcup \mathcal{U} = \pi^{-1}(\mathcal{U}) = \pi^{-1}(\pi(A))$, de donde A es π-saturado.

Inversamente si A es π-saturado $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ y como $\pi(A) \subseteq \mathcal{D}$, entonces $\bigcup \pi(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Así, A es $\mathcal{D} - saturado$.

Definición 6.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X es llamada **semicontinua superiormente (usc)** siempre que para cualesquiera $D \in \mathcal{D}, U \in \tau$ con $D \subseteq U$ existe $V \in \tau$ con $D \subseteq V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subseteq U$.*

Si A es $\mathcal{D}-saturado$ y abierto en un espacio topológico X, entonces $\pi(A)$ es un abierto en $\mathcal{D}$. Pues como A es $\mathcal{D}-saturado$, $A = \pi^{-1}(\pi(A)) \in \tau_X$, entonces $\pi(A) \in \tau_\pi = \tau_\mathcal{D}$, por ser π una identificación.

Queremos ahora determinar cuando una descomposición usc resulta ser un continuo.

Proposición 6.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{D}$ una descomposición de X y $\pi : S \to \mathcal{D}$ la función natural. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

I. $\mathcal{D}$ es una descomposición usc.

II. π es una función cerrada.

III. Si $D \in \mathcal{D}$, $U \in \tau$ y $D \subseteq U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $D \subseteq V \subseteq U$ y V es $\mathcal{D}-saturado$.

Demostración. Supongamos I. Probaremos que π es una función cerrada. Sea C un subconjunto cerrado de X. Demostraremos que $\pi^{-1}(\mathcal{D}\backslash\pi(C)) \in \tau_X$. Sea $x \in \pi^{-1}(\mathcal{D}\backslash\pi(C))$, entonces $\pi(x) \in \mathcal{D}\backslash\pi(C)$ es decir $\pi(x) \in \mathcal{D}$ y $\pi(x) \notin \pi(C)$.

Afirmamos que $\pi(x) \subseteq S\backslash C$. Supongamos que $\pi(x) \cap C \neq \emptyset$, entonces existe $p \in \pi(x)$ y $p \in C$. Como $p \in \pi(x)$ y $p(x)$ es el único elemento de la partición $\mathcal{D}$ que lo contiene, obtenemos que $\pi(x) = \pi(p)$. Además $p \in C$ tenemos que $\pi(p) \in \pi(C)$. Por lo tanto $\pi(x) \in \pi(C)$, lo cual es una contradicción pues $\pi(x) \notin \pi(C)$. De donde $\pi(x) \subseteq X\backslash C$. Dado que $X\backslash C \in \tau_X$ y $\mathcal{D}$ es una descomposición usc, existe $V \in \tau_X$ con $\pi(x) \subseteq V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subseteq X\backslash C$. Demostraremos que $x \in V \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{D}\backslash\pi(C))$, es claro que $x \in V$, pues $x \in \pi(x)$ y $\pi(x) \subseteq V$. Falta probar que $V \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{D}\backslash\pi(C))$; es decir, $\pi(V) \subseteq \mathcal{D}\backslash\pi(C)$. Sea $y \in V$, así $y \in V \cap \pi(y)$. Como $\pi(y) \in \mathcal{D}$ y $V \cap \pi(y) \neq \emptyset$, entonces $\pi(y) \subseteq X\backslash C$, es decir, $\pi(y) \notin \pi(C)$. Por lo cuál $\pi(y) \in \mathcal{D}\backslash\pi(C)$, de modo que $x \in V \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{D}\backslash\pi(C))$. Por lo que $\pi^{-1}(\mathcal{D}\backslash\pi(C)) \in \tau_X$. Por lo tanto $\pi(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$.

Supongamos ahora que π es una función cerrada. Probaremos III. Sean $D \in \mathcal{D}$, $U \in \tau$ y $D \subseteq U$. Probaremos que existe $V \in \tau$ tal que $D \subseteq V \subseteq U$ y V es $\mathcal{D}$-saturado. Como π es una función cerrada, entonces $V = \pi^{-1}(\mathcal{D}\backslash\pi(X\backslash U)) \in \tau_X$. Afirmamos que $V \subseteq U$.

Como $\pi^{-1}\ (\mathcal{D}\backslash\pi(X\backslash U))$=$\pi^{-1}\,(\mathcal{D})\,\backslash\pi^{-1}(\pi(X\backslash U)) = X\backslash\pi^{-1}(\pi(X\backslash U)) \subseteq X\backslash(X\backslash U) = U$, como $X\backslash U \subseteq \pi^{-1}(\pi(X\backslash U))$. Por lo tanto $V \subseteq U$. Demostraremos ahora que $D \subseteq V$. Sea $p \in D$, como $D \subseteq U$, entonces $p \in U$ es decir $p \notin X\backslash U$ por lo tanto $\pi(p) \notin \pi(X\backslash U)$ donde $\pi(p) \in \mathcal{D}\backslash\pi(X\backslash U)$. Así $p \in \pi^{-1}\,(\mathcal{D}\backslash\pi(X\backslash U)) = V$, por lo que $D \subseteq V$. Finalmente como V es $\mathcal{D}-$ saturado. Sabemos que $V = \pi^{-1}\,(\mathcal{D}\backslash\pi(X\backslash U))$ y $\mathcal{D}\backslash\pi(X\backslash U) \subseteq \mathcal{D}$, entonces V es $\mathcal{D}-$ saturado.

Suponiendo III probemos que $\mathcal{D}$ es una descomposición usc. Sea $D \in \mathcal{D}$, $U \in \tau_X$ tal que $D \subseteq U$. Por hipótesis existe $V \in \tau_X$ tal que $D \subseteq V \subseteq U$ y V es $\mathcal{D}$-saturado. Sea $A \in \mathcal{D}$ tal que $A \cap V \neq \emptyset$. Lo anterior implica que existe $B \subseteq V$ tal que $B \in \mathcal{D}$ y $A \cap B \neq \emptyset$. Dado que $A, B \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es una partición, entonces $A = B \subseteq V \subseteq U$. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es una descomposición usc.

$\square$

Teorema 6.1. *Sean X y Y espacios métricos y compacto y $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva. Si $\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ entonces $\mathcal{D}_f$ es una descomposición usc de X.*

Inversamente cualquier descomposición usc de X es un espacio métrico compacto el cuál es la imagen continua de X.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}_f$ no es una descomposición usc. Entonces existe $y_0 \in Y$ tal que $f^{-1}(y_0) \in \mathcal{D}_f$ y existe $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(y_0) \subseteq U$ y para todo $V \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(y_0) \subseteq V$ y existe $A \in \mathcal{D}$ tal que $A \cap V \neq \emptyset$, pero $A \nsubseteq U$. De esta manera, para cada $\mathcal{E}_n = \frac{1}{n}$, el conjunto $N_{\frac{\varepsilon}{n}}(f^{-1}(y_0)) = \bigcup_{p \in f^{-1}(y_0)} \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p) = V_n \in \tau_X$, $f^{-1}(y_0) \subseteq V_n$ y por lo supuesto, existe $A_n = f^{-1}(w_n) \in \mathcal{D}$ tal que $A_n \cap V_n \neq \emptyset$ y $A_n \nsubseteq U$. Así para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in A_n \cap V_n$. Por la definición de V_n, existe $p_n \in f^{-1}(y_0)$ tal que $y_n \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p_n)$. Bajo el argumento anterior, construimos una sucesión $\{p_n\} \subseteq f^{-1}(y_0)$. Por otro lado, como Y es métrico, es T_1, de modo que $\{y_0\}$ es cerrado. De la continuidad de f, $f^{-1}(y_0)$ es cerrado en X y dado que X es compacto, $f^{-1}(y_0)$ es compacto en X. Al ser X métrico y compacto, de la sucesión $\{p_n\} \subseteq f^{-1}(y_0)$ existe una subsucesión convergente a un punto $p \in f^{-1}(y_0)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p_n \to p$.

Por otra parte, como $A_n \nsubseteq U$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n \cap (X\backslash U) \neq \emptyset$, por lo que existe $q_n \in A_n \cap (X\backslash U)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $\{q_n\} \subseteq X\backslash U$. Debido a que U es abierto, $X\backslash U$ es cerrado, pero al ser X compacto $X\backslash U$ es compacto. Por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $q_n \to q \in X \setminus U$.

Notemos que como $p_n \to p$ y $y_n \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $y_n \to p$, pues si $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \frac{\epsilon}{4}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $d(p, y_n) \leq d(p, p_n) + d(p_n, y_n) \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De aquí $y_n \to p$.

Finalmente, como se tiene lo siguiente:

$\boxed{1.}$ $q_n, y_n \in A_n = f^{-1}(w_n)$

$\boxed{2.}$ $q_n \to q$

$\boxed{3.}$ $y_n \to p$ y

$\boxed{4.}$ $p \in f^{-1}(y_0)$

Se tiene de la continuidad de f que $f(q_n) \to f(q)$ y $f(y_n) \to f(p)$ y como por 1, $f(q_n) = f(y_n)$, y el límite es único; tenemos que $f(q) = f(p)$. Así, $q \in f^{-1}(y_0) \subseteq U$. Lo cual es una contradicción, pues $q \notin U$. Por lo tanto $\mathcal{D}_f$ es una descomposición usc de X.

Inversamente si $\mathcal{D}_f$ es una descomposición usc de un espacio métrico compacto, entonces por el Teorema 6.2, $\mathcal{D}$ es metrizable y dado que la función natural $\pi : X \to \mathcal{D}_f$ es continua y suprayectiva, entonces $\mathcal{D}_f$ es compacto. $\square$

Proposición 6.2. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico T_1 y $\mathcal{D}$ una partición de X. Si $\mathcal{D}$ es una descomposición usc de un espacio topológico, entonces $\mathcal{D}$ es una partición cerrada de X.*

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}$. Probaremos que D es un conjunto cerrado de X. Como π es suprayectiva, entonces existe $x \in X$ tal que $\pi(x) = D$. De el teorema anterior $\pi : X \to \mathcal{D}$ es una función cerrada.

Por otra parte como X es T_1, el conjunto $\{x\}$ es un conjunto cerrado, de esta manera $\pi(\{X\}) = \{D\}$ es cerrado en $\mathcal{D}$, de la continuidad de π, se tiene que $\pi^{-1}(\{D\}) = D$ es cerrado en X. $\square$

Ahora queremos determinar cuando una descomposición usc resulta ser un continuo.

Teorema 6.2. *Si $\mathcal{D}$ es una descomposición usc de un espacio métrico compacto X, entonces $\mathcal{D}$ es metrizable.*

Demostración. Por el Teorema 5.6, basta con probar que $\mathcal{D}$ es de Hausdorff. Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ tales que $D_1 \neq D_2$. Dado que $\mathcal{D}$ es una partición $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Como X es un espacio métrico es T_1, esto implica por la Proposición 6.2 que D_1 y D_2 son subconjuntos cerrados de X. Por otra parte, al ser X un espacio métrico compacto es normal. Entonces existen $U, V \in \tau_{\mathcal{X}}$, con $U \cap V = \emptyset$, tales que $D_1 \subseteq U, D_2 \subseteq V$. Dado que $\mathcal{D}$ es una descomposición usc, entonces para $D_1 \subseteq U$ y $D_2 \subseteq V$ existe $W, M \in \tau_X$ tales que $D_1 \subseteq W \subseteq U$, $D_2 \subseteq M \subseteq V$, donde W, M son $\mathcal{D}-$saturados. Afirmamos que $\pi(W), \pi(M)$ son abiertos ajenos de $\mathcal{D}$ tales que $D_1 \in \pi(W)$ y $D_2 \in \pi(M)$. En efecto por la observación 3, se tiene que $\pi(W), \pi(M)$ son abiertos en $\mathcal{D}$. Veamos ahora que son ajenos, como $U \cap V = \emptyset$ y $W \subseteq U$, $M \subseteq V$, entonces $M \cap W = \emptyset$ además como W, M son $\mathcal{D}-$ saturados, $W = \pi^{-1}[\pi(W)]$, $M = \pi^{-1}[\pi(M)]$. Así $(\pi^{-1}[\pi(W)]) \cap \pi^{-1}[\pi(M)] = \emptyset$, entonces $\pi(W) \cap \pi(M) = \emptyset$. Falta probar que $D_1 \in \pi(W)$, $D_2 \in \pi(M)$. Como $D_1 \subseteq W$, entonces $\pi(D_1) = D_1 \subseteq \pi(W)$ y $\pi(D_2) = D_2 \subseteq \pi(M)$. Por lo tanto $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ es de Hausdorff. □

Corolario 6.1. *Si X es un continuo y $\mathcal{D}$ es una descomposición usc, entonces $\mathcal{D}$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 5.7, basta probar que X es de Hausdorff. Sea X un continuo, entonces X es métrico, compacto y conexo y por el Teorema 6.2 $\mathcal{D}$ es metrizable. Así $\mathcal{D}$, es de Hausdorff y por lo tanto $\mathcal{D}$ es un continuo, pues la función π preserva la compacidad y la conexidad. □

Capítulo 7

Ejemplos de descomposiciones y de descomposiciones usc

A continuación veremos algunos ejemplos de descomposiciones que son muy usadas.

Ejemplo 7.1. ***n-espacio proyectivo.*** *Para cada* $n = 1, 2, \ldots$ *sea* $\mathcal{D}$ *la partición de* S^n *dada por* $\mathcal{D} = \{\{z, -z\} : z \in S^n\}$. $\mathcal{D}$ *es una descomposición usc.*

Demostración. Por la Proposición 6.1, es suficiente probar que π es cerrada. Sea F un conjunto cerrado de S^n. Notemos que $\pi(F) = \{\{a, -a\} : a \in F\}$, entonces $\mathcal{D}\backslash\pi(F) = \{\{x, -x\} : x \notin F\} \subseteq \mathcal{D}$. Definamos el conjunto $-F$ como $\{-x \in S^n : x \in F\}$ el cual es cerrado, pues F es un conjunto cerrado de S^n. Así, $\bigcup(\mathcal{D}\backslash\pi(F)) = \bigcup\mathcal{D}\backslash\bigcup\pi(F) = S^n\backslash(\{x \in S^n : x \in F\}\cup\{-x \in S^n : x \in F\})$ $= S^n\backslash(F \cup -F) \in \tau_{S^n}$.

Afirmamos que $\bigcup(\mathcal{D}\backslash\pi(F))$ es abierto en S^n. Si $y \in \bigcup(\mathcal{D}\backslash\pi(F))$ $y \in S^n\backslash(F \cup \backslash F)$. Como $S^n\backslash(F \cup -F)$ es un abierto en S^n, existe V abierto tal que $y \in V \subseteq S^n\backslash(F \cup \backslash F)$. Demostraremos que $V \subseteq \bigcup(\mathcal{D}\backslash\pi(F))$. Sea $z \in V$, entonces $z \in S^n\backslash(F \cup -F)$ por consiguiente $z \notin (F \cup -F)$. De donde $\{z, -z\} \cap \pi(F) = \emptyset$. Así, $z \in \bigcup(\mathcal{D}\backslash\pi(F))$. De donde $\bigcup(\mathcal{D}\backslash\pi(F))$ es abierto en S^n. Por tanto $\mathcal{D}\backslash\pi(F)$ es abierto en $\mathcal{D}$. Por lo que $\pi(F)$ es cerrado en $\mathcal{D}$. Así, $\mathcal{D}$ es usc. $\square$

El siguiente tipo de espacio cociente es muy usado.

Ejemplo 7.2. ***El espacio cociente*** $\mathbf{X/A}$. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* A *un subconjunto cerrado no vacío de* X. *Definamos la partición* $\mathcal{D}_A$ *de*

X por $\mathcal{D}_A = \{A\} \cup \{\{z\} : z \in X\backslash A\}$. El espacio $(\mathcal{D}_A, \tau_{\mathcal{D}_A})$ será denotado X/A. Si X es compacto, entonces $\mathcal{D}_A$ es una descomposición usc. Para ello mostraremos que π es cerrada.

Sea F un subconjunto cerrado de X. Consideremos dos casos.

1. *Si $F \cap A = \emptyset$, se tiene que $\pi(F) = \{\{x\} : x \in F\}$. De esta manera $\mathcal{D}\backslash\pi(F) = \{\{y\} : y \in X\backslash(F \cup A)\} \cup \{A\}$, de modo que $\bigcup(\mathcal{D} - \pi(F)) = X\backslash F$. Como $X/F \in \tau$, entonces $\bigcup(\mathcal{D}\backslash\pi(F))$ es abierto; esto es, $\mathcal{D}\backslash\pi(F)$ es abierto.*

2. *Si $F \cup A \neq \emptyset$, se tiene que $\pi(F) = \{\{x\} : x \in F\backslash A\} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{D}$. De esta forma $\mathcal{D}\backslash\pi(F) = \{\{y\} : y \in X\backslash(F \cup A)\}$. Así, $\bigcup(\mathcal{D}\backslash\pi(F)) = X\backslash(F \cup A) \in \tau$, pues F, A son cerrados en X. De esta manera, π es una función cerrada.*

Por tanto, $\mathcal{D}_A$ es una descomposición usc.

Como caso particular de un espacio X/A veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 7.3. *Sea $S = X \times [0,1]$, donde X es un espacio topológico compacto y S tiene la topología producto. Sea $A = \{(x,1) : x \in X\}$. Entonces la descomposición del espacio* $\mathbf{S/A}$ *es llamado* ***Cono Topológico*** *sobre X y es denotado por* $\mathbf{TC}(X)$. *El vértice de $TC(X)$ es A y la base de $TC(X)$ es el conjunto $\{(x,0) : x \in X\}$. (Ver figura 7.1)*

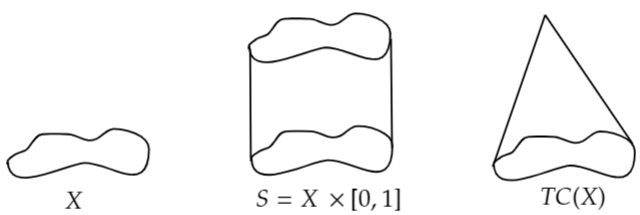

Figura 7.1: Cono Topológico

Otro ejemplo particular e importante del espacio X/A es el siguiente

Ejemplo 7.4. ***Suspensión Topológica****: Empezaremos con el cono topológico $TC(X)$ con base un conjunto cerrado B, el espacio de descomposición $TC(X)/B$ es llamado* ***espacio suspensión*** *sobre X y es denotado por* $\mathbf{TS}(X)$

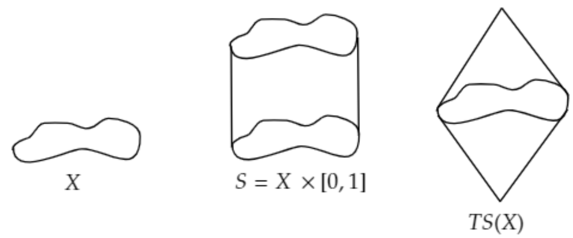

Figura 7.2: Suspensión Topológica

Definición 7.1. *Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas, diremos que f es **homotópica** a g si y sólo si existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. La función H es llamada **homotopía** entre f y g, y la denotaremos como $H : f \simeq g$*

Definición 7.2. *Un espacio topológico X es **contráctil** si y solo si la función identidad $i : X \to X$ es homotópica a alguna función constante $c(x) = x_0$ para $x_0 \in X$.*

Definición 7.3. *Sean $A \subseteq X$ cerrado y $r : X \to A$ una retracción. Diremos que A es un retracto por deformación de X, si existe una homotopía $H : id_x \simeq r$. A H le llamaremos una **retracción por deformación**. Si además $H(a, t) = a$ para todo $a \in A$ y para todo $t \in I$, entonces diremos que H es una **retracción fuerte por deformación** y que A es un **retracto fuerte por deformación** de X.*

Proposición 7.1. *Sea $A \subseteq X$ cerrado. Si A es retracto fuerte por deformación de X, entonces X/A es contráctil.*

Demostración. Sea $H : X \times I \to X$ una homotopía tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = r(x)$, donde $r : X \to A$ es una retracción. Sea $p : X \to X/A$ la función natural. Definamos $G : X/A \times I \to X/A$ como sigue:

$$G([x], t) = \begin{cases} A & si \quad [x] = A \\ \\ p(H(p^{-1}([x]), t)) & si \quad [x] \neq A \end{cases}$$

Si $[x] = A$, entonces $G([x], 0) = A = [x] = Id_{X/A}$ y $G([x], 1) = A$.

Si $[x] \neq A$, entonces $G([x],0) = p(H(p^{-1}([x]),0)) = p(H(x,0)) = p(x) = [x] = Id_{X/A}$ y $G([x],1) = p(H(p^{-1}([x]),1)) = p(H(x,1)) = p(r(x)) = [r(x)] = A$. Por lo tanto X/A es contráctil □

Uno de los espacios cociente más usados en topología es el llamado espacio de adjunción.

Definición 7.4. *Sea (S_1, τ_1) y (S_2, τ_2) espacios topológicos tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.* ***La unión libre*** *de S_1 y S_2 es el espacio topológico (S, τ) donde $S = S_1 \cup S_2$ y τ es definido por la condición: $U \in \tau$ si y sólo si $U \cap S_i \in \tau_i$ para cada $i = 1{,}2$. La unión libre de S_1 y S_2 es denotada por $S_1 + S_2$.*

Definición 7.5. *Sea (S_1, τ_1) y (S_2, τ_2) espacios topológicos tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Sea A un subconjunto cerrado no vacío de S_1 y sea f una función continua de A en S_2. Llamamos* ***espacio de adjunción*** *a la partición $\mathcal{D}$ de $S_1 + S_2$ dada por $\mathcal{D} = \{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(A)\} \cup \{\{x\} : x \in S_1 + S_2 \setminus (A \cup f(A))\}$, con la topología $\tau(\mathcal{D})$. El espacio de adjunción será denotado como: $S_1 \bigcup_f S_2$.*

Teorema 7.1. *Sean S_1, S_2 espacios métricos compactos y disjuntos, entonces $S = S_1 + S_2$ es métrico compacto.*

Demostración. Sean S_1 S_2. Veamos que S es un espacio métrico. Definamos $d : S \times S \to \mathbb{R}$ por:

$$d(x,z) = \begin{cases} d_1(x,y) & si \quad\quad x,y \in S_1 \\ \\ d_2(x,y) & si \quad\quad x,y \in S_2 \\ \\ 1 & si \quad x \in S_1, y \in S_2 \text{ o viceversa} \end{cases}$$

Sean $x, y, z \in S$, veamos que si $x, y \in S_1$, entonces $d(x,y) = d_1(x,y) \geq 0$ pues (S_1, d_1) es un espacio métrico. Similarmente $d(x,y) \geq 0$ si $x, y \in S_2$. Si $x \in S_1$ y $y \in S_2$, entonces $d(x,y) = 1 \geq 0$. Así, $d(x,y) \geq 0$. Veamos ahora que si $x, y \in S_1$, entonces $d(x,y) = d_1(x,y) = d_1(y,x) = d(y,x)$ pues (S_1, d_1) es un espacio métrico, similarmente $d(x,y) = d(y,x)$ si $x, y \in S_2$. Si $x \in S_1$ y $y \in S_2$, entonces $d(x,y) = 1 = d(y,x)$. Sean $x, y, z \in S$. Si $x, y, z \in S_1$, entonces $d(x,z) = d_1(x,y) + d_1(x,z)$. Si $x, y, z \in S_1$, entonces $d(x,z) = d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$. Si $x \in S_1$, $y \in S_2$ y $z \in S_1$, entonces $d(x,z) = 1$, $d(x,y) = 1$ y $d(y,z) = 1$ así $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, así se cumple la desigualdad del triángulo y por lo tanto (S,d) es un espacio métrico. Probemos ahora que S es compacto. Sea $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de S. De modo que $U_\alpha \cap S_1 \in \tau_1$ y $U_\alpha \cap S_2 \in \tau_2$, por lo cual $\mathcal{H} = \{U_\alpha \cap S_1 : U_\alpha \in \mathcal{C}\}$, $\mathcal{J} = \{U_\alpha \cap S_2 : U_\alpha \in \mathcal{C}\}$ son cubiertas abiertas de S_1 y S_2, respectivamente. Como S_1 es compacto, existe una subcubierta finita $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ de esta manera una cantidad finita de elementos de la forma $U_\alpha \cap S_1$, digamos la familia $\mathcal{H}' = \{U_{\alpha_1} \cap S_1, U_{\alpha_2} \cap S_1, ...U_{\alpha_n} \cap S_1\}$ cubre a S_1. Análogamente para S_2, existe $\mathcal{J}' = \{U_{\beta_1} \cap S_2, U_{\beta_2} \cap S_2, ...U_{\beta_m} \cap S_2\}$ una subcubierta abierta finita de S_2.

Así, $\mathcal{C}' = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ...U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, ...U_{\beta_m}\} \subseteq \mathcal{C}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{C}$. Por tanto S es compacto. $\square$

Teorema 7.2. *Sean S_1 y S_2 espacios métricos compactos y ajenos, $A \subseteq S_1$ cerrado y $f : A \to S_2$ una función continua. Entonces*

$$\mathcal{D} = \left\{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(A)\right\} \cup \{\{x\} : x \in S_1 + S_2 \setminus (A \cup f(A))\}$$

es una descomposición usc.

Demostración. Por la Proposición 6.1 basta con probar que $\pi : S_1 + S_2 \to \mathcal{D}$ es una función cerrada.

Sean K un cerrado en $S_1 + S_2$. Supongamos $K \cap (A \cup f(A)) \neq \emptyset$.

Como S_1 es un espacio compacto y $K \cap A \subseteq S_1$, entonces por el Teorema 2.5, $K \cap A$ es compacto en S_1 . Sea $f : A \to S_2$ continua, veamos que como A es compacto y además S_2 es de Hausdorff, entonces por el Teorema 2.6, $f(A)$ es cerrado. Además, $K \cap f(A)$ es un subconjunto cerrado de S_2. Nuevamente por el Teorema 2.5, se tiene que $K \cap f(A)$ es compacto en S_2. De esta manera $K \cap (A \cup f(A))$ es compacto en S_2. Como $f : A \to S_2$ es continua, se tiene que $f(K \cap (A \cup f(A)))$ es compacto. Ahora como $f(K \cap (A \cup f(A)) \subseteq S_2$, por el Teorema 2.6 se tiene que $f(K \cap (A \cup f(A))$ es cerrado en S_2. De modo que $K \cup f(K \cap (A \cup f(A))$ es cerrado en $S_1 + S_2$. Por lo que $S_1 + S_2 \setminus (K \cup f(K \cap (A \cup f(A))))$ es abierto en $S_1 + S_2$.

Afirmamos que $\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(K)) = S_1 + S_2 \setminus (K \cup f(K \cap (A \cup f(A))))$

Sea $y \in \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(K))$. Veamos que $y \in S_1 + S_2 \setminus (K \cup f(K \cap (A \cup f(A))))$.

Notemos $\pi(y) \in \mathcal{D} \setminus \pi(K)$, entonces $\pi(y) \notin \pi(K)$ donde
$\pi(K) = \{\{a\} : a \in K \setminus (A \cup f(A))\} \cup \{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(K \cap (A \cup (A)))\}$
de modo que $\pi(y) \notin \{\{a\} : a \in K \setminus (A \cup f(A))\}$
y $\pi(y) \notin \{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(K \cap (A \cup (A)))\}$, entonces $y \notin K \setminus (A \cup f(A))$ y $y \notin f(U \cap (A \cup f(A)))$, por lo que $y \in S_1 + S_2 \setminus (K \cup f(K \cap (A \cup f(A))))$.

Veamos ahora $S_1 + S_2 \setminus (K \cup f(K \cap (A \cup f(A)))) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(U))$.

Sea $z \in S_1 + S_2 \setminus (K \cup f(K \cap (A \cup f(A))))$, entonces $z \in S_1 + S_2 \setminus (U)$ por lo cual $z \notin K$ y $z \in S_1 + S_2 \setminus (f(K \cap (A \cup f(A))))$. Así $z \notin f(K \cap (A \cup f(A)))$.

Como $\pi(K) = \{\{a\} : a \in K\backslash(A \cup f(A))\}$
$\cup\{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(K \cap (A \cup f(A)))\}$ se tiene $\pi(z) \notin \pi(K)$, $\pi(z) \in \mathcal{D}\backslash\pi(U)$ de modo que $\pi(y) \in \mathcal{D}\backslash\pi(K)$ es abierto en $S_1 + S_2$. Por tanto $\mathcal{D}$ es una descomposición usc. $\square$

Teorema 7.3. *Si X, Y son continuos disjuntos, entonces $X \cup_f Y$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 9.2 sabemos que $X \cup_f Y$ es un espacio métrico y compacto. Falta ver que $X \bigcup_f Y$ es conexo. Sea $\pi : X + Y \to X \cup_F Y$ la función natural.
Notemos que $\pi(X) = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(A)\}$ y $\pi(Y) = \{\{y\} : y \in Y \setminus f(A)\} \cup \{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(A)\}$. Además se tiene que $\pi(X)$, $\pi(Y)$ son conexos pues X, Y son conexos. Como $\pi(X) \cap \pi(Y) \neq \emptyset$ pues al menos se intersectan en el conjunto $\{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(A)\}$. Así $\pi(X) \cup \pi(Y)$ es conexo. Dado que $\pi(X + Y) = X \cup_f Y$ Por lo tanto, $X \bigcup_F Y$ es un continuo. $\square$

Capítulo 8

Propiedades que se preservan, o no, bajo identificaciones

En este capítulo mostraremos algunas propiedades que se preservan o no bajo identificaciones.

Proposición 8.1. *Sea Y un espacio topológico. Y es localmente conexo si y sólo si las componentes de cada conjunto abierto de Y son conjuntos abiertos de Y.*

Demostración. Veamos que las componentes de cada conjunto abierto en Y son conjuntos abiertos en Y. Sean $G \subseteq Y$ abierto y $\beta = \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una base de Y, la cual consta de abiertos conexos. Sea $y \in G$ y C la componente de y contenida en G. Dado que $y \in G$, entonces existe $U \in \beta$ con $y \in U \subseteq G$. Como cada C es la componente de p contenida en G y U es conexo se tiene que $y \in U \subseteq C$, de modo que C es abierto. Probemos ahora que Y es localmente conexo. Como para cada V abierto de Y, V es unión de componentes, y cada componente es abierta, entonces la familia de componentes determinada por todos los abiertos de Y, forman una base para Y. $\square$

Teorema 8.1. *Sea $p : X \to Y$ una función de identificación. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Por la Proposición 8.1 basta probar que para todo abierto de Y cada una de sus componente de U es abierto en Y. Sea $U \in \tau_Y$ y K una componente de U. Dado que p es una identificación basta con mostrar que $p^{-1}(K) \in \tau_X$. Note primero que $p^{-1}(K) \subseteq p^{-1}(U)$. Sea $x \in p^{-1}(K)$ y C_x

la componente de x contenida en el abierto $p^{-1}(U)$, es decir $x \in C(x) \subseteq p^{-1}(U)$. Como $p(C(x))$ es conexo y $p(x) \in K \subseteq U$, entonces $p(C(x)) \subseteq K$ de esta manera $x \in C(x) \subseteq p^{-1}(K)$. Como X es localmente conexo en x y $p^{-1}(U) \in \tau_X$, entonces por la Proposición 8.1, $C(x) \in \tau_X$. Por lo que $p^{-1}(K)$ es abierto en X. Por lo tanto $K \in \tau_Y$. □

Corolario 8.1. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Por el Corolario 3.2 se tiene que f es una función de identificación. Aplicando el Teorema 8.1 obtenemos lo requerido. □

Proposición 8.2. *Espacio cociente de T_1 no necesariamente es T_0.*

Demostración. Sea X infinito con la topología cofinita la cual es T_1 y D_1 y D_2 subconjuntos infinitos de X ajenos tales que $X = D_1 \cup D_2$.

Como $X \backslash D_1 = D_2$ y $X \backslash D_2 = D_1$ no son finitos, entonces D_1 y D_2 no son abiertos y no son cerrados de X

Sea $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$, como $\bigcup\{D_i\} = D_i$, $i = 1, 2$ no son abiertos en X, entonces $\{D_1\}$ y $\{D_2\}$ no son abiertos en $\mathcal{D}$. Por lo que $\tau_{\mathcal{D}}$ es la topología indiscreta y como sabemos esta no es T_0. □

Proposición 8.3. *Sean X, Y espacios normales, $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado y $f : A \to Y$ continua, entonces $X \bigcup_f Y$ es normal.*

Demostración. Sean $F_1, F_2 \subseteq X \bigcup_f Y$ conjuntos cerrados y disjuntos, $p : X + Y \to X \bigcup_f Y$ la función natural, entonces $p^{-1}(F_i)$, $i = 1, 2$, es cerrado en $X + Y$. De esta manera, $Y \cap p^{-1}(F_i)$, $i = 1, 2$, es cerrado en Y. Como Y es normal, por la Proposición 11 existen V_i, $i = 1, 2$, tales que $Y \cap p^{-1}(F_i) \subseteq V_i$, $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$.

Notemos que por el Teorema [3, Teorema 6.3, p.128], $p(Y)$ es un conjunto cerrado de $X \bigcup_f Y$ homeomorfo a Y, así como $\overline{V_i}$ es cerrado en Y, $p(\overline{V_i})$ es cerrado en $X \bigcup_f Y$.

Además $F_i \cup p(\overline{V_i})$, $i = 1, 2$, son conjuntos cerrados en $X \bigcup_f Y$. Dado que $p|Y$ es un homeomorfismo, $p(\overline{V_1}) \cap p(\overline{V_2}) = \emptyset$ y como $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, entonces $(F_1 \cup p(\overline{V_1})) \cap (F_2 \cup p(\overline{V_2})) = \emptyset$, de ahí que $(X \cap p^{-1}(F_1 \cup p(\overline{V_1}))) \cup (X \cap p^{-1}(F_2 \cup p(\overline{V_2}))) = \emptyset$, donde $(X \cap p^{-1}(F_i \cup p(\overline{V_i})))$, $i = 1, 2$, es cerrado en X.

Como X es normal, existen U_i, $i = 1, 2$, abiertos ajenos en X tales que $(X \cap p^{-1}(F_i \cup p(\overline{V_i}))) \subseteq U_i$.

Veamos que los conjuntos $p((U_i \backslash A) \cup V_i)$ son disjuntos y $F_i \subseteq p((U_i \backslash A) \cup V_i)$, $i = 1, 2$, esto último viendo que $p^{-1}(F_i) \subseteq (U_i \backslash A) \cup V_i$.

Mostraremos que $p((U_i \backslash A) \cup V_i)$ son abiertos en $X \bigcup_f Y$. Notemos que $Y \cap p^{-1}(p((U_i \backslash A) \cup V_i)) = Y \cap p^{-1}(p(U_i \backslash A) \cup p(V_i)) = Y \cap V_i = V_i$.

Veamos ahora que $X \cap p^{-1}(p((U_i \backslash A) \cup V_i)) = X \cap p^{-1}(p(U_i \backslash A) \cup p(V_i))$ $= X \cap [(p^{-1}(p(U_i) \backslash A)) \cup p^{-1}(p(V_i))] = X \cap [(U_i \backslash A) \cup (f^{-1}(V_i) \cup V_i)] = (X \cap (U_i \backslash A)) \cup (X \cap f^{-1}(V_i)) \cup (X \cap V_i) = (U_i \backslash A) \cup (f^{-1})(V_i)$ el cual claramente es abierto en X.

Por lo tanto $X \bigcup_f Y$ es normal. $\square$

Proposición 8.4. *Sea X normal y $A \subseteq X$ cerrado, entonces X/A es normal.*

Demostración. Dado que X/A es la descomposición de X obtenida al adjuntar X a algún punto q con la función constante $f : A \to q$, entonces por la Proposición anterior X/A es normal. $\square$

Veamos una pequeña aplicación de espacios cociente a la Teoría de grupos.

Definición 8.1. *Un **grupo** es un conjunto G no vacío con una operación binaria $* : G \times G \to G$ que cumple lo siguiente:*

a) Cualesquiera $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$

b) Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$

c) Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$

Si no hay confusión de aquí en adelante usaremos la notación ab en lugar de $a * b$, salvo que se necesite de manera explicita.

Definición 8.2. *Sea G un grupo no vacío y $H \subseteq G$. H es un **subgrupo** de G si para todo $a, b \in H$ se cumple que:*

a) $ab \in H$

b) $a^{-1} \in H$

Usaremos la notación $H \leqslant G$, para decir que H es un subgrupo de G.

Definición 8.3. *Sea $H \leqslant G$ y $a \in G$*

*a) $aH = \{ah : h \in H\}$ es la **clase lateral izquierda** de a.*

b) $Ha = \{ha : h \in H\}$ *es las* ***clase lateral derecha*** *de* a.

Definición 8.4. *Sea* G *un grupo. Para dos subconjuntos* $A, B \subseteq G$ *escribimos* $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ *al* ***producto de los conjuntos*** A *y* B.

Definición 8.5. *Sean* G *un grupo y* $H \leqslant G$ *el cociente de* G *entre* H *como* $G/H = \{aH : a \in G\}$ *y definimos a la función* $p_H : G \to G/A$ *como* $p_H(a) = aH$

Definición 8.6. *Un subgrupo* H *de* G *se dice que es un* ***subgrupo normal*** *de* G *si para toda* $g \in G$ *y toda* $h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

G/H es un grupo cuando H es un subgrupo normal de G [5, Teorema 2.c, p.58]. Nótese también que en este caso G/H forma una partición del grupo G.

Definición 8.7. *Un* ***grupo topológico*** *es un par* (G, τ) *donde* G *es un grupo provisto de una topología de Hausdorff* τ*, tal que las operaciones de grupo:* $m : G \times G \to G$ *dada por* $m(x, y) = xy$ *y* $n : G \to G$ *dada por* $n(x) = x^{-1}$ *resultan funciones continuas considerando la topología producto en* $G \times G$.

Definición 8.8. *Sean* G *un grupo y* H *un subgrupo normal de* G. G/H *es llamado el* ***grupo cociente*** *de* G *entre* H*. Si* G *tiene una topología y el grupo* G/H *se le dota de la topología cociente bajo la función* p_H *se obtiene de dar al grupo cociente algebraico la topología cociente*

Lema 8.1. *Sean* G *un grupo topológico y* H *un subgrupo de* G*. Si* $U \subseteq G$*, entonces* $HU = \bigcup_{h \in U} hU$*. Más aún, si* U *es abierto, entonces* HU *es abierto en* G.

Demostración. Primero veamos que $HU = \bigcup_{h \in H} hU$. Sea $hu \in HU$, entonces $h \in H$ y $u \in U$, por lo que $hU \in \bigcup_{h \in H} hU$. Ahora, sea $z \in \bigcup_{h \in H} hU$, entonces $z \in hU$ para algún $h \in H$ así $z = hu$, con $h \in H$, por lo que $z \in HU$. Por lo tanto $HU = \bigcup_{h \in H} hU$. Probaremos ahora que HU es abierto si U es abierto, demostrando que cada hU es abierto. Para ello veamos primero que si $x \in G$ es fijo, entonces la función $\lambda_x : G \to G$ dada por $\lambda_x(g) = m(x, g) = xg$ es un homeomorfismo. Nótemos que $\lambda_x = m|_{\{x\} \times G}$. Dado que G es un grupo topológico y m es continua, de donde λ_x es continua. Si definimos ahora $\lambda_{x^{-1}}$, tenemos, con el mismo razonamiento de arriba, que esta función también es continua. Si mostramos que λ_x y $\lambda_{x^{-1}}$ son funciones inversas, tendremos que λ_x es biyectiva. Procedamos a probarlo. $(\lambda_x \circ \lambda_{x^{-1}})(g) = \lambda_x(\lambda_{x^{-1}}(g)) = \lambda_x(x^{-1}g) = xx^{-1}g = g$. Por otra parte $(\lambda_{x^{-1}} \circ \lambda_x)(g) = \lambda_{x^{-1}}(\lambda_x(g)) = \lambda_{x^{-1}}(xg) = x^{-1}xg = g$.

Por lo que λ_x es biyectiva y por lo tanto un homeomorfismo. Finalmente si U es un abierto en G, $\lambda_h(U)$ es abierto, y dado que $\lambda_h(U) = hU$. Tenemos que $HU = \bigcup_{h\in H} hU$ es abierto en G. $\square$

Proposición 8.5. *Si G es un grupo topológico y H un subgrupo de G, entonces G/H es un grupo topológico, además se satisface lo siguiente*

1. *La función $p_H : G \to G/H$ es una función abierta.*
2. *G/H es discreto si y sólo si H es abierto en G.*
3. *Si G es compacto, entonces G/H es compacto.*
4. *Si H y G son localmente compactos, entonces G/H es localmente compacto.*

Demostración. 1. Sea $U \in \tau_G$, probaremos que $p_H(U) = \{aH : a \in U\} \in \tau_{G/H}$. Para ello probaremos que $p_H^{-1}(p_H(U)) = HU = \bigcup_{h\in H} hU$ y del Lema se tendría que $p_H^{-1}(p_H(U))$ es abierto. Sea $g \in p_H^{-1}(p_H(U))$, entonces $p_H(g) \in p_H(U)$, así existe $u \in U$ tal que $gH = p_H(g) = p_H(u) = uH$, luego $g \in gH = uH = Hu$ para algún $u \in U$, entonces $g = hu \in hU$ para algún $h \in H$ por lo que $g \in \bigcup_{h\in H} hU$.

   Sea $g \in \bigcup_{h\in H} hU$, entonces $g \in hU$ para algún $h \in H$, con $g = hu$ para algún u, entonces $g \in Hu$ así $p_H(g) = Hu = uH$, de modo que $p_H(g) = gH = uH = p_H(u)$, entonces $g \in p_H^{-1}(p_H(u)) \subseteq p_H^{-1}(p_H(U))$. De lo anterior $p_H^{-1}(p_H(U)) = HU$, por lo que $p_H(U)$ es abierto en G/H. Por lo tanto p_H es una función abierta.

2. Supongamos que G/H es discreto, entonces $\{H\} \in \tau_{G/H}$, como p_H es una función continua se tiene que $p_H^{-1}(\{H\}) = H$ es abierto en G.

   Recíprocamente, si $H \subseteq G$ es abierto tenemos que para cualquier $g \in G$ se cumple que gN es abierto en G. Como p_H es una función abierta se tiene que $p_H(gN) = \{gN\} \in \tau_{G/H}$. Por lo tanto G/H es discreto.

3. Sea $\pi : G \to G/H$ la función natural la cual es continua y suprayectiva, como la compacidad se preserva bajo funciones continuas, entonces G/H es compacto.

4. Como $p_H : G \to G/H$ es una función continua y abierta, entonces por [1, Teorema 18.5, p.131] G/H es localmente compacto.

$\square$

Proposición 8.6. *Cocientes arbitrarios de espacios T_4 no necesariamente son T_4.*

Demostración. Primero veamos que la imagen abierta continua de un espacio Hausdorff no necesariamente es Hausdorff. Sea $X = L_1 \cup L_2$, donde $L_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ y $L_1 = \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{D} = \{\{(x,0),(x,1)\}\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(0,1)\}$. Veamos que $p : X \to \mathcal{D}$, la función natural, es función abierta.

Definamos para $\bar{x} \in L_1$ la vecindad $V_{\bar{x}} = \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{1\} : \epsilon > 0\} \cup \{(a,b) \times \{0\} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$,y para $\bar{x'} \in L_0$ la vecindad

$V'_{\bar{x}} = \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{0\} : \epsilon > 0\} \cup \{(a,b) \times \{1\} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Sea $\bar{x} \in L_0 \cup L_1$. Si $\bar{x} \in L_1$, y sea U un abierto básico que contiene a $\bar{x}$, entonces $U = (x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{1\} \cup (a,b) \times \{0\}$, para algún $\epsilon > 0$ y para algunos $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, entonces $p(U) = \{\{(z,1),(z,0)\} : x-\epsilon < z < x+\epsilon\} \cup \{\{(w,1),(w,0)\} : a < w < b\}$.

Notemos que $\bigcup p(U) = (x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{0\} \cup (x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{1\} \cup (a,b) \times \{0\} \cup (a,b) \times \{1\}$, con $\epsilon > 0 \in \tau_X$ pues $(x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{0\}$,$(a,b) \times \{0\} \in \tau_{L_0}$ y $(x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{1\}$,$(a,b) \times \{1\} \in \tau_{L_1}$, así $p(U) \in \tau_X$, por lo que p es una función abierta.

Veamos ahora que $\mathcal{D}$ no es de Hausdorff. Sean $\{(0,0)\}$,$\{(0,1)\} \in \mathcal{D}$, y $\mathcal{B} \in \tau_{\mathcal{D}}$ tal que $\{(0,0)\} \in \mathcal{B}$, entonces $\bigcup \mathcal{B} \in \tau_X$ y además $(0,0) \in \cup\mathcal{B}$. Como $\bigcup \mathcal{B}$ es un abierto en X que contiene a $(0,0)$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $(0-\delta_1, 0+\delta_1) \in \tau_X$ y cumple con que $(0,0) \in (\delta_1, \delta_2) \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ además se tiene que si $(z,0) \in \bigcup \mathcal{B}$, entonces $(z,0) \in (0-\delta_1, 0+\delta_1)$ y $(z,1) \in \bigcup \mathcal{B}$, de esta manera $\{\{(0,0)\}\} \cup \{\{(z,1),(z,0)\} : x-\delta_1 < z < x+\delta_1\} \subseteq \mathcal{B}$, similarmente para $\mathcal{B}' \in \tau_{\mathcal{D}}$ y $(0,1) \in \cup\mathcal{B}'$ se tiene que $\{\{(0,1)\}\} \cup \{\{(z,1),(z,0)\} : x-\delta_2 < z < x+\delta_2\} \subseteq \mathcal{B}'$, notemos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$.

Observemos que para cualesquiera $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_{\mathcal{D}}$, con $\{(0,0)\} \in \mathcal{U}$ y $\{(0,1)\} \in \mathcal{V}$ se tiene que $\{\{(z,1),(z,0)\} : x-\epsilon_1 < z < x+\epsilon_1\} \cup \{\{(0,0)\}\} \subseteq \mathcal{U}$ y $\{\{(z,1),(z,0)\} : x-\epsilon_2 < z < x+\epsilon_2\} \cup \{\{(0,1)\}\} \subseteq \mathcal{V}$, veamos que cualesquiera dos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ se intersectan.

Consideremos el valor máximo de ϵ_1, ϵ_2,

$m = max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, así $\{\{(z,1),(z,0)\} : x-m < z < x+m\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Por lo tanto $\{(0,0)\} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, análogamente para $\mathcal{B}'$ se tiene $\{(0,1)\} \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{D}$ no es de Hausdorff.

Como $X \subseteq \mathbb{R}^2$ y como $\mathbb{R}^2$ con la topología usual es T_4,entonces X es T_4, luego como $\mathcal{D}$ no es T_2 no es T_4, de manera que $\mathcal{D}$ no es T_4

Así, cocientes arbitrarios de T_4 no necesariamente son T_4

□

Teorema 8.2. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es abierta y X es primero numerable, entonces Y es primero numerable.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Dado que f es suprayectiva existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Sea $\mathcal{B}_x$ una base local numerable para x. Afirmamos que $\mathcal{B}'_y$ $= \{f(U) : U \in \mathcal{B}_x\}$ es una base local para y y $\mathcal{B}'_y$ es numerable. Como $\mathcal{B}_x$ es numerable, $\mathcal{B}'_y$ es numerable. Dado que f es abierta, cada $f(U)$ es abierto en Y. Sea V un abierto en Y tal que $y \in V$. Por la continuidad de f, $x \in f^{-1}(V)$ es un abierto en X. De esta manera existe $u \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$. Así, $y \in f(U) \subseteq V$, con lo cual queda demostrado el resultado. □

Corolario 8.2. *Cada identificación abierta preserva ser primero numerable.*

Demostración. Es claro, de que las funciones de identificación son suprayectivas y continuas. □

Proposición 8.7. *Cocientes de espacios segundo numerables no necesariamente son segundo numerable.*

Demostración. Sea $I = [0,1]$ con la topología usual, τ_U. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $I_n = [0,1] \times \{n\}$. Si I_n tiene la topología producto, I_n es homeomorfo a I. Note que $I_n \cap I_m = \emptyset$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Considere a $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} I_n$ con la unión libre de una familia numerable de espacios topológicos, entonces $U \subseteq X$ es un abierto en X, si $U \cap I_n$ es un abierto en I_n, para cada $n \in \mathbb{N}$

Sea $A = \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ nótese que A es cerrado en X. Consideremos el cociente X/A.

Como I es segundo numerable y ser segundo numerable se preserva bajo homeomorfismos I_n, es segundo numerable y la unión libre de una familia numerable de espacios topológicos segundo numerable es segundo numerable. Por lo que X es segundo numerable. Afirmamos que X/A no es segundo numerable, para ello mostraremos que X/A no es primero numerable en el punto $A \in X/A$. Ya que se sabe que un espacio segundo numerable es primero numerable, entonces X/A debería ser primero numerable, esto haría una contradicción.

Supongamos que X/A es primero numerable en A. Sea $\mathcal{B} = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ un sistema local de vecindades en A numerable. Como V_i es abierto en X/A y cada V_i contiene a A, entonces $\pi^{-1}(V_i) \cap I_n$ es un abierto en I_n y además $\pi^{-1}(V_i) \cap I_n \neq \emptyset$, para toda $i \in \mathbb{N}$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, pues al menos $(0, n) \in \pi^{-1}(V_i) \cap I_n$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $0 < a_n^i \in I$ tal que $U_n^i = [0, a_n^i) \times \{n\} \subseteq I_n$ y $\pi(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^i) \subseteq V_i$, pues $\pi(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^i) = \{A\} \cup \bigcup \{\{(x,n)\} : 0 < x < a_n^i\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_n^{i+1} < a_n^i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $0 < b_n \in [0,1]]$ tal que $a_n^{n+1} < b_n < a_n^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, b_n) \times \{n\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ y $\pi(U) = \{A\} \cup \bigcup \{\{(x,n)\} : 0 < x < b_n\} = V$ es abierto en X/A. Afirmamos que no existe $V_n \in \mathcal{B}$ tal que $V_n \subseteq V$. Notemos primero que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene $\pi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, a_n^i) \times \{n\}) \subseteq V_i$, Como $\pi([0, b_1) \times \{1\}) \subsetneq \pi([0, a_1^1) \times \{1\}) \subseteq \pi(U_1) \subseteq V_1$, entonces $V_1 \nsubseteq \pi(U) = V$. De igual manera $\pi([0, b_2) \times \{2\}) \subset \pi([0, a_2^2) \times \{2\}) \subseteq \pi(U_2) \subseteq V_2$, entonces $V_2 \nsubseteq \pi(U) = V$.

En general $\pi([0, b_n) \times \{n\}) \subset \pi([0, a_n^n) \times \{n\}) \subseteq \pi(U_n) \subseteq V_n$ lo que implica que $V_n \nsubseteq \pi(U) = V$. Lo cual contradice que $\mathcal{B}$ es base local para $A \in X/A$. Por lo tanto X/A no es segundo numerable. $\square$

Definición 8.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $D \subseteq X$. Diremos que D es* ***denso*** *en X si $\overline{D} = X$.*

Definición 8.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es separable si X tiene un conjunto denso y numerable*

Proposición 8.8. *Sea $f : X \to Y$ una función continua.*

1. *Si f es sobreyectiva y $D \subseteq X$ es denso, entonces $f(D)$ es denso en Y.*

2. *si X es separable, entonces Y también es separable.*

Demostración.

1. Sabemos que $f(\overline{D}) \subseteq Y$, veremos que $Y \subseteq \overline{f(D)}$. Como $f : X \to Y$ es una función continua y $D \subseteq X$, entonces $f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$, pero D es denso en X, es decir, $\overline{D} = X$ así $f(\overline{D}) = f(X) = Y$, pues f es sobreyectiva. De este modo $Y \subseteq \overline{f(D)}$. Por lo tanto $\overline{f(D)} = Y$.

2. Como f es continua y $D \subseteq X$, entonces $f|_D : D \to Y$ es continua. Notemos que como X es separable, X tiene un conjunto denso y numerable. Sea D un conjunto denso y numerable, así $f(D)$ es numerable,

como ya probamos que $f(D) \subseteq Y$ es denso en Y. Por lo tanto Y es separable.

□

Proposición 8.9. *Sean X, Y espacios topológicos y $\pi : X \to Y$ una función de identificación. Si X es separable, entonces Y es separable*

Demostración. Notemos que $\pi(X) = Y$, y por la Proposición 7.8 sabemos que la imagen continua de espacios separables es separable, por lo tanto Y es separable. □

Proposición 8.10. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es Lindelöf, entonces Y es Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de Y, con I un conjunto de índices, como f es continua tenemos que $\mathcal{G} = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es Lindelöf podemos tomar una cantidad numerable de $\mathcal{G}$ de forma que $\mathcal{G}' = \{f^{-1}(U_{\alpha_i}) : i = 1, 2, \dots\}$ es una cubierta numerable de X, así $\mathcal{C}' = \{U_{\alpha_i} : i = 1, 2, \dots\}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{C}$ pues $\mathcal{C}' = \{U_{\alpha_i} : i = 1, 2, \dots\} \subseteq \mathcal{C}$. Por lo tanto Y es Lindelöf. □

Proposición 8.11. *Sean X, Y espacios topológicos y $\pi : X \to Y$ una función de identificación. Si X es Lindelöf, entonces su cociente Y es Lindelöf.*

Demostración. Notemos que $\pi(X) = Y$, y por la Proposición 7.10 sabemos que la imagen continua de espacios Lindelöf es Lindelöf, por lo tanto Y es Lindelöf. □

Proposición 8.12. *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función de identificación. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Y es de Hausdorff*
2. *f es cerrada*
3. *$\Delta = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$ con la topología producto.*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que Y es de Hausdorff, como X es compacto y $f : X \to Y$ es continua, entonces por el Teorema 1.7 la función f es cerrada.

$1 \Rightarrow 3)$ Sean $B = (X \times X)\backslash\Delta$ y $(x_1, x_2) \in B$. De aquí $f(x_1) \neq f(x_2)$ con $f(x_1)$, $f(x_2) \in Y$. Como Y es de Hausdorff, existen $U, V \in \tau_Y$ de forma que $f(x_1) \in U$, $f(x_2) \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Además como $U, V \in \tau_Y$, entonces $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau_X$. De esta manera $f^{-1}(U) \times f^{-1}(V) \in \tau_{X\times X}$.

Afirmamos que $W = f^{-1}(U) \times f^{-1}(V) \subseteq B$. Sea $(y_1, y_2) \in W$, entonces $y_1 \in f^{-1}(U)$ y $y_2 \in f^{-1}(V)$ lo que implica que $f(y_1) \in U$ y $f_{y_2} \in V$. Como $U \cap V = \emptyset$ se tiene que $f(y_1) \neq f_(y_2)$. Así $(y_1, y_2) \in B$. Por lo tanto $x \in W \subseteq B$. De este modo B es abierto en $\tau_{X\times X}$. Por lo tanto Δ es cerrado en $X \times X$.

$3 \Rightarrow 1)$ Supongamos que Δ es cerrado en $X \times X$, entonces $B = (X \times X)\backslash\Delta$ es abierto en $X \times X$ y sea $(x, y) \in B$. Así $f(x) \neq f(y) \in Y$. Como $f : X \to Y$ es una identificación y además X es de Hausdorff se tiene que para $x \neq y$ existen $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau_X$ de forma que $x \in f^{-1}(U)$ y $y \in f^{-1}(V)$ con $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Como $x \in f^{-1}(U)$ y $y \in f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in V$ y $f(y) \in U$, con $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto Y es de Hausdorff. $\square$

Capítulo 9

Ejemplos geométricos

Ejemplo 9.1. *Si $a, b \in \mathbb{R}^2$, denotaremos como ab al segmento de recta con puntos finales a y b.*

Sean $p = (0,0)$, $q = (1,0)$ y $d_n = (1, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos el abanico armónico F_H como:

$$F_H = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} pd_n) \cup pq.$$

Consideremos $L = pq$ y $L_i = pd_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

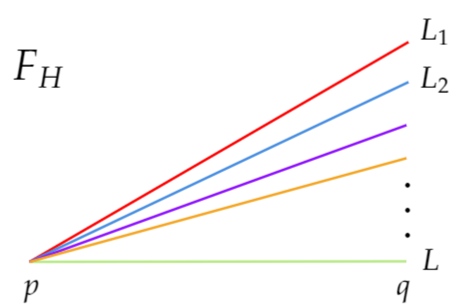

Figura 9.1: Abanico armónico

Sea $\pi : F_H \to \mathcal{D}$ la función natural de F_H a la descomposición

$$\mathcal{D} = \{L\} \cup \left\{ \{x\} : x \in (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i) \setminus \{p\} \right\}$$

.

Observemos que $\pi(L) = \{L\}$

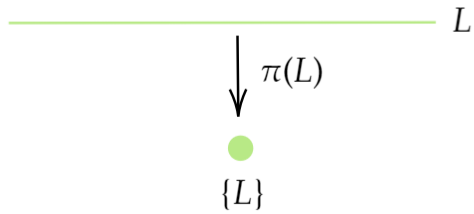

Figura 9.2: $\{L\}$

Como $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge a* L *en* F_H *y* π *es continua, entonces* $\pi(L_i)$ *converge a* $\pi(L) = \{L\}$. *Así, el espacio de descomposición es homeomorfo al continuo* F_ω.

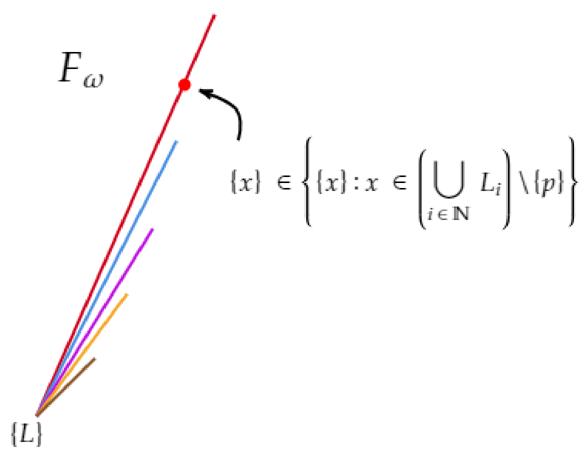

Figura 9.3: F_ω

Ejemplo 9.2. *Sea* F_H *el abanico armónico, definido como en el Ejemplo 9.1*

Consideremos $L = pq$ *y* $L_i = pd_i$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$. *Además tomemos a* r *el punto medio de la recta* L.

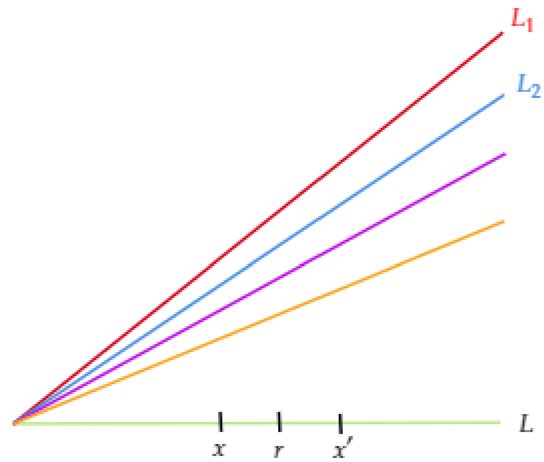

Figura 9.4: Abanico armónico, punto medio

Sea $\pi : F_H \to \mathcal{D}$ *la función natural de* F_H *a la descomposición*

$$\mathcal{D} = \left\{ \{x\} : x \in (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i) \setminus \{p\} \right\}$$

$$\cup \{\{x, x'\} : x, x' \in L, y \; r \, es \; punto \; medio \; del \; arco \; xx'\} \cup \{\{r\}\}.$$

Observemos que

$$\pi(L) = \{\{x, x'\} : x, x' \in L, y \; r \, es \; punto \; medio \; del \; arco \; xx'\} \cup \{\{r\}\}$$

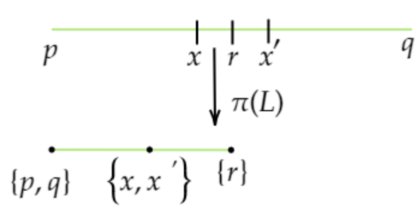

Figura 9.5: Descomposición de L

Como $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a L en F_H y π es continua, entonces $\pi(L_i)$ converge a $\pi(L) = \{\{x, x'\} : x, x' \in L, y\ r es$ punto medio del arco $xx'\} \cup \{\{r\}\}$. Así, el espacio de descomposición es un espacio homeomorfo al continuo llamado la Chafaldrana.

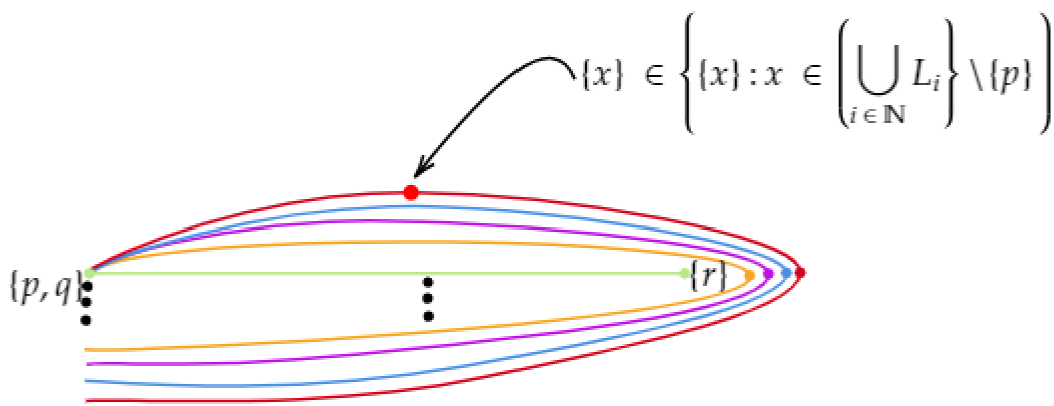

Figura 9.6: La Chafaldrana

Ejemplo 9.3. *Sea F_H el abanico armónico, definido como se hizo anteriormente.*

Consideremos $L = pq$ y $L_i = pd_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea r_i el punto medio del arco L_i para cada $i \in \mathbb{N}$ y sea r el punto medio del arco L.

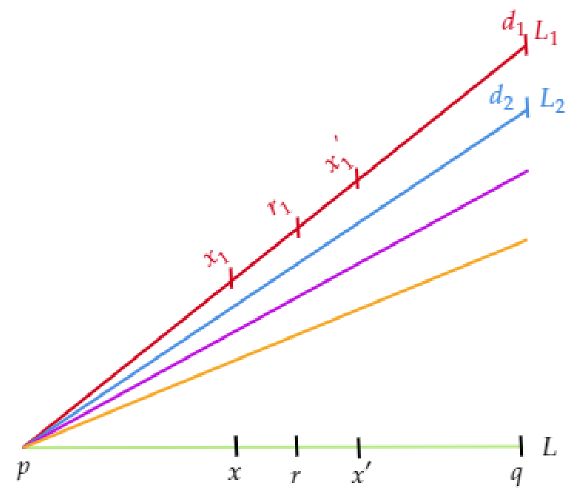

Figura 9.7: Abanico armónico

Sea $\pi : F_H \to \mathcal{D}$ *la función natural de* F_H *a la descomposición*

$$\mathcal{D} = \{\{r_i\} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{\{r\}\} \cup \{\{p, q, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}\}$$

$$\cup \{\{x_i, x_i'\} : x_i, x_i' \in L_i \backslash \{p, d_i\}, i \in \mathbb{N}, r_i \textit{ es el punto medio del arco } x_i x_i'\}$$

$$\cup \{\{x, x'\} : x, x' \in L \backslash \{p, q\}, r \textit{ es el punto medio del arco } xx'\}$$

Observemos que

$$\pi(L_i \backslash \{p\}) = \{\{x_i, x_i'\} : x_i, x_i' \in L_i \backslash \{p, d_i\}, r_i \textit{ es el punto medio del arco } L_i\}$$

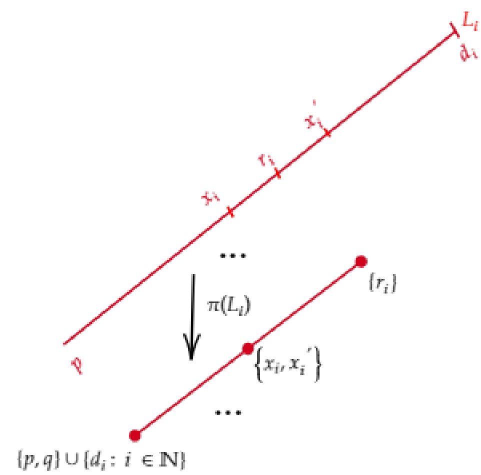

Figura 9.8: $\pi(L_i)$

Como $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge a* L *en* F_H *y* π *es continua, entonces* $\pi(L_i)$ *converge a* $\pi(L) = \{\{x,x'\} : x,x' \in L\setminus\{p,q\}, r \text{ es el punto medio del arco } xx'\} \cup \{\{r\}\} \cup \{\{p,q,d_1,d_2,\dots,d_n,\dots\}\}$. *Así, el espacio de descomposición es homeomorfo a el mismo.*

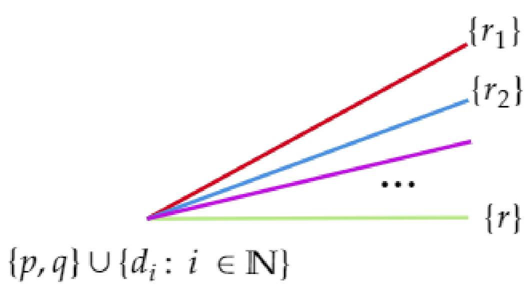

Figura 9.9: $\mathcal{D}$, el espacio de descomposición

Ejemplo 9.4. *Definimos el abanico armónico como en el Ejemplo 9.1. Consideremos los siguientes puntos en el arco* L_1*:* p_1 *es el punto medio del arco*

pp_0, (por comodidad llamaremos p_0 al punto q), p_i es el punto medio de pp_{i-1}, q_i es el punto medio de p_ip_{i-1} para cada $i \in \mathbb{N}$.

Definiremos los siguientes puntos en el arco L_1:

p_1^1 *el punto medio del arco* pd_1,

q_1^1 *el punto medio del arco* $p_1^1 d_1$,

p_2^1 *el punto medio del arco* pp_1^1,

q_2^1 *el punto medio del arco* $p_1^1 p_2^1$,

$\vdots$

p_i^1 *el punto medio del arco* pp_{i-1}^1 *para cada* $i \in \mathbb{N}$,

q_i^1*el punto medio del arco* $p_{i-1}^1 p_i^1$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$.

De esta forma para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos los siguientes puntos en L_j:

p_i^j *el punto medio del arco*$^j_{i-1}$, *para cada* $i \in \mathbb{N}$,

q_i^j *el punto medio del arco* $p_{i-1}^j p_i^j$, *para cada* $i \in \mathbb{N}$.

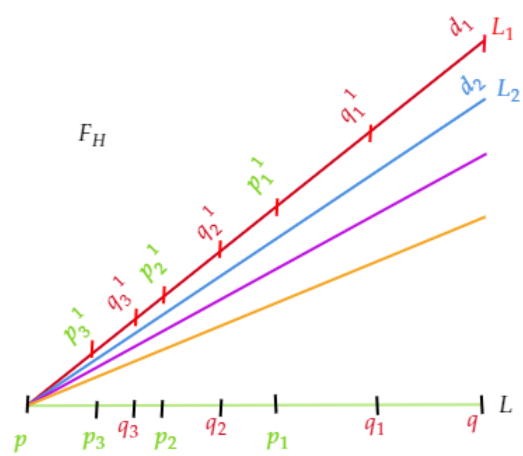

Figura 9.10: F_H, el Abanico armónico

Sea $\pi : F_H \to \mathcal{D}$ la función natural de F_H a la descomposición

$\mathcal{D} = \{\{p\} \cup \{p_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\} \bigcup \{\{x, x'\} : q_i$ *es punto medio de*

$xx', x, x' \in p_ip_{i-1} \setminus \{p_i, p_{i-1}\} \bigcup \{\{q_i\} : i \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\{x\} : x \in (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i) \setminus \{p\}\}$.

Afirmamos que $\pi(L)$ es homeomorfo a F_ω, para esto primero hacemos la identificación de

$$\{p\} \cup \{p_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

en L:

Figura 9.11: $\{p\} \cup \{p_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

La identificación de

$$\{\{p\} \cup \{p_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{\{x, x'\} : q_i \textit{ es punto medio de } xx', x, x' \in p_ip_{i-1} \setminus \{p_i, p_{i-1}, q_i\}\}$$

$$\cup \{\{q_i\}\}_{i\in\mathbb{N}}$$

resulta ser:

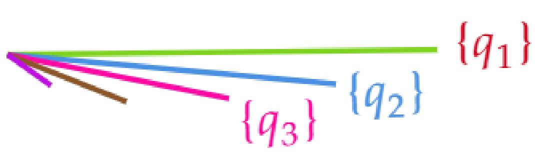

Figura 9.12: $\pi(L)$

Obteniendo F_ω. Como $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a L en F_H y π es continua, entonces $\pi(L_i)$ converge a $\pi(L) = F_\omega$.

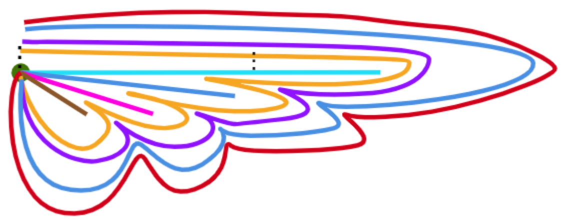

Figura 9.13: $\mathcal{D}$ el espacio de descomposición

Ejemplo 9.5. *Sean $X = [0,1]\times[0,1]$, $A = \{(0,y) : y \in [0,1]\}$, $A' = \{(1, 1-y) : y \in [0,1]\}$ y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural de X a la descomposición*

$$\mathcal{D} = \{\{(x,y)\} : x \neq 0 \text{ ó } x \neq 1\} \bigcup \{\{(0,y),(1,1-y)\} : y \in [0,1]\}$$

.

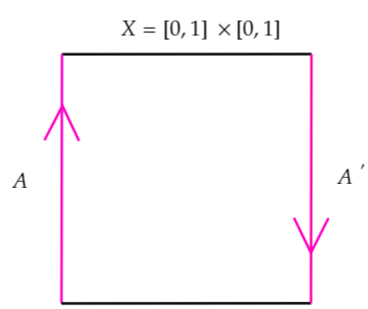

Figura 9.14: X es el cuadrado unitario

Observemos que $\pi(A) = \pi(A') = \{\{(0,y),(1,1-y)\} : y \in [0,1]\}$.

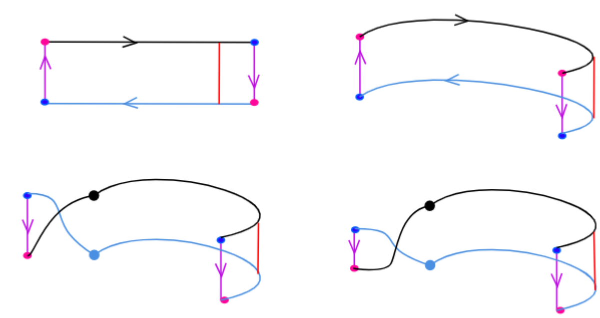

Figura 9.15

Así, $\mathcal{D}$ resulta ser homeomorfo a la Banda de Moëbius

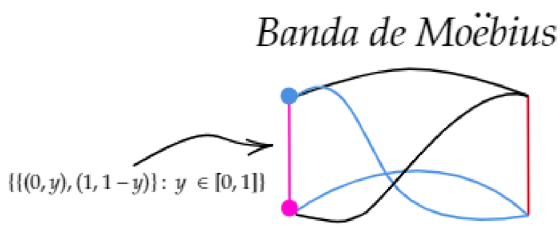

Figura 9.16: Banda de Moëbius

Ejemplo 9.6. *Sean* $X = [0,1] \times [0,1]$,
$A = \{(0, y) : y \in (0,1)\} \cup \{(1, 1-y) : y \in (0,1)\}$,
$B = \{(x, 0) : x \in (0,1)\} \cup \{(x, 1) : x \in (0,1)\}$ *y* $\pi : X \to \mathcal{D}$ *la función natural de* X *a la descomposición* $\mathcal{D} = \{(x, y) : x \neq 0 \neq y, x \neq 1 \neq y\}$
$\bigcup \{\{(0, y), (1, 1-y)\} : y \in (0,1)\} \bigcup \{\{(x, 0), (x, 1)\} : x \in (0,1)\}$

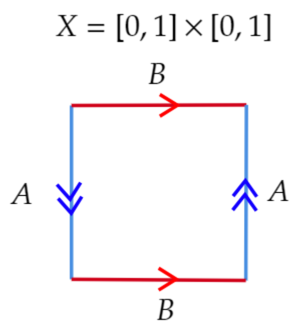

Figura 9.17: X es el cuadrado unitario.

Observemos que $\pi(A) = \{\{(0, y), (1, 1-y)\} : y \in (0,1)\}$, *y* $\pi(B) = \{\{(x, 0), (x, 1)\} : x \in (0,1)\}$

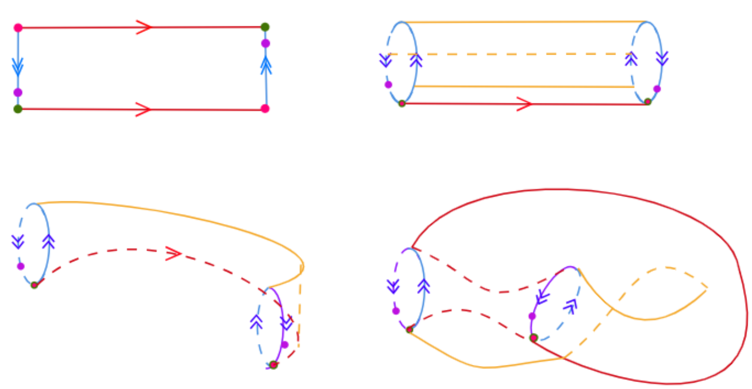

Figura 9.18

Así, $\mathcal{D}$ resulta ser homeomorfo a la botella de Klein.

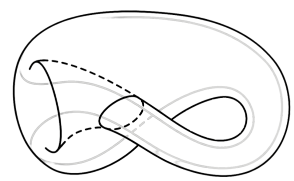

Figura 9.19: Botella de Klein

Ejemplo 9.7. *Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unitario*

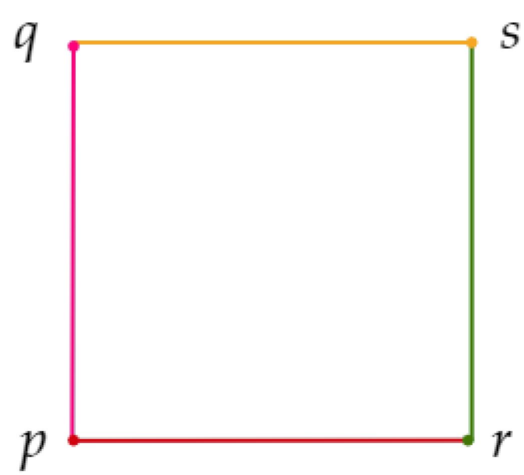

Figura 9.20: X el cuadrado unitario

y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural a la descomposición

$$\mathcal{D} = \{\{\overline{x}\} : \overline{x} \neq p, q, r, s\} \cup \{\{p, q, r, s\}\}$$

.

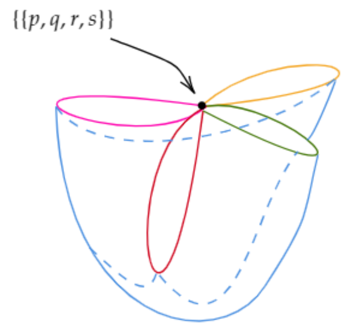

Figura 9.21: $\mathcal{D}$ el espacio de descomposición

Ejemplo 9.8. *Sean $X = S^1 \cup D_1$ donde S^1 la circunferencia unitaria, D_1 el disco unitario.*

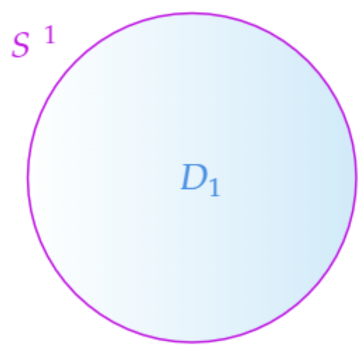

Figura 9.22: $X = S^1 \cup D_1$

y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural a la descomposición

$$\mathcal{D} = \{\{\overline{x}\} : \|\overline{x}\| < 1\} \bigcup \{S^1\},$$

la cual es homeomorfa a la esfera S^2

Figura 9.23: $\mathcal{D}$, el espacio de descomposición

Ejemplo 9.9. *Sean* $X = [0,1]\times[0,1]$, $A = \{(0,y) : y \in (0,1)\}\cup\{(1,1-y) : y \in (0,1)\}$, $B = \{(x,1) : x \in (0,1)\} \cup \{(1-x,0) : x \in (0,1)\}$ *y* $\pi : X \to \mathcal{D}$ *la función natural de* X *a la descomposición* $\mathcal{D} = \{(x,y) : x \neq 0 \neq y, x \neq 1 \neq y\}$ $\bigcup \{\{(0,y),(1,1-y)\} : y \in (0,1)\} \bigcup \{\{(x,1),(1-x,0)\} : x \in (0,1)\}$

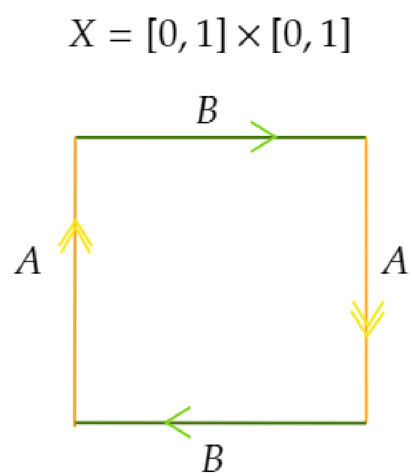

Figura 9.24: X es el cuadrado unitario.

Observemos que $\pi(A) = \{\{(0,y),(1,1-y)\} : y \in (0,1)\}$,

$\pi(B) = \{\{(x,1),(1-x,0)\} : x \in (0,1)\}$

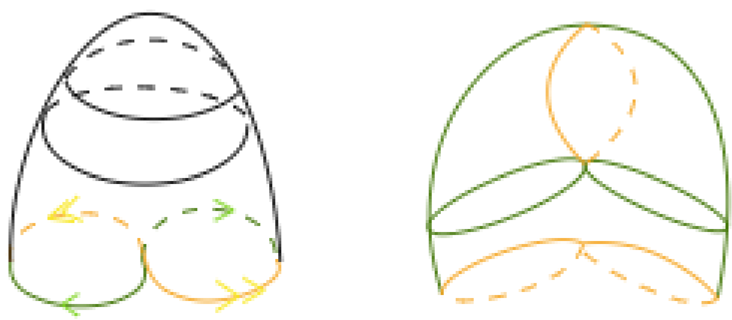

Figura 9.25

Nótese que si consideramos a la esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e identificamos puntos antípodas, el espacio cociente $\mathcal{D}$ obtenido de esta identificación es homeomorfo a $\mathcal{D}$. (Compare con el Ejemplo 7.1)

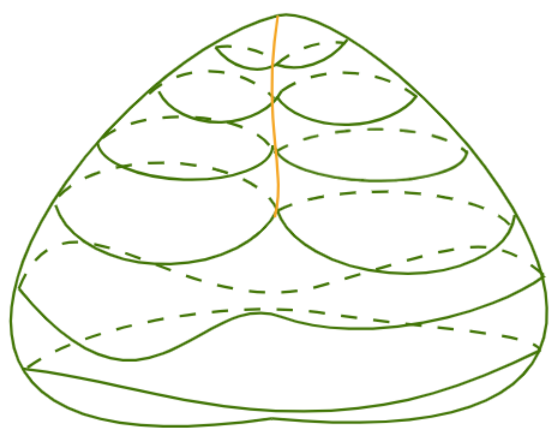

Figura 9.26: $\mathcal{D}$, el espacio de descomposición

Bibliografía

[1] S. Willard, General Topology *General Topology*, Addison Wesley, 1976.

[2] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, an Introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[3] J. Dugundji, *Topology.* Allyn and Bacon 1966.

[4] F. Hernandéz Hernandéz., *Curso de topología, un enfoque conjuntista*, Aportaciones Matemáticas No.43, Sociedad Matemática Mexicana, 2021

[5] I.N.Herstein., *Álgebra Moderna*,Trillas, 2017