



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO

**Implementación de un modelo GARCH-M al modelo
CAPM para mejorar el ajuste de los rendimientos de los
activos financieros**

TESIS

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN ACTUARÍA

Presenta

C. Murillo Morales Cristian Alejandro

Asesor: Dra. en E. Jéssica Gámez Arroyo

Co-Asesor: Dr. en E. Eduardo Rosas Rojas



Atizapán de Zaragoza, Edo. de Méx., Octubre de 2023

Esta investigación se realizó con el apoyo del Cuerpo Académico en Economía Financiera de la Universidad Autónoma del Estado de México, Centro Universitario UAEM Valle de México, en el marco del proyecto de investigación: Impacto de la especulación bursátil de la banca comercial sobre la asignación de créditos y su contribución en el crecimiento económico y generación de empleos decentes.

Contenido

Introducción	1
Capítulo 1. Fundamentos teóricos “Activos financieros”	6
1.1. Riesgo en inversiones.....	6
1.2. Teoría Moderna del Portafolio (Modern Portfolio Theory - MPT).....	8
1.3. Teorema de la separación.....	14
1.4. Modelo de Valoración de Activos Financieros (Capital Asset Pricing Model - CAPM).....	18
1.4.1. Línea del Mercado de Capitales (Capital Market Line - CML)	20
1.4.2. Línea del Mercado de Títulos (Security Market Line - SML)	22
1.5. Evidencia empírica del modelo CAPM.....	25
1.6. Conclusión.....	28
Capítulo 2. Metodología de series de tiempo	29
2.1. Introducción a las series de tiempo	29
2.1.1. Definición y objetivos de su análisis.....	30
2.1.2. Componentes de una serie de tiempo	32
2.2. Procesos estocásticos estacionarios.....	36
2.2.1. Estacionariedad fuerte y débil	36
2.2.2. Series de tiempo no estacionarias.....	38
2.2.3. Proceso de caminata aleatoria y de ruido blanco.....	43
2.3. Pruebas de estacionariedad.....	47
2.3.1. Análisis gráfico y correlograma (FAC).....	47
2.3.2. Prueba Dickey-Fuller (DF) y Dickey-Fuller aumentada (DFA)	50
2.3.3. Prueba de raíz unitaria Phillips-Perron (PP).....	53
2.4. Modelos de series de tiempo estacionarias.....	54
2.4.1. Proceso Autorregresivo de orden 1 (AR(1))	55
2.4.2. Proceso Autorregresivo de orden 2 (AR(2))	58

2.4.3.	Proceso Autorregresivo de orden p (AR(p)).....	60
2.5.	Conclusión.....	62
Capítulo 3.	Modelos de series de tiempo de volatilidad.....	63
3.1.	Introducción a los modelos de volatilidad.....	63
3.2.	Modelos de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva (Autoregressive Conditional Heteroskedastic - ARCH).....	66
3.2.1.	Prueba de efectos ARCH.....	69
3.2.2.	Diagnóstico del modelo.....	70
3.3.	Modelos de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic - GARCH).....	71
3.4.	Modelo de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva en Media (ARCH-M) y Modelo de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada en Media (GARCH-M).....	78
3.5.	Conclusión.....	80
Capítulo 4.	Incorporación del modelo GARCH-M al modelo CAPM.....	81
4.1.	Introducción	81
4.2.	Descripción de la empresa Mercado Libre.....	83
4.3.	Presentación de la base de datos y análisis gráfico y estadístico	84
4.4.	Propuesta del modelo	89
4.5.	Aplicación del modelo	91
4.5.1.	Verificación y corrección de estacionariedad.....	91
4.5.2.	Regresión lineal del modelo CAPM y prueba de efectos ARCH.....	96
4.5.3.	Estimación y validación del modelo de volatilidad.....	98
4.5.4.	Cálculo del modelo GARCH-M.....	101
4.6.	Resultados y análisis	103
Conclusiones		108
Bibliografía		115
Anexos.....		122

INTRODUCCIÓN

En México el mercado bursátil inició en 1850 con la emisión de títulos accionarios de empresas mineras, para 1867 se promulgó la ley reglamentaria de corretaje de valores, posteriormente en 1886 se instaló la bolsa mercantil de México para finalmente ver en 1933 constituida a la bolsa de valores de México (Universal, 2007; Bolsa Mexicana de Valores, s.f.). Ésta, en términos generales, es la historia del mercado bursátil mexicano que desde que quedó constituido surgió el desafío de aclarar el proceso de decisión en una inversión. Principalmente, al elegir invertir en acciones existe cierto nivel de riesgo, ya que el comportamiento de los precios de las acciones tiene una estrecha relación con las decisiones de inversión de otros agentes económicos y la forma de valorizarlas (Kristjanpoller y Liberona, 2010).

Los agentes económicos que son partícipes en el mercado bursátil y pretenden invertir su presupuesto con el objetivo de generar ganancias, analizan el comportamiento de los precios de las empresas que cotizan en la BMV para reducir el nivel de riesgo al que están expuestos. Bajo esta situación los inversionistas se encuentran en un ambiente de incertidumbre a la hora de realizar una inversión, ya que el precio de una acción se determina mediante la ley de la oferta y la demanda, además que factores como las ganancias, los dividendos, las publicaciones económicas y los cambios generales en el mercado, pueden impactar en el valor de una acción (El Economista, 31 de marzo de 2014).

Ante la necesidad de realizar inversiones con la menor incertidumbre posible, se han desarrollado diversos planteamientos teóricos, modelos matemáticos o estadísticos. Un ejemplo de esto son los estudios sobre pronósticos de valores futuros de activos financieros, adquiriendo como insumo el comportamiento pasado de estos, que utilizan herramientas estadísticas con las que han obtenido resultados muy ventajosos en la mayoría de los casos (Pinzón, 2018). Además, han surgido diversas ramas de investigación para tratar de modelar el comportamiento de las acciones, como por ejemplo la Teoría Moderna del Portafolio (MPT), donde destacan modelos que han entregado un ajuste significativo en cuanto a la realidad (Kristjanpoller y Liberona, 2010).

Uno de los modelos que surgen a partir de la Teoría Moderna del Portafolio de Markowitz, fue el CAPM o Capital Asset Pricing Model. Fue desarrollado por tres autores: William F. Sharpe (1964), John Lintner (1965) y Jan Mossin (1966), siendo Sharpe el principal exponente y el más

influyente en este estudio (Negrete, 2019). El modelo CAPM establece una relación entre el riesgo y el rendimiento de los activos. Una de sus funcionalidades es la de predecir los retornos de un instrumento en específico o de carteras, esto mediante el cálculo del riesgo descomponiéndolo en dos categorías: sistemático y no sistemático. El primero está relacionado con factores externos a la actividad productiva, mientras que el segundo es inherente a la empresa o al sector económico (Kristjanpoller y Liberona, 2010; Botello y Guerrero, 2021).

El modelo CAPM fue construido para funcionar correctamente en el mundo teórico, pero en el mundo real presenta ciertas debilidades, se destaca principalmente la pérdida de poder predictivo cuando los mercados bursátiles no poseen una tendencia clara. Una de las posibles razones de presentar debilidades, como la pérdida de poder predictivo, son los supuestos tan restrictivos en la construcción del CAPM, ya que en la práctica limitan bastante al modelo (Kristjanpoller y Liberona, 2010; Castañeda y Aguirre, 2014).

Los primeros experimentos empíricos fueron realizados por John Lintner (1965) y luego fueron replicados por Miller y Scholes (1972). En las pruebas se utilizó información anual de 631 acciones del NYSE por 10 años, de 1954 a 1963, obteniendo inconsistencias como resultado. En 2003 Ferguson y Shockley señalan que varias anomalías empíricas como el efecto tamaño y el ratio *book-to-market*, son realmente consistentes en el modelo CAPM de un único beta, esto sucede cuando en el índice que aproxima a la cartera de mercado se utilizan solamente acciones.

Posteriormente Fernández (2005), para el mercado chileno midió el nivel de ajuste del modelo CAPM para el precio de acciones en diferentes horizontes de tiempo, mediante una regresión del primer paso. Como resultados obtuvo: coeficientes de determinación (R^2) para las distintas escalas temporales bastantes bajos, donde el mayor R^2 obtenido es 0.547, mientras que el menor es igual a 0.169. Con esto notamos una deficiencia por parte del modelo CAPM en experimentos empíricos. Con los resultados de las pruebas antes mencionadas, se concluye que el modelo CAPM en experimentos empíricos presenta debilidades (como inconsistencias, bajo ajuste del modelo, anomalías empíricas, etc.).

La manera que se propone mejorar el ajuste del modelo CAPM y así corregir esta debilidad presente en experimentos empíricos, es incorporando la técnica de los modelos GARCH-M (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic in Mean) desarrollados por Engle,

Lilien y Robins (1987). Se propone esta incorporación ya que los modelos GARCH-M permiten que la media de una secuencia dependa de su propia varianza condicional, esto al añadir el término de heteroscedasticidad dentro de la ecuación de la media. Y dado que existe una relación entre el riesgo y el rendimiento en los precios de los activos financieros, se convierte en la especificación ideal para el objetivo. Se considera como la ecuación de la media a la estructura SML del modelo CAPM.

Como objeto de estudio se plantea el mejorar y aumentar el ajuste que tiene el Modelo de Valoración de Activos Financieros sobre los rendimientos de acciones, incorporando la técnica de los modelos GARCH en media. La empresa que se analiza es Mercado Libre S. de R.L. de C.V. (México) y el nombre con el que cotiza en la Bolsa Mexicana de Valores es MELIN.MX. Se eligió esta acción ya que ha presentado un crecimiento en su precio de cotización en los últimos años; sus operaciones en la BMV tienen un primer registro el 27 de febrero de 2008 con un precio de cierre de \$384.00 y llegando a un precio máximo histórico de \$39,180.00 el 16 de febrero de 2021 (Yahoo! finanzas, s.f.). Para el análisis se considera un total de 290 datos diarios de los precios de cierre de Mercado Libre del 28 de febrero de 2008 al 8 de junio de 2023.

El aporte que tiene este trabajo de investigación es el de generar un modelo capaz de capturar en la medida de lo posible el comportamiento tan volátil presente en los rendimientos de las acciones. Dicho modelo permite crear un análisis y un pronóstico de la rentabilidad de los precios, esta información al ser utilizada correctamente por los agentes económicos minimiza la incertidumbre que se tiene al realizar una inversión, ya que los datos proporcionados por el modelo sirven como guía en esta tarea.

Para la investigación es relevante investigar la Teoría Moderna del Portafolio establecida por Harry Markowitz para así comprender ¿Por qué fue relevante para el desarrollo del modelo CAPM? Adicional a esto, se debe presentar la aportación hecha por Tobin y así conocer ¿Por qué fue clave el Teorema de la separación para que se construyera el CAPM? Así, resulta más sencillo el estudio y descripción del Modelo de Valoración de Activos Financieros y de esta forma dar respuesta a ¿Cómo es que modela la rentabilidad de un activo financiero? Y consecuentemente para averiguar sus debilidades, enlistar ¿Cuáles han sido los diferentes experimentos empíricos que se han aplicado al Modelo de Valoración de Activos Financieros?

Con respecto a la empresa Mercado Libre, resulta interesante presentar una descripción para conocer su historia y su llegada al mercado bursátil mexicano y, además, estudiar ¿Cómo ha sido el comportamiento gráfico y estadístico de sus precios? En adición a este repaso de la empresa, un elemento central del análisis son las herramientas estadísticas que se emplean, cuyo estudio garantiza su correcto uso. Por lo cual, resulta esencial analizar los conceptos fundamentales de las series de tiempo para comprender la base teórica detrás de los modelos ARCH, GARCH. Adicional a esto, estudiar las pruebas econométricas pertinentes que garantizan sus hallazgos. Y así, comprender ¿En qué consiste la medición de la volatilidad de las series de tiempo financieras utilizando modelos ARCH y modelos GARCH?

Una vez estudiados los conceptos clave sobre los procesos de volatilidad y las pruebas necesarias para su correcto uso, se analiza la especificación ARCH y GARCH en media. Para así incorporar los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresivo generalizado en media (GARCH-M) a el CAPM, para mejorar y aumentar su ajuste y en consecuencia su poder predictivo del rendimiento de las acciones. Finalmente, concluyendo sobre las limitaciones y futuras propuestas de la incorporación de este tipo de especificaciones a el CAPM.

Con base en lo anterior, se construye un objetivo general para la investigación. El cual es, mejorar el ajuste de los rendimientos de los precios de la empresa Mercado Libre (MELIN.MX) con la incorporación del modelo GARCH en media a el modelo CAPM. Para lo cual, se estudian los antecedentes teóricos del modelo CAPM, así como las aportaciones empíricas más relevantes hechas por otros autores. Describir la historia, la llegada al mercado bursátil mexicano de la empresa Mercado Libre, así como su comportamiento en éste. Valorar el análisis de series de tiempo, introduciendo los conceptos teóricos y pruebas econométricas que sustentan su correcto funcionamiento. En este sentido, se propone analizar la medición de la volatilidad de las series de tiempo financieras a través de la especificación ARCH y GARCH.

La forma de estructurar la hipótesis de la investigación es con base a que existe incertidumbre en el mercado bursátil y así, los agentes económicos requieren de herramientas que contribuyan en la toma de decisiones; en este sentido, los modelos que capturan el comportamiento del retorno de las acciones son fundamentales a la hora de realizar inversiones, ya que estos sirven como guía. Una herramienta ampliamente utilizada para pronósticos financieros es el modelo CAPM (Fernández, 2005; Díaz e Higuera, 2012), el cual tiene bondades teóricas, sin embargo, sus

supuestos son restrictivos, lo que genera debilidades e inconsistencias en experimentos empíricos. La manera que se propone mejorar el ajuste del modelo CAPM es incorporando la técnica de los modelos GARCH-M desarrollados por Engle, Lilien y Robins (1987).

Lo anterior se logra al añadir el término de volatilidad condicional dentro de la ecuación de media, la cual es la SML del modelo CAPM. Dicha propuesta permite mejorar y aumentar el ajuste de los rendimientos del modelo CAPM y en consecuencia su poder predictivo. La validación de la hipótesis es a través de la estimación de ambas especificaciones. Posteriormente se compara el nivel de ajuste de los datos mediante la R^2 , R^2 ajustada, el Criterio de Información de Akaike (CIA), el Criterio Bayesiano de Schwartz (CBS) y el criterio de Hannan y Quinn (HQ) de ambos modelos, para así contrastar el nivel de mejora.

El presente trabajo es una investigación documental cuantitativa, por lo que los resultados se expondrán a lo largo de cuatro capítulos. Cada uno con el objetivo de desarrollar de manera lógica la investigación, partiendo de lo más general hasta lo más específico. En el primer capítulo se muestran los antecedentes del modelo CAPM y se desarrolla este. El segundo corresponde a los fundamentos teóricos del análisis de series tiempo, así como las pruebas econométricas para el uso de modelos, por último, se presenta la estructura básica en la que se basan las especificaciones de volatilidad. Para el tercer capítulo se desarrollan los procesos de volatilidad ARCH, GARCH y GARCH-M. En el cuarto y último, se da una contextualización de la empresa Mercado libre, así como la construcción de la base de datos y un análisis estadístico y gráfico, finalmente, se emplea el modelo construido a los rendimientos de la empresa Mercado Libre y se analizan los resultados.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS “ACTIVOS FINANCIEROS”

1.1. RIESGO EN INVERSIONES

Los agentes económicos que participan en el mercado bursátil para generar un beneficio se enfrentan al desafío de clarificar el proceso de decisión para efectuar inversiones. El elemento fundamental es el comportamiento de los precios de las acciones, ya que a partir de este se determinará la existencia de una pérdida o una ganancia para el inversionista. Dicho elemento tiene una estrecha relación con las decisiones de inversión y la forma de valorizarlas (Kristjanpoller y Liberona, 2010); además, el precio se determina mediante la ley de la oferta y la demanda, por factores como las ganancias, los dividendos, las publicaciones económicas y los cambios generales en el mercado (El Economista, 31 de marzo de 2014).

Dado que los componentes que determinan el comportamiento del precio de una acción quedan fuera del control del inversionista y por supuesto, no pueden influir en ellos a su favor, se genera un ambiente de incertidumbre para el agente económico. Dicho contexto de incertidumbre se traduce en un cierto grado de riesgo en la toma de decisiones para el inversionista, ya que, como se mencionó, no tendrá control sobre los resultados por los diversos elementos que están afectando el valor de la acción, generando diferentes escenarios en los cuales puede estar ganando o perdiendo. El desconocimiento del resultado de su inversión es lo que genera el riesgo.

El riesgo se define como un azar, un peligro, la exposición a una pérdida o a un daño, se refiere a la probabilidad de que ocurra un evento desfavorable (Weston y Brigham, 1994); bajo el contexto anteriormente descrito, si se invierte en acciones el riesgo que se estará asumiendo es la probabilidad de que ocurra una pérdida. Siendo más específicos, para Allen, Myers y Brealey (2009), el riesgo de cualquier acción se divide en dos partes: la primera es el riesgo único, que es propio de cada acción, y la segunda es el riesgo del mercado, que está asociado con las variaciones del conjunto del mercado.

Guerrero (2014) define al riesgo único o riesgo específico como el particular de cada emisora como resultado de situaciones internas, un ejemplo de este es el incremento o degradación de la clasificación relativa a la capacidad de pago de la empresa que emite el instrumento de inversión. Mientras que el riesgo de mercado está determinado por el propio sistema, lo interpreta como la

posible inestabilidad del sistema financiero causado por eventos o condiciones en los intermediarios financieros e interdependencias de un sistema o mercado.

Profundizando más en el riesgo específico, se pueden desglosar cuatro clases de riesgos a los cuales están expuestas las empresas (Gaytán, 2018): I) Riesgo de crédito: el riesgo de crédito es la pérdida potencial por la falta de pago de un acreditado o contraparte, pudiéndose subdividir en riesgo emisor, riesgo contraparte y riesgo país; II) Riesgo de liquidez: se define como la pérdida potencial por la imposibilidad de renovar pasivos o de contratar otros en condiciones normales; III) Riesgos operacionales: es la pérdida potencial por fallas o deficiencias en los sistemas de información, en los controles internos o por errores en el procesamiento de las operaciones. También incluye las fallas humanas; y, IV) Riesgos legales: es la pérdida potencial por el incumplimiento de las disposiciones legales y administrativas aplicables.

Desde la perspectiva del agente económico, se pueden enlistar los diferentes tipos de riesgos a los cuales está expuesto, según BBVA México (s.f.) los riesgos más comunes a los que se enfrenta el inversionista son: I) Riesgo de liquidez. Ocurre cuando no se puede efectuar la compraventa de los activos o no se hace en el tiempo o costo previamente establecido; II) Riesgo de crédito. Sucede cuando una entidad no tiene la posibilidad de devolver la cantidad invertida; III) Riesgo legislativo. Se relaciona con los cambios y nuevas leyes que realiza el gobierno, afectando de forma desfavorable al inversionista; y, IV) Riesgo de inflación. Ocurre cuando el retorno de inversión es negativo debido al aumento de la tasa de inflación de una economía.

Botello y Guerrero (2021) señalan que el riesgo es una variable relevante en el mundo de las finanzas ya que determina un conjunto de decisiones de inversión, presentan un concepto más específico acerca del riesgo al que está expuesto el inversionista. Denominándolo riesgo en la inversión, el cual se define como la variabilidad del rendimiento futuro de una inversión, activo o portafolio (Allen, Myers y Brealey 2009; Botello y Guerrero, 2021). Cabe mencionar que los riesgos con los cuales se trabaja quedan clasificados como riesgos cuantificables, que son aquellos para los cuales es posible conformar bases estadísticas que permitan trabajar con ellos (Financiera Nacional de Desarrollo Agropecuario, Rural, Forestal y Pesquero, s.f.).

Tomando en cuenta que todas las decisiones que se hacen en el mundo de los negocios implican un cierto grado de riesgo y ante un entorno económico cada vez más incierto e imprevisible, se

hacen necesarias herramientas para tomar decisiones con la menor incertidumbre posible, como lo son los modelos predictivos del comportamiento de las acciones, en los cuales se busca una alta capacidad para pronosticar, dado lo anterior, se ha orillado a los expertos a desarrollar diversos métodos para desarrollar dichas herramientas (Torres, 2009).

Como ejemplo de lo previamente mencionado está la investigación sobre los pronósticos de valores futuros de los activos financieros, donde se desarrollan modelos que utilizan como insumo el comportamiento pasado de los activos, utilizando diversas herramientas estadísticas con las que se han obtenido resultados altamente ventajosos en la mayoría de las situaciones (Pinzón, 2018).

Además, también se cuenta con las diferentes ramas de investigación para tratar de modelar el comportamiento de los activos financieros, donde a pesar de que no se ha podido encontrar un modelo que abarque todo lo que ocurre en el mercado de valores, existen modelos que sobresalen por el ajuste que otorgan. Como es el caso de la teoría del portafolio de Markowitz, en la cual se plantea el concepto de diversificación para la disminución del riesgo de los portafolios. Asimismo, dentro de la teoría moderna del portafolio destacan modelos que han mostrado un ajuste significativo a la realidad y otros capaces de entregar un marco teórico importante (Kristjanpoller y Liberona, 2010).

1.2. TEORÍA MODERNA DEL PORTAFOLIO (MODERN PORTFOLIO THEORY - MPT)

Por consenso se le ha otorgado el crédito acerca de la primera exposición de la teoría moderna del portafolio (MPT, por sus siglas en inglés) a Harry Markowitz con la publicación en 1952 de su trabajo titulado: *Portfolio Selection* en el *Journal of Finance*. Algunos meses después Andrew D. Roy entregó un artículo de la misma índole, titulado: *Safety first and the holding of assets* publicado en la revista *Econometrica*. Otro trabajo relacionado corresponde al matemático y estadístico Bruno De Finetti quien en 1938 entregó un texto, el cual sería un precursor de la teoría del portafolio (Romero, 2011).

Existen claras diferencias en el trabajo de estos tres autores acerca de la teoría del portafolio. De Finetti se considera precursor ya que anticipó mucho de la teoría del portafolio de media y varianza, su enfoque se basó en un portafolio de pólizas, de las cuales se espera un rendimiento

aleatorio y las primas podían mitigar el riesgo de pérdida, pero no desaparecerlo (Romero, 2011). Por su parte Markowitz plantea un modelo para lograr el máximo rendimiento posible de un portafolio, dado un nivel determinado de riesgo, e indica las ventajas de una apropiada diversificación. Este modelo ofrece varias combinaciones para los diferentes tipos de inversores, los cuales se encuentran sobre la frontera eficiente (Mejía, 2002). Cabe señalar que a diferencia de De Finetti, Markowitz plantea en su modelo portafolios compuestos por acciones. En el caso de A. D. Roy prioriza como objetivo la seguridad en el portafolio, propone minimizar la probabilidad de ocurrencia de un evento pavoroso, a diferencia de Markowitz y De Finetti cuyo objetivo es maximizar el rendimiento y minimizar la varianza del portafolio (Romero, 2011).

El presente trabajo de investigación se fundamenta en los trabajos desarrollados por Harry Markowitz. En 1952 Markowitz hace su primera publicación acerca de la teoría moderna del portafolio. Posteriormente en 1956 proporcionó en otro trabajo las fórmulas de las rectas que forman el conjunto de portafolios eficientes, además de mostrar el procedimiento de solución a un problema más general que el planteado en 1952 (Markowitz, 1999).

Finalmente, en 1959 se presentó el trabajo que popularizó a la Teoría Moderna del Portafolio y que se intituló *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. El modelo planteado por Markowitz utiliza la varianza, media y correlación de rentabilidades esperadas entre activos para la creación de la frontera eficiente conformada por las carteras eficientes (Czerwinski, 2014). Tiene como finalidad buscar la cartera óptima eficiente para el inversionista racional, y que maximiza su función de utilidad esperada, por simplicidad se referirá sólo como cartera óptima. El portafolio óptimo está compuesto por un conjunto de activos financieros que maximizan la utilidad esperada por el inversor racional para un determinado nivel de riesgo o un conjunto de valores que ofrezcan el mínimo riesgo posible para un rendimiento determinado (Negrete, 2019).

El modelo de Markowitz diferencia a dos tipos de riesgos. El primero de ellos es conocido como riesgo específico o riesgo único, definido como el riesgo atribuible a las características o factores de riesgo propios de la empresa, siendo, pues, la parte de la variabilidad de la rentabilidad del activo que es independiente del mercado, es considerado también como un riesgo diversificable, ya que puede ser eliminado mediante la adecuada combinación de títulos (García, 2013). El riesgo sistemático es el mismo riesgo del mercado, éste se ve afectado por los acontecimientos

macroeconómicos, de orden público, civil y demás (Mejía, 2002), cabe señalar que también se le denomina riesgo no diversificable ya que no se elimina con ninguna combinación de títulos, “... mientras más activos tenga un portafolio, el riesgo tenderá a parecerse al riesgo sistemático...” (Mejía, 2002).

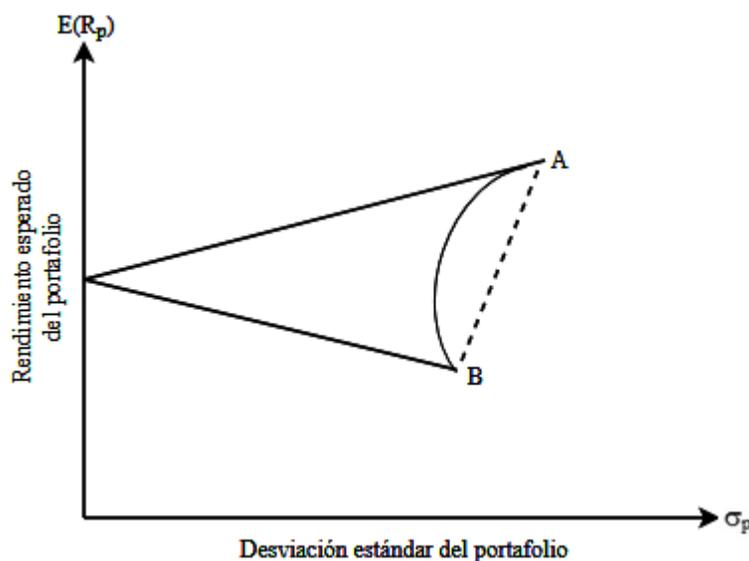
Markowitz parte de las siguientes hipótesis para determinar los activos financieros que compondrán a la cartera óptima de inversión:

- Sobre el comportamiento de los inversionistas. Considera que el inversor debería maximizar el rendimiento esperado, considerando algo deseable el rendimiento esperado y algo no deseable la varianza. Es decir, el inversor tiene una conducta racional además de ser averso al riesgo ya que prefiere una mayor rentabilidad y un menor grado de riesgo, buscando maximizar su función de utilidad. La cual depende únicamente del rendimiento esperado como medida de la rentabilidad y de la varianza como medida de riesgo. Las funciones de utilidad son monótonas crecientes, por lo que a igual varianza se busca un mayor rendimiento (Markowitz, 1952, González, 2019).
- Sobre los mercados financieros. Estos son perfectos, es decir, toda la información que existe está disponible para los inversores, no existen costos por transacción de compra-venta, se puede poseer cualquier porcentaje de un título (son divisibles), no existe inflación ni impuestos y los agentes son tomadores de precios, son incapaces de influir en el precio. El mercado es cerrado y único, fuera de éste no existe la posibilidad de inversión en otro activo de terceros, es decir, no hay posibilidad de invertir en un activo financiero libre de riesgo. Todos los inversores tienen el mismo horizonte de tiempo. Los mercados están formados por únicamente activos financieros arriesgados, los cuales disponen de liquidez inmediata al final del periodo. No se permiten las ventas en corto (Negrete, 2019; González, 2019).
- Cumplimiento de la cartera eficiente. Markowitz (1959) menciona que una cartera es ineficiente si es posible obtener un rendimiento esperado mayor sin una mayor variabilidad esperada. Es decir, para el nivel de rendimiento esperado de una cartera eficiente no existe otro con riesgo menor.

En este apartado se redactan los pasos para conocer el conjunto de oportunidades de diversificación, así como construir carteras eficientes. Guerrero (2014) con base en el modelo planteado por Harry Markowitz lo resume como sigue:

1. Delimitación del conjunto de posibilidades. Mediante una representación gráfica se muestran las diferentes combinaciones entre instrumentos, graficando el rendimiento esperado y el riesgo, desviación estándar de cada activo financiero, formando una región cóncava.

Figura 1. Conjunto de posibilidades entre dos activos.



Fuente: Elaboración propia con base a “Conjunto de oportunidades de inversión según coeficiente de correlación”. Guerrero (2014).

2. Determinación de la frontera eficiente. Ya que se delimitó el conjunto de posibles combinaciones de portafolios, el inversor deberá elegir el que se adapte al rendimiento que espera recibir, a su nivel de riesgo tolerado y maximice la utilidad. La frontera eficiente estará formada por aquellas carteras que cumplen las condiciones de eficiencia.
3. Determinación analítica de la frontera eficiente. Markowitz propone resolverlo como un problema de optimización de la rentabilidad esperada de la cartera para cada uno de los posibles niveles de riesgo, esto permitirá determinar en cuáles activos y en qué proporción

invertir para lograr que la rentabilidad esperada sea la máxima dado un grado de riesgo, y mediante una estructura iterativa con cada valor de riesgo se vaya construyendo la frontera eficiente con la siguiente ecuación:

$$\text{máx } E(E_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = V^*$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Donde:

w_i : Proporción de inversión del activo i .

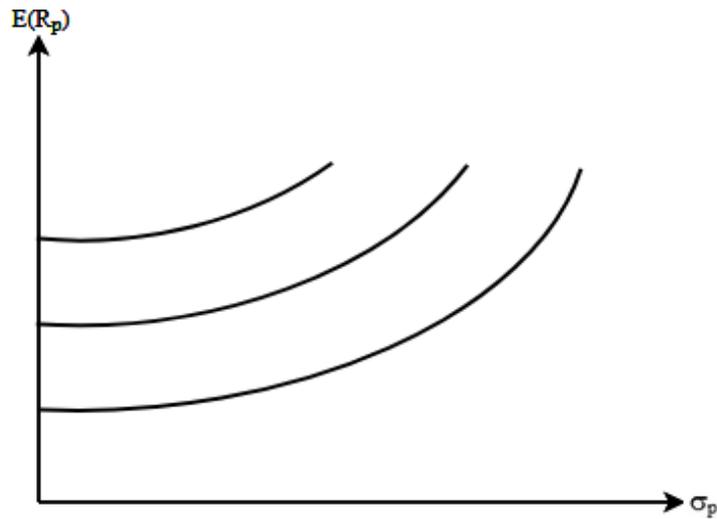
w_j : Proporción de inversión del activo j .

σ_{ij} : Desviación estándar o riesgo del activo i y j .

V^* : Valor fijado para la varianza del rendimiento del portafolio.

4. Especificación de la inclinación del agente económico. Se determina mediante la utilización del mapa de las curvas de indiferencia con la relación media-varianza. Es necesario determinar el nivel de aversión al riesgo del inversor para elegir el portafolio óptimo entre todo el conjunto de portafolios, esto utilizando las curvas de indiferencia. Las cuales indican por medio de una recta el aumento del rendimiento esperado por cada unidad de riesgo, donde cada una proporciona al agente económico la misma utilidad esperada.

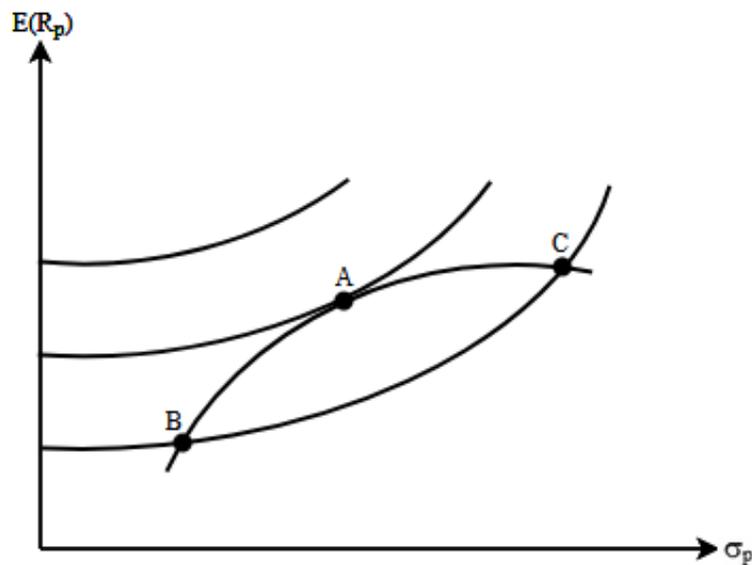
Figura 2. Curvas de indiferencia de un inversor.



Fuente: Elaboración propia con base a “Curvas de indiferencia de un inversor muy averso al riesgo”. Guerrero (2014).

5. Determinación de la cartera óptima. Una vez construida la frontera eficiente que representa el conjunto de oportunidades y las curvas de indiferencia de las preferencias del inversor, queda buscar el punto de tangencia entre ambas curvas que tengan el mayor nivel de utilidad esperada para encontrar la cartera óptima.

Figura 3. Determinación de la cartera óptima.



Fuente: Elaboración propia con base a “Determinación de la cartera óptima de un inversor averso al riesgo”. Guerrero (2014).

De esta manera quedan redactados de forma breve y concreta los pasos para conocer el conjunto de oportunidades de diversificación, así como la construcción de carteras eficientes para el inversionista racional. Lo anterior fundamentado en las investigaciones: *Portfolio Selection* (1952) y *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment* (1959), realizadas por Harry Markowitz.

De forma cronológica, se concluye este primer apartado para darle continuidad a el Teorema de la Separación de James Tobin. El cual es un sucesor de la Teoría Moderna del Portafolio, prosiguiendo el análisis de carteras y contribuyendo con una variable al modelo, entregando un enfoque antes no considerado. Que además, es un paso previo para llegar al análisis del modelo CAPM.

1.3. TEOREMA DE LA SEPARACIÓN

Tobin fue un economista Keynesiano estadounidense y pionero de los análisis de carteras, continuó con el trabajo sobre carteras de Markowitz agregando al análisis la variable de los activos libres de riesgo que Markowitz nunca llegó a tener en consideración (Negrete, 2019). En 1958, Tobin expandió la Teoría Moderna del Portafolio al crear el Teorema de la Separación, en esta se contempla la inclusión de activos sin riesgo, que generan un beneficio y además, permiten la posibilidad de contraer deuda, lo que da lugar a una teoría más práctica y detallada que la frontera eficiente de Markowitz (Lumby y Jones, 2011).

Se define como un activo libre de riesgo aquel que ofrece una rentabilidad pactada con anterioridad y su emisor es de gran confiabilidad, de tal forma que se puede asumir que la probabilidad de recibir el retorno pactado es del 100% (Astaiza, 2012). En la práctica son muy pocos los emisores que ofrecen esta confianza a los inversionistas, ejemplo de títulos con las características descritas son los bonos del tesoro gubernamentales. Dado el planteamiento de Tobin, un activo sin riesgo es aquél cuya varianza o volatilidad del retorno esperado es cero, además el retorno de este activo no es variable aleatoria y, por tanto, la covarianza de su retorno con la del retorno de cualquier activo de riesgo es nula (Medina, 2003).

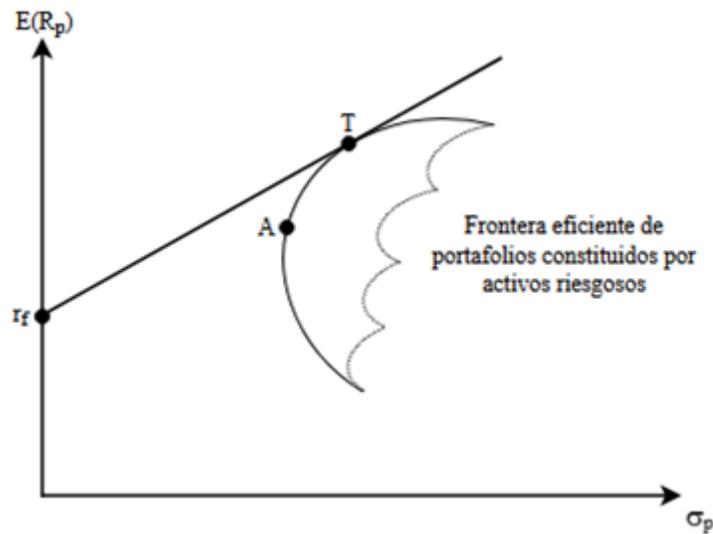
Esencialmente, Tobin argumentó que los agentes económicos tendrían la oportunidad de diversificar sus ahorros o excesos de liquidez entre dos activos diferentes: un activo libre de riesgo y un solo portafolio de activos riesgosos, los cuales en conjunto maximizarían su función

de utilidad esperada (Flórez, 2008). La decisión de cuánta proporción invertir en ese activo sin riesgo y cuánta en el portafolio, se puede separar. Independientemente de cuánta sea esa proporción, para Tobin se podría encontrar un portafolio de activos riesgosos que, al combinarse con el activo libre de riesgo de acuerdo con las preferencias del inversionista, tendría unas ponderaciones que generarían el mínimo riesgo y el máximo rendimiento esperado (Astaiza, 2012).

De forma más específica, Tobin muestra que la decisión de inversión puede dividirse en dos fases: I) elegir un portafolio óptimo de activos riesgosos y II) una elección separada que consiste en asignar fondos en el portafolio de acciones de la fase uno y otra en un activo sin riesgo. Bajo esta estrategia, la maximización de la utilidad esperada se lleva a cabo en la fase dos y no en la fase uno, esto implica que el portafolio óptimo de acciones no depende de las preferencias del inversor. Lo anterior se cumple para un inversionista averso al riesgo que pueda invertir su presupuesto sin restricciones a la venta en corto y en el mercado exista un activo libre de riesgo. Esta formulación es lo que se conoce como el Teorema de la Separación (Medina, 2003).

Bajo la formulación anterior quedan claros los pasos a seguir para conseguir la cartera que genera el mínimo riesgo y el máximo rendimiento esperado para el inversionista. Además, muestra que la acción de elegir una cartera riesgosa óptima queda como un problema técnico y no depende de las preferencias de riesgo de los agentes económicos individuales (García, 2013). Cabe señalar que cuando se incluye un activo sin riesgo en el portafolio se genera un nuevo punto óptimo en la frontera eficiente, constituido exclusivamente con activos de riesgo. De este modo, el portafolio óptimo riesgoso deja de ser eficiente con la inclusión del activo sin riesgo (Medina, 2003), tal como se muestra a continuación:

Figura 4. Frontera eficiente al agregar el activo libre de riesgo.



Fuente: Elaboración propia con base a “Modelo de Tobin y Línea de Transformación”. Gimeno Torres, M. y Tobin, J. (1958); citado en Negrete (2019).

Se designa a r_f como la rentabilidad del activo libre de riesgo, el cual Tobin supone tiene una varianza o volatilidad del retorno esperado igual a cero, además la covarianza del retorno de este activo con la del retorno de cualquier activo de riesgo es nula. Se denota a T como la cartera óptima eficiente compuesta por activos riesgosos. Ahora bien, designamos a w como la proporción del presupuesto invertido en la cartera riesgosa y a $(1 - w)$ como la porción destinada al activo libre de riesgo. Dado lo anterior, se expresa el valor esperado del rendimiento del portafolio p por la siguiente ecuación (Astaiza, 2012; Negrete, 2019):

$$E(R_p) = (1 - w) \cdot r_f + w \cdot E(R_T)$$

Donde:

$E(R_p)$: Retorno esperado del portafolio p .

$E(R_T)$: Rendimiento esperado de la cartera T .

En donde al variar a w se tienen las siguientes interpretaciones de la ecuación (Medina, 2003; Guerrero, 2014):

1. Si $w = 1$, el portafolio p es el portafolio de acciones T .

2. Si $w = 0$, el portafolio p es el activo de libre riesgo.
3. Si $0 < w < 1$, el inversionista distribuirá su presupuesto entre el activo libre de riesgo y la cartera T .
4. Si $w > 1$, el portafolio p está apalancado, lo que indica que el inversor está tomando prestada una fracción $(1 - w)$ del presupuesto de la inversión a la tasa r_f para invertir más fondos en el portafolio T . Esto es cierto si el inversor puede endeudarse a la tasa r_f , supuesto algo irreal porque generalmente la tasa de rendimiento que un inversor particular paga por un préstamo es mayor a la tasa de rendimiento de libre riesgo r_f . Este hecho también puede interpretarse como una venta en corto del activo sin riesgo, para invertir mayores fondos en el portafolio de acciones.
5. Si $w < 0$, se vende en corto el portafolio de acciones T y se invierten más fondos en el activo sin riesgo.

Se denota a σ_p^2 como la varianza de la cartera compuesta por un activo financiero riesgoso y el activo libre de riesgo, quedando representada de la siguiente manera (Astaiza, 2012; Negrete, 2019):

$$\sigma_p^2 = w^2 \cdot \sigma_T^2 + (1 - w)^2 \cdot \sigma_{r_f}^2 + 2 \cdot \sigma_T \cdot \sigma_{r_f} \cdot \rho_{T,r_f}$$

Se sabe que $Cov(r_f, T) = 0$ y $\sigma_{r_f}^2 = 0$

$$\sigma_p^2 = w^2 \cdot \sigma_T^2 + (1 - w)^2 \cdot 0 + 2 \cdot \sigma_T \cdot 0 \cdot \rho_{T,r_f}$$

$$\sigma_p^2 = w^2 \cdot \sigma_T^2$$

Y a partir de la expresión anterior se construye la desviación estándar del portafolio:

$$\sigma_p = w \cdot \sigma_T$$

Donde:

σ_p^2 : Varianza del portafolio.

σ_p : Desviación estándar del portafolio.

w : Proporción del presupuesto que el agente económico invierte en la cartera riesgosa.

$(1 - w)$: Fracción del presupuesto que el inversionista coloca en el activo sin riesgo.

σ_T : Desviación estándar de la cartera T .

Para obtener una expresión de la rentabilidad esperada del portafolio p en función de una cartera riesgosa T y el activo libre de riesgo r_f , se despeja a w de la expresión de la desviación estándar de la cartera p y se sustituye en la ecuación del valor esperado del rendimiento del portafolio p , obteniendo la siguiente expresión:

$$E(R_p) = r_f + \left(\frac{E(R_T) - r_f}{\sigma_T} \right) \sigma_p$$

De esta forma se obtiene una expresión que determina el rendimiento esperado de una cartera, en función de un activo que ofrece una rentabilidad pactada y con certeza de recibirla en un periodo establecido, más un término de pendiente que multiplica a la desviación estándar del portafolio. Dicho resultado fue de relevancia para el desarrollo de un elemento central del modelo CAPM, se está hablando de la Línea del Mercado de Capitales o CML por sus siglas en inglés (Capital Market Line), que posteriormente dio lugar a la ecuación fundamental del CAPM: la Línea del Mercado de Títulos o SML por sus siglas en inglés (Security Market Line).

1.4. MODELO DE VALORACIÓN DE ACTIVOS FINANCIEROS (CAPITAL ASSET PRICING MODEL - CAPM)

El Modelo de Valoración de Activos Financieros tiene sus orígenes de la mano de tres diferentes economistas de la época, que, mediante sus trabajos simultáneos, pero independientes, lograron formar un diseño de inversión que aún sigue siendo relevante. Estos tres autores fueron: William F. Sharpe (1964), John Lintner (1965) y Jan Mossin (1966), siendo Sharpe el gran representante y el que tuvo mayor importancia en el estudio (Negrete, 2019). El modelo CAPM entrega una relación entre el riesgo y rendimiento de los activos, el modelo se utiliza para predecir rentabilidades de un instrumento en particular o de carteras, esto mediante el cálculo del riesgo separándolo en dos tipos, sistemático y no sistemático. El primero es exógeno a la actividad

productiva, mientras que el segundo es particular de la empresa o sector económico (Kristjanpoller y Liberona, 2010; Botello y Guerrero, 2021).

El modelo CAPM parte de la MPT y también distingue entre dos tipos de riesgos. García (2013) define al riesgo no sistemático o diversificable como la parte que mide el riesgo atribuible a las características o factores de riesgo propios de la empresa, es decir, es el riesgo que es independiente del mercado, se dice que es diversificable ya que puede ser eliminado mediante la adecuada combinación de títulos. Al igual define al riesgo sistemático o riesgo de mercado como la parte del riesgo atribuible a la incertidumbre común a todo el sistema económico, es un riesgo no diversificable ya que no se elimina con ninguna combinación de títulos. Bajo las definiciones anteriores, la lógica guía a pensar que mientras más activos tenga un portafolio, el riesgo tenderá a parecerse más al riesgo sistemático (Mejía, 2002).

Los supuestos del modelo CAPM se basan en su mayoría en los del modelo de Markowitz y algunos adicionales, a continuación se enlistan en su totalidad (García, 2013; Castañeda y Aguirre, 2014; Latorre, 2016):

1. Mercado de capitales perfecto. Se entiende que existe competencia perfecta, es decir, los inversionistas son tomadores de precios. No existen impuestos, costos de transacción, costos de agencia, ni las restricciones a la venta en corto. Además, los activos son perfectamente divisibles.
2. El mercado de capitales está en equilibrio, lo que indica que la oferta de títulos arriesgados iguala a la demanda, por lo tanto, el exceso de demanda es cero y todos los títulos pertenecerán a algún inversor.
3. Las expectativas de los inversionistas son de carácter homogéneo, consiguen llegar todos al mismo valor de media, varianza y covarianza.
4. Los inversionistas buscan maximizar su utilidad. Además, sólo se preocupan de la media y varianza de la riqueza al final del período.
5. Los individuos son aversos al riesgo.
6. Existe un activo libre de riesgo, que reporta una rentabilidad concreta a un riesgo nulo. El cual su valor se determina a través del juego de la oferta y la demanda.

7. El portafolio de mercado equivale a un portafolio balanceado que está conformado por todos los activos de la economía.
8. La distribución de la rentabilidad de los activos es de forma normal.

Con base en los supuestos del modelo CAPM y de la ecuación proporcionada en el apartado del Teorema de la Separación de James Tobin, se construye la ecuación conocida como la Línea del Mercado de Capitales o CML por sus siglas en inglés (Capital Market Line). A continuación, se plantea una vez más la ecuación de Tobin, así como el desarrollo lógico que dio lugar a partir de ésta a la ecuación CML. Con el objetivo de exponer la base teórica y matemática que dio lugar a la formulación de la SML.

1.4.1. Línea del Mercado de Capitales (Capital Market Line - CML)

Tobin plantea que se puede encontrar un portafolio de activos riesgosos que, al combinarse con un activo libre de riesgo, tendría unas ponderaciones que generarían el mínimo riesgo y el máximo rendimiento esperado (Astaiza, 2012). La ecuación desarrollada por Tobin con dichos elementos es la siguiente:

$$E(R_p) = r_f + \left(\frac{E(R_T) - r_f}{\sigma_T} \right) \sigma_p$$

El modelo CAPM plantea el supuesto de que el mercado de capitales está en equilibrio. Por lo que la única forma de que la oferta iguale a la demanda y de este modo que todos los inversores puedan ver satisfecha la demanda de títulos riesgosos, es que la cartera T sea la cartera de mercado M , la cual contiene a todos los activos riesgosos del mercado (García, 2013; Guerrero, 2014). De este modo cada título estará en el portafolio M en idéntica proporción a como está en el mercado según su capitalización bursátil. Así, denominando a C_i como la cotización de cada uno de los N_i títulos de la clase i que existen en el mercado, la proporción (x_i) de dichos títulos en la cartera M es (García, 2013):

$$x_i = \frac{C_i N_i}{\sum_{i=1}^n C_i N_i}$$

Entonces, al sustituir al portafolio T por el portafolio de mercado M se obtiene la Línea del Mercado de Capitales o CML por sus siglas en inglés (Capital Market Line). La cual

analíticamente es la misma expresión planteada por Tobin, con la única diferencia del cambio de cartera. Así la ecuación de la CML se define como (Guerrero, 2014):

$$E(\bar{R}_p) = r_f + \left(\frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \right) \sigma_p$$

$$\lambda = \left(\frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \right)$$

$$E(\bar{R}_p) = r_f + \lambda \sigma_p$$

Los elementos de la CML son:

$E(\bar{R}_p)$: Valor esperado del rendimiento del portafolio p .

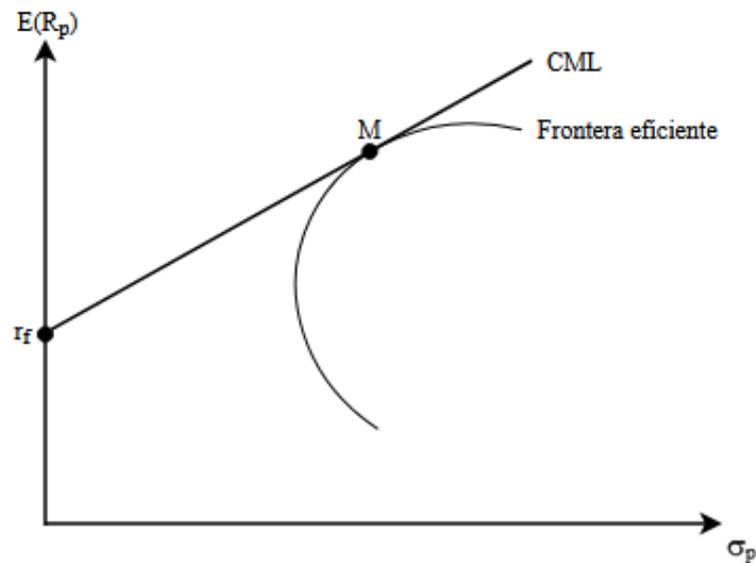
r_f : Ordenada al origen de la CML que representa la rentabilidad del activo financiero libre de riesgo.

λ : Pendiente de la CML siendo una constante que multiplica el riesgo de la cartera p (σ_p). Recibe el nombre de precio de mercado.

σ_p : Pendiente de la CML que representa el riesgo de la cartera p . Desviación estándar del portafolio p .

La CML establece una relación entre la rentabilidad de una cartera eficiente y su riesgo sistemático. Se dice que es una cartera eficiente ya que el riesgo específico es nulo, esto gracias a que la cartera M contiene a todos los títulos existentes en el mercado, haciendo así desaparecer el riesgo específico. La ecuación CML está compuesta por dos sumandos: la ordenada al origen, R_f , que es la recompensa por esperar, es decir, por no consumir ahora sino más tarde, se le designa precio del tiempo o precio del consumo inmediato. El coeficiente de pendiente, que es la recompensa por unidad de riesgo sistemático y constituye la prima relativa de riesgo del mercado, también se le denomina precio del riesgo o ratio de recompensa por volatilidad (García, 2013). Gráficamente la CML es similar a la recta obtenida entre la ponderación de la tasa libre de riesgo y el punto de tangencia con la frontera eficiente:

Figura 5. Línea del Mercado de Capitales (CML).



Fuente: Elaboración propia con base a “Capital Market Line”. Czerwinski (2014).

Las similitudes gráficas con la frontera eficiente de Tobin son evidentes, la única diferencia visual es como está definida la cartera riesgosa, siendo en la frontera eficiente de Tobin la cartera T y en la ecuación CML la cartera de mercado M . Con esta ecuación es como se da paso a la formulación más importante del modelo CAPM, en el siguiente apartado se da el desarrollo y planteamiento de la ecuación SML.

1.4.2. Línea del Mercado de Títulos (Security Market Line - SML)

Una vez planteada la ecuación de la CML y dadas sus especificaciones y restricciones queda al aire la cuestión de si es posible realizar lo mismo con carteras no eficientes o activos individuales, es decir, una ecuación que entregue la relación entre rentabilidad de una cartera no eficiente o activo individual y riesgo sistemático, entiéndase a una cartera no eficiente como una mal diversificada y por tanto que contiene riesgo específico. Dado el planteamiento, así es como surge la recta SML o por su traducción al español la Línea del Mercado de Títulos. La línea SML es una recta que, en un mercado en equilibrio, relaciona linealmente la rentabilidad esperada de un activo financiero con una medida de riesgo (Latorre, 2016).

El modelo CAPM va siempre de la mano de la SML y es la representación gráfica de dicho modelo (Negrete, 2019; Czerwinski, 2014), lo anterior guía a la idea de que la SML es la

ecuación más representativa del CAPM. La fórmula que define a la Línea del Mercado de Títulos es la siguiente (Kristjanpoller y Liberona, 2010):

$$E(R_i) = r_f + \beta_i(E(R_M) - r_f)$$

Los elementos de la ecuación SML son:

$E(R_i)$: Esperanza de retorno del activo i .

r_f : Tasa libre de riesgo.

$E(R_M)$: Retorno esperado del mercado.

β_i : Parámetro de sensibilidad del retorno del activo con el retorno del mercado (beta).

El coeficiente beta, también denominado coeficiente de volatilidad, mide el grado de relación o dependencia del rendimiento de un determinado activo con respecto al rendimiento del mercado o de un determinado índice bursátil. El beta representa el resultado que provocaría un aumento, o una disminución, de una unidad de la rentabilidad del mercado en la rentabilidad del activo (Latorre, 2016). El beta proviene del riesgo inherente al mercado, por lo tanto, el beta del mercado siempre será igual a 1, y según la dependencia del activo con la rentabilidad del mercado este beta variará en mayor o menor medida (Negrete, 2019).

Una forma de determinar el valor del coeficiente beta es calculando el cociente de la covarianza del rendimiento del activo y del mercado entre la varianza del rendimiento del mercado:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)}$$

Otra forma de calcularlo es con la ayuda de una regresión lineal de los datos históricos (Czerwinski, 2014). Mediante la siguiente especificación de la ecuación SML (Guerrero, 2014):

$$E(r_i - r_f) = \alpha + \beta_{im} \cdot E(r_m - r_f) + \varepsilon$$

Donde:

$E(r_i - r_f)$: Valor esperado de la prima de riesgo del activo en el pasado o rentabilidad de la acción o cartera. Variable dependiente o explicada.

$E(r_m - r_f)$: Valor esperado de la prima de riesgo del mercado en el pasado o rentabilidad del mercado. Variable independiente o explicativa.

α : Constante que define el punto de intersección de la recta de regresión lineal.

ε : Término de perturbación estocástica. Residuos o error.

β_{im} : Coeficiente beta. Es la pendiente de la recta de regresión lineal o la elasticidad de los movimientos de la rentabilidad del activo financiero, ante los movimientos de la rentabilidad del mercado (riesgo sistemático). Donde su valor se interpreta de la siguiente forma (Latorre, 2016; Czerwinski, 2014):

- Si $\beta > 1$, el activo o portafolio subirá y bajará más que el mercado, tendrán un riesgo mayor que el mercado. Cuando un activo financiero tiene una beta mayor que 1 se llama agresivo.
- Si $\beta = 1$, el activo o cartera se moverá paralelo al mercado, lo que significa que tendrá el mismo riesgo que el mercado. A este tipo de activo o cartera se les conoce como neutros.
- Si $\beta < 1$, el activo o portafolio subirá y bajará menos que el mercado, por lo tanto, tendrán un riesgo menor que el mercado. A este tipo de activo o portafolio se les conoce como defensivos.
- Si $\beta = 0$, son activos financieros que ofrecen una rentabilidad determinada sin necesidad de asumir riesgo, como el activo libre de riesgo r_f .

Dadas estas interpretaciones de cada uno de los posibles valores del coeficiente beta que pueden tener los activos financieros, se pueden clasificar a los activos de acuerdo con su nivel de variabilidad y de esta forma, por ejemplo, ver que tanto riesgo aportan al riesgo total del portafolio o pueden ser un indicador para decidir si realizar o no una inversión. Gracias a la característica de cuantificar el riesgo sistemático, entre otras, a el modelo CAPM se le han realizado diferentes pruebas empíricas para verificar su eficiencia en diferentes ámbitos económicos o financieros. En el siguiente apartado se describen algunos de los experimentos empíricos que se le han realizado al modelo CAPM.

1.5. EVIDENCIA EMPÍRICA DEL MODELO CAPM

Desde la segunda mitad del siglo XX, se han creado diversos modelos teóricos con diferentes niveles de complejidad. Estos modelos, generalmente, se fundamentan en supuestos muy limitados acerca del funcionamiento de los mercados reales, de forma más genérica dichos supuestos se denominan condiciones de competencia perfecta. El CAPM es un ejemplo de esos modelos teóricos, el cual es uno de los más utilizados para determinar el precio de mercado para el riesgo y la medida de riesgo apropiada para un activo individual o cartera (Díaz e Higuera, 2012). Por tal popularidad diferentes autores se dieron a la tarea de ponerlo a prueba empíricamente de diferentes maneras, llegando a conclusiones similares sobre cómo se desempeña el modelo en un contexto real. A pesar de que el modelo CAPM funciona correctamente en el mundo teórico, en el real presenta diversas debilidades e inconsistencias por las mencionadas condiciones con las que fue construido.

El primero en realizar una prueba al modelo CAPM fue John Lintner (1965), en el trabajo titulado: *Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification*, Lintner realiza un análisis de la relación rentabilidad-riesgo a través de la metodología de corte transversal, añade una variable para representar la parte de riesgo diversificable, para lo cual incluye la varianza de los residuos obtenida de la regresión del Modelo de Mercado que realiza para estimar la beta. Obteniendo los siguientes resultados: I) Un valor del término independiente de la segunda regresión muy superior al de rentabilidad libre de riesgo con la que debía coincidir; II) Un coeficiente de beta mucho más bajo que la prima unitaria por riesgo sistemático.

Posteriormente Miller y Scholes (1972) confirman los resultados de Lintner en su trabajo que lleva como título: *Rate of Return in Relation to Risk: A Reexamination of Some Recent Findings*. Además, intentan explicar estos resultados a través del análisis de posibles errores en la especificación de la ecuación y en las variables utilizadas. Analizan: I) Si los resultados mejoran al expresar el modelo en forma de excesos de rentabilidad con respecto a la tasa libre de riesgo; II) Posible existencia de una relación no lineal introduciendo el cuadrado del coeficiente beta; III) Si hay heteroscedasticidad en los residuos, no obteniendo buenos resultados; y, IV) Estudian posibles problemas en la medición de betas, observando que su consideración mejora los resultados, aunque no lo suficiente; V) Encuentran que la existencia de asimetría positiva en la distribución

de las rentabilidades puede conllevar un alto coeficiente de la varianza de los residuos, así como una disminución de la beta.

En 2003 Ferguson y Shockley presentan en su trabajo *Equilibrium 'Anomalies'* otra prueba de las irregularidades empíricas del modelo CAPM. Mediante la construcción de una economía hipotética, donde el coeficiente beta del CAPM valora todos los activos financieros, pudieron comparar los verdaderos betas de los activos financieros de la economía con el beta proporcionado por cualquier índice que aproxime a la cartera de mercado. Con este planteamiento llegaron a los siguientes resultados:

- Existencia de asimetría a la derecha y de errores en la medición del riesgo sistemático.
- Anomalías empíricas como el efecto tamaño y el ratio *book-to-market* son consistentes en el modelo CAPM de un único beta, esto sucede cuando en el índice que aproxima a la cartera de mercado se utilizan solamente acciones.
- Los coeficientes betas estimados con dicho índice subestimarán a los betas reales de las acciones y este error de subestimación aumentará con el apalancamiento de una empresa.
- El índice utilizado es ineficiente al no capturar el riesgo derivado de la deuda, haciendo falta variables que se correlacionan con el apalancamiento de una empresa.
- Llegaron a la conclusión de que los mejores complementos al índice del mercado de acciones para explicar la sección transversal de los rendimientos son los factores formados en el apalancamiento.

Viviana Fernández (2005) en su trabajo: El modelo CAPM para distintos horizontes de tiempo, señala que su investigación se enfoca en la estimación del modelo CAPM para diferentes horizontes de tiempo, haciendo uso de datos proporcionados por la Bolsa de Comercio de Santiago. Fernández indica que el trabajo consta de una muestra de 24 acciones que fueron negociadas activamente en el período 1997-2002. En su trabajo utilizó una prueba simple, en la que se realiza la regresión del primer paso, intentando medir el ajuste del modelo para distintas temporalidades. Obteniendo como resultados que el modelo CAPM tiene un mayor poder de predicción en el mediano plazo, además, se encontraron coeficientes de determinación, R^2 , para las distintas

escalas temporales con un ajuste bastante bajo. Resultando el valor más grande de R^2 obtenido de 0.547, mientras que el más pequeño fue de 0.169.

En 2007 da Silva publica su trabajo titulado: *Análise comparativa e teste empírico da validade dos modelos CAPM tradicional e condicional: o caso das ações da Petrobrás*. En el cual realizó un análisis comparativo y probó empíricamente la validez de los modelos CAPM tradicional y condicional. Para su estudio utilizó las acciones de Petrobras desde el 1 de enero de 2002 hasta el 31 de diciembre de 2003. La metodología utilizada para el análisis y comparación fue el marco teórico del modelo CAPM, además de utilizar instrumentos econométricos para lograr los resultados requeridos. Primero se estimó el modelo CAPM tradicional, a través de la metodología de Mínimos Cuadrados Ordinarios y, posteriormente un CAPM condicional, a través de un modelo GARCH-M. Los resultados empíricos obtenidos son:

- Tanto el CAPM tradicional como el CAPM condicional tienen probada su validez, ya que en ambos modelos sus intersecciones son estadísticamente no significativas.
- Ambos modelos presentaron estimaciones muy cercanas en cuanto a los parámetros. Así en ambos, se obtuvo un valor de beta que indica que las acciones de Petrobras son sensibles al índice de mercado.
- Se obtuvo un valor alto del coeficiente de determinación, lo que señala que la mayor parte del riesgo está asociado al mercado y no a la empresa.
- Se encontró que el CAPM tradicional presenta heteroscedasticidad condicional, la cual pudo ser controlada al incluirle volatilidad condicional, originándose así el CAPM condicional.

Para la selección del mejor modelo se utilizaron criterios como el R^2 ajustado, el de Akaike y el de Schwarz, obteniendo valores similares en ambos modelos. Debido a que los valores obtenidos son muy cercanos, la elección final queda a cargo del investigador. da Silva adopta el criterio de información de Akaike para este trabajo, de esta forma el modelo elegido fue el CAPM condicional.

Dado el tiempo que lleva existiendo y la popularidad del modelo CAPM, es razonable pensar que la cantidad de trabajos donde se pone a prueba de manera empírica es extensa. Por tal, y ya que no es el objetivo del trabajo, no se presentan en su totalidad y únicamente se limita a enlistar los que se consideran fundamentales, ya sea por su importancia histórica al ser los primeros experimentos con del modelo o porque dan muestra del área de oportunidad que aprovecha el trabajo de investigación.

1.6. CONCLUSIÓN

Con este último apartado se concluye esta primera sección del trabajo de investigación. Donde, mediante una forma cronológica se presentan las ideas y trabajos que dieron origen al modelo de interés para el estudio, el modelo CAPM. Para esto se debe iniciar presentando la necesidad de desarrollar herramientas que permitan dilucidar el proceso de decisión en una inversión que tiene por concepto un nivel de riesgo propio. Así es como se da lugar a la teoría del portafolio de Markowitz como una herramienta que entregó resultados destacables.

Para lograr llegar a la idea final del modelo CAPM es esencial mostrar el Teorema de la Separación de James Tobin, el cual obtiene una expresión que fue de relevancia para el desarrollo de un elemento central del modelo CAPM, se habla entonces de la CML, que posteriormente dio lugar a la ecuación fundamental del CAPM: la SML. Así se consolida un modelo ampliamente estudiado y usado, con diversas aplicaciones en contextos reales, desde la valuación de activos financieros hasta el pronóstico de rentabilidades de instrumentos o de carteras.

Dada la popularidad que goza el modelo CAPM en el trabajo que desempeña, además del tiempo que lleva existiendo, diversos autores se han encargado de ponerlo a prueba desde diferentes puntos de vista con el objetivo de verificar su validez en un contexto real. Por eso resulta relevante mostrar los resultados de algunos de los trabajos más importantes con la finalidad de evidenciar las debilidades del modelo y, sobre todo, un área de oportunidad a mejorar. Como se menciona, existen inconsistencias en el CAPM cuando de trabajos empíricos se trata, además, existe un bajo ajuste de los rendimientos cuando sólo se emplea el portafolio de mercado como variable exógena.

Antes de llegar a dicha área de oportunidad, se hace necesario presentar los fundamentos de la metodología con la que se trabaja, de esta forma se garantiza su correcta aplicación. En la

siguiente sección se presenta todo lo necesario para comprender el desarrollo metodológico del trabajo de investigación.

CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA DE SERIES DE TIEMPO

2.1. INTRODUCCIÓN A LAS SERIES DE TIEMPO

El análisis de series de tiempo es una técnica estadística utilizada para analizar datos que se han recopilado a lo largo del tiempo, con el fin de desarrollar modelos matemáticos que proporcionen descripciones plausibles para datos de muestra, éstas proporcionan un resumen conciso de las principales características de una serie de tiempo, que con frecuencia puede ser esencial para quienes toman decisiones¹. De esta forma se convierte en una herramienta clave en la toma de decisiones en muchos campos, como economía, actuaría, finanzas, y las ciencias sociales, entre otros. Además, existen otros objetivos del análisis como: explicación, pronóstico y control para los cuales es esencial comprender los componentes de una serie de tiempo, que incluyen la tendencia, la estacionalidad, la variación cíclica y el ruido aleatorio.

Otro aspecto muy importante es que las series temporales son procesos estocásticos que deben ser estacionarios (débilmente), es decir, que los datos se mantienen constantes a lo largo del tiempo. Esta propiedad de las series temporales es sumamente útil para hacer pronósticos a largo plazo. Por tanto, resulta relevante hacer la identificación del cumplimiento de esta propiedad, ya que permite trabajar las series de tiempo con la garantía de no estimar regresiones espurias o falsas y así garantizar sus predicciones. Es así como se desarrollan las pruebas de raíz unitaria que permiten determinar si una serie de tiempo es estacionaria o no. Existen variedad de pruebas, desde las más informales como un análisis gráfico, hasta las que de forma estadística aseguran la condición de estacionariedad, como las pruebas Dickey-Fuller (DF), Dickey-Fuller Aumentada (DFA) y Phillips-Perron (PP).

A partir del concepto de estacionariedad se desarrollan modelos con base en esta propiedad. Los modelos autorregresivos se basan en la autocorrelación presente en los datos, se definen como aquellos en el que el valor actual de una variable, Y_t , depende únicamente de los valores que tomó la variable en períodos anteriores más un término de perturbación (Brooks, 2008). En la

¹ Cowpertwait y Metcalfe, 2009; Shumway y Stoffer, 2011.

literatura se les denomina como $AR(p)$, donde el término p indica el número total de valores rezagados que explican a serie Y_t . Los modelos AR se pueden utilizar para identificar patrones en los precios y rendimientos pasados de los activos financieros, y predecir cómo se comportarán en el futuro.

2.1.1. Definición y objetivos de su análisis

Cada vez es más común la recolección de información por parte de diversas ramas de la ciencia, ya que en el contexto donde se desarrollan existen variables que pueden ser medidas secuencialmente en el tiempo. Cuando una variable es medida de forma consecutiva en el tiempo durante un intervalo, ya sea determinado o no, los datos resultantes forman una serie temporal, los cuales al seguirse recopilando durante intervalos de muestreo fijos forman una serie de tiempo histórica. Al adoptar un enfoque estadístico, se denomina proceso estocástico de tiempo discreto o continuo a las series históricas que son tratadas como secuencias de variables aleatorias las cuales están definidas en intervalos fijos de tiempo (Cowpertwait y Metcalfe, 2009).

Box y Jenkins (1976; citados en González, 2011) señalan que una serie de tiempo es un conjunto de observaciones generadas de manera secuencial en el tiempo, en el cual, si los datos se originan en un intervalo ininterrumpido, se considera que la serie es continua, por otro lado, si los datos se recopilan en momentos o intervalos específicos separados, se le llama discreta. Por su parte, Wooldridge (2010) define a la serie de tiempo como una secuencia de variables aleatorias indexadas en el tiempo, denominada de igual forma como proceso estocástico o proceso de series de tiempo, donde estocástico es sinónimo de aleatorio. De igual forma, Gujarati y Porter (2010) indica que un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias ordenadas en el tiempo, además muestra una distinción en notación entre series de tiempo continuas y discretas, donde $Y(t)$ y Y_t las representan respectivamente.

Las variables aleatorias están ordenadas en el tiempo de acuerdo al orden de ocurrencia, pudiendo representarlas como una secuencia Y_1, Y_2, Y_3, \dots , donde la variable aleatoria Y_1 denota el valor que toma la serie en el primer momento, la variable Y_2 representa el valor del segundo periodo de tiempo, Y_3 simboliza el valor en el tercer periodo de tiempo y el valor particular Y_t representa la t -ésima observación, es decir, el valor que tendrá la serie de tiempo en el momento t (Shumway y

Stoffer, 2011; González, 2011). En general, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{Y_t, t \in T\}$, donde T es un conjunto de índices arbitrario (Kantun, 2019).

Al momento de registrar a un conjunto de observaciones de un proceso estocástico se está obteniendo un resultado posible, lo que también se denomina una realización, en general, cuando se menciona una serie de tiempo se está refiriendo a este concepto (Kantun, 2019). La distinción entre el proceso estocástico y su proceso generador de datos es semejante a la diferencia entre población y muestra en datos de corte transversal. De la misma forma que se hace inferencias sobre la población a partir de datos muestrales, se efectúan inferencias sobre el proceso estocástico subyacente en las series de tiempo mediante la realización (Gujarati y Porter, 2010; Wooldridge, 2010).

El objetivo principal del análisis de series de tiempo es desarrollar modelos matemáticos que proporcionen descripciones plausibles para datos de muestra, éstas proporcionan un resumen conciso de las principales características de una serie de tiempo, que con frecuencia puede ser esencial para quienes toman decisiones (Cowpertwait y Metcalfe, 2009; Shumway y Stoffer, 2011). Además, existen objetivos posteriores a la descripción del fenómeno, como lo son (González, 2011):

- Explicación. Pretende realizar un análisis de tipo causa-efecto al relacionar un fenómeno con el medio circundante o con otras variables. Responde a las preguntas: ¿Por qué se comporta así el fenómeno? Y ¿Qué otras variables afectan a la variable de interés?
- Pronóstico. Pretende estimar valores futuros de un fenómeno con el fin de tomar decisiones o prever comportamientos. Responde a la pregunta: ¿Qué ocurrirá con el fenómeno en un futuro próximo?
- Control. Si no se desea observar, sino modificar el comportamiento de un proceso para obtener algún beneficio o para que se mantenga dentro de ciertos límites establecidos, el objetivo es controlar.

Con el objetivo de dar un primer acercamiento a esta temática se da una introducción al contenido de series de tiempo, planteando su definición, características y el objetivo de análisis. De esta forma se da lugar a continuar adentrándose al tópico de series temporales, describiendo a

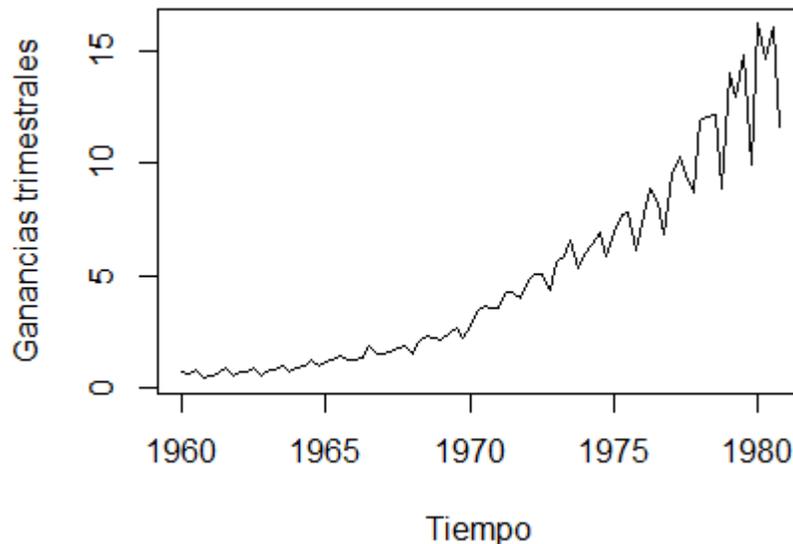
detalle uno de los rasgos más importantes con los que cuenta, se habla entonces de los componentes de una serie. Siendo estos elementos que la constituyen, dándole, por lo general, una apariencia gráfica muy distintiva a la de otras series. La importancia del siguiente apartado recae en identificar la presencia o ausencia de ellos, dado que influyen en la construcción de modelos de series de tiempo.

2.1.2. Componentes de una serie de tiempo

Una serie de tiempo está compuesta, por lo general, de uno o más elementos, siendo en ocasiones una mezcla de éstos. Todas las partes de la serie deben tenerse en cuenta al construir modelos de este tipo, ya que algunos pueden tener un impacto en los procedimientos estadísticos utilizados para modelar y analizar a la serie en cuestión, es decir, la presencia o ausencia de ciertos componentes intervienen en la construcción de un modelo adecuado. Por lo tanto, es importante obtener una buena comprensión de las propiedades de las series de tiempo antes de modelarlas (Lütkepohl y Krätzig, 2004). Los componentes son cuatro:

1. **Tendencia.** Se define como un desplazamiento lineal de crecimiento o caída de las observaciones en un horizonte de tiempo amplio, a su vez, determina la tasa de incremento o descenso de la serie (A. Del Sur, 2010; citado en Osorio, 2016). Dado que la tendencia es un componente esencial en el modelado de una serie de tiempo, se debe tomar en consideración mediante su eliminación o modelado. La eliminación puede hacerse a través de aplicar una transformación matemática, como lo es el logaritmo, el recíproco o la raíz cuadrada, o se puede prescindir con diferencias sucesivas conocidas como finitas u ordinarias (González, 2011). Gráficamente la tendencia de una serie se ve de la siguiente forma:

Figura 6. Ganancias trimestrales en dólares por acción de Johnson & Johnson (1960 - 1980).

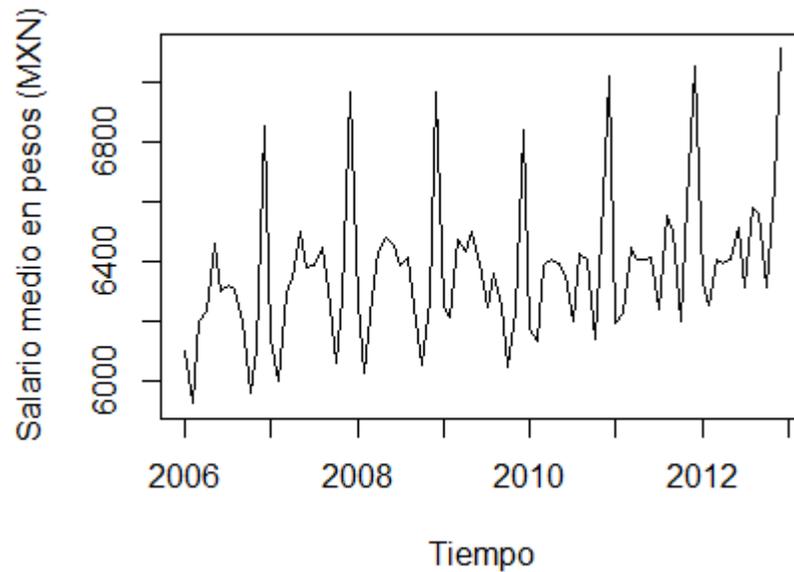


Fuente: Elaboración propia con datos de R Core Team.

En la Figura 6 se observa como las ganancias por acción aumentan gradualmente con respecto al tiempo, generando un desplazamiento lineal de crecimiento de las observaciones, característico del componente de tendencia.

2. Variación estacional o estacionalidad. Éste componente se refiere a patrones que se repiten durante un período de un año o menos, gráficamente es posible visualizarlos. Por lo general, está presente en series que se miden con cierta periodicidad, por ejemplo, cada mes o cada trimestre. Dado que la estacionalidad es importante en los pronósticos a corto plazo, ya que suele ser la principal fuente de fluctuaciones, se debe eliminar. El proceso de eliminación del componente estacional se conoce como desestacionalización o ajuste estacional, y la serie de tiempo obtenida se denomina serie de tiempo desestacionalizada o ajustada por estacionalidad (Heij et al., 2004; Gujarati y Porter, 2010). Ejemplo de estacionalidad:

Figura 7. Salarios medios de empresas constructoras en México (2006 - 2012).

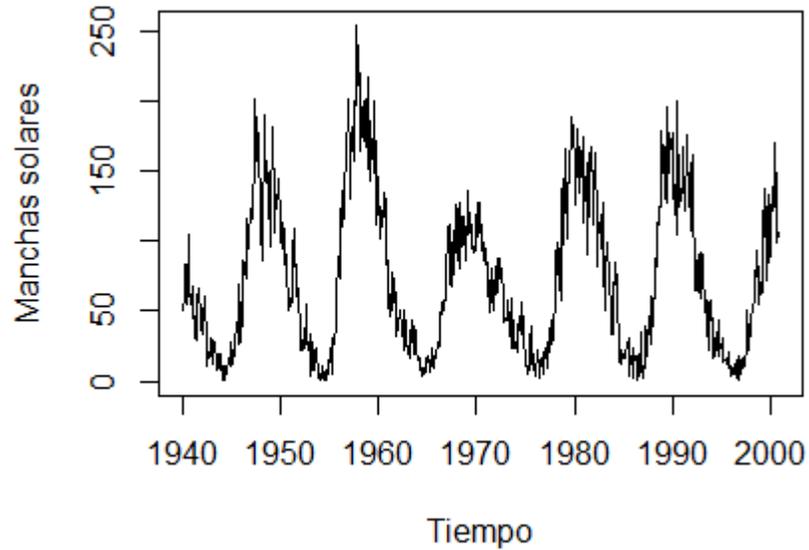


Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI.

Tal como se observa en la Figura 7, los salarios medios de empresas constructoras en México tienen sus picos más altos a final de cada año posiblemente por el pago de aguinaldos en las empresas y decrecen rápidamente a inicios del siguiente año. Lo que se puede visualizar como un patrón presente en un periodo menor a un año que se repite, es decir, una variación estacional.

3. Ciclo. Similar a la variación estacional, se trata también de un patrón repetitivo donde las variaciones oscilan alrededor de la línea de tendencia, pero con longitud mayor a un año. El ciclo es más difícil de observar puesto que requiere de dar seguimiento a un fenómeno durante mucho tiempo para ser advertido, pero si es percibido se debe considerar en el modelo (A. Del Sur, 2010; citado en Osorio, 2016; González, 2011). El ciclo de una serie de tiempo gráficamente se visualiza de la siguiente manera:

Figura 8. Medición del número de manchas solares (1940 - 2000)

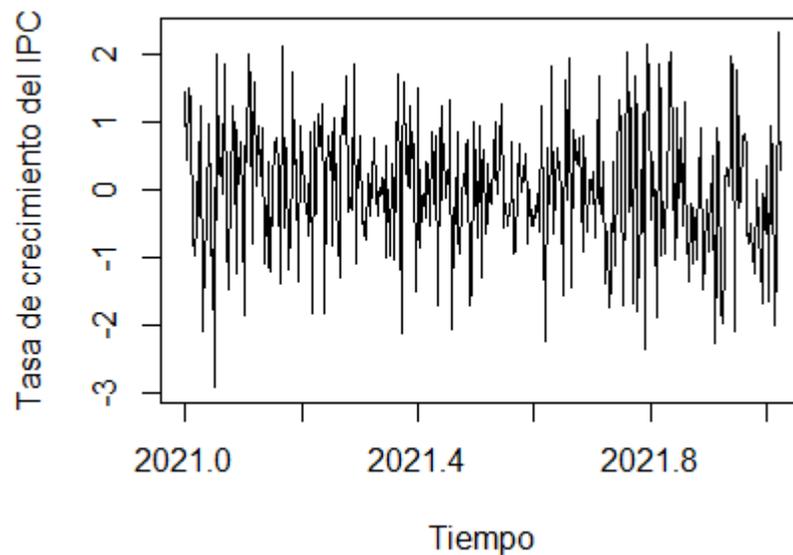


Fuente: Elaboración propia con datos de Feigelson.

Dado que el número de las manchas solares es un fenómeno al cual se le da un seguimiento constante y por tanto se tiene un registro amplio, se puede observar en la Figura 8 un patrón oscilatorio repetitivo con duración mayor a un año, lo que indica la existencia del componente de ciclo.

4. Fluctuación aleatoria. Las series de tiempo pueden tener parecido a gráficas que se obtienen a partir de ecuaciones matemáticas, como lo pueden ser rectas, parábolas, funciones logarítmicas, entre otras, aun así, siempre contendrán un conjunto de variaciones irregulares que presentan el resultado de las llamadas fluctuaciones o choques aleatorios. Los cuales exhiben un comportamiento irregular, compuestos por fluctuaciones ocasionadas por hechos impredecibles o no periódicos, no tiene un patrón definido ni causa identificable y agrupan todo aquello que el modelo matemático no puede explicar (A. Del Sur, 2010; citado en Osorio, 2016; González, 2011).

Figura 9. Tasa de crecimiento del Índice de Precios y Cotizaciones (1990 – 2022)



Fuente: Elaboración propia con datos de Banco de México.

La Figura 9 muestra claramente que el Índice de Precios y Cotizaciones presenta variaciones irregulares sin ningún patrón evidente ni ninguna periodicidad identificable, por tanto, es evidente el componente de fluctuación aleatoria.

Los componentes de las series temporales desempeñan un papel clave en el desarrollo de modelos econométricos, dado que su aparición en una variable influye en el proceso de construcción del modelo. Una vez explicados los elementos que conforman a una serie de tiempo, queda pendiente revisar otra de las características que poseen algunas de las series financieras, la estacionariedad. Ésta se relaciona estrechamente con lo revisado, ya que la presencia de ellos permite ver gráficamente si la serie tiene un comportamiento estacionario. La tendencia, por ejemplo, es una característica que genera la aparición de la no estacionariedad en una serie. Revisar si existe esta característica es fundamental para el análisis y el modelado, las razones y su explicación se presentan en el siguiente subcapítulo.

2.2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS

2.2.1. Estacionariedad fuerte y débil

Existen diversas razones por las cuales la presencia o ausencia de la estacionariedad es fundamental para el análisis de series de tiempo, inicialmente se destaca que esta propiedad en la práctica permite hacer inferencias sobre observaciones futuras, es decir, predicciones. Así, esta

característica se vuelve decisiva en el proceso de estudio (Tsay, 2005). Es relevante hacer la identificación del cumplimiento de la propiedad de estabilidad en media, varianza y covarianza, ya que permite trabajar las series de tiempo con la garantía de no estimar regresiones espurias o falsas.

Se define a un proceso de tiempo $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{t=\infty}$, como fuertemente estacionario si la distribución de probabilidad conjunta de cualquier grupo de k observaciones en la secuencia $(Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k})$, es la misma independientemente del origen, t , en la escala del tiempo (Greene, 2003). Dicho de otra manera, la estacionariedad fuerte o estricta implica que la distribución conjunta de $(Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k})$ no cambia en el transcurso del tiempo. Esta muchas veces resulta ser una fuerte condición que es difícil de comprobar empíricamente.

En la práctica usualmente se admite una versión más flexible de estacionariedad. Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}$ es débilmente estacionaria si tanto la media de Y_t y la covarianza entre Y_t y Y_{t-l} son invariantes en el tiempo, donde l es un entero arbitrario. Ahora bien, supóngase que se tienen observados T puntos como datos $\{Y_t | t = 1, \dots, T\}$, la estacionariedad débil gráficamente implica que de los valores de T fluctúan con variación constante alrededor de un nivel fijo (Tsay, 2005). Dada la definición es intuitivo relacionar el componente de tendencia y de fluctuación aleatoria, uno debe ser nulo y el otro de un comportamiento constante, respectivamente.

Formalmente, un proceso estocástico que tiene una media y varianza finita es débilmente estacionario o estacionario en covarianza si para todo t y $t - l$ (Enders, 2014):

$$E(Y_t) = E(Y_{t-l}) = \mu$$

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t-l}) = \sigma_Y^2$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-l}) = Cov(Y_{t-j}, Y_{t-j-l}) = \gamma_l$$

Donde μ , σ_Y^2 , y γ_l son todas constantes. A la expresión $\gamma_l = Cov(Y_t, Y_{t-l})$ se le denomina autocovarianza con l rezagos (*lag-l autocovariance*) de Y_t , en la cual si $l = 0$ significa que γ_0 es equivalente a la varianza de Y_t . Para una serie estacionaria en covarianza, podemos definir la autocorrelación entre Y_t e Y_{t-l} como

$$\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0}$$

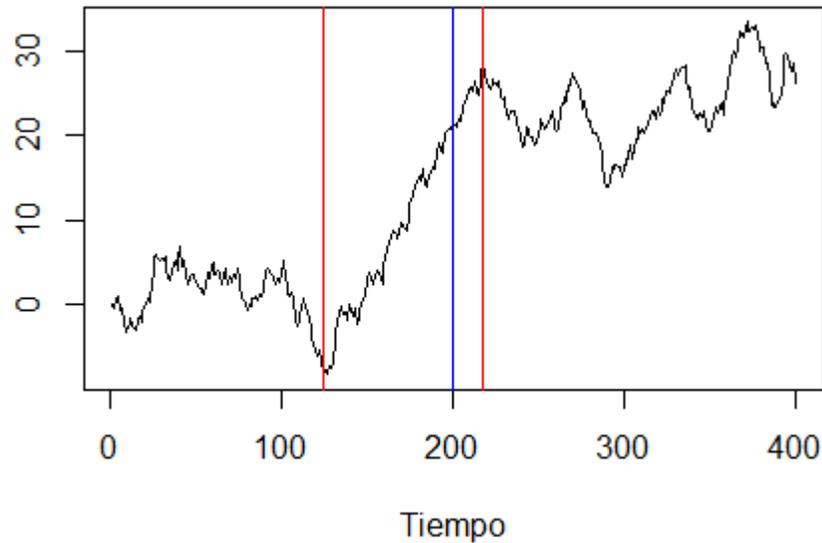
Ya que γ_0 y γ_l son independientes en el tiempo, los coeficientes de autocorrelación ρ_l también son independientes del tiempo. Además, lógicamente $\rho_0 = 1$. En resumen, una serie de tiempo es estacionaria en covarianza si su media y todas las autocovarianzas no se ven afectadas por un cambio en el origen del tiempo. En diferentes textos, es común encontrar como sinónimo de estacionariedad débil a estacionario de segundo orden o estacionario de sentido amplio. A pesar de tener diferentes formas de referirse a la estacionariedad débil, es común por simplicidad nombrarla en el ámbito del análisis de series de tiempo sólo como estacionariedad.

Una vez conceptualizada la característica de estacionariedad que es puesta en práctica en trabajos empíricos, queda pendiente comprender la razón por la cual es importante que se cumpla dicha propiedad. Al inicio del apartado se mencionó una de ellas, la cual es que las series estacionarias permiten realizar pronósticos. En la siguiente sección se abordan más consideraciones además de como tratar a series que no poseen esta particularidad tan importante.

2.2.2. Series de tiempo no estacionarias

Hay diversas razones por las cuales es importante entender el concepto de no estacionariedad, entre ellas se encuentra el hecho de que las variables que no son estacionarias son abordadas de manera distinta en el análisis de series de tiempo. Ya que se expuso el concepto de estacionariedad resulta más sencillo comprender qué es la no estacionariedad. Entonces, se dice que una serie de tiempo no es estacionaria si su media, varianza y autocovarianzas se ven afectadas por un cambio en el origen del tiempo, es decir, no son constantes. El resultado anterior propicia a que los datos presenten tendencia, estacionalidad, ciclos y que su fluctuación aleatoria no tenga un comportamiento constante; gráficamente esta situación se ve a continuación:

Figura 10. Simulación de una serie de tiempo no estacionaria (400 observaciones)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Es evidente que en la gráfica anterior la media, la varianza y seguramente las autocovarianzas, no son constantes. En primera instancia, es visible la presencia de tendencia a lo largo de la serie, en especial de la observación 125 a la 218. Es posible observar estacionalidad o ciclos después de la observación 200 y, además, es claro que su fluctuación aleatoria no tiene un comportamiento constante a lo largo del tiempo.

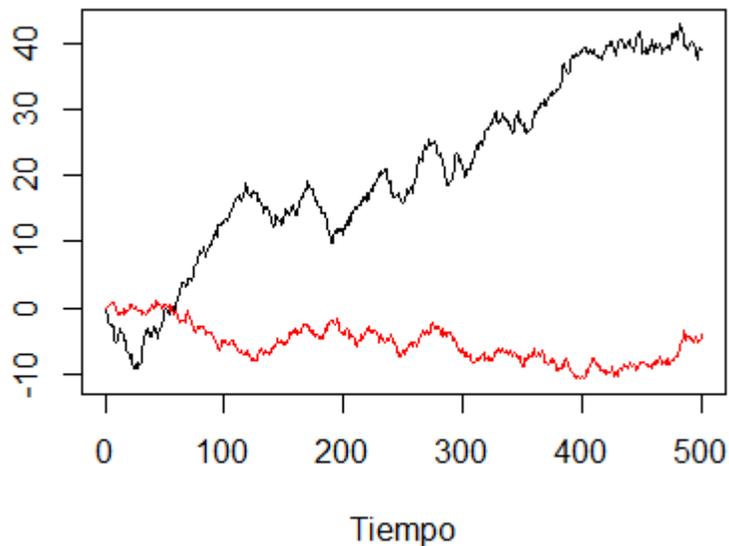
Una variable no estacionaria puede traer situaciones no deseables para el análisis, tales como (Brooks, 2008):

- La no estacionariedad puede influir fuertemente en el comportamiento y propiedades de una serie. Por ejemplo, para una serie estacionaria, los *shocks* o choques aleatorios desaparecerán gradualmente. Es decir, una perturbación aleatoria en el tiempo t tendrá un efecto menor en el tiempo $t + 1$, un efecto aún menor en el tiempo $t + 2$, y así secuencialmente. Mientras que en datos no estacionarios la persistencia de los choques siempre será infinita, por lo que el efecto de una fluctuación en el tiempo t tendrá un efecto mayor en el tiempo $t + 1$, y aún mayor en el tiempo $t + 2$, así sucesivamente.
- Usar datos no estacionarios puede resultar en regresiones espurias o falsas. Si dos series independientes y no estacionarias se utilizan en una regresión, una elegida como la variable dependiente y la otra como la variable explicativa, los softwares que emplean una

regresión estándar encuentran muy a menudo una relación, cuando en realidad no hay ninguna (Granger, 2004). Esto reflejado en estimaciones de coeficientes significativos y un R^2 alto. Por ejemplo, existen dos variables estacionarias independientes, si se hace una regresión de una sobre la otra, se espera que los coeficientes no sean significativos y que el valor de R^2 sea muy bajo. Esto es lógico, dado que las variables no están relacionadas. No obstante, si se estima una regresión de dos variables que no son estacionarias, una en función de la otra, se podría obtener un valor de R^2 alto y coeficientes significativos, incluso si las dos no están relacionadas.

Para ilustrar lo anterior se recurre a la simulación de dos series no estacionarias, además, de esta manera se asegura que ambas no están relacionadas; gráficamente las series se comportan de la siguiente manera.

Figura 11. Simulación de dos series de tiempo no estacionarias (500 observaciones)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Realizando la estimación de los coeficientes y la R^2 en el software RStudio de la regresión de la serie en color rojo (Y_t) en función de la serie en color negro (X_t), se obtienen los siguientes resultados.

Tabla 1. Estimaciones de la regresión $Y_t \sim X_t$

Coefficientes	Estimación	t – estadística	Valor de p
Intercepto	-1.67735	-13.61000	0.00000
X_t	-0.17796	-35.95000	0.00000
R^2	0.72100	R^2 ajustado	0.72100
	d	0.09500	

Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

A pesar de que Y_t y X_t no tiene relación alguna, los coeficientes estimados son estadísticamente significativos, además, el valor de R^2 es bastante alto. Estos resultados llevan a pensar que ambas variables están relacionadas y que se ha obtenido un buen modelo. Pero, como se puede observar en el código debajo, las variables se generaron a partir de simulaciones independientes, por tanto, se sabe de antemano que no están relacionadas y en consecuencia los resultados obtenidos no tienen validez.

```
set.seed(16)
x_ca = arima.sim(n = 500, list(order=c(0,1,0)), rand.gen = rnorm, mean = 0.02, sd = sqrt(0.5), n.start=300)
set.seed(20)
y_ca = arima.sim(n = 500, list(order=c(0,1,0)), rand.gen = rnorm, mean = 0.01, sd = sqrt(0.2), n.start=300)
```

Además, es sabido que un valor alto de R^2 o de R^2 ajustado combinado con un valor bajo del estadístico d de Durbin-Watson², indica una regresión espuria (Granger y Newbold, 1974). En este caso se tiene un valor de $d = 0.095$, entonces, $0.721 > 0.095$ lo que puede indicar la presencia de una regresión falsa.

Existe otra situación en la cual puede presentarse una regresión espuria. Sean dos series no estacionarias Y_t y X_t integradas del mismo orden, si una regresión es aplicada y los residuos obtenidos contienen tendencia, es decir, no son estacionarios, se dice entonces que la regresión es falsa. Un caso alternativo es conseguir residuos con comportamiento

² La prueba Durbin-Watson indica la posible existencia de autocorrelación, el estadístico se encuentra entre cero y cuatro, $0 \leq d \leq 4$, donde $d = 2$ indica la inexistencia de autocorrelación, un valor de d cercano a cero señala una correlación serial positiva y de d cercano a cuatro una negativa (Heij et al., 2004).

estacionario, en esta situación se dice que las variables Y_t y X_t están cointegradas (Enders, 2014).

- Si las variables empleadas en un modelo de regresión no son estacionarias, se puede demostrar que los supuestos para el análisis asintótico no serán válidos. En otras palabras, las t -ratios usuales no seguirán una distribución t , y la F-estadística no seguirá una distribución F . Lo cual deja fuera del análisis el hacer inferencias sobre los coeficientes estimados.
- Si dos secuencias no estacionarias Y_t y X_t son integradas de diferente orden, una regresión de una variable en función de la otra no tiene sentido (Enders, 2014).

Ahora bien, en la práctica es usual encontrar series de tiempo que presentan características de no estacionariedad, en cuyo caso se hace necesario realizar modificaciones a los datos para que se ajusten a las condiciones referidas. Para lograr esta meta es recomendable establecer un orden en el proceso (González, 2011):

1. Estabilización de la varianza. Se busca que la apariencia de los datos se asemeje a una banda o franja con el mismo ancho, alrededor de la media, sin importar que esta no sea constante. La transformación matemática para esta tarea es calcular la raíz cuadrada, el logaritmo o el recíproco a los datos. Una vez que la serie es homoscedástica, se procede al paso siguiente.
2. Eliminación de la tendencia. Se trata de observar una media constante, que los datos se vean como fluctuaciones alrededor de una recta horizontal. Esto mediante las llamadas diferencias ordinarias o finitas, que consiste en restar los valores de las observaciones una de la otra en orden, es decir, $Y_t - Y_{t-1}$. Si se obtienen las primeras diferencias de una serie con tendencia lineal, ésta desaparecerá. Si la tendencia es similar a una parábola, se requiere de dos diferencias para eliminarla. Entonces, se puede generalizar que para un polinomio de grado uno se vuelve constante al aplicar una diferencia; uno de grado dos se vuelve constante con dos diferencias, y así sucesivamente.

Así, un proceso estocástico no estacionario que puede volverse estacionario con las primeras diferencias, se dice que es integrado de orden uno, $I(1)$. Un proceso estacionario Y_t es

llamado $I(0)$. Un proceso $I(d)$ con $d \geq 1$ es denominado comúnmente proceso de raíz unitaria, o sólo que tiene una raíz unitaria (Lütkepohl y Krätzig, 2004).

3. Tratamiento de la variación estacional. En ocasiones este fenómeno es visible desde un inicio en la gráfica, pero en otras es notorio hasta haber estabilizado la varianza o eliminado la tendencia. Si existe variación estacional se pueden dar dos situaciones, una en la que es posible eliminarla mediante lo que se conoce como diferencias estacionales o si es tan poderosa dentro de la estructura de los datos conviene representarla a través de modelos multiplicativos que incluyan este componente.

Lo anterior deja en claro cuales son los inconvenientes de desarrollar un análisis de series de tiempo con datos que no presentan las características de estacionariedad, que podrían incluso llevar a estimaciones erróneas sobre la relación entre dos variables. Por ello es necesario conocer las transformaciones matemáticas que permitan solucionar dicha situación y así ajustar los datos a la condición ideal, la estacionariedad. Ya se han planteado teóricamente estas dos situaciones que puede presentar una serie temporal, para reforzarlo se presenta en la siguiente sección un ejemplo del comportamiento más puro de la estacionariedad y la no estacionariedad.

2.2.3. Proceso de caminata aleatoria y de ruido blanco

Lo que se conoce como camina aleatoria (*random walk*), es un ejemplo clásico de series de tiempo no estacionarias. Es común decir que variables como los precios de las acciones o los tipos de cambio siguen una caminata aleatoria y, por tanto, son no estacionarias. Existen dos tipos de caminatas aleatorias, caminata aleatoria con deriva y caminata aleatoria sin deriva.

El modelo de caminata aleatoria con deriva esta dado por:

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Para $t = 1, 2, \dots$, con un valor inicial de $Y_0 = 0$ y donde la variable ε_t esta como un proceso de ruido blanco con media igual cero y varianza σ^2 . La constante δ es llamada deriva o desvío, que determina la trayectoria de la serie según sea su signo, si es positivo la serie tenderá hacia arriba, mientras que si es negativo se desviará hacia abajo. El modelo de caminata aleatoria con deriva puede ser reescrito como la suma de variaciones de ruido blanco, esto es:

$$Y_t = \delta t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

Se puede demostrar que para el modelo de caminata aleatoria con deriva su media es igual a $E(Y_t) = Y_0 + t\delta$ y su varianza es igual a $Var(Y_t) = t\sigma^2$. Ahora bien, si en el modelo de caminata aleatoria con deriva el valor de $\delta = 0$, se obtiene lo que se conoce como caminata aleatoria sin deriva o sin desvío, cuya representación es:

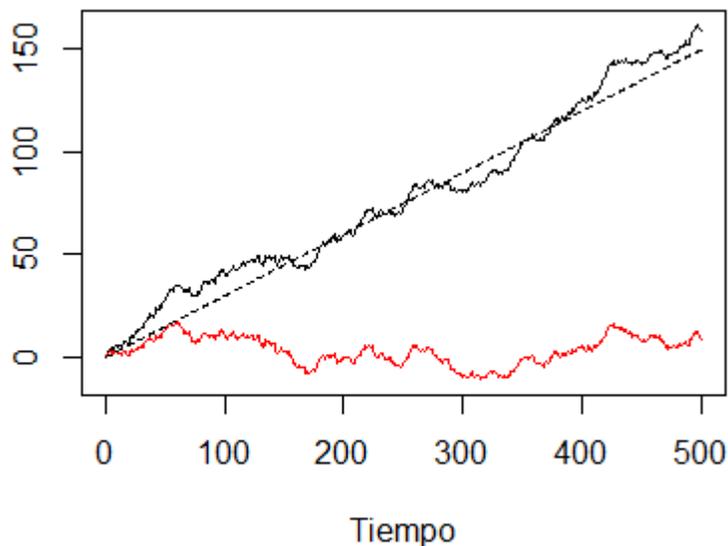
$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Es decir, el valor de Y en el tiempo t es igual a su valor en el tiempo $t - 1$ más un choque aleatorio, representado por un ruido blanco. Si se supone de igual forma que $Y_0 = 0$, se puede reescribir el modelo de la siguiente forma

$$Y_t = Y_0 + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j$$

Además, puede ser demostrado que para el modelo de caminata aleatoria sin deriva su media es igual a $E(Y_t) = Y_0$ y su varianza es igual a $Var(Y_t) = t\sigma^2$ (Gujarati y Porter 2010; Shumway y Stoffer, 2011). Para ejemplificar ambos modelos se muestran gráficamente a continuación.

Figura 12. Simulación de una caminata aleatoria con y sin tendencia (500 observaciones)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

En la Figura 12 se simulan dos variables con 500 observaciones, ambas con una $\sigma^2 = 1$, pero con la diferencia que la serie en color negro tiene una deriva $\delta = 0.3$, mientras que la serie en color rojo su deriva es igual a cero. Además, para ilustrar la idea de la deriva se dibuja una línea discontinua que crece a razón de $0.3t$, que de igual forma representa la media, ya que dado un valor inicial de $Y_0 = 0$ su valor esperado es $E(Y_t) = 0 + t0.3$. Ahora bien, es visible que el proceso con deriva, la media, al igual que la varianza, se incrementa con el tiempo y en el proceso sin deriva únicamente la media se incrementa. Y así, ambas series no cumplen con las condiciones de estacionariedad.

Ahora bien, la contraparte de la caminata aleatoria es lo que se denomina ruido blanco (*white noise*), el cual es un ejemplo muy importante de una variable estacionaria, la cual es definida como una serie de tiempo $\{\varepsilon_t: t = 1, 2, \dots, n\}$ cuyas observaciones $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con media cero. Esto implica que la media de Y_t es constante, $\mu = E(\varepsilon_t)$, que todas las variables tengan la misma varianza σ^2 y $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ para toda $i \neq j$. Además, se cumple que:

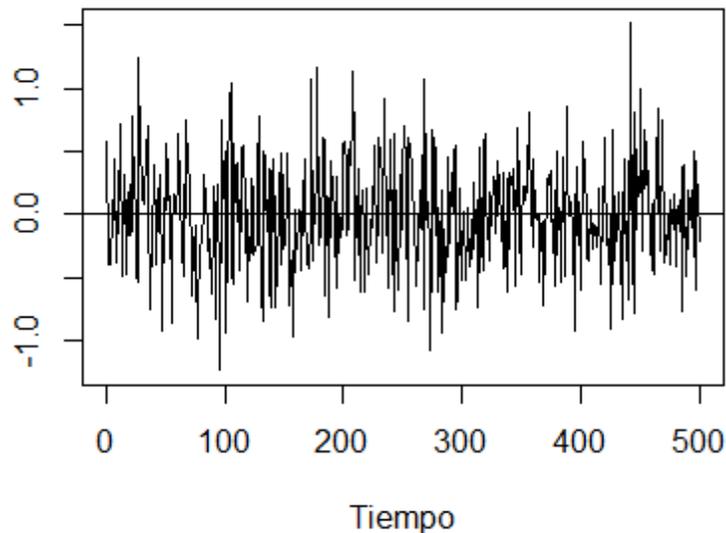
$$\gamma_l = \begin{cases} \text{Var}(\varepsilon_t) & l = 0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases}$$

Y también que:

$$\rho_l = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases}$$

Las cuales son características propias de un proceso estacionario. Si, en adición, las variables siguen una distribución normal, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, la serie es llamada ruido blanco Gaussiano (Cryer y Chan, 2008; Cowpertwait y Metcalfe, 2009). A continuación, se muestra un ejemplo gráfico de una variable de ruido blanco Gaussiano.

Figura 13. Simulación de un proceso de ruido blanco Gaussiano (500 observaciones)

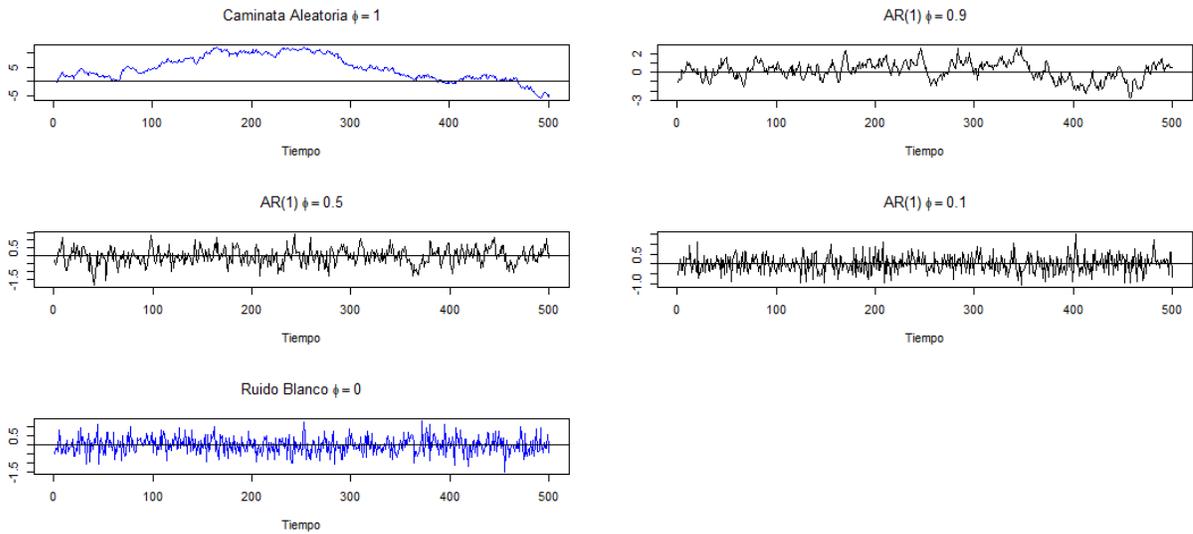


Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

La Figura 13 es una simulación de 500 datos de una serie de tiempo, dado que la media es igual a cero, que cuenta con una varianza constante de 0.2 y que para los datos se supuso una distribución normal, se dice entonces que es proceso de ruido blanco Gaussiano, en otras palabras, $\varepsilon_t \sim N(0,0.2)$. Es evidente que los datos tienen una apariencia que se asemeja a una banda o franja con el mismo ancho, que se perciben como fluctuaciones alrededor de una recta horizontal. Estas dos características son clave para identificar gráficamente a una variable con comportamiento estacionario.

Para transformar una caminata aleatoria en un proceso de ruido blanco, se puede utilizar la técnica de diferenciación. La idea es tomar la primera diferencia de la serie de tiempo, que es la resta entre una observación y la observación anterior. Esta técnica convierte una serie de tiempo en una serie de cambios, eliminando la tendencia y convirtiendo la caminata aleatoria en una serie de ruido blanco. Ahora bien, en medio de esta transición se encuentra el proceso autorregresivo de orden 1 (AR(1)). A continuación se muestra el proceso.

Figura 14. Transición de un ruido a una caminata aleatoria



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Esencialmente se destaca como se transforma la serie a medida que el valor de ϕ_1 disminuye, tomando cada vez más características de un ruido blanco y adoptando principalmente un valor medio constante a lo largo de la serie. De igual forma, mediante esta representación gráfica se observa una importancia característica de los procesos autorregresivos de orden 1, la cual es la condición de estabilidad de un modelo AR(1), es decir, $|\phi_1| < 1$, esto para que la serie se mantenga con las características de estacionariedad.

2.3. PRUEBAS DE ESTACIONARIEDAD

2.3.1. Análisis gráfico y correlograma (FAC)

Se han revisado cuales son los inconvenientes de emplear datos que no presentan las características de estacionariedad en un análisis de series de tiempo, destacando que al trabajar con ellos se podría llegar a estimaciones erróneas sobre la relación entre dos variables, es decir, regresiones espurias o en cuyo caso, regresiones cointegrantes. Dado que en la práctica es común encontrar series de tiempo que presentan la no estacionariedad, se hace necesario conocer el estado de la serie mediante alguna prueba. Donde antes de llevar a cabo una evaluación formal, es recomendable representar gráficamente la serie temporal como un primer acercamiento, es decir, se sugiere la aplicación de esta prueba informal como un primer acercamiento.

Es intuitiva la razón por la cual es recomendable llevar a cabo primero un análisis gráfico de la serie de tiempo, esto para conocer tentativamente si cumple o no con las características de estacionariedad. Mediante su representación gráfica es posible observar los componentes de la serie, los cuales podrían ser un indicador de la presencia de una raíz unitaria. Por ejemplo, si se cuenta con una tendencia es casi seguro que la serie no posee una media constante, por otro lado, si la variable tiene un comportamiento estacional se puede inferir que no tiene una varianza constante. Así, se busca que la serie tenga, en la medida de lo posible, una apariencia gráfica como la de un ruido blanco, similar a lo que se observa en la Figura 13.

Otra herramienta que permite dar un primer acercamiento a la naturaleza del proceso estocástico es el correlograma. El cual consiste en una gráfica de la función de autocorrelación (FAC) contra el rezago l . La FAC permite revisar la dependencia entre observaciones, entonces su gráfica muestra el comportamiento de la dependencia a lo largo del aumento de rezagos. En el apartado 2.2.1 se menciona una especificación para su cálculo, pero dado que en la práctica únicamente se cuenta con una realización de la serie, es necesaria una expresión muestral.

Considere una secuencia de datos Y_1, Y_1, \dots, Y_n . Asumiendo tentativamente la estacionariedad, para estimar la función de autocorrelación ρ_l para una variedad de rezagos $l = 1, 2, \dots$. La forma obvia de hacerlo es calcular la correlación muestral entre los pares separados por l unidades en el tiempo. Eso es, entre (Y_1, Y_{1+l}) , (Y_2, Y_{2+l}) , \dots , y (Y_{n-l}, Y_n) . Sin embargo, se modifica ligeramente la expresión teniendo en cuenta que el supuesto de estacionariedad, lo que implica una media y una varianza constantes para la serie. Se define la función de autocorrelación muestral, $\hat{\rho}_l$, en el rezago l como (Cryer y Chan, 2008):

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-l} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Por una variedad de razones, esta se ha convertido en la definición estándar para la función de autocorrelación muestral. La estimación de las funciones para series no estacionarias sirve para indicar la no estacionariedad. Si la serie cuenta con una raíz unitaria, el FAC muestral normalmente no desaparece con rapidez a medida que aumentan los rezagos, como es el caso de una serie estacionaria. Esto se debe a la posible tendencia de la serie (Cryer y Chan, 2008). Para

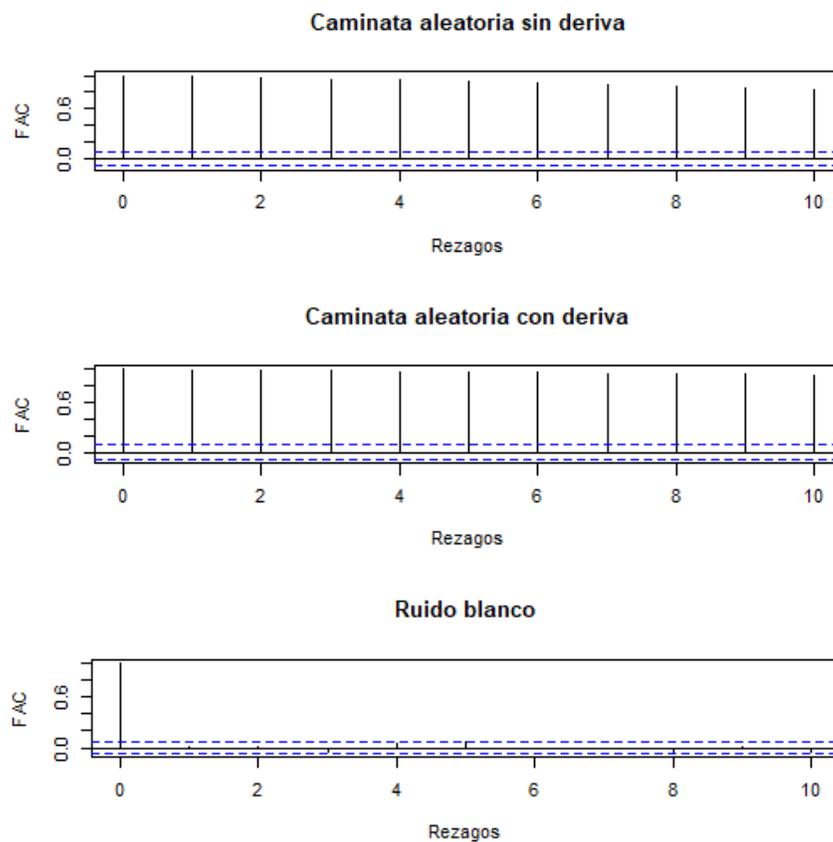
ejemplificar como se debe ver un correlograma de una serie estacionaria y otro que no lo sea, se estima y gráfica el FAC para las simulaciones hechas en el subtema 2.2.3.

Tabla 2. FAC muestral de los procesos simulados (10 rezagos)

	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C.A. sin deriva	1.000	0.988	0.974	0.960	0.943	0.927	0.910	0.891	0.873	0.855	0.836	
C.A. con deriva	1.000	0.993	0.986	0.979	0.972	0.964	0.957	0.950	0.942	0.935	0.928	
Ruido blanco	1.000	0.013	0.004	-0.041	0.051	0.065	-0.003	-0.008	-0.049	0.006	-0.051	

Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Figura 15. Correlograma de los procesos simulados (10 rezagos)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

La forma en que están representados los valores de la Tabla 2 en el correlograma es mediante líneas o barras que alcanzan el valor de la FAC para ese rezago. El comportamiento en los correlogramas de la caminata aleatoria con y sin deriva es tal como se describió para un proceso estocástico no estacionario, los valores de la función de autocorrelación no desaparecen rápidamente a medida que aumentan los rezagos. A diferencia del ruido blanco, que

prácticamente sus valores son imperceptibles en la gráfica, además que al observar sus valores es notorio como decrecen a medida que los rezagos aumentan. Cabe señalar que para el rezago cero en todos los casos es igual a 1, dado que $\hat{\rho}_0 = \frac{\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_0}$.

Como se menciona, estas dos pruebas gráficas son un acercamiento al problema de raíz unitaria, que complementan a pruebas estadísticas más fundamentadas. Una prueba formal posibilita plantear hipótesis que, mediante técnicas estadísticas, permite determinar la presencia o ausencia de una raíz unitaria en el proceso generador de datos. Dada la importancia de esta tarea, se hacen necesarias las pruebas formales que den la certeza de asegurar si una serie es no estacionaria con un cierto nivel de confianza.

2.3.2. Prueba Dickey-Fuller (DF) y Dickey-Fuller aumentada (DFA)

Dada la importancia que tiene la identificación de la estacionariedad en las series de tiempo, se hace necesario el desarrollo de alguna prueba formal, que mediante estadísticos señale si el proceso posee o no las características deseadas para el análisis de series temporales. Para comprobar si una serie Y_t sigue una caminata aleatoria sin deriva, es decir, no es estacionaria, se emplea el modelo:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde ε_t denota el término de error. Se considera la hipótesis nula $H_0: \phi_1 = 1$ contra la hipótesis alterativa $H_a: \phi_1 < 1$, es decir, la primera muestra si la serie no es estacionaria; mientras que la segunda demostraría que la serie es estacionaria. Este es el conocido problema de prueba de raíz unitaria (Tsay, 2005). Al restar Y_t de ambos lados de la ecuación de prueba anterior, se puede reescribir como (Heij et al., 2004):

$$\Delta Y_t = \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ y $\lambda = \phi - 1$. De esta forma la hipótesis nula de no estacionariedad y la hipótesis alternativa de estacionariedad se pueden formular en términos de dos restricciones de parámetros, $H_0: \lambda = 0$ y $H_a: -2 < \lambda < 0$. Esta ecuación de prueba tiene sentido sólo si la serie no tiene una dirección de tendencia clara y la serie se mueve alrededor de un nivel medio cero, es decir, no tiene tendencia ni constante. Una prueba estadística conveniente para probar las hipótesis es mediante el valor de t (t -test) de la estimación por mínimos cuadrados ordinarios de

λ , comúnmente referida como prueba Dickey-Fuller (DF). Para conocer los valores críticos de la prueba estadística se usa la simulación, los datos resultantes se denominan distribución de Dickey-Fuller.

Si los datos de la serie muestran patrones ascendentes y descendentes prolongados, pero sin una dirección de tendencia clara, entonces un término constante es añadido a la especificación, obteniendo la siguiente forma (Heij et al., 2004):

$$\Delta Y_t = \delta + \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Para un modelo no estacionario, $\lambda = 0$, el parámetro δ introduce una tendencia en la serie, es decir, un desvío o deriva. Ahora bien, las restricciones de parámetros para una serie no estacionaria son $\lambda = 0$ y $\delta = 0$. Mientras que para un proceso estacionario corresponde a $-2 < \lambda < 0$ y se incluye a δ para modelar la constante, que es distinta de cero. Así, el problema de la prueba se resume en $H_0: \lambda = \delta = 0$ y $H_a: -2 < \lambda < 0$ y $\delta \neq 0$. De igual forma se utiliza la prueba t (t -test) para verificar las hipótesis, además sucede algo similar con respecto a los valores críticos. Ya que el valor de t (t -value) no sigue una distribución t , ni siquiera asintóticamente, se recurre a la simulación para determinarlos, cabe señalar que esta distribución Dickey-Fuller obtenida difiere de la generada para el modelo sin constante.

Ahora se considera el caso donde los datos presentan un patrón ascendente o descendente prolongado con una dirección clara, además que la serie se mueve alrededor de un nivel medio diferente de cero. Es decir, la serie cuenta con tendencia y constante. Esta especificación tiene la siguiente forma (Heij et al., 2004):

$$\Delta Y_t = \delta + \beta t + \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

En la práctica únicamente se prueba la restricción de que $\phi = 1$ contra la alternativa de que $\phi < 1$. El proceso tiene una raíz unitaria. Entonces, la hipótesis nula de no estacionariedad contra la alternativa de estacionariedad corresponde a la prueba unilateral $H_0: \lambda = \delta = \beta = 0$ y $H_a: \lambda < 0$, $\delta \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Aunque, por simplicidad, únicamente se prueba $H_0: \lambda = 0$ y $H_a: \lambda < 0$. De igual forma la prueba está basada en los valores de t de λ en la regresión anterior. La hipótesis nula se rechaza si el valor de t para el coeficiente de λ es significativamente menor que cero. Los valores

críticos de la distribución Dickey-Fuller para esta especificación son diferentes al de los casos anteriores, ya que esta depende del valor de δ y β .

Para elegir la especificación de la ecuación de prueba adecuada en la práctica se procede primero con el análisis gráfico de los datos, si no hay una tendencia clara ascendente o descendente se puede excluir el término de tendencia (βt) directamente. Otra alternativa es incluirlo al inicio y verificar su significancia con base en la distribución Dickey-Fuller, sino resulta diferente de cero la serie no cuenta con tendencia. Con respecto de los valores críticos para las diferentes especificaciones, se pueden obtener mediante la librería de R llamada `flunitRoots` desarrollada por Wuertz, D., Setz, T. y Chalabi, Y. (2022). La siguiente tabla los resume:

Tabla 3. Valores críticos de la distribución Dickey-Fuller para las diferentes especificaciones de la ecuación de prueba

n	Sin tendencia ni constante			Con constante			Con constante y tendencia		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
50	-2.620	-1.950	-1.610	-3.580	-2.930	-2.600	-4.150	-3.500	-3.180
100	-2.600	-1.950	-1.610	-3.510	-2.890	-2.580	-4.040	-3.450	-3.150
500	-2.580	-1.950	-1.620	-3.440	-2.870	-2.570	-3.980	-3.420	-3.130
∞	-2.580	-1.950	-1.620	-3.430	-2.860	-2.570	-3.960	-3.410	-3.120

Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

En muchas series económicas un modelo de caminata aleatoria con o sin las especificaciones anteriores, no es tan apropiado para su comportamiento. En la literatura econométrica, modelos con estructuras autorregresivas son usualmente usados (Tsay, 2005). La ecuación de prueba se obtiene a partir de $\Delta Y_t = \delta + \beta t + \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t$, sumándole valores rezagados de ΔY_t como regresoras adicionales. Resultando la siguiente expresión (Heij et al., 2004):

$$\Delta Y_t = \delta + \beta t + \lambda Y_{t-1} + \lambda_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \lambda_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

Bajo esta especificación ahora se busca probar $H_0: \lambda = \beta = 0$ (no estacionariedad) y $H_a: \lambda < 0$ y $\beta \neq 0$ (estacionariedad). La prueba de hipótesis se puede realizar mediante la prueba t en $\hat{\lambda}$. A este procedimiento se le conoce como prueba Dickey-Fuller Aumentada (DFA). Cabe señalar que los regresores añadidos ΔY_{t-k} son todos estacionarios y, por tanto, se puede demostrar que las pruebas t para estos coeficientes siguen la distribución t estándar.

Los valores críticos asintóticos de la prueba DFA son los mismos que los de la prueba de Dickey-Fuller con o sin tendencia. Aunque los valores críticos de la muestra son diferentes, siguen siendo aproximadamente válidos siempre que la longitud de rezagos p sea relativamente pequeña en comparación con el tamaño de la muestra n . Un método para seleccionar el orden de rezago p es comenzar con la ecuación $\Delta Y_t = \delta + \beta t + \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t$ y luego aumentar el orden p hasta que los residuos ya no tengan una autocorrelación significativa (Heij et al., 2004).

En la práctica la prueba DF y DFA son las más comunes y las más explicadas en la literatura, además, en la gran variedad de softwares estadísticos ya vienen precargadas ambas pruebas, como es el caso de *R-project* (R Core Team, 2023). Aun así, no está de más revisar alguna otra prueba estadística extra para confirmar la naturaleza de la serie estudiada, como por ejemplo la prueba de raíz unitaria Phillips-Perron (PP). Esto por la gran importancia que tiene verificar la estacionariedad de un proceso estocástico.

2.3.3. Prueba de raíz unitaria Phillips-Perron (PP)

Una alternativa a la prueba de Dickey-Fuller Aumentada es conocida como la prueba de Phillips-Perron. Un supuesto importante de la prueba DF es que los términos de error ε_t están idéntica e independientemente distribuidos. La prueba DFA ajusta la prueba DF al agregar los términos de diferencia rezagados de la regresada, esto con el propósito de evitar una posible correlación serial en los términos de error. La diferencia entre las dos pruebas es que el procedimiento de Phillips-Perron estima las autocorrelaciones en el proceso estacionario directamente en lugar de agregar términos de diferencia rezagados de la regresada. Por esta razón se dice que la prueba de Phillips y Perron utiliza métodos estadísticos no paramétricos (Cowpertwait y Metcalfe, 2009; Gujarati y Porter, 2010).

En DFA, se especifica un modelo autorregresivo de orden p y se evalúa si la serie temporal tiene una raíz unitaria (es decir, una raíz cercana a 1) mediante la prueba de hipótesis de *t-student*. En cambio, en PP, se realiza una regresión lineal simple y se aplica una corrección de heteroscedasticidad para evaluar si la serie temporal tiene una raíz unitaria. Otra diferencia importante es que DFA asume que la serie temporal tiene un componente de tendencia determinista, mientras que PP permite tanto componentes deterministas como estocásticos. Esto

significa que PP es más flexible y puede detectar una variedad más amplia de procesos estocásticos que DFA.

Los valores críticos del estadístico de prueba son los mismos que los de la prueba DFA, los cuales se basan en la teoría asintótica o se calculan a partir de simulaciones extensas (Cowpertwait y Metcalfe, 2009). Esta prueba estadística está presente en diferentes softwares, incluido *R-project* (R Core Team, 2023). En resumen, ambas pruebas son útiles para evaluar la estacionariedad de una serie temporal, pero utilizan enfoques ligeramente diferentes y pueden ser más adecuadas para diferentes tipos de datos. Por lo tanto, es recomendable realizar ambas pruebas y comparar los resultados para obtener una evaluación más completa de la estacionariedad de una serie de tiempo.

Una vez que se ha confirmado que la variable cumple con todas las características deseadas para el análisis de series de tiempo, se puede trabajar con ella sabiendo que no se estimará una regresión espuria y no se encontrarán relaciones falsas. Así, se puede proceder con el análisis más a profundidad, empleando modelos más complejos o que tienen ciertas características favorables. Una familia de especificaciones son los modelos autorregresivos de orden p , $AR(p)$, que por su construcción ya cumplen con el supuesto de estacionariedad y, además, modelos más avanzados como los de volatilidad que utilizan esta estructura autorregresiva.

2.4. MODELOS DE SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIAS

Los modelos de series temporales estacionarias son importantes por varias razones, una de ellas es que sirven para el pronóstico. Los modelos de series de tiempo explican los movimientos de la serie en términos de su propio pasado o por alguna otra variable. De esta forma se consigue predecir valores futuros con cierto grado de precisión y así, tomar decisiones informadas basadas en esas predicciones (Abril, 2011). Otra de las razones es el estudio de relaciones entre variables, los modelos de series temporales estacionarias pueden utilizarse para identificar relaciones entre diferentes variables. Por ejemplo, si hay una serie temporal de ventas y otra de publicidad, se puede utilizar un modelo para determinar si la publicidad tiene un impacto significativo en las ventas. Además de lo anterior también se cuenta con la utilidad de estimar parámetros. Los modelos de series de tiempo pueden utilizarse para estimar parámetros importantes, como la media, la varianza y la autocorrelación. Estas estimaciones pueden proporcionar información

valiosa sobre la estructura subyacente de los datos y ayudar a los investigadores a tomar decisiones informadas. Por tanto, estos modelos pueden ser provechosos en muchos campos, como la economía, la actuaría y las finanzas, donde la predicción precisa del comportamiento futuro de una serie temporal es crucial.

2.4.1. Proceso Autorregresivo de orden 1 (AR(1))

Un proceso autorregresivo de orden 1, también denominado AR(1), es un modelo estadístico cuyo valor actual de la serie de tiempo se explica en función de su valor anterior, con un coeficiente de ponderación más un término de error. Este tipo de modelo es útil para hacer predicciones sobre series que exhiben cierto grado de dependencia temporal. Algunas de las aplicaciones comunes de un modelo AR(1) incluyen: I) Análisis de datos financieros: el modelo AR(1) se utiliza comúnmente para analizar y predecir las fluctuaciones de los precios de las acciones y otros activos financieros; II) Análisis económico: el modelo AR(1) se puede utilizar para analizar y predecir variables económicas, como el PIB los tipos de cambio y la tasa de inflación. En resumen, el modelo AR(1) es una herramienta útil para analizar y predecir series de tiempo en una variedad de aplicaciones, y su simplicidad lo hace fácil de implementar.

Cuando Y_t tiene una autocorrelación de un rezago estadísticamente significativa, el valor rezagado Y_{t-1} puede llegar a ser útil para predecir el valor de Y_t . Un modelo muy conocido que hace uso de tal poder predictivo es

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde $\{\varepsilon_t: t = 1, 2, \dots\}$ es una secuencia independiente e idénticamente distribuida, con media cero y varianza σ_ε^2 . En la literatura de series de tiempo, esta ecuación se conoce como proceso autorregresivo de orden 1 o simplemente modelo AR(1). Esta estructura se usa ampliamente en el modelado de volatilidad estocástica cuando Y_t se reemplaza por su volatilidad logarítmica (Tsay, 2013). Considerando el modelo AR(1) implica que se tengan estas propiedades

$$E(Y_t|Y_{t-1}) = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1}$$

$$Var(Y_t|Y_{t-1}) = Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

Los resultados anteriores implican que dada la observación pasada Y_{t-1} , el dato actual se centra alrededor de $\phi_0 + \phi_1 Y_{t-1}$ con desviación estándar σ_ε . Esto indica que, dado el valor rezagado un periodo, ningún otro rezago posterior afecta el valor esperado de Y_t . Lo anterior es una propiedad de Markov, dado el condicional en Y_{t-1} , el valor de Y_t no está correlacionado con Y_{t-i} para $i > 1$ (Wooldridge, 2010; Tsay, 2013).

Para un uso efectivo de los modelos AR, vale la pena mostrar otras propiedades básicas. Comenzando con la media, tomando en consideración que $E(\varepsilon_t) = 0$, se obtiene (Tsay, 2013):

$$E(Y_t) = \phi_0 + \phi_1 E(Y_{t-1}) + 0$$

Bajo la condición de estacionariedad, $E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \mu$, se reescribe como:

$$\mu = \phi_0 + \phi_1 \mu$$

Despejando

$$E(Y_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

Este resultado tiene dos implicaciones para Y_t . Primero, la media de Y_t existe sólo si $\phi_1 \neq 1$. Segundo, la media de Y_t es cero si y sólo si $\phi_0 = 0$. De este modo, para un proceso estacionario AR(1), el término constante ϕ_0 está relacionado con la media de Y_t a través de $\phi_0 = (1 - \phi_1)\mu$, y $\phi_0 = 0$ implica que $E(Y_t) = 0$.

Para determinar la varianza de Y_t se utiliza el hecho de que el término de error, ε_t , y Y_{t-1} son independientes, por tanto, se puede demostrar que la siguiente expresión representa la varianza de la variable en cuestión (Wooldridge, 2010):

$$Var(Y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

Siempre que $\phi_1^2 < 1$, esta restricción resulta del hecho de que la varianza de una variable aleatoria no es negativa. En consecuencia, la estacionariedad débil de un modelo AR(1) implica que $-1 < \phi_1 < 1$, esto es, $|\phi_1| < 1$. Con base en estas propiedades y restricciones de parámetros, se puede demostrar que la media y la varianza de Y_t son finitas e invariantes en el

tiempo (Tsay, 2013). En adición, puede ser demostrado que todas las autocovarianzas de Y_t son finitas. Y están representadas por (Tsay, 2013):

$$\gamma_l = \begin{cases} \phi_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 & l = 0 \\ \phi_1 \gamma_{l-1} & l < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el modelo AR(1) es estacionario débilmente. Se concluye entonces que la condición necesaria y suficiente para un modelo AR(1) para ser estacionario es $|\phi_1| < 1$, la cual también es nombrada condición de estabilidad del proceso AR(1) (Wooldridge, 2010; Tsay, 2013).

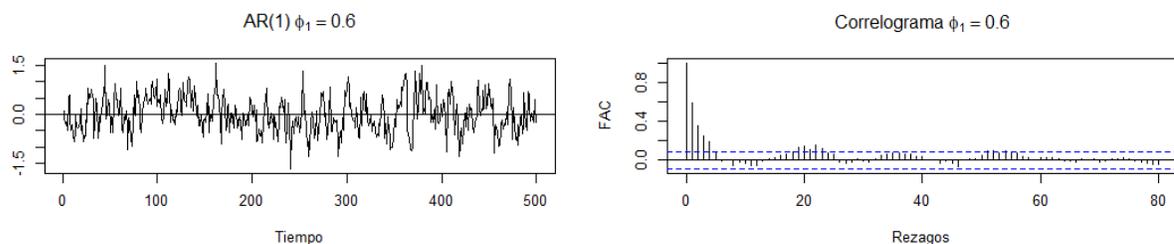
Dado que la desviación estándar para Y_t y Y_{t-1} es la misma, se puede calcular con facilidad la correlación entre Y_t y Y_{t-1} . Entonces, se obtiene que:

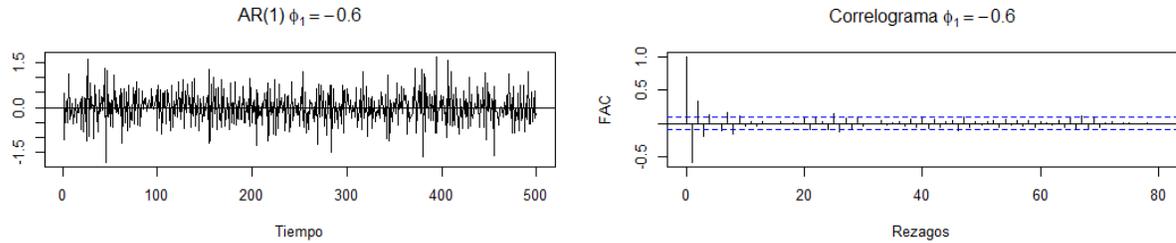
$$\rho_l = \phi_1^l$$

En particular, $Corr(Y_t, Y_{t+1}) = \rho_1$, indica el coeficiente de correlación entre cualesquiera dos términos adyacentes en el proceso estocástico. Así el FAC de una serie AR(1) estacionaria decae exponencialmente con una tasa ϕ_1 y valor inicial $\rho_0 = 1$. Esto es visible gracias a que $|\phi_1| < 1$, entonces $\phi_1^l \rightarrow 0$ cuando $l \rightarrow \infty$ y un correlograma de estas características es propio de una serie estacionaria. Para un valor positivo de ϕ_1 , la gráfica del FAC muestra un decaimiento exponencial. Para un valor negativo de ϕ_1 , el correlograma consiste en dos decaimientos exponenciales alternos con tasa ϕ_1^2 (Wooldridge, 2010; Tsay, 2013).

Para ilustrar como es un proceso AR(1) gráficamente, a continuación se muestran dos simulaciones con 500 observaciones cada una, que siguen un proceso autorregresivo de orden 1 con un valor de $\phi_1 = \pm 0.6$, así como sus respectivos correlogramas con 80 rezagos.

Figura 16. Simulaciones de los procesos AR(1) y correlogramas





Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Ambos procesos fueron desarrollados con los mismos parámetros a excepción del coeficiente ϕ_1 . En las gráficas se observa un comportamiento con más ruido por parte del proceso que tiene el signo negativo en ϕ_1 . De los correlogramas lo primero a destacar es que ambos decaen rápidamente como es apropiado para una variable estacionaria, además, cabe señalar que su comportamiento es presumiblemente como se indica; dado el valor positivo de $\phi_1 = 0.6$, el correlograma muestra un decaimiento del FAC exponencial, mientras que para un valor negativo de $\phi_1 = -0.6$, el correlograma consiste en un decaimiento exponencial que se va alternando entre valores positivos y negativos.

Los procesos autorregresivos de orden 1 son utilizados con frecuencia en la práctica, dado que variedad de fenómenos se explican únicamente por su valor rezagado un periodo. Aun así, en ocasiones ciertas series se explican de mejor manera si al modelo se le agrega un rezago más, a este tipo de especificación se le denomina modelos AR(2).

2.4.2. Proceso Autorregresivo de orden 2 (AR(2))

Existen diversos fenómenos económicos o financieros que no son explicados adecuadamente con sólo un periodo rezagado y necesitan de más información para dicha tarea. Es decir, el valor de la serie en el tiempo t depende de sus valores en los dos periodos anteriores, entonces, se dice que Y_t sigue un proceso autorregresivo de segundo orden o AR(2). El cual asume la forma (Tsay, 2005):

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso de ruido blanco, con media cero y varianza σ_ε^2 . Para que un proceso autorregresivo de orden 2 sea estacionario debe cumplir con las siguientes condiciones en sus parámetros: $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_1 - \phi_2 < 1$ y $|\phi_2| < 1$ (González, 2011). Se puede demostrar que el valor medio de un AR(2) es (Tsay, 2005):

$$E(Y_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

Si $\phi_0 = 0$, entonces $E(Y_t) = \mu = 0$. Su varianza esta expresada por la siguiente ecuación (González, 2011):

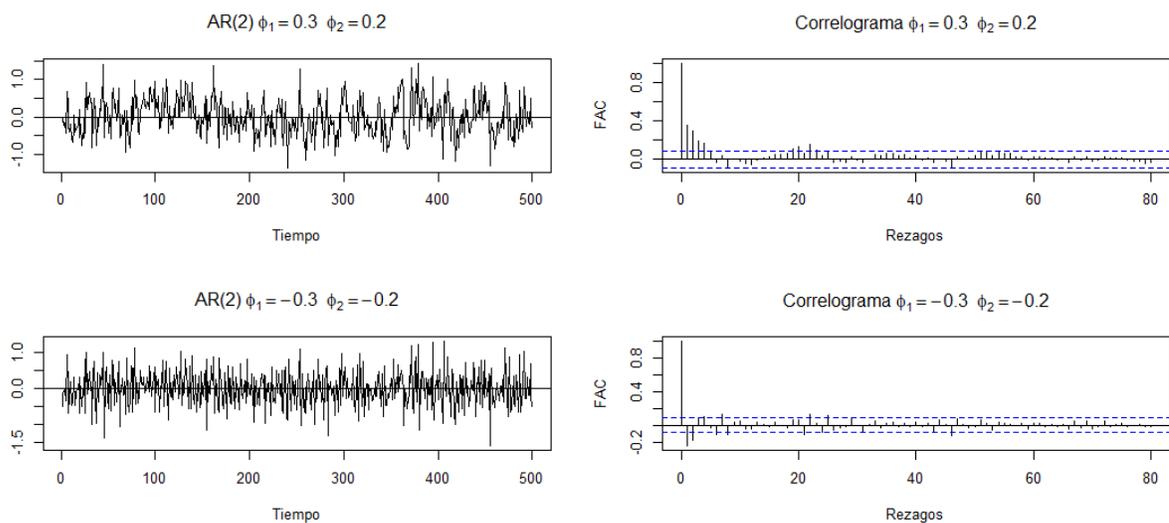
$$Var(Y_t) = \gamma_0 = \frac{2\phi_1\phi_2\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}$$

Y en combinación de la autocovarianza, $\gamma_l = \phi_1\gamma_{l-1} + \phi_2\gamma_{l-2}$, se puede obtener la expresión para calcular la función de autocorrelación del AR(2), dado por (Tsay, 2005):

$$\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} = \phi_1\rho_{l-1} + \phi_2\rho_{l-2}$$

Para $l > 0$, dado que $\rho_0 = 1$. Dadas las condiciones de estacionariedad, tanto la gráfica de la serie como el correlograma de este modelo es similar al del AR(1), con algunas variantes, pero siempre con una tendencia y varianza constantes y un FAC decreciente (González, 2011). Para ejemplificar como es un proceso AR(2) gráficamente, a continuación se muestran dos simulaciones con 500 observaciones cada una, que siguen un proceso autorregresivo de orden 1 con un valor de $\phi_1 = \pm 0.6$ y $\phi_2 = \pm 0.2$, así como sus respectivos correlogramas con 80 rezagos.

Figura 17. Simulaciones de los procesos AR(2) y correlogramas



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Ambas series fueron generadas con los mismos parámetros a excepción del coeficiente ϕ_1 y ϕ_2 . Similar al proceso AR(1), en las gráficas se observa un comportamiento con más ruido por parte del proceso que tiene coeficientes negativos. Por parte de los correlogramas lo que es de interés es que ambos decaen rápidamente, como se espera de una variable estacionaria. Además, se puede verificar la condición de estacionariedad, dado que se cumple con las siguientes restricciones en sus parámetros: $\pm 0.3 + (\pm 0.2) < 1$, $\pm 0.3 - (\pm 0.2) < 1$ y $|\pm 0.2| < 1$.

Dada la explicación previa de la estructura autorregresiva de orden 1 y 2, es intuitivo pensar que es posible generalizar el modelo incluyendo más valores rezagados a la especificación, justo esta idea es lo que se le denomina en la literatura econométrica como procesos autorregresivos de orden p o simplemente AR(p).

2.4.3. Proceso Autorregresivo de orden p (AR(p))

De forma general, un modelo autorregresivo es aquel en el que el valor actual de una variable, Y_t , depende únicamente de los valores que tomó la variable en períodos anteriores más un término de error (Brooks, 2008). Es decir, el valor de la serie en el tiempo t esta en función de sus valores en los p periodos anteriores, más un ruido blanco. Un modelo autorregresivo de orden p , denotado como AR(p), se puede expresar como (González, 2011):

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Donde ε_t es un término de perturbación estocástica. Esta ecuación se puede escribir de forma más compacta utilizando la notación de sumatoria (Brooks, 2008)

$$Y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Es posible demostrar que el valor esperado de un AR(p) es:

$$E(Y_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

Si $\phi_0 = 0$, entonces $E(Y_t) = \mu = 0$, además, $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \neq 1$. Su varianza está dada por la siguiente expresión (González, 2011):

$$\text{Var}(Y_t) = \gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \dots + \phi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$$

Esta expresión es válida para $l = 0$, caso contrario se habla de la ecuación de autocovarianzas, dadas por $\gamma_l = \phi_1\gamma_{l-1} + \phi_2\gamma_{l-2} + \dots + \phi_p\gamma_{l-p}$. Al tomar estas dos expresiones se puede obtener una ecuación para calcular la función de autocorrelación del AR(p), que está dada por:

$$\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} = \phi_1\rho_{l-1} + \phi_2\rho_{l-2} + \dots + \phi_p\rho_{l-p}$$

Con esta se pueden plantear un conjunto de p ecuaciones simultáneas:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \dots + \phi_p\rho_{p-1}$$

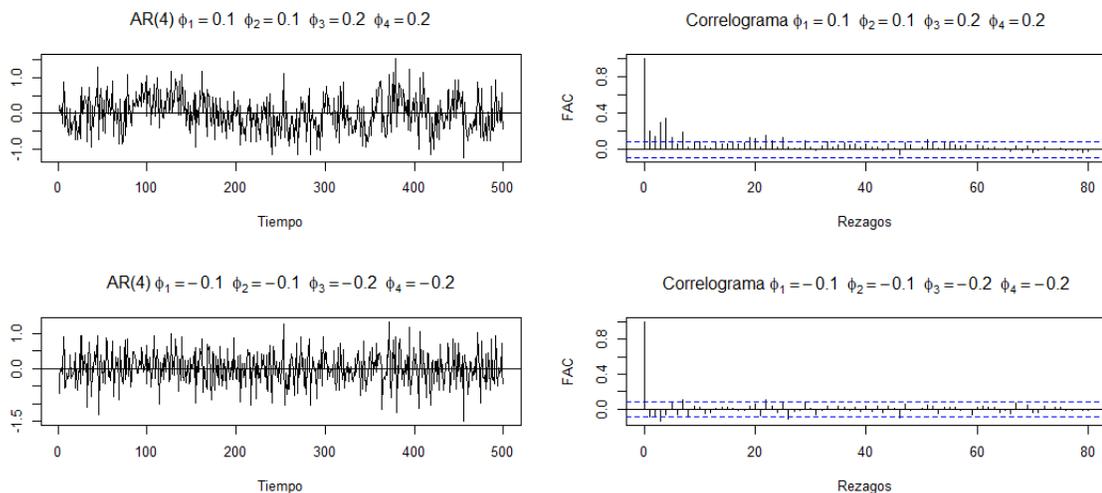
$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p\rho_{p-2}$$

...

$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \dots + \phi_p$$

A este conjunto de ecuaciones se les denomina Ecuaciones de Yule-Walker. Entonces, para cualquier modelo AR que sea estacionario, la función de autocorrelación decaerá geoméricamente a cero y la gráfica de la serie tiene una tendencia y varianza constantes (Brooks, 2008). Para ilustrar como es un proceso autorregresivo de orden p , se muestra la representación gráfica de dos AR(4) a continuación

Figura 18. Simulaciones de los procesos AR(4) y correlogramas



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

En la Figura 18 se muestran dos simulaciones con 500 observaciones cada una, ambas poseen los mismos parámetros a excepción de los coeficientes para ϕ , además se muestran sus respectivos correlogramas con 80 rezagos. Las variables siguen un proceso autorregresivo de orden $p = 4$ con un valor de $\phi_1 = \pm 0.1$, $\phi_2 = \pm 0.1$, $\phi_3 = \pm 0.2$ y $\phi_4 = \pm 0.2$. En las gráficas se observa un comportamiento claramente estacionario para ambas gráficas, dado que poseen una media y varianza constante a lo largo de toda la serie. Para confirmar esta aseveración se observa que los correlogramas decaen rápidamente, como se espera de una serie estacionaria. Adicionalmente, la suma de los coeficientes es menor que la unidad.

Comprender los modelos de series temporales estacionarias es importante por varias razones, permiten la predicción de valores de la serie de tiempo, son útiles para estimar parámetros como la media, la varianza y la autocorrelación de las variables, que proporcionan información valiosa sobre la estructura subyacente de los datos. Sobre todo, estos modelos permiten tener un fundamento sólido para tomar decisiones informadas y reducir considerablemente el riesgo de tomar una elección errónea para el investigador. A pesar de que este tipo de modelos posee características deseables para el análisis de series de tiempo, para algunas áreas de estudio queda corto. Un ejemplo de esto es el estudio de la volatilidad en las series financieras, para este existen modelos más avanzados como los de volatilidad que utilizan estructuras autorregresivas.

2.5. CONCLUSIÓN

El estudio de series de tiempo permite analizar datos que se han recopilado a lo largo de un intervalo de tiempo, teniendo como objetivos la explicación, pronóstico y control del proceso que generó los datos. Por tanto, es una metodología clave en diversos campos de investigación, ya que posee una robusta teoría detrás que permite su implementación en casi cualquier área. Una característica esencial que permite esto es que el análisis de series de tiempo modela la relación entre una variable dependiente y otra exógena, siendo estas de cualquier tipo y de cualquier campo. Por tanto, su comprensión es indispensable para emplearla de forma adecuada y así obtener resultados satisfactorios en cualquier trabajo de investigación.

Dado lo anterior es primordial entender un concepto muy importante en las series de tiempo, se habla entonces de los procesos estocásticos estacionarios. La razón de esto es que, dadas sus características, permiten realizar pronósticos a largo plazo. Además, que esta particularidad

garantiza muchas de las características favorables para el modelado de series de tiempo y sobre todo evita encontrar relaciones falsas o regresión espurias. La forma de garantizar la estacionariedad es empleando pruebas de raíz unitaria, las cuales permiten determinar si una serie de tiempo contiene una raíz unitaria o no.

El objetivo de estudiar los modelos autorregresivos, además de su utilidad para hacer pronósticos a corto plazo, es aprovechar la estructura que relaciona valores pasados de una variable con el valor actual. Esta característica es aprovechada por diferentes modelos más avanzados que contienen relaciones autorregresivas, un ejemplo de estos son la gran familia de modelos de volatilidad condicional o también conocidos como ARCH o GARCH por sus siglas en inglés, estos utilizan estructuras autorregresivas para explicar la variabilidad presente en un proceso estocástico. Por tanto, primero es necesario revisar a fondo los modelos AR para entender conceptual y empíricamente especificaciones más avanzadas, las cuales se revisan en el siguiente apartado.

CAPÍTULO 3. MODELOS DE SERIES DE TIEMPO DE VOLATILIDAD

3.1. INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DE VOLATILIDAD

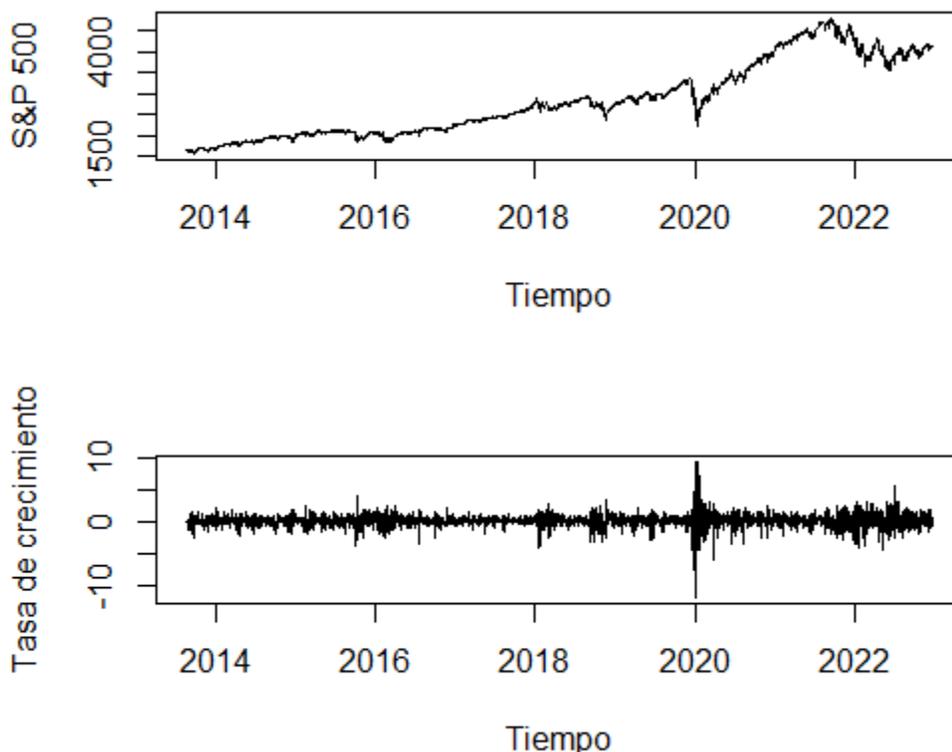
En el análisis financiero una medida de suma importancia es el riesgo asociado con un activo, el cual en gran parte de la literatura es cuantificado con la volatilidad del activo en cuestión. Aunque la variabilidad de los instrumentos está bien definida, no es directamente observable en la práctica y lo único que se tiene a disposición son los precios. Por tal motivo, dentro del estudio financiero, uno de los cometidos es estimar las fluctuaciones de estos precios o en la práctica, de sus rendimientos (Tsay, 2013). Bajo el enfoque de series de tiempo, se han observado avances significativos en el estudio de la estimación de la variabilidad de activos financieros mediante el modelado de la volatilidad.

Los modelos de volatilidad han sido ampliamente utilizados para el análisis de series financieras, ya que permiten describir la evolución de la variabilidad del precio o rendimiento de activos. Entre los modelos más utilizados en el estudio de la volatilidad se encuentran los modelos ARCH y GARCH. Los modelos AR revisados en el capítulo anterior se refieren a la estructura de media condicional de los datos de series de tiempo, los cuales se centran en predecir los valores esperados futuros en función de datos pasados. En esta sección se estudia el modelado de la

estructura de la varianza condicional para series temporales mediante modelos ARCH y GARCH. La varianza condicional de un proceso Y_t dado los valores pasados de Y , mide la incertidumbre en la desviación de Y_t con respecto a su media condicional $E(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$ (Cryer y Chan, 2008).

Una característica clave para el desarrollo de modelos ARCH y GARCH, es la existencia de agrupaciones de volatilidad (*volatility clusters*) que son visibles gráficamente. Existen series que tienden a presentar agrupaciones de alta y baja fluctuación, observándose períodos turbulentos (alta volatilidad) seguidos por períodos tranquilos (baja volatilidad). Estos períodos son recurrentes, pero no aparecen de forma periódica. El agrupamiento de volatilidad no es compatible con una varianza condicional constante (homoscedástica), a este fenómeno se le denomina heteroscedasticidad condicional (Francq y Zakoian 2010). Un ejemplo real se muestra a continuación con la gráfica del índice Standard and Poor's 500 en el periodo de 2013 a 2023.

Figura 19. Standard and Poor's 500 (2013 - 2023)



Fuente: Elaboración propia con datos de S&P Dow Jones Indices LLC.

El fenómeno principal que se puede observar en la serie de tiempo de la Figura 19, es la pandemia de COVID-19 que comenzó en el año 2020 y tuvo un impacto significativo en el precio

de las acciones del índice S&P 500 y sus tasas de rendimiento. El brote de la enfermedad y las medidas de contención implementadas para frenar su propagación generaron incertidumbre en los mercados, lo que se reflejó en la volatilidad y la caída abrupta de los precios del índice. Al analizar la Figura 19 se aprecia que la tasa de crecimiento tiende a aparecer en grupos de alta y baja fluctuación, observándose períodos de baja volatilidad durante el periodo de 2013 a 2019, seguidos por períodos de alta volatilidad durante la época de pandemia. Dada esta situación es posible que se esté en presencia del fenómeno de heteroscedasticidad condicional.

Los modelos ARCH y GARCH han sido objeto de extensos estudios empíricos dado que permiten capturar las características heteroscedásticas de las series financieras o de sus rendimientos a lo largo del tiempo, lo que los convierte en herramientas valiosas para comprender y pronosticar la volatilidad de variables financieras. Por ejemplo, en un estudio de la volatilidad de los precios de las acciones de empresas estadounidenses, Schwert (1989) encontró que los modelos ARCH y GARCH son capaces de capturar las características empíricas de las series de tiempo financieras. Otro ejemplo de la aplicación de los modelos ARCH y GARCH es el desarrollado por Engle y Ng (1993), donde examinaron la volatilidad de los rendimientos diarios del S&P 500 y encontraron evidencia de la existencia de efectos ARCH y GARCH significativos en los datos. En su estudio titulado *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility*, utilizaron un modelo GARCH(1,1) para modelar la volatilidad condicional y analizar el impacto de las noticias en la volatilidad de los precios de las acciones.

El principal objetivo del presente capítulo es el desarrollo de modelos para el proceso de varianza heteroscedástica condicional con los que se pueda predecir la variabilidad de valores futuros con base en datos pasados. Además de lo anterior, estudiar una de las tantas especificaciones que tienen los modelos ARCH y GARCH, los modelos que combinan la estructura de media y varianza en una sola ecuación, los modelos ARCH y GARCH en media. En primera instancia se presentan a los Modelos de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH) introducidos por Engle en 1982.

3.2. MODELOS DE HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL AUTORREGRESIVA (AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKEDASTIC - ARCH)

Los modelos de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva o ARCH por sus siglas en inglés, fueron introducidos por Engle en un artículo publicado en la revista *Econometrica* en 1982. La aplicación propuesta en ese artículo se centraba en la implementación del modelo con datos macroeconómicos y posteriormente se popularizó el uso de estos modelos en el campo de las finanzas (Francq, y Zakoian 2010). Los resultados de Engle sugieren que los residuos del pronóstico parecen ocurrir en grupos, lo que aparenta ser una forma de heteroscedasticidad en la que la varianza del error del pronóstico depende del tamaño de la perturbación anterior, es decir, una estructura autorregresiva (Greene, 2003).

En el contexto de las series de tiempo financieras, es poco probable que la varianza de los errores (término de perturbación estocástica) sea constante a lo largo del tiempo como se supuso, por lo tanto, tiene sentido considerar un modelo que no asuma esta condición y que describa como la varianza de los residuos evoluciona. La varianza en muchas ocasiones se presenta en forma de grupos, los cuales, de acuerdo con su nivel, tienden a estar positivamente correlacionados con los períodos inmediatamente anteriores. Un enfoque para modelar este fenómeno es utilizar un modelo ARCH (Brooks, 2008). La forma de estructurar esta especificación es planteando dos ecuaciones, sea Y_t una serie de tiempo financiera, se define su media y varianza condicional de la siguiente manera (Tsay, 2013):

$$\mu_t = E(Y_t|F_{t-1})$$

$$\sigma_t^2 = Var(Y_t|F_{t-1}) = E[(Y_t - \mu_t)^2|F_{t-1}]$$

Donde F_{t-1} denota el conjunto de información disponible en el momento $t - 1$. Comúnmente, F_{t-1} consta de todas las funciones lineales de los rendimientos pasados. Se asume que la ecuación de media μ_t sigue un modelo simple, como un proceso AR(p) y si variables explicativas están disponibles de igual forma se incluyen. Bajo esta suposición se tiene que la ecuación de varianza condicional de Y_t es:

$$\sigma_t^2 = Var(Y_t|F_{t-1}) = (\varepsilon_t|F_{t-1})$$

donde la raíz cuadrada positiva, σ_t , es la volatilidad. Se hace referencia a ε_t como el residuo o la innovación de la serie en cuestión en el momento t . La idea básica de los modelos ARCH es que el *shock* ε_t no está autocorrelacionado, pero es dependiente y su dependencia puede describirse mediante una función cuadrática de sus valores rezagados (Tsay, 2013). La forma más simple de este modelo es la especificación ARCH(1) (Greene, 2003):

$$\varepsilon_t = a_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} = a_t \sigma_t$$

$$Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Donde $\{a_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza unitaria, un ruido blanco. La varianza incondicional de ε_t es:

$$Var(\varepsilon_t) = Var[E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})] + E[Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})] = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(\varepsilon_{t-1})$$

Si el proceso que genera las perturbaciones es débilmente estacionario, entonces la varianza incondicional no cambia con el tiempo, por lo que:

$$Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(\varepsilon_{t-1}) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Por lo cual, para que esta razón sea finita y positiva, $|\alpha_1|$ debe ser menor que 1. En la práctica, se necesitan extensiones del modelo ARCH(1) porque las innovaciones al cuadrado a menudo muestran patrones de correlación que no pueden modelarse bien sólo con un rezago. A este enfoque se le denomina modelo ARCH(Q) (Heij et al., 2004):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_r \varepsilon_{t-r}^2$$

Donde la Q determina el orden o el número de rezagos para el proceso ARCH. Si bien el modelo ARCH se asemeja a un modelo de regresión, el hecho de que la varianza condicional no sea directamente observable introduce cierta sutileza en el uso de modelos ARCH. Por ejemplo, no resulta intuitivo cómo explorar la relación de regresión. Para ello, es pertinente reemplazar la varianza condicional por alguna variable observable, se define $\eta_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$, la cual se puede verificar que es una serie no autocorrelacionada con media cero. Sustituyendo $\sigma_t^2 = r_t^2 - \eta_t$ en la ecuación anterior se obtiene (Cryer y Chan, 2008):

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_r \varepsilon_{t-r}^2 + \eta_t$$

Por lo tanto, el modelo satisface una especificación AR(p) bajo el supuesto de un modelo ARCH(Q) para la serie financiera en cuestión. Similar al caso del ARCH(1), el coeficiente α_i debe satisfacer algunas condiciones para asegurar que la varianza incondicional de ε_t sea finita (Tsay, 2013). La condición de estacionariedad débil de un proceso ARCH(Q), cuando no está autocorrelacionado, se garantiza si la varianza existe, esto es $\sum_{i=1}^Q \alpha_i < 1$ (Bera y Higgins, 1993). Además, como σ_t^2 es una varianza condicional, su valor siempre debe ser estrictamente positivo; una variación negativa en cualquier momento no tendría sentido, entonces, para garantizar que siempre resulten en estimaciones de varianza condicional positivas, generalmente se requiere que todos los coeficientes sean positivos. Para un modelo ARCH(Q), todos los coeficientes requerirán ser no negativos: $\alpha_i \geq 0 \forall i = 0, 1, 2, \dots, Q$ (Brooks, 2008).

En la práctica, a menudo se supone que a_t sigue una distribución normal estándar, una *t-student* estandarizada, una distribución de error generalizado (*Generalized Error Distribution - GED*) o la distribución normal inversa gaussiana (NIG) (Korkmaz, 2019). Estas distribuciones permiten una mejor modelización de la volatilidad en los mercados financieros y proporcionan mejores predicciones de los valores extremos de los rendimientos de los activos. A partir de la estructura del modelo, se ve que grandes choques pasados al cuadrado $\{\varepsilon_{t-i}^2\}_{i=1}^Q$ implica una gran varianza condicional σ_t^2 para la innovación ε_t . Esto significa que, bajo el marco ARCH, los grandes *shocks* tienden a ser seguidos por otro más grande. Lo que se traduce en una mayor probabilidad de obtener una varianza mayor que una menor. Esta característica es similar a los agrupamientos de volatilidad mencionados (Tsay, 2013).

Ahora bien, supónganse que r_t es el retorno logarítmico de un activo financiero, el cual tiene como coeficientes de regresión de la ecuación de la media a ϕ_i y a θ_j , los cuales al ser estimados se determina que $\phi_i = \theta_j = 0$. Por tanto, r_t es idéntico a ε_t y en consecuencia se convierte en un proceso ARCH puro (Bera y Higgins, 1993). Así, algunos autores mencionan que, cuando r_t está disponible, el cuadrado del retorno r_t^2 proporciona un estimador imparcial para σ_t^2 (Cryer y Chan, 2008; Francq, y Zakoian 2010). Sin embargo, antes de emplearlo para dicha función es conveniente probar la heteroscedasticidad mediante una prueba ARCH.

3.2.1. Prueba de efectos ARCH

Para probar la presencia de efectos ARCH, se realizan pruebas de diagnóstico sobre los residuos de un modelo econométrico o la misma serie de tiempo. Una de las pruebas más comunes es la de *portmanteau* en presencia de efectos ARCH de Ljung-Box que posee una distribución asintótica χ_m^2 , ésta evalúa si los residuos del modelo exhiben autocorrelación de orden superior a través de un conjunto de rezagos. Si se rechaza la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación en los residuos, se puede inferir la presencia de efectos ARCH (Francq, y Zakoian 2010). Además de la prueba de Ljung-Box, en la literatura también se encuentra el test de White para verificar los efectos ARCH. Estas pruebas se aplican sobre los residuos del modelo y permiten determinar si hay evidencia de autocorrelación condicional de los errores cuadrados, lo que indica la existencia de efectos ARCH.

La prueba por excelencia la desarrolló Engle (1982) y consiste en plantear una hipótesis nula conjunta de que todos los Q rezagos de los residuos (o rendimientos) al cuadrado tienen coeficientes que no son significativamente diferentes de cero, es decir, no hay presencia de efectos ARCH. Si el valor del estadístico de prueba es mayor que el valor crítico de la distribución χ^2 , entonces se rechaza la hipótesis nula. La prueba también se puede considerar para demostrar la autocorrelación en la serie. Esta prueba se desarrolla con base en los siguientes pasos (Brooks, 2008)

1. Ejecutar la regresión lineal de la ecuación de la media, guardando los residuos (si se prueba al rendimiento omitir este paso).
2. Elevar al cuadrado el término de error (o rendimiento) y realizar una regresión sobre Q propios rezagos, obtener el coeficiente R^2 de esta estimación.

$$\varepsilon_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \gamma_Q \varepsilon_{t-Q}^2 + v_t$$

donde v_t es el término de error.

3. El estadístico de prueba se define como TR^2 , es decir, el número de observaciones multiplicado por el coeficiente de correlación, el cual se distribuye como $\chi^2(Q)$.
4. Las hipótesis nula y alternativa son

$$H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_Q = 0$$

$$H_1: \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \dots \neq \gamma_Q \neq 0$$

La prueba se basa en el principio del Multiplicador de Lagrange (LM), es conocida como la prueba ARCH-LM. Su estructura es similar que la de la prueba de heteroscedasticidad "estática" de Breusch y Pagan (1979) y Godfrey (1978) en modelos de regresión (Bera y Higgins, 1993; Lütkepohl y Krätzig, 2004). El hecho de rechazar la hipótesis nula no necesariamente implica que un modelo de volatilidad condicional heteroscedástico sea la alternativa correcta, por lo que, es necesario precisar que el modelo haya sido correctamente especificado.

3.2.2. Diagnóstico del modelo

El diagnóstico de la correcta especificación de un modelo ARCH es un paso importante en el análisis de series de tiempo financieras. Una herramienta comúnmente utilizada para diagnosticar la especificación del modelo ARCH es el análisis de residuos, que implica examinar la autocorrelación de los residuos y la heteroscedasticidad de estos. Si los residuos muestran autocorrelación serial significativa, esto puede indicar que el modelo no ha capturado adecuadamente la dinámica de los datos y que se necesita una especificación diferente del modelo. Además, si los residuos muestran heteroscedasticidad significativa, esto también puede indicar que el modelo ARCH no ha capturado adecuadamente la volatilidad de los datos (Enders, 2014; Tsai et al., 2017).

El análisis de los residuos estandarizados implica examinar si los errores siguen un proceso estocástico y si están libres de correlación serial. Un primer paso consiste en graficar los residuos estandarizados a lo largo del tiempo para identificar cualquier patrón sistemático, como autocorrelación o heteroscedasticidad residual. Si se observan estructuras no aleatorias en los gráficos, esto puede indicar la necesidad de una mejor especificación del modelo. Además de los gráficos, existen pruebas estadísticas específicas para evaluar la presencia de correlación serial en los residuos estandarizados. Entre las más comunes se encuentra la prueba de Ljung-Box y la prueba de White. Estas contribuyen a identificar si el modelo ARCH es adecuado para los datos y proporcionan información valiosa para su mejora (Enders, 2014; Tsai et al., 2017).

Otra alternativa para aceptar que un modelo ha sido ajustado adecuadamente y así interpretar sus hallazgos es de igual forma empleando los residuos estandarizados como una herramienta de diagnóstico. Los residuos estandarizados se definen como

$$\tilde{\varepsilon}_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$$

Donde σ_t es la raíz cuadrada de la varianza condicional. Si el modelo se especifica correctamente los residuos estandarizados se distribuirán de manera aproximadamente independiente e idéntica. Esto se puede comprobar aplicando la prueba de normalidad de Jarque-Bera o la prueba Shapiro-Wilk sobre la serie de residuos estandarizados (Heij et al., 2004; Cryer y Chan, 2008). En general, el diagnóstico adecuado de la especificación del modelo ARCH es esencial para asegurar una correcta modelización de la volatilidad y para realizar predicciones precisas de los valores extremos de los rendimientos financieros.

La búsqueda de modelos que logren capturar las principales características de las series financieras tuvo un gran hallazgo al implementar la especificación ARCH en su estudio, ya que poseen la capacidad de explicar la acumulación de volatilidad presente en muchas variables del ámbito financiero. El emplear modelos de volatilidad heteroscedástica en el análisis financiero ha permitido una mejor comprensión de la naturaleza de diferentes variables y sobre todo ha sido posible obtener predicciones de la variabilidad de las series estudiadas. Sin embargo, a pesar de sus bondades, posee algunas desventajas con respecto a otras especificaciones. En ocasiones los modelos ARCH necesitaran de varios valores rezagados para poder explicar de buena manera los choques, así su generalización (modelo GARCH) propuesta por Bollerslev en 1986 puede darles parsimonia a modelos ARCH de orden superior (Bera y Higgins, 1993).

3.3. MODELOS DE HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL AUTORREGRESIVA GENERALIZADA (GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKEDASTIC - GARCH)

El fenómeno de la volatilidad variable en el tiempo es bien conocido y ha generado una gran cantidad de literatura econométrica, en la sección anterior se estudian las contribuciones fundamentales de Engle (1982), los modelos ARCH. En este apartado se introducen los modelos de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada (GARCH), los cuales son una

extensión de los modelos de Engle y fueron presentados por Bollerslev en 1986. Desde su introducción, el modelo GARCH se ha aplicado en innumerables estudios empíricos. El modelo GARCH(1,1) ha resultado ser particularmente útil para describir una amplia variedad de datos del mercado financiero³. Este modelo se puede nombrar como la especificación parsimoniosa de la heteroscedasticidad condicional (Lütkepohl y Krätzig, 2004).

El proceso GARCH(Q, P) posee una estructura similar a los ARCH⁴, el modelo está condicionado a un conjunto de información al tiempo t . Entonces, sea a_t una secuencia independiente con distribución idéntica definida. De acuerdo con Greene (2003), la perturbación (ε_t) es llamada un GARCH(Q, P) si:

$$\varepsilon_t = a_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_Q \varepsilon_{t-Q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \beta_P \sigma_{t-P}^2$$

O de forma más compacta:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^Q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^P \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

³ Bollerslev et al. 1994, citados en Lütkepohl y Krätzig, 2004.

⁴ Un GARCH(1,1) puede ser expresado de manera equivalente a un ARCH(∞), lo cual simplifica su identificación y estimación. Esta representación permite que la varianza condicional, σ_t^2 , de ε_t se escriba como una función de su pasado infinito (Francq y Zakoian, 2010). Entonces, se tendría que:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 \sigma_{t-2}^2 \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 \sigma_{t-3}^2) \\ &\vdots \\ \sigma_t^2 &= \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i-1}^2 \end{aligned}$$

Siendo Q el número total de rezagos de ε_t^2 y P el de σ_t^2 . Se tiene que α_i y β_j son constantes no negativas y α_0 es una constante estrictamente positiva. Similar a los procesos ARCH, la serie a_t tiene una distribución asociada que puede ser alguna de las mencionadas en el aparato previo, aunque comúnmente por simplicidad se asume una distribución normal estándar. Sin embargo, se debe tener en cuenta que esta suposición no siempre es realista, por tal, si la distribución de las innovaciones tiene colas más pesadas que una normal, se puede modificar el modelo y permitir distribuciones de colas pesadas como la *t-student* (Svetlozar et al., 2007).

En los procesos GARCH la volatilidad es una función lineal de los valores pasados de ε_t^2 y σ_t^2 . Esta estructura permite que los períodos con un alto nivel de volatilidad (correspondientes a grandes valores de ε_t^2) sean seguidos por períodos donde las fluctuaciones tienen una amplitud menor. En términos de persistencia de los choques, cuando β se acerca a 1, un choque en la volatilidad tiene un efecto persistente. Por otro lado, cuando α es grande, se pueden observar variaciones repentinas de volatilidad en respuesta a los choques (Francq y Zakoian 2010).

Como se ha revisado, la estacionariedad es una característica indispensable en el análisis de series de tiempo, por tal motivo resulta necesario revisar cuales son las condiciones para que un modelo GARCH posea esta propiedad. Se considera el modelo GARCH(1,1), es decir, cuando $Q = P = 1$, que es el más popular para modelar la volatilidad de los rendimientos de activos (Svetlozar et al., 2007):

$$\varepsilon_t = a_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Se dice que es estacionario débilmente si se cumple que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. En el caso general de un proceso GARCH(P, Q) se tiene que es estacionario de segundo orden (débilmente) si se posee coeficientes que cumplen:

$$\sum_{i=1}^Q \alpha_i + \sum_{j=1}^P \beta_j < 1$$

Es importante revisar que σ_t^2 no es como tal una variable observable, por tanto, se debe definir alguna que haga posible la estimación de los coeficientes por métodos convencionales. Sea $\eta_t =$

$\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ un proceso de ruido blanco, despejando y sustituyendo $\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - \eta_t$ en la especificación del GARCH(1,1), se tiene

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1\eta_{t-1}$$

Y para el caso de un GARCH(Q, P) se tiene

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i)\varepsilon_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^P \beta_j\eta_{t-j}$$

Donde $r = \text{máx}(Q, P)$ y $\{\eta_t\}$ no es una secuencia independiente ni idénticamente distribuida (Heij et al., 2004; Svetlozar et al., 2007).

En los modelos GARCH existen los que son considerados puros, es decir, que no cuentan con una ecuación de media y la especificación se emplea directamente a la variable. La forma de verificar si es necesario o no utilizar un GARCH puro es verificando que la serie no está autocorrelacionada. Entonces, si se detectan autocorrelaciones de muestras significativas es necesario ajustar un modelo para la media de los datos antes de usar un modelo GARCH (P, Q), así, el modelo de volatilidad condicional se emplearía para los residuos (Francq y Zakoian 2010). A continuación se presenta el código para el desarrollo de una simulación en RStudio de un proceso GARCH puro, es decir, un proceso donde la media es constante:

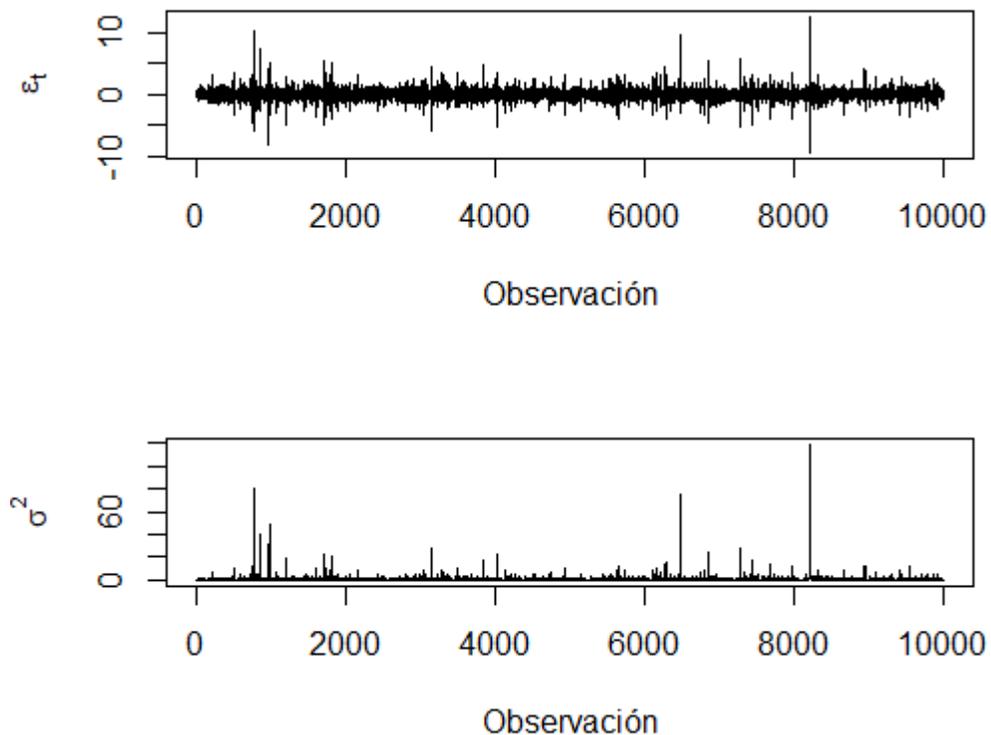
```
set.seed(1)
alpha0 <- 0.1; alpha1 <- 0.7; beta1 <- 0.2
a <- rnorm(10000); e <- rep(0, 10000); sg2 <- rep(0, 10000)
for(i in 2:10000){
  sg2[i] <- alpha0 + alpha1 * (e[i - 1]^2) + beta1 * sg2[i - 1]
  e[i] <- a[i] * sqrt(sg2[i])
}
```

Desglosando, primero se establece una semilla aleatoria utilizando la función `set.seed()`. Esto asegura que los resultados de la simulación sean reproducibles. Luego, se definen los parámetros α_0 , α_1 y β_1 del GARCH puro. Se asignan los siguientes valores al modelo: `alpha0: 0.1; alpha1: 0.7; beta1: 0.2`, obteniendo la forma:

$$\sigma_t^2 = 0.1 + 0.7 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.2 \sigma_{t-1}^2$$

A continuación, se genera una secuencia de 10,000 números aleatorios a partir de una distribución normal estándar utilizando la función `rnorm(10000)`. Estos números aleatorios se asignan a la variable `a`. Se crean dos vectores vacíos, `e` y `sg2`, de longitud 10,000 para almacenar los errores y las volatilidades estimadas respectivamente. Luego, se inicia un bucle `for` desde $i=2$ hasta $i=10,000$ para simular el proceso GARCH. En cada iteración del bucle, se actualiza la volatilidad estimada utilizando la fórmula del modelo GARCH: $sg2[i] = \alpha_0 + \alpha_1 * (e[i-1]^2) + \beta_1 * sg2[i-1]$. Aquí, $sg2[i]$ representa la volatilidad estimada en el periodo i , $e[i-1]$ es el error estimado en el periodo anterior y $sg2[i-1]$ es la volatilidad estimada en el periodo anterior. A continuación, se calcula el error estándar en el periodo i multiplicando el número aleatorio $a[i]$ por la raíz cuadrada de la volatilidad estimada $h[i]$: $E[i] = v[i] * \text{sqrt}(h[i])$. Finalmente, el bucle se repite para cada periodo hasta llegar a $i=10,000$, y se obtiene una serie simulada de errores estándar $e[i]$. El proceso simulado para la volatilidad estimada de un GARCH puro se observa en la siguiente gráfica.

Figura 20. Simulaciones de un proceso GARCH(1,1) puro



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Se comprueba que la simulación cumple con la condición de estacionariedad ya que $0.7 + 0.2 < 1$. Tal como se menciona en la sección 3.2.1, las pruebas de efectos ARCH también cumplen la tarea de verificar la autocorrelación de las series, es decir, que al verificar si una serie tiene efectos ARCH también se estaría verificando si no está autocorrelacionada. Continuando con el ejercicio de simulación. Esta prueba se podría llevar a cabo mediante la librería `FinTS` desarrollada por Graves (2019). Como primer paso para desarrollar la prueba de efectos ARCH se instala el paquete `FinTS` en R mediante el comando `install.packages("FinTS")`. Luego, se carga el paquete utilizando la instrucción `library(FinTS)`. A continuación, se ajusta un modelo ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) a los residuos del modelo original. En este caso, se utiliza la función `arima()` para ajustar un modelo ARIMA con orden (2,0,0), es decir, un modelo autorregresivo de orden 2 sin componente de media móvil y sin diferenciación. Se emplea el método de máxima verosimilitud ML y el método de optimización BFGS. A continuación se muestra el código empleado

```
install.packages("FinTS")
library(FinTS)
r1 <- arima(e, order = c(2,0,0), method = c("ML"), optim.method = "BFGS")
```

Una vez ajustado el modelo ARIMA, se realiza la prueba de efectos ARCH utilizando la función `ArchTest()`. La prueba `ArchTest()` se basa en la prueba de Ljung-Box, que es una prueba estadística utilizada para evaluar la autocorrelación en una serie temporal. Esta prueba calcula un estadístico de prueba y su correspondiente valor p, que indica la probabilidad de obtener un estadístico de prueba tan extremo o más extremo que el observado bajo la hipótesis nula de no autocorrelación. Además, esta función toma como argumento los residuos del modelo y el número de rezagos a considerar, en este caso, se especifica un rezago de 5 mediante el argumento `lag=5`.

```
ArchTest(r1$residuals, lags = 5)
```

Obteniendo los siguientes resultados

Tabla 4. Prueba ARCH-LM

	H_0	No hay efectos ARCH	
Datos	r1\$residuals	Grados de libertad	5
χ^2_5	3998.90000	Valor de p	0.00000

Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

La prueba devuelve un resultado que indica si se rechaza o no la hipótesis nula de ausencia de efectos ARCH. Se obtiene un valor para la distribución asintótica de $\chi^2_5 = 3998.90000$ con un valor de p de 0.00000, indicando así la presencia de un claro efecto ARCH.

Para identificar el orden de un GARCH se parte de la idea base del modelo, la cual es que es la representación de parsimonia de los procesos ARCH de un orden alto, es decir que se busca elegir un pequeño número de valores plausibles para los órdenes Q y P. En trabajos empíricos, frecuentemente ha sido demostrado que un GARCH(1,1) es capaz de representar la mayoría de las series de tiempo financieras. Una variable que requiera un modelo de orden superior a un GARCH(1,2) o un GARCH(2,1) es muy rara de encontrar (Bera y Higgins, 1993). Una vez estimados los coeficientes del modelo elegido, de igual forma que en los modelos ARCH, se tiene que verificar que la especificación empleada sea la correcta para los datos, por fortuna, el método explicado en la sección 3.2.2 puede ser de igual forma aplicado para los modelos GARCH.

Los modelos ARCH y GARCH ya forman parte de la literatura econométrica convencional, principalmente por sus aportaciones al modelado de la volatilidad condicional, por fortuna, ya están perfectamente integrados en los softwares estadísticos. Por parte de las aplicaciones de estos modelos se tiene que se han centrado en el campo de la economía financiera, en consecuencia, existe una gran cantidad de textos que estudian la modelización de la volatilidad para variables financieras. Se han escrito multitud de aportaciones sobre las distintas potencialidades de estos modelos, creando así una amplia familia de sofisticaciones que parten del modelo inicial, como por ejemplo: IGARCH, EGARCH, TARCH, QS-ARCH, APARCH, LST ARCH, etc. (Arce Borda, 2004). Dentro de este grupo se encuentran los modelos ARCH en media desarrollados por Engle, Lilien y Robins, en forma secuencial Bollerslev presentó los GARCH en media. En el siguiente apartado se presentan ambas especificaciones.

3.4. MODELO DE HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL AUTORREGRESIVA EN MEDIA (ARCH-M) Y MODELO DE HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL AUTORREGRESIVA GENERALIZADA EN MEDIA (GARCH-M)

Engle, Lilien y Robins (1987) extendieron el marco de las técnicas ARCH presentando una nueva especificación de los modelos de heteroscedasticidad condicional en su trabajo titulado: *Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model*. Los modelos ARCH en media o ARCH-M como los nombraron, permiten que la media de una secuencia dependa de su propia varianza condicional, en este sentido, cambios en la varianza afectan directamente el valor de la variable dependiente. El enfoque clave que posee el documento es que los precios de diferentes instrumentos de deuda pueden modelarse adecuadamente como primas de riesgo cuando éste se debe a movimientos imprevistos y se mide por la varianza condicional del rendimiento.

En primer lugar, es importante entender el concepto de prima de riesgo en la estructura a plazo. Ésta se refiere a la relación entre los rendimientos de bonos de diferentes vencimientos. Los premios de riesgo son las compensaciones adicionales que los inversionistas demandan por mantener instrumentos de largo plazo en lugar de reinvertir en instrumentos de corto plazo bajo condiciones macroeconómicas y financieras inciertas. En general, a mayor incertidumbre, mayor será la prima demandada por los inversionistas (Aguilar et al., 2020).

La perspectiva básica de este modelo es que los agentes económicos aversos al riesgo exigen una compensación por mantener un activo riesgoso. El riesgo puede ser medido por la varianza de los rendimientos. Además, se plantea que la prima de riesgo puede ser una función lineal de la desviación estándar condicional de los rendimientos. La formulación inicial de estas ideas parte de la siguiente expresión (Engle, Lilien y Robins, 1987; Enders, 2014):

$$Y_t = \mu_t + e_t$$

Donde:

Y_t : Exceso de rendimiento de tener una acción en relación con el rendimiento de un activo libre de riesgo.

μ_t : Prima de riesgo necesaria para convencer al agente económico averso al riesgo a mantener la acción en lugar del activo libre de riesgo.

e_t : Término de perturbación estocástica del exceso de rendimiento de la acción.

Engle, Lilien y Robins asumen que la prima de riesgo es una función creciente de la varianza condicional de e_t , es decir, cuanto mayor sea la varianza condicional de los rendimientos, mayor será la compensación necesaria para inducir al agente a mantener la acción. Matemáticamente, si σ_t^2 es la varianza condicional de e_t , la prima de riesgo puede expresarse como (Enders, 2014):

$$\mu_t = \beta + \delta \sigma_t^2 \quad \delta > 0$$

Donde σ_t^2 es un proceso ARCH(Q):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^Q \alpha_i e_{t-i}^2$$

De esta forma se constituyen con varias ecuaciones el modelo ARCH-M básico. Cabe señalar que, si la varianza condicional es constante (es decir, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_Q = 0$), el modelo ARCH-M decae en el caso más tradicional de una prima de riesgo constante (Enders, 2014). Dado que los modelos GARCH ahora son considerablemente más populares que ARCH, esencialmente por su parsimonia, es más común estimar un modelo GARCH-M. Su especificación es sencilla ya que sólo cambia la estructura de σ_t^2 , tomando ahora la forma de un modelo GARCH. En algunas aplicaciones empíricas, en lugar de aparecer el término de la varianza condicional se coloca su raíz cuadrada en la ecuación de la media, en algunas otras se coloca el término rezagado de cualquiera de los dos (Brooks, 2008).

Los modelos ARCH en media y su generalización, los modelos GARCH en media, emplean una estructura que es de gran utilidad en el estudio de las series financieras que poseen la característica de acumulación de volatilidad y además ésta afecta directamente a su estructura de media. En el trabajo realizado por Engle, Lilien y Robins en 1987 se plantea un uso real de ésta especificación, en el cual se señala que el rendimiento de un instrumento financiero esta determina en cierta parte por su riesgo medido por la varianza, empleando como la medición de la varianza condicional un modelo ARCH. Dadas estas características, los modelos ARCH-M y

GARCH-M pueden ser empleados en diferentes formas ya que la especificación del modelo de media puede tomar cualquier estructura.

3.5. CONCLUSIÓN

En el campo del análisis financiero, la medición de la volatilidad de los activos desempeña un papel crucial en la evaluación del riesgo asociado, el cual resulta fundamental para tomar decisiones informadas. Sin embargo, dado que la volatilidad no puede ser observada directamente, se busca emplear herramientas que permitan capturar esta característica utilizando los precios de los activos o, en la práctica, a través de las fluctuaciones en los rendimientos. Esto ha llevado al estudio de modelos que buscan replicar la variabilidad en los rendimientos de los activos financieros, poniendo un fuerte énfasis en la comprensión de su estructura, características, restricciones y métodos de estimación y validación.

Los modelos de heteroscedasticidad condicional, especialmente los modelos ARCH y GARCH, han sido ampliamente utilizados en la investigación de series financieras debido a su capacidad para capturar los cambios en la volatilidad a lo largo del tiempo, lo que les permite generar pronósticos precisos sobre los futuros movimientos del rendimiento de los activos (Apartado 3.1). Estos modelos se han convertido en herramientas indispensables en el análisis financiero, brindando estimaciones precisas y fundamentadas. Por tanto, es crucial profundizar en el estudio de los modelos ARCH y GARCH para su correcta aplicación, asegurando así la validez de los resultados obtenidos.

Una extensión de estos modelos son los ARCH y GARCH en media, los cuales combinan la modelización de la volatilidad con la predicción del rendimiento medio de los activos financieros. Esta combinación permite capturar de manera más precisa la dinámica de los precios de los activos y los cambios en la volatilidad condicional. Una de sus aplicaciones se encuentra en el desarrollo de la metodología CAPM, donde es utilizada para evaluar el riesgo y el rendimiento de los activos financieros. La aplicación de los modelos GARCH en media al CAPM permite una mejor comprensión de las relaciones entre riesgo y rendimiento. A diferencia de las aproximaciones tradicionales, los modelos GARCH-M consideran la variabilidad de la covarianza condicional, lo que implica que las primas de riesgo pueden ser variables en el

tiempo⁵. Esto proporciona una visión más realista y precisa de las relaciones entre los activos y el mercado, mejorando así las estimaciones y las estrategias de gestión de riesgos.

Esta especificación fue planteada por Engle, Lilien y Robins (1987). Su propuesta consiste en permitir que la covarianza condicional varíe a lo largo del tiempo, lo que resulta en betas de riesgo variables. Esta propuesta representa un avance fundamental en el análisis de series de tiempo financieras, ya que reconoce la naturaleza dinámica y cambiante de los mercados financieros, donde las relaciones de riesgo no son estáticas. Al permitir que la covarianza condicional varíe, se captura de manera más precisa la evolución de las relaciones de riesgo entre los activos financieros y los movimientos del mercado. Esta extensión tiene un impacto significativo en el análisis de riesgo financiero, ya que permite una evaluación más precisa y actualizada de los riesgos asociados a los activos financieros.

Con base en esta especificación, se han desarrollado trabajos empíricos que aplican la propuesta de Engle, Lilien y Robins (1987). Tal es el caso del estudio de Engle y Kroner (1995), en el cual encontraron que la inclusión de la volatilidad condicional en el modelo CAPM si mejora significativamente la capacidad del modelo para explicar los rendimientos de los activos financieros. Similar a lo anterior, Chen y Firth (2005) llegaron a la misma conclusión al incluir la volatilidad condicional en el modelo CAPM, además de esto encontraron que los modelos GARCH en media también pueden ser útiles para la estimación del Value-at-Risk (VaR) en carteras de inversión. En la siguiente sección se explora en detalle esta propuesta, implementándola para mejorar el ajuste de los rendimientos de los precios de la empresa Mercado Libre.

CAPÍTULO 4. INCORPORACIÓN DEL MODELO GARCH-M AL MODELO CAPM

4.1. INTRODUCCIÓN

La empresa elegida para ajustar sus rendimientos mediante la propuesta del modelo es Mercado Libre. La cual se desarrolla en un total de 18 países en el ramo de *e-commerce* o comercio mediante plataformas de internet. Dentro de los lugares que se encuentra presente esta México,

⁵ Una extensión del modelo CAPM en donde varían los parámetros, la prima de riesgo y la beta, es propuesta por Jagannathan y Wang (1996) en su trabajo titulado: *The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns*. A esta variante del modelo se le conoce como CAPM condicional.

donde obtuvo un éxito inmediato que se vio reflejado en el crecimiento en el precio de sus acciones dentro de la BMV, en donde comenzó con un precio de cierre de \$384.00, hasta obtener un precio máximo de cierre de \$39,180.00. Una de las posibles razones de su crecimiento fue la pandemia por COVID-19 que comenzó en el año 2020, periodo de tiempo donde tuvo un despegue considerablemente elevado. Gráficamente es observable el crecimiento que obtuvo durante estos años (Figura 21), donde el prestar el servicio de obtener productos sin la necesidad de salir de casa era indispensable.

Para llevar a cabo el estudio es necesaria la construcción de la base de datos, la cual está en función de las variables necesarias para la estimación de la recta SML del modelo CAPM. Las series de tiempo necesarias son el rendimiento de los precios de Mercado Libre, la tasa CETES y el retorno del IPC. La forma de obtener los datos es mediante sitios web de confianza. Por parte de los precios de Mercado Libre, se obtienen del sitio Yahoo! Finanzas y tanto los registros del Índice de Precios y Cotizaciones como los de la tasa CETES, se consiguen en la página web del Banco de México. Una vez realizado el tratamiento de la base datos para hacer coincidir las fechas, se realiza un análisis gráfico y estadístico para conocer el comportamiento de las series. Destacando el peculiar comportamiento de las variables antes y después de la pandemia por COVID-19.

La implementación del modelo se efectúa conociendo los elementos centrales de la especificación, es decir, el CAPM y al proceso GARCH en media. Comprendiendo la estructura de este tipo de modelo de volatilidad, se denomina a la recta SML como la ecuación de la media y como elemento que captura la heteroscedasticidad de esta, un proceso GARCH. Así, se construye la propuesta que simula el desarrollo del rendimiento de un activo financiero afectado por su variabilidad. Sin embargo, antes de efectuar la estimación de los parámetros, es esencial verificar la condición de estacionariedad de las variables para garantizar los hallazgos, esta tarea se realiza empleando tanto pruebas gráficas como estadísticas.

Para realizar la estimación de la propuesta, el primer paso es verificar que la regresión del CAPM contenga los denominados efectos ARCH. Para esto, se estiman sus parámetros mediante el software estadístico EViews y posteriormente se ratifica si existe la presencia de heteroscedasticidad acumulada. De esta forma se garantiza que la aplicación de un modelo de volatilidad está justificada y sobre todo poder emplear con seguridad la especificación GARCH

en media. Y así comprobar los resultados del análisis empleando el modelo propuesto a los precios de la empresa Mercado Libre.

4.2. DESCRIPCIÓN DE LA EMPRESA MERCADO LIBRE

La historia de Mercado Libre tuvo su inicio en 1999, cuando Marcos Galperín, el fundador, se encontraba estudiando en la Universidad de Stanford, en Estados Unidos. Junto a un grupo de emprendedores pusieron en marcha un proyecto destinado a innovar el comercio en América Latina implementando tecnología. De esta manera, nació Mercado Libre, una empresa que opera en 18 países y ha cotizado en Nasdaq⁶. Tal como señala Mercado Libre, su misión es la de democratizar el comercio electrónico y los servicios financieros en la región para transformar la vida de millones de personas en América Latina (Mercado Libre, s.f.).

Mercado Libre es una plataforma de *e-commerce* (comercio electrónico), en la cual los usuarios pueden vender y comprar una gran variedad de productos, tanto nuevos como usados. Además de prestar el servicio como intermediario entre sus usuarios, Mercado Libre cuenta con diversas opciones para sus clientes, como Mercado Pago, Mercado envíos, etc. Desde su inicio ha visto un crecimiento significativo en su alcance para la región de Latinoamérica (Barrón et al., 2020). México no podía ser la excepción en el camino de expansión de Mercado Libre, con una población tan considerable, era una opción de mercado deseable y pronto iniciaron operaciones en este país.

Su historia dentro del mercado accionario mexicano comienza el 21 de enero de 2008, cuando fue listada en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), bajo la actividad económica de transacciones en línea (Bolsa Mexicana de Valores, s.f.). La empresa quedó registrada como Mercado Libre S. de R.L. de C.V. (México) y el nombre con el que cotiza en la BMV es MELIN.MX. Sus operaciones en la BMV tienen un primer registro el 27 de febrero de 2008 con un precio de cierre de \$384.00 y llegando a un precio máximo de cierre histórico de \$39,180.00 el 16 de febrero de 2021 (Yahoo! finanzas, s.f.). Comparando ambos precios, se observa el gran avance que ha tenido en el mercado mexicano y su gran crecimiento como empresa.

⁶ El Nasdaq, acrónimo de National Association of Securities Dealers Automated Quotation, es la segunda bolsa de valores electrónica automatizada más grande de Estados Unidos.

Como es evidente, la empresa de Mercado Libre posee una historia de éxito pocas veces vista, su esquema de negocio fue clave para esto, y de esta forma, se ha logrado posicionar. La principal razón de su elección para el análisis fue su desarrollo durante los últimos años, ya que ha experimentado un crecimiento considerable, una posible causa de esto, es la pandemia por COVID-19 que comenzó en el año 2020, ya que en un entorno donde la normalidad consistió en adquirir artículos desde casa, sin tener contacto con otras personas, las plataformas de *e-commerce* facilitaron esta tarea. Dado el contexto de la empresa Mercado Libre, se procede a la descripción, análisis estadístico y gráfico de la base de datos que contiene los precios de cierre de dicha emisora y las variables restantes. Esto con el objetivo de presentar los elementos que participan en la implementación del modelo.

4.3. PRESENTACIÓN DE LA BASE DE DATOS Y ANÁLISIS GRÁFICO Y ESTADÍSTICO

La base de datos se construye en función de las variables requeridas para estimar la ecuación de la recta SML del modelo CAPM. Tal como se observa en el apartado 1.4.2, los elementos que conforman la Línea del Mercado de Títulos son: r_i , r_f y r_m , que representan el rendimiento del activo financiero, la tasa del activo libre de riesgo y el retorno del mercado, respectivamente. Así, en una primera instancia, los datos necesarios para el desarrollo del modelo son los precios de cierre de la empresa Mercado Libre, la tasa CETES representando el activo libre de riesgo y el IPC tomando el papel del mercado.

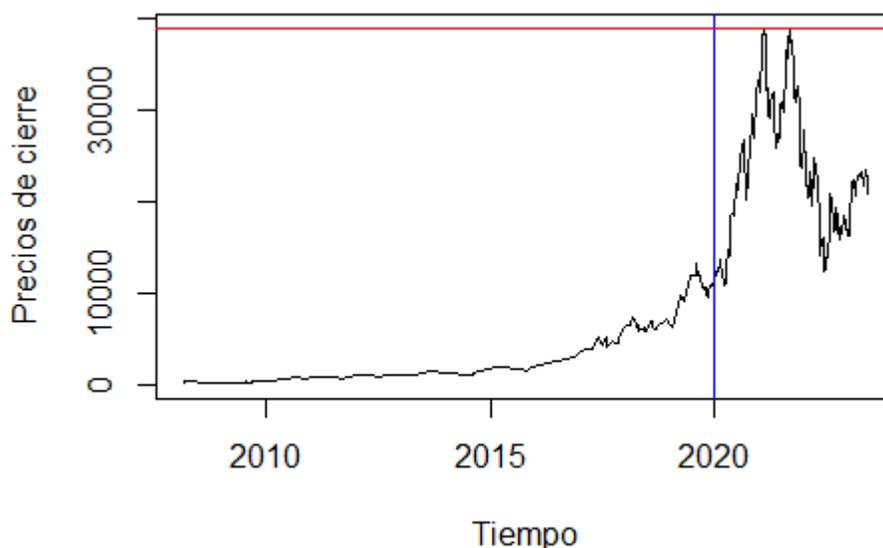
La razón de tomar a la tasa CETES como el activo libre de riesgo comienza por su definición. La palabra CETES es una abreviatura de Certificados de la Tesorería de la Federación. Estos son un tipo de instrumento de deuda emitidos por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público del Gobierno Federal en colaboración con el Banco de México (GBM Academy, 2022). Dado que son proporcionados por el gobierno federal se consideran libres de riesgo. Caso similar con el IPC o Índice de Precios y Cotizaciones, el cual indica la evolución del mercado accionario en su conjunto. Se estima en función de las variaciones de precios de una selección de acciones, la cual está balanceada, ponderada y es representativa de todas las acciones de la BMV (Bolsa Mexicana de Valores, s.f).

La forma de obtener los registros de las series de tiempo es mediante sitios web de confianza. Por parte de los precios de Mercado Libre se obtienen del sitio Yahoo! finanzas, donde los datos son registrados diariamente de lunes a viernes. En el caso del Índice de Precios y Cotizaciones, los registros se consiguen en la página web del Banco de México mediante la base de datos del Sistema de Información Económica (SIE), los datos de igual forma son de periodicidad diaria de lunes a viernes. Finalmente, la tasa CETES se obtiene de igual forma del Banco de México (s.f.) mediante la SIE, para esta variable se hace la distinción de que existen diferentes periodicidades para su cobro, de 28, 91, 182, 364 y 728 días, sin embargo, para efectos del análisis se toma la tasa CETES a 28 días (la de más corto plazo). Previo al análisis, la serie de tiempo de la tasa CETES debe sufrir algunas transformaciones para poder trabajar con ella. En primer lugar, se divide entre 100 para quitarle su forma de porcentaje y obtener un formato decimal. Por último, se divide entre 252 para conseguir un rendimiento diario ya que el mostrado es anual, la razón de esto último es porque las demás variables poseen una periodicidad diaria.

Así, la base de datos de esta investigación está conformada por cuatro columnas: Fecha, ML, IPC, CETES y un total de 290 registros que comprenden del 28 de febrero de 2008 al 8 de junio de 2023. Esta cantidad resulta de dos análisis para la limpieza de los datos. En primera instancia se trabaja con hojas de cálculo en Microsoft Excel, se hicieron coincidir las fechas de cada registro de cada variable con las fechas pertenecientes a los precios de Mercado Libre. Como resultado de lo anterior se obtiene una base de datos que posee un registro para los precios de Mercado Libre, IPC y CETES en cada fecha. Sin embargo, por la naturaleza de las variables en muchos de los casos no se tienen los tres registros por fecha. La manera de lidiar con esto es eliminando las filas que posean un dato vacío, esta tarea se realiza en el software RStudio. De esta forma es como se obtienen las variables para el estudio.

Como un primer análisis y para introducir los elementos del modelo, se presentan de forma gráfica en su representación en niveles, es decir, sin ninguna transformación matemática.

Figura 21. Precios de cierre de la empresa Mercado Libre (2008 - 2023)



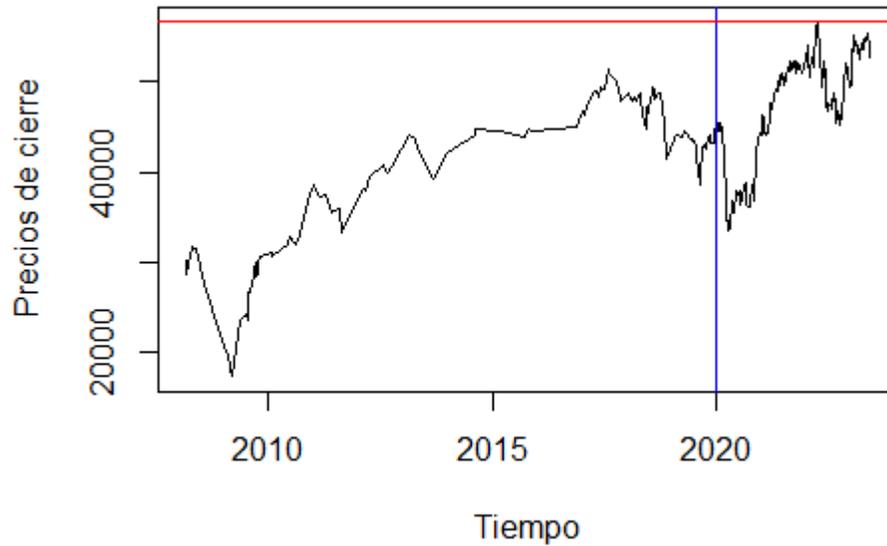
Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Un reflejo del gran crecimiento que tuvo la empresa de Mercado Libre fue el incremento de los precios en sus acciones en los últimos años. Como se menciona, una de las posibles causas de esto fue la pandemia de COVID-19 que comenzó en el año 2020, ya que como se observa en la gráfica, a partir de ese año tuvo un incremento descomunal en sus precios e incluso alcanzando un máximo de \$38,890.00 el 4 de febrero de 2021⁷. Además de esto, resulta de interés las notorias fluctuaciones que tuvo la variable después del 2020, al estimar la media de este periodo se obtiene un valor de \$23,570.06 y una desviación estándar de \$7,305.48, lo que demuestra una gran volatilidad al estar los datos fluctuando en un rango tan amplio con respecto a la media. En el periodo previo al 2020, no se observan tantos movimientos hasta después del 2016; sin embargo, al comparar el precio de inicio, \$400.00, con el último de 2019 de \$11,293.00, resulta evidente el crecimiento que ha tenido Mercado Libre.

Siguiendo con el análisis estadístico y gráfico, se presentan la variable del IPC, durante el periodo del 28 de febrero de 2008 al 08 de junio de 2023.

⁷ La razón por la cual no coincide este precio máximo con el que se menciona en el apartado 4.2, es porque dentro del tratamiento de los datos se eliminó este registro. Por lo cual no se dice que sea este el máximo histórico.

Figura 22. Precios de cierre del IPC (2008 - 2023)

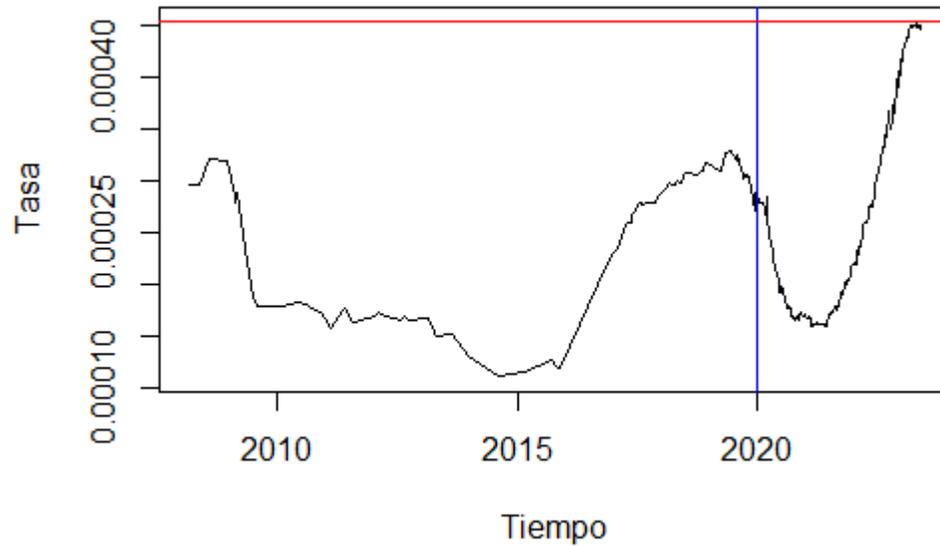


Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Dada la naturaleza de la variable, es posible que de igual forma se haya visto incidida por la pandemia de COVID-19, posiblemente no de la misma manera que Mercado Libre, ya que ésta representa al mercado en su conjunto y probablemente se vería afectada de forma negativa. Al analizar la Figura 22, se observa una baja en los precios bastante considerable al inicio de 2020 y manteniéndose a ese nivel por un cierto periodo de tiempo, para posteriormente ir a la alza incluso alcanzando un máximo de \$56,536.68 el 31 de marzo de 2022. Sin embargo, al examinar todo el recorrido, destacan las fluctuaciones que tuvo la variable después de 2020, se tiene una media para este periodo de \$42,262.93 y una desviación estándar de \$6,084.05, lo que indica la presencia de volatilidad. Con esto, se infiere que las dos variables previas, al menos en el periodo posterior a 2020, han experimentado circunstancias similares.

Finalmente se presenta el gráfico de la serie del activo libre de riesgo, la tasa CETES durante el periodo del 28 de febrero de 2008 al 08 de junio de 2023.

Figura 23. Tasa diaria CETES (2008 - 2023)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Ya que la tasa libre de riesgo es relevante en cualquier economía, no iba a estar exenta a las afectaciones que recibieron las variables anteriores en el periodo posterior al 2020. Tal como se observa después de la línea azul en la gráfica de la serie, existe una baja repentina en la tasa CETES bastante considerable e incluso inusual, ya que al analizar todo el recorrido de la variable no se tiene una baja y un alza de ese estilo. En los últimos registros de la serie se tiene el máximo valor observado hasta ese momento, una tasa del 0.04524% el 4 de mayo de 2023. A diferencia de los dos casos anteriores, no existen tantos movimientos después del periodo del 2020, se tiene una media estimada de 0.02556% y una desviación estándar de 0.00942%, lo que señala baja volatilidad.

Se destacan varias circunstancias de este análisis. Una de ellas, es que existe alguna influencia sobre las variables por parte de la pandemia, en el caso de Mercado libre le fue de utilidad para su crecimiento dado el contexto y labor que desempeña como una empresa de *e-commerce*. En el caso del IPC, lo influyó de distinta manera, ya que al representar la evolución del mercado en su conjunto, capturó todos los impactos positivos y negativos que recibieron todas las empresas que cotizan en la BMV. Por último, la tasa CETES fue la que tuvo un comportamiento peculiar, teniendo una caída prolongada y posteriormente ir al alza, posiblemente a razón de la recuperación de la economía en México dadas las tácticas empleadas para retomar la normalidad. En adición a lo anterior, las tres series tuvieron su pico más alto después de la pandemia.

Con lo anterior, se concluye que es de interés desarrollar un análisis mediante el modelo establecido, que estudie el comportamiento de una serie que primero se desempeñó con normalidad y posteriormente experimento una situación tan inusual como lo es una pandemia y a causa de esta padeció grandes movimientos en sus precios. De esta forma, se pone a prueba el modelo con una serie que presenta movimientos poco comunes y así verificar que es capaz de desempeñarse de manera eficaz en este contexto. Sobre todo, dar certeza de que las medidas de ajuste son mejoradas notablemente en comparación a las mostradas por el modelo CAPM. De manera lógica, el siguiente paso es plantear la especificación del modelo.

4.4. PROPUESTA DEL MODELO

Como se ha mencionado, el objetivo del análisis es la incorporación de un modelo GARCH en media a la ecuación SML del modelo CAPM, con el objetivo de mejorar el ajuste de los rendimientos de activos financieros. Para tal meta es conveniente retomar la descripción de la ecuación SML cuando es estimada con una regresión lineal y datos históricos (Guerrero, 2014):

$$E(r_i - r_f) = \alpha + \beta_{im} \cdot E(r_m - r_f) + \varepsilon$$

Donde:

$E(r_i - r_f)$: Valor esperado de la prima de riesgo del activo. Variable dependiente o explicada.

$E(r_m - r_f)$: Valor esperado de la prima de riesgo del mercado. Variable independiente o explicativa.

α : Constante de la recta de regresión lineal.

ε : Residuos o error.

β_{im} : Coeficiente beta. Es la pendiente de la recta de regresión lineal o el riesgo sistemático.

Por parte de otros autores existen otras especificaciones para estimar el coeficiente de beta mediante una regresión lineal. Señalan que en la práctica se utiliza un modelo de índice que utiliza los rendimientos realizados en lugar de los esperados para implementar el CAPM (da Silva, 2007; Svetlozar et al., 2007):

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + \beta_i \cdot (r_{mt} - r_{ft}) + \varepsilon_{it}$$

Donde:

r_{it} : Rendimiento observado del activo i durante el tiempo t .

r_{ft} : Retorno observado del activo libre de riesgo en el tiempo t .

r_{mt} : Rendimiento del portafolio del mercado durante el tiempo t .

α_i : Constante de regresión del activo i .

ε_{it} : Residuos o error en el tiempo t .

β_i : Coeficiente beta del activo i .

En algunas ocasiones se designa a la variable $er_{it} = r_{it} - r_{ft}$ y a la variable $er_{mt} = r_{mt} - r_{ft}$, para simplificar la regresión previa. Sustituyendo a las variables anteriores, se reescribe la ecuación de la SML como:

$$er_{it} = \alpha_i + \beta_i \cdot er_{mt} + \varepsilon_{it}$$

Con base en lo revisado en el capítulo 3, se designa a la especificación anterior como la ecuación de media. Ahora, siguiendo con la construcción del modelo GARCH-M, se plantea en la sección 3.4 que su representación general es:

$$Y_t = \mu_t + e_t$$
$$\mu_t = \beta + \delta \sigma_t^2 \quad \delta > 0$$

Donde σ_t^2 es un proceso GARCH(Q, P):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^Q \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^P \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Así, se puede reescribir lo anterior de la siguiente forma:

$$Y_t = \beta + \delta \sigma_t^2 + e_t$$

En donde σ_t^2 es la volatilidad condicional estimada por un modelo GARCH(Q, P). No es difícil observar que la definición de un GARCH-M consiste en incorporar como variable explicativa la

volatilidad condicional estimada por el GARCH a la ecuación de media. Con base en esto, se puede generar la especificación del proceso GARCH-M utilizando como ecuación de media al modelo CAPM como (da Silva, 2007):

$$er_{it} = \alpha_i^* + \beta_i^* \cdot er_{mt} + \delta_i \sigma_t^2 + e_{it}$$

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i^* + \beta_i^* \cdot (r_{mt} - r_{ft}) + \delta_i \sigma_t^2 + e_{it}$$

En donde σ_t^2 es la volatilidad condicional, δ_i es su coeficiente y e_{it} es el nuevo término de perturbación estocástica. Una vez construido el modelo, se procede a la aplicación del mismo para la muestra seleccionada en el siguiente apartado.

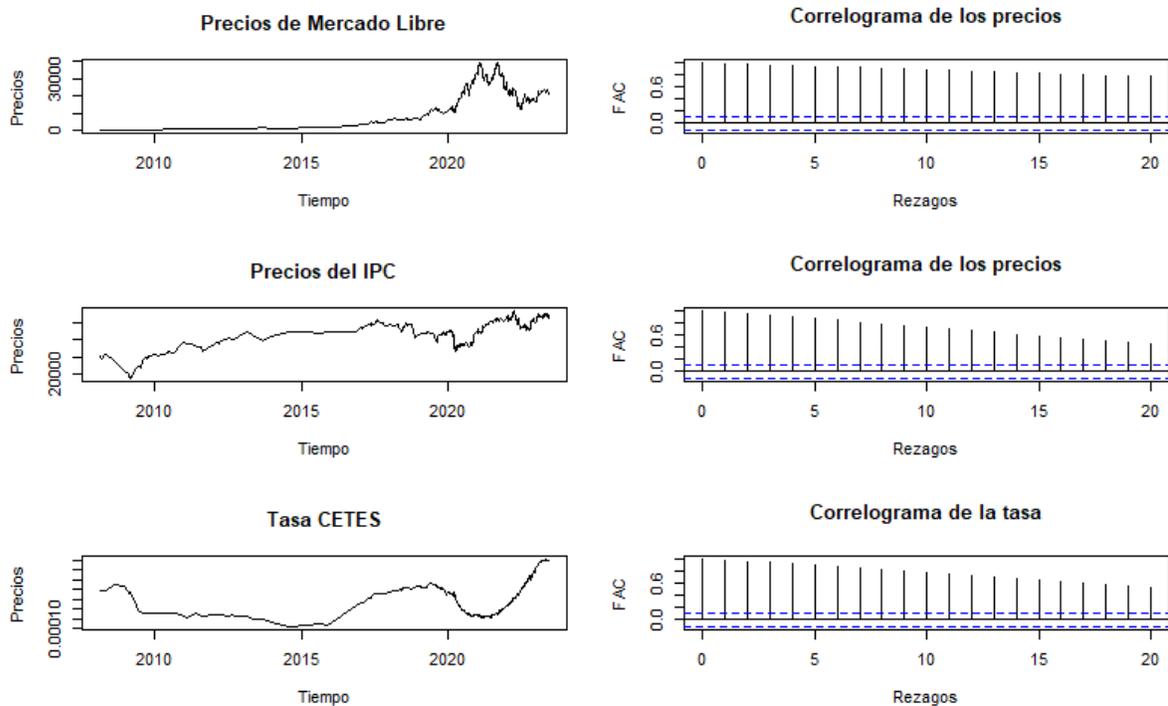
4.5. APLICACIÓN DEL MODELO

4.5.1. Verificación y corrección de estacionariedad

La principal razón de verificar la presencia o ausencia de estacionariedad es evitar la estimación de regresiones espurias o falsas. Es decir, regresiones en donde se obtienen buenos resultados, pero los residuos contienen tendencia y, por tanto, no son estacionarios. Además, dado que uno de los objetivos del análisis de series de tiempo es el de realizar pronósticos, es necesario comprobar el cumplimiento de la propiedad de estabilidad en media, varianza y covarianza, ya que es esencial para la predicción de valores futuros.

Existen diferentes pruebas que permiten conocer si se cumple o no la estacionariedad de una serie de tiempo. Como primer acercamiento, se grafican los datos para tratar de observar algún componente en la serie, como la tendencia, la estacionalidad o el comportamiento de la fluctuación aleatoria. Adicionalmente, se tiene la función de autocorrelación simple (FAC) y su representación gráfica para identificar la posible ausencia de estacionariedad. Si la serie cuenta con una raíz unitaria, la FAC no desaparece rápidamente a medida que aumentan los rezagos. A continuación, se muestran las gráficas y correlogramas de las tres variables:

Figura 24. Análisis gráfico y correlograma (2008 - 2023)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Observando el panorama completo es evidente la tendencia en las series, sobre todo para los precios de Mercado Libre, ya que se aprecia un crecimiento constante durante varios años. En el caso de las dos variables restantes es menos evidente este componente, pero aun así lo poseen por algunos periodos de tiempo. Por otro lado, es perceptible que los choques aleatorios no son constantes a lo largo del tiempo para ninguna de las series. Solamente analizando estas características, se puede inferir que la media, varianza y posiblemente la covarianza de estas series no es constante y en consecuencia no son estacionarias. Continuando con este primer estudio, se tiene que los correlogramas no decaen inmediatamente a medida que aumentan el número de rezagos, indicando la posible existencia de una raíz unitaria en los procesos. A pesar de que estas pruebas gráficas indican la ausencia de estacionariedad, se debe confirmar esta situación mediante una prueba estadística formal como lo es la DF o la DFA. Así, se presentan enseguida los resultados obtenidos mediante RStudio y empleando la librería `aTSA` (Qiu, 2015):

Tabla 5. Prueba DF y DFA

H_0 La serie no es estacionaria							
Precios de Mercado Libre							
Sin tendencia ni constante			Con tendencia y sin constante		Con tendencia y constante		
	Rezagos	Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p
DF	0	-0.133	0.606	-1.440	0.542	-1.350	0.849
	1	-0.126	0.608	-1.440	0.543	-1.340	0.855
DFA	2	-0.066	0.625	-1.400	0.555	-1.240	0.895
	3	-0.222	0.580	-1.500	0.522	-1.460	0.805
	4	-0.104	0.614	-1.430	0.547	-1.260	0.886
Precios del IPC							
Sin tendencia ni constante			Con tendencia y sin constante		Con tendencia y constante		
	Rezagos	Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p
DF	0	0.710	0.848	-1.770	0.418	-2.190	0.495
	1	0.646	0.830	-2.010	0.322	-2.460	0.380
DFA	2	0.581	0.811	-1.740	0.429	-2.310	0.447
	3	0.590	0.814	-1.780	0.413	-2.330	0.436
	4	0.596	0.815	-1.800	0.406	-2.340	0.432
Tasa CETES							
Sin tendencia ni constante			Con tendencia y sin constante		Con tendencia y constante		
	Rezagos	Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p
DF	0	0.975	0.911	0.320	0.978	-0.704	0.969
	1	0.780	0.868	0.030	0.958	-0.887	0.953
DFA	2	0.854	0.890	0.154	0.968	-0.797	0.961
	3	0.711	0.848	-0.068	0.950	-0.940	0.947
	4	0.446	0.772	-0.518	0.867	-1.268	0.885

Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Tal como se menciona en el apartado 2.3.2, las pruebas DF y DFA se pueden emplear con tres especificaciones diferentes, cada una dependiendo de la forma que posee la serie. La función `adf.test` permite estimar las tres formas de las pruebas, siendo la Dickey-Fuller la que no tiene rezagos y la DFA, en este caso, con 4 rezagos. Con base en el valor de p, no se rechaza la H_0 para ninguna de las series en las tres especificaciones posibles, por lo tanto, se dice que las tres series son no estacionarias.

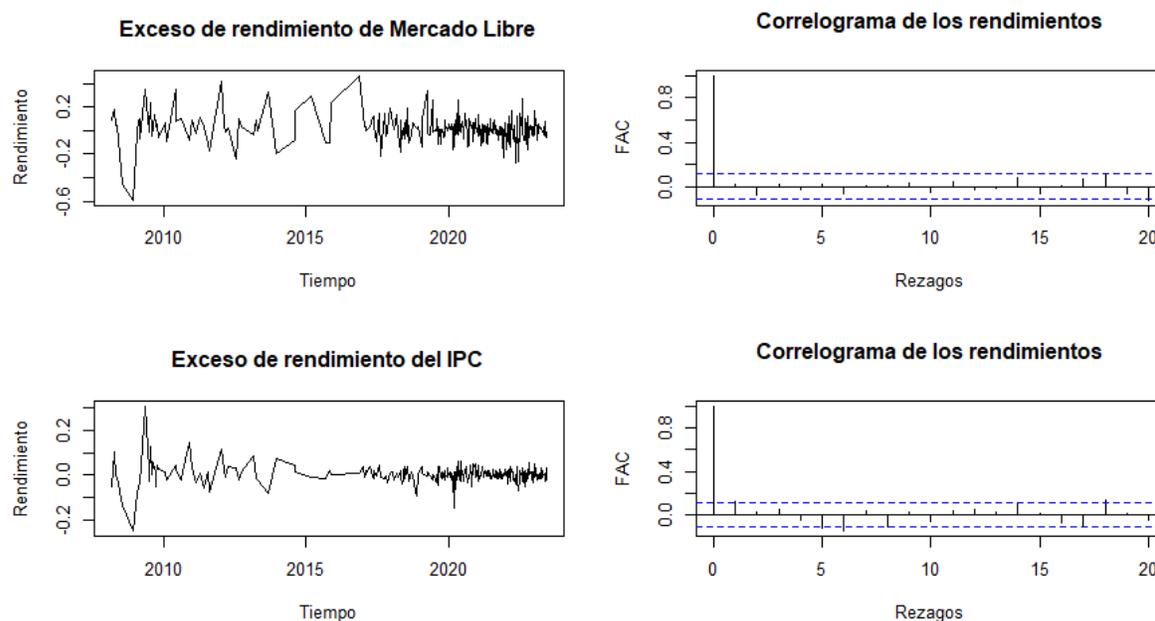
Existen diferentes transformaciones matemáticas para tratar de solucionar esta situación de no estacionariedad, se aprovecha que el modelo planteado requiere a las variables en su forma de exceso de rendimiento para verificar si esta modificación matemática es suficiente para eliminar

la raíz unitaria. Entonces, se estima la tasa de crecimiento de los precios de Mercado Libre y del Índice de Precios y Cotizaciones mediante la siguiente fórmula:

$$r_t = \ln\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}\right)$$

Para finalmente estimar las variables er_{MLt} y er_{IPCt} especificadas en la construcción del modelo. Cabe señalar que la tasa CETES ya está dada en su forma de rendimiento y adicionalmente fue transformada para ser diaria, esto con el objetivo de poder emplearla en conjunto con las demás variables, por esta razón no requiere ningún cambio extra. De igual forma que las pruebas de estacionariedad, estos cálculos se realizan en el software RStudio. Se comienza con un análisis gráfico de las dos nuevas variables:

Figura 25. Segundo análisis gráfico y correlograma (2008 - 2023)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Como primera observación se tiene que la tendencia para las dos variables ha desaparecido y ahora los choques aleatorios parecen tener un comportamiento más constante a lo largo del tiempo. En su forma de exceso de rendimiento, las variables poseen una apariencia que se asemeja a una banda o franja con un ancho similar, se perciben como fluctuaciones alrededor de una recta horizontal. A diferencia del caso anterior, los correlograma del exceso de rendimiento

de los precios reafirman esta aseveración, se observa una baja continua en la estimación del FAC para ambas series, siendo más evidente en el primer caso. Con base en estas características se podría asegurar que estos procesos estocásticos son estacionarios. Sin embargo, para reafirmar ésta situación se prosigue con el cálculo de las pruebas DF y DFA.

Tabla 6. Prueba DF y DFA para las nuevas variables

H_0 La serie no es estacionaria							
Exceso de rendimiento de Mercado Libre							
	Rezagos	Sin tendencia ni constante		Con tendencia y sin constante		Con tendencia y constante	
		Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p
DF	0	-16.350	0.010	-16.550	0.010	-16.760	0.010
	1	-12.510	0.010	-12.730	0.010	-12.960	0.010
DFA	2	-9.620	0.010	-9.840	0.010	-10.080	0.010
	3	-8.480	0.010	-8.730	0.010	-9.000	0.010
	4	-7.050	0.010	-7.380	0.010	-7.810	0.010
Exceso de rendimiento del IPC							
	Rezagos	Sin tendencia ni constante		Con tendencia y sin constante		Con tendencia y constante	
		Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p	Estimación	Valor de p
DF	0	-14.900	0.010	-14.910	0.010	-14.890	0.010
	1	-11.090	0.010	-11.100	0.010	-11.080	0.010
DFA	2	-8.770	0.010	-8.780	0.010	-8.770	0.010
	3	-8.230	0.010	-8.250	0.010	-8.240	0.010
	4	-8.350	0.010	-8.400	0.010	-8.410	0.010

Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Para una prueba más general de DF y DFA se emplean las tres especificaciones proporcionadas por la función `adf.test` y así determinar la presencia o ausencia de estacionariedad. Fijando un valor de significancia del 5% y con base en el valor de p, se rechaza la hipótesis nula H_0 para las tres especificaciones de las dos series, por lo tanto, se dice que las variables no poseen una raíz unitaria. Cabe señalar que la función `adf.test` señala que, al mostrar un valor de p de 0.010, se está indicando que el valor real es de hecho menor a esa cantidad.

Dada la importancia de asegurar la situación de inexistencia de raíz unitaria se procede a estimar otra prueba de estacionariedad. Dentro de RStudio la prueba Phillips-Perron está disponible con la librería `urca` (Pfaff, 2008), la forma de emplearla es mediante el comando `ur.pp`. Dentro de la función se puede especificar la estructura que se desea verificar, con el siguiente código se determina el valor del estadístico, así como los valores críticos:

```
summary(ur.pp(CTS_ts2, type = c("Z-tau"), model = c("constant", "trend")))
```

Como se observa, se especifica en la función `ur.pp` que el modelo a verificar es el que posee constante y tendencia. La hipótesis nula empleada es la misma que con las pruebas previas. Para el caso de la variable er_{ML_t} , se observa en el resumen un estadístico z - τ igual a -16.543 y el valor crítico al 1% es -3.455 , por tanto, se rechaza la H_0 y en consecuencia se dice que esta serie de tiempo no posee una raíz unitaria. Ahora bien, para el caso de er_{IPC_t} , se tiene un estadístico z - τ igual a -14.897 y el valor crítico al 1% es el mismo que en el caso anterior, con base en estos dos valores, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la variable es estacionaria.

Así, se concluye que la transformación de las variables en su forma de exceso de rendimiento es suficiente para volverlas estacionarias. Con este estudio de estacionariedad se puede garantizar la validez de los hallazgos del modelo para las tres submuestras, ya que mediante diferentes pruebas se ha comprobado la inexistencia de raíz unitaria. De esta forma, se puede continuar con el desarrollo del modelo planteado, dado que se ha asegurado esta característica imprescindible en el análisis de series de tiempo.

4.5.2. Regresión lineal del modelo CAPM y prueba de efectos ARCH

Una vez verificada la condición de estacionariedad se procede con seguridad a la estimación de la regresión lineal de la SML del modelo CAPM dada por

$$er_{ML_t} = \alpha_{ML} + \beta_{ML} \cdot er_{IPC_t} + \varepsilon_{ML_t}$$

Donde $er_{ML_t} = r_{ML_t} - r_{CETES_t}$ y $er_{IPC_t} = r_{IPC_t} - r_{CETES_t}$. Comúnmente, la forma de determinar los coeficientes de regresión es mediante un método conocido como mínimos cuadrados ordinarios (MCO), en donde los estimadores minimizan la suma de cuadrados de la diferencia entre la serie real y la estimada, es decir, el mínimo valor para la suma del término de error al cuadrado (González, 2011). La estimación de los coeficientes se realiza utilizando el software estadístico EViews. En la siguiente tabla se resumen los resultados obtenidos:

Tabla 7. Resultados de la regresión del CAPM

Coefficientes	Estimación	t - estadística	Valor de p
α_{ML}	0.01150	1.90666	0.05760
β_{ML}	1.08411	7.19718	0.00000
R^2	0.15289	R^2 ajustado	0.14994
d	2.06715	C.I. Akaike	-1.71326
C.I. Schwartz	-1.68789	C.I. Hannan - Quinn	-1.70309

Fuente: Elaboración propia con EViews.

De la regresión se tiene que la variable er_{IPC_t} resulta estadísticamente significativa, además, el coeficiente de la constante también lo es a un nivel de significancia del 10%. Por otra parte, se tiene un valor de R^2 y \bar{R}^2 considerablemente altos, indicando que existe un ajuste adecuado del modelo a los datos⁸. Un elemento de diagnóstico para el modelo es el estadístico d de la prueba Durbin-Watson, que al presentar un valor estadístico cercano a 2 señala la inexistencia de autocorrelación. Además de esta prueba, se puede realizar otra para verificar la normalidad de los datos, con ayuda de EViews se observa que los residuos no se distribuyen normalmente, ya que se obtuvo un valor del estadístico Jarque – Bera de 122.35670 y un valor de p de 0.00000. Lo anterior es relevante para el desarrollo del modelo de volatilidad. Otra característica que resulta relevante de verificar es ver mediante la regla propuesta por Granger y Newbold (1974), si se está en presencia de una regresión espuria. Dado que $0.15289 < 2.0675$, se confirma que la regresión estimada no es falsa.

Con base en los resultados anteriores se establece que el exceso de rendimiento de los precios de Mercado Libre si son explicados por el exceso del rendimiento de la cartera del mercado representada por el IPC. Adicional a esto, una forma de probar la validez del modelo CAPM es verificando que el intercepto de la regresión no sea estadísticamente significativo (Díaz

⁸ El coeficiente de determinación o R^2 permite medir qué tan bien la variable independiente explica a la variable dependiente. Si se obtiene un valor de $R^2 = 1$, todos los puntos de los datos se encuentran sobre la línea estimada, proporcionando un ajuste perfecto a los datos. Se tiene un ajuste pobre del modelo si el valor de R^2 es casi igual a cero. El problema con esta medida es que no disminuye cuando se agregan más variables explicativas al modelo a pesar de que no aporten en nada al ajuste. La R^2 ajustada o \bar{R}^2 soluciona esto, ya que posee la característica de sancionar la adición de más variables independientes a un modelo si estas no resultan estadísticamente significativas y sólo aumenta si el valor absoluto del estadístico t de la nueva variable es mayor a uno (Wooldridge, 2010).

e Higuera, 2012). En este caso al fijar una significancia estadística del 5% el valor de α_{ML} no resulta estadísticamente diferente de cero, comprobando así la validez del CAPM para este activo.

Con base en los resultados anteriores se puede confiar en los hallazgos del modelo estimado. Un elemento esencial del modelo CAPM es el coeficiente β , el cual representa la elasticidad de los movimientos de la rentabilidad del activo financiero, ante los movimientos del retorno del mercado, lo que se conoce como riesgo sistemático. La empresa Mercado Libre posee un $\beta_{ML} = 1.08411$, el cual indica que subirá y bajará más en comparación a el mercado, por tanto, refleja un riesgo mayor que el del IPC. De acuerdo con esto, a Mercado Libre se le clasifica como un activo financiero agresivo.

Dada la estimación del modelo e interpretados sus resultados, aún queda verificar si la serie sigue un proceso GARCH puro. Para esto, se debe estimar la prueba ARCH-LM para comprobar la presencia de efectos ARCH en el modelo de media. Los resultados mostrados a continuación son calculados utilizando EViews.

Tabla 8. Prueba ARCH-LM

	H_0	No hay efectos ARCH	
Datos	ε_{MLt}^2	G.L.	8
TR^2	31.03223	Valor de p	0.00010

Fuente: Elaboración propia con EViews.

Al fijar un valor de significancia del 1% y con base en el valor de p, se rechaza la hipótesis nula H_0 y en consecuencia se determina que el modelo presenta efectos ARCH. Por consiguiente, se debe construir un modelo de heteroscedasticidad condicional para capturar este fenómeno presente en regresión del CAPM.

4.5.3. Estimación y validación del modelo de volatilidad

En trabajos empíricos la elección de estimar un modelo GARCH en lugar de un ARCH, se basa en la parsimonia de estos, ya que pueden representar modelos ARCH de orden superior con pocos rezagos. El número para Q y P comienza con valores pequeños, ya que frecuentemente un GARCH(1,1) es capaz de representar la mayoría de las series de tiempo financieras. Sin embargo, para que no quede duda de la elección, de igual forma se considera a la especificación

ARCH de diferentes órdenes para el modelo de volatilidad. Por último, se tiene que considerar el tipo de distribución que sigue el término de error. Con estas características se observa la gran cantidad de opciones que se poseen para el modelo de volatilidad.

La manera de elegir cuál es la especificación indicada parte de diferentes criterios de ajuste, por ejemplo, se puede elegir con base al modelo que posea un valor de R^2 o \bar{R}^2 más alto. Además de estas dos medidas, existe otra manera de estimar que tan bien se ajusta el modelo a los datos y, por consiguiente, otra forma de elegir a la especificación. Estas medidas son los criterios de selección, los dos más comunes son: el Criterio de Información de Akaike (CIA) y el Criterio Bayesiano de Schwartz (CBS). Idealmente, el CIA y el CBS tienen que ser lo más pequeños posible, cabe señalar que ambos pueden ser negativos. Entonces, a medida que el ajuste del modelo mejore, los valores de CIA y CBS se aproximarán a $-\infty$. Otra característica para destacar es que el SBC tiene propiedades superiores para muestras grandes que el CIA y elegirá el modelo más parsimonioso. Sin embargo, el criterio de Akaike funciona mejor en muestras pequeñas que el criterio de Schwartz (Enders, 2014). Adicional a estos se tiene el criterio de Hannan y Quinn (HQ), que trabaja de forma similar.

En la siguiente tabla se muestra un resumen de todas las medidas de selección de diferentes especificaciones para el modelo de volatilidad:

Tabla 9. Criterios de selección

	R^2	R^2 ajustado	C.I. Akaike	C.I. Schwartz	C.I. Hannan - Quinn
ARCH(1) - N	0.14868	0.14571	-1.75912	-1.70837	-1.73879
ARCH(1) - t	0.14963	0.14666	-1.90029	-1.83686	-1.87488
ARCH(1) - GED	0.14904	0.14608	-1.90720	-1.84377	-1.88179
ARCH(2) - N	0.14846	0.14549	-1.75226	-1.68883	-1.72685
ARCH(2) - t	0.14961	0.14665	-1.89347	-1.81735	-1.86297
ARCH(2) - GED	0.14894	0.14598	-1.90029	-1.82417	-1.86979
GARCH(1,1) - N	0.15009	0.14713	-1.85708	-1.79365	-1.83167
GARCH(1,1) - t	0.14745	0.14448	-1.93664	-1.86052	-1.90614
GARCH(1,1) - GED	0.15042	0.14746	-1.94455	-1.86843	-1.91405
GARCH(1,2) - N	0.14954	0.14658	-1.85197	-1.77586	-1.82147
GARCH(1,2) - t	0.14686	0.14388	-1.93403	-1.84523	-1.89845
GARCH(1,2) - GED	0.14978	0.14682	-1.94062	-1.85181	-1.90503
GARCH(2,1) - N	0.15001	0.14705	-1.85034	-1.77422	-1.81984
GARCH(2,1) - t	0.14689	0.14391	-1.93061	-1.84181	-1.89503

GARCH(2,1) - GED 0.14841 0.14544 -1.93873 -1.84993 -1.90315

Fuente: Elaboración propia con EViews.

Comparando todos los valores, resulta que el modelo con las mejores medidas estimadas es un GARCH(1,1) con distribución para el término de error GED (*Generalized Error Distribution*). La distribución resulta congruente con lo obtenido en la sección anterior. En seguida se muestran los resultados de la estimación de esta especificación.

Tabla 10. Modelo GARCH(1,1) – GED

Coefficientes	Estimación	z - estadística	Valor de p
Intercepto	0.00037	1.27087	0.20380
α_t	0.09846	1.96618	0.04930
β_t	0.86076	13.8397	0.00000
R^2	0.15042	R^2 ajustado	0.14746
C.I. Akaike	-1.94455	C.I. Schwartz	-1.86843
C.I. Hannan - Quinn	-1.91405		

Fuente: Elaboración propia con EViews.

Los coeficientes fueron estimados por el método de máxima verosimilitud en el software EViews. Se observa que los coeficientes son estadísticamente significativos a un nivel de significancia del 5% a excepción del intercepto. Dado que $0.09846 + 0.86076 < 1$ se determina que se cumple con la condición de estacionariedad en el modelo. De igual forma se cumple que los coeficientes de regresión deben ser positivos. Otra observación en términos de persistencia de los choques se tiene que, como β_t se acerca a 1, un *shock* en la volatilidad tiene un efecto constante.

La forma de validar el modelo mediante el análisis de los residuos es verificando que la heteroscedasticidad ha desaparecido, ya que esto indicaría que el modelo GARCH ha capturado adecuadamente la volatilidad de los datos. A continuación, se muestra la prueba de efectos ARCH aplicada a los residuos del modelo GARCH(1,1) – GED:

Tabla 11. Prueba ARHC-LM del modelo GARCH(1,1) – GED

	H_0	No hay efectos ARCH	
Datos	η_t^2	G.L.	8
TR^2	1.75073	Valor de p	0.98770

Fuente: Elaboración propia con EViews.

Dado un nivel de significancia del 10% y con base en el valor de p, no se rechaza la hipótesis nula H_0 y por consecuencia se concluye que no hay efectos ARCH en el modelo. De esta forma se determina que la especificación GARCH ha capturado correctamente el fenómeno de volatilidad acumulada presente en los datos. Una vez determinado el mejor modelo de heteroscedasticidad para los datos, queda incluir esta nueva serie de volatilidad a la ecuación de la media, para así estimar la especificación GARCH en media.

4.5.4. Cálculo del modelo GARCH-M

Similar al caso previo, se tienen algunas combinaciones para la definición del GARCH-M. Dentro de la ecuación de la SML, se puede incluir la variable σ_t^2 directamente, su raíz cuadrada o el logaritmo natural de la misma. La especificación general para el modelo a estimar es:

$$er_{MLt} = \alpha_{ML}^* + \beta_{ML}^* \cdot er_{IPCt} + \delta_{ML} \sigma_t^2 + e_{MLt}$$

$$r_{MLt} - r_{CETES_t} = \alpha_{ML}^* + \beta_{ML}^* \cdot (r_{IPCt} - r_{CETES_t}) + \delta_{ML} \sigma_t^2 + e_{MLt}$$

En seguida se muestra un resumen de las todas las medidas de selección de las diferentes maneras de incluir la volatilidad en la especificación:

Tabla 12. Criterios de selección

	R^2	R^2 ajustado	C.I. Akaike	C.I. Schwartz	C.I. Hannan - Quinn
σ_t^2	0.16729	0.16146	-1.95349	-1.86469	-1.91791
σ_t	0.16757	0.16175	-1.95377	-1.86496	-1.91818
$\ln(\sigma_t^2)$	0.16704	0.16122	-1.95373	-1.86492	-1.91814

Fuente: Elaboración propia con EViews.

Revisando los diferentes valores de las medidas de ajuste, se determina que quien presenta mejores cantidades es la raíz cuadrada del modelo GARCH(1,1) – GED. Las estimaciones de esta especificación se realizan en el software EViews mediante el método de máxima verosimilitud.

Tabla 13. Resultados de la regresión del GARCH-M

Coefficientes	Estimación	z – estadística	Valor de p
δ_{ML}	0.43844	2.01721	0.04370
α_{ML}^*	-0.02553	-1.35336	0.17590
β_{ML}^*	1.01131	8.09175	0.00000
R^2	0.16757	R^2 ajustado	0.16175
d	2.10595	C.I. Akaike	-1.95377
C.I. Schwartz	-1.86496	C.I. Hannan – Quinn	-1.91818

Fuente: Elaboración propia con EViews.

Con respecto a los resultados de la Tabla 13, se tiene que tanto δ_{ML} y β_i^* son estadísticamente significativos fijando un nivel de confianza del 95%, mientras que el término constante no lo es. Dado que esta especificación genera betas que varían sobre el tiempo, se puede interpretar como un CAPM condicional. En el cual se dice que el modelo es capaz de explicar el exceso de rendimiento de un activo, si el coeficiente del intercepto no resulta estadísticamente significativo y esto indicaría que el único responsable de determinar el exceso de rendimiento es el riesgo sistemático (Ang y Chen, 2005). Con esto, se determina la validez del modelo especificado, ya que el coeficiente α_{ML}^* resultó estadísticamente insignificante y en consecuencia quien explica a er_{MLt} únicamente es el riesgo del mercado.

En relación con el análisis del coeficiente beta, se observa que el valor se redujo, acercándolo más a la unidad. Lo que podría darle otra interpretación, ya que $\beta_{ML}^* = 1.01131$, se interpreta como que el activo se moverá paralelo al mercado, lo que significa que tendrá un riesgo similar que el del IPC. Haciendo a Mercado Libre un activo financiero neutro.

Cabe señalar que la variable de volatilidad, al pertenecer al modelo, indica que el exceso de rendimiento de los precios de Mercado Libre si son determinados en cierta parte por su variabilidad y, además, ésta afecta positivamente al retorno. Revisando el coeficiente $\delta_{ML} = 0.43844$, se observa que la prima de riesgo es baja, es decir, los agentes económicos aversos al riesgo no están exigiendo una compensación tan alta por mantener los activos de Mercado Libre. Lo anterior tiene sentido al observar la clasificación como neutral de la empresa, ya que, al presentar poca incertidumbre medida por el valor de beta, los inversionistas no requieren de una prima de riesgo alta.

4.6. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Con base en las diferentes medidas de bondad de ajuste, se puede comprobar si la incorporación de una especificación GARCH en media a la ecuación SML del CAPM, resulta beneficiosa para aumentar el grado de acoplamiento del nuevo modelo a los rendimientos de activos financieros. En la siguiente tabla comparativa, se muestran los resultados previos de la regresión del CAPM y del modelo GARCH-M.

Tabla 14. Criterios de información del CAPM y GARCH-M

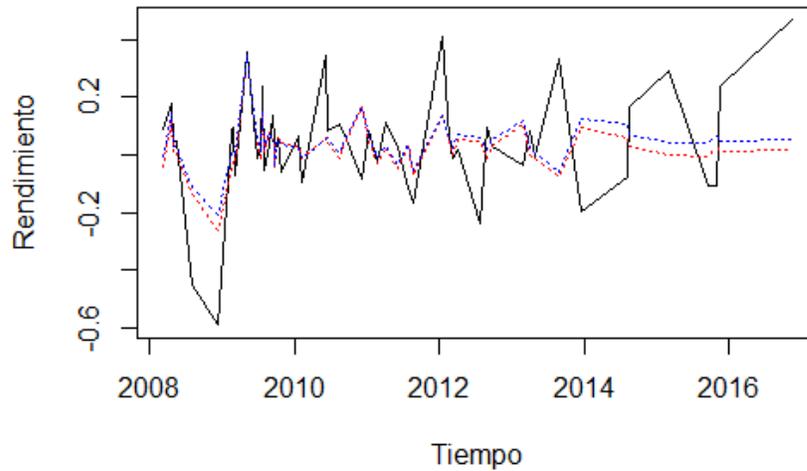
	Modelo CAPM	GARCH-M
R^2	0.15289	0.16757
R^2 ajustado	0.14994	0.16175
C.I. Akaike	-1.71326	-1.95377
C.I. Schwartz	-1.68789	-1.86496
C.I. Hannan - Quinn	-1.70309	-1.91818

Fuente: Elaboración propia con EViews.

Respecto a la bondad de ajuste medida por los coeficientes de R^2 y \bar{R}^2 , resultan ligeramente superiores los del modelo GARCH en media, incrementando en 0.01468 o en un 9.59834% y en 0.01181 o en un 7.87387% respectivamente, lo que indica que si se presentó un incremento en esta medida de ajuste. En esta misma línea, el Criterio de Información de Akaike mostró un incremento del 14.03791%. De igual forma el Criterio Bayesiano de Schwartz, en valor absoluto, exhibe un crecimiento en 0.17707 unidades. Finalmente, con el criterio de Hannan y Quinn, los resultados también son superiores, aumentando en valor absoluto 0.21509 unidades o un 12.62931%. En conclusión, si resulta beneficiosa la implementación de un modelo GARCH-M al CAPM para aumentar el grado de acoplamiento de los rendimientos de activos financieros.

Adicionalmente, se pueden comparar gráficamente las series producidas por el CAPM y el GARCH-M para diferentes periodos de tiempo. La lógica para seleccionar los subperiodos es obtener muestras de un tamaño similar, que permitan observar con claridad los movimientos de la serie original y de los dos pronósticos. Dentro del entorno de EViews es posible generar la predicción de los valores de acuerdo con la periodicidad de la serie original. Exportando los datos e importándolos en el software RStudio, se realiza la siguiente gráfica con un total de 54 observaciones.

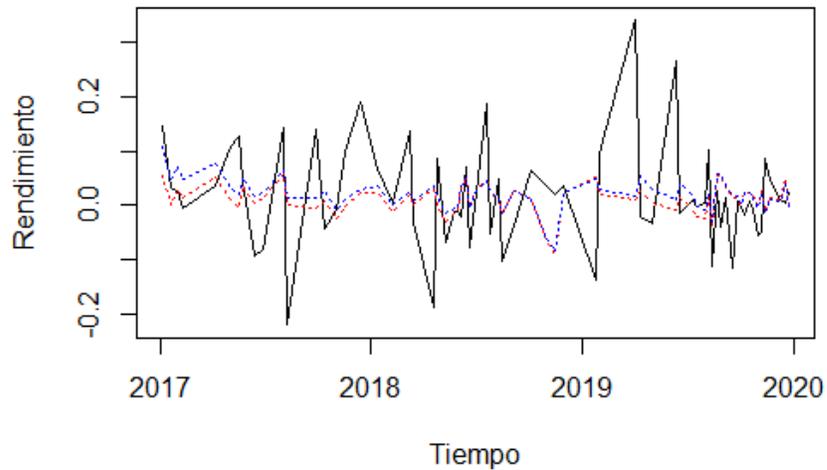
Figura 26. Pronóstico del CAPM y GARCH-M (2008 - 2016)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

La línea punteada de color rojo representa a la variable generada por el modelo CAPM, mientras que la línea punteada de color azul es la serie del GARCH en media. Revisando la gráfica, se observa un nivel de ajuste aceptable al inicio del periodo, prediciendo correctamente el signo del rendimiento. Sin embargo, comenzando el 2012, se aprecia un bajo acoplamiento de los modelos a la serie original. Adicional a esto, la serie construida por el GARCH-M parece estar por encima de la del CAPM justamente en este periodo de tiempo. Calculando la resta en valor absoluto entre la variable real y las dos estimadas, se obtiene una diferencia total de 6.36903 para el CAPM y una de 6.16542 para el GARCH-M. Una característica que resulta relevante para el análisis financiero es el aumento o disminución del precio de una acción. Por consiguiente, un modelo que sea capaz de capturar este aspecto es una herramienta valiosa para la toma de decisiones. El modelo CAPM acertó en un 62.96296% de las ocasiones el signo del exceso de rendimiento, mientras que el GARCH-M lo hizo en un 64.81481% de las observaciones. Enseguida se muestra el mismo estudio para el siguiente periodo de tiempo con un total de 67 registros.

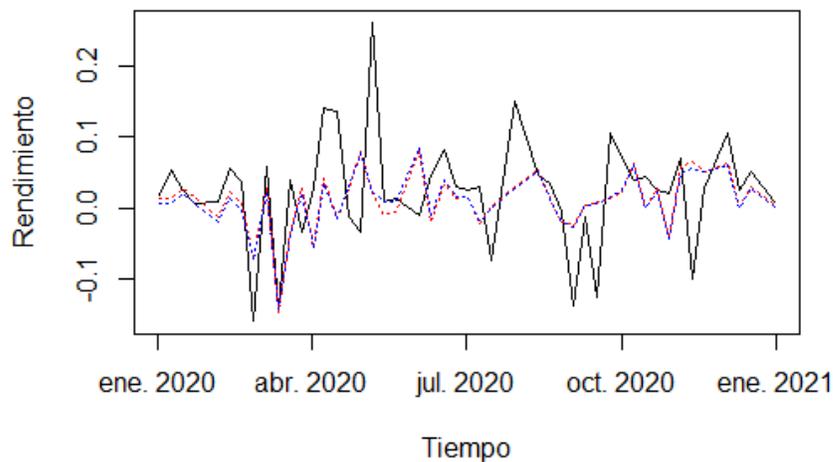
Figura 27. Pronóstico del CAPM y GARCH-M (2017 - 2019)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Con respecto a la Figura 27, sólo por cortos periodos de tiempo las predicciones de los modelos capturan correctamente el comportamiento del exceso de rendimiento. Particularmente cuando no existen movimientos tan bruscos, es cuando ambos pronósticos se desempeñan de mejor manera. Para el CAPM se obtuvo una diferencia absoluta de 4.67361 y en el caso del GARCH en media una de 4.62775. En comparación del subperiodo anterior, estos valores son mejores, reflejando una mejor adaptación de los modelos al proceso estocástico real. Además de lo anterior, el modelo CAPM acertó en un 53.73134% de las ocasiones el aumento o disminución del precio, en el caso del GARCH-M lo hizo en un total de 61.19403% de los registros. Para la siguiente comparación únicamente se toma un año con un total de 47 datos.

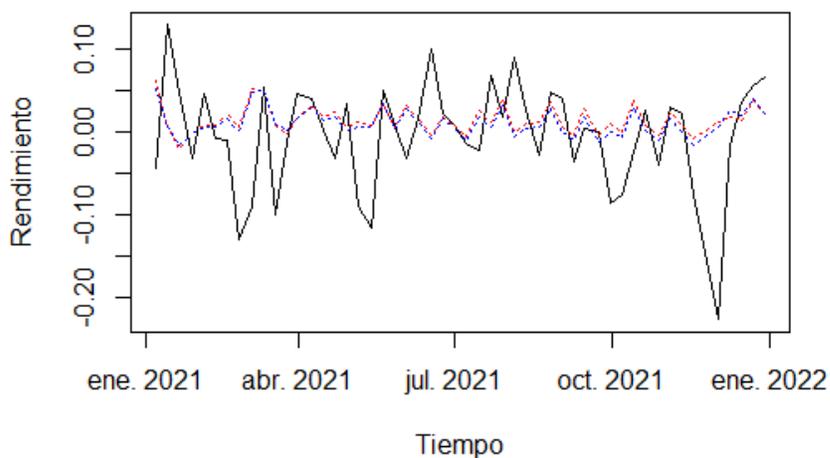
Figura 28. Pronóstico del CAPM y GARCH-M (2020)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Para este caso ambas variables pronosticadas parecen sobreponerse una sobre la otra, además de esto, se observa que simulan adecuadamente el exceso de rendimiento de Mercado Libre. Únicamente las fluctuaciones más grandes no son capturadas de manera adecuada por ninguno de los dos modelos. Esta eficiente simulación de los datos por parte del CAPM y del GARCH-M, se ve reflejada en la resta en valor absoluto entre la serie real y la predicción, ya que se obtiene un valor de 2.49024 y de 2.48261, respectivamente. Por parte de la efectividad para predecir el signo del rendimiento, se tiene que el modelo CAPM acertó el signo 30 veces mientras que el GARCH-M 32. A continuación, se muestran la gráfica de las tres series con un total de 51 observaciones.

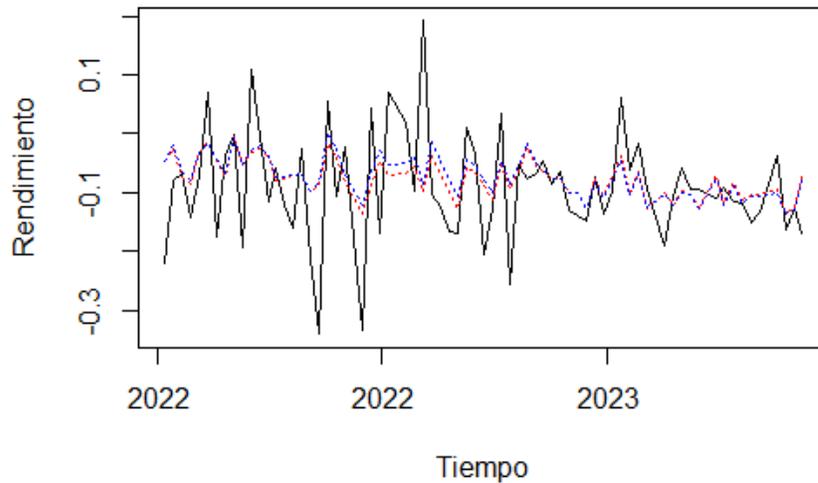
Figura 29. Pronóstico del CAPM y GARCH-M (2021)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

En la Figura 29 se observa que las dos variables pronosticadas por los modelos parecieran no imitar eficientemente el comportamiento de la serie real. Únicamente manteniéndose sobre la media de los valores, sin llegar a los picos que el proceso presenta. A pesar de que gráficamente no parece haber un buen ajuste, los valores de las restas entre la serie original y las proyectadas son reducidos. La diferencia absoluta para el CAPM es de 2.48698 y para el GARCH-M 2.44316. Respecto a la eficacia de los modelos para acertar en el aumento o disminución del precio, se tiene que el CAPM indicó correctamente el signo en un 60.78431% de los registros, mientras que GARCH-M en un 56.86275%. Por último, se tiene la comparación para el periodo más actual, con un total de 70 datos.

Figura 30. Pronóstico del CAPM y GARCH-M (2022 - 2023)



Fuente: Elaboración propia con R Core Team.

Con respecto al periodo de 2022 a 2023, se observa un comportamiento similar al previo. Uno donde los procesos simulados parecieran estar únicamente en la media de los datos, sin llegar a los valores donde el exceso de rendimiento tiene sus picos más elevados o más bajos. Además, se aprecia que las series pronosticadas por ambos modelos son parecidas, ya que gráficamente se observan una sobre la otra. A diferencia del caso anterior, en esta submuestra los valores de las restas no son tan reducidos, obteniendo una diferencia para el CAPM de 4.50724 y para el GARCH-M de 4.52268. En adición al análisis, se tiene que CAPM acertó un total de 40 veces el signo del exceso de rendimiento o lo que es lo mismo un 57.14286% de las ocasiones, mientras que el GARCH en media lo hizo 42 veces o un 60.00000% de las observaciones.

En términos generales, se observa que la implementación de un modelo GARCH en media al CAPM, genera pronósticos ligeramente superiores que los del CAPM. Esto se aprecia al comparar las diferentes medidas empleadas en el análisis. Para la serie completa de 289 registros, se tiene que el CAPM posee una diferencia absoluta de 20.52710 y el GARCH-M una de 20.24162. En el caso de predecir el aumento o disminución del exceso de rendimiento, el CAPM lo realizó correctamente en un 58.96552% de las veces, mientras que el GARCH en media tiene una eficiencia del 61.72414% con respecto al total. El contraste global, es que la especificación propuesta si resulta levemente superior a la original bajo el estudio de bondad de ajuste, diferencia absoluta entre la serie real y pronosticada y la predicción del signo.

CONCLUSIONES

Presentar de forma cronológica las ideas y trabajos que originaron el CAPM, permiten contextualizar y dar mayor comprensión al origen del modelo y de esta forma entender cuáles son sus principales características y como funciona la modelación del rendimiento de una acción. Secuencialmente, al enlistar los principales trabajos empíricos realizados sobre el CAPM, se detectan de inmediato las debilidades presentes en contextos reales. Destacando su bajo ajuste al momento de capturar el comportamiento de los retornos de activos financieros. Siendo esta una área de oportunidad a mejorar mediante la implementación de modelos estadísticos.

Dado que la propuesta de modelo requiere la comprensión de técnicas del análisis de series de tiempo, es necesario presentar los fundamentos de esta metodología y así garantizar su correcta aplicación. Principalmente, es fundamental conocer el concepto de series de tiempo para entender las ideas subsecuentes, tales como los procesos estacionarios y las diversas formas de verificar esta condición, la cual garantiza la no estimación de regresiones espurias. Dentro de la noción de estacionariedad, se encuentran los modelos estacionarios AR, de los cuales las especificaciones de volatilidad toman su estructura.

Dentro de la investigación financiera, un tema de interés es la medición de la volatilidad de los activos, la cual juega un papel crucial en la toma de decisiones. Por tal motivo, se han desarrollado diversos planteamientos que pueden describir y capturar este comportamiento. Una de las herramientas ampliamente usadas son los modelos de heteroscedasticidad condicional, como los ARCH y GARCH. Los cuales poseen la capacidad de imitar los cambios de volatilidad a lo largo del tiempo, lo que permite generar pronósticos precisos. Para emplearlos es necesario revisar toda la teoría para evitar llegar a conclusiones erradas.

Así, una vez comprendidas las bases teóricas, se puede emplear una extensión de las especificaciones de volatilidad para la construcción del modelo propuesto, los modelos ARCH y GARCH en media. La importancia de aplicar modelos GARCH-M en la relación entre los rendimientos y la volatilidad de Mercado Libre radica en su capacidad para capturar de manera precisa y realista las fluctuaciones inherentes a los mercados financieros, así como en su habilidad para reflejar la asimetría en la respuesta de la volatilidad ante diferentes condiciones del mercado.

Los precios de Mercado Libre exhiben una volatilidad que varía en el tiempo. Los modelos GARCH-M son capaces de capturar esta característica esencial al incorporar la volatilidad condicional en la ecuación media. Esto permite que el modelo se ajuste de manera más precisa a las fluctuaciones reales de los precios en diferentes períodos y refleje la naturaleza dinámica de los mercados. Adicionalmente, esta estructura reconoce la influencia mutua entre los rendimientos y la volatilidad con lo que se obtiene una representación más completa y precisa de como los movimientos en los precios están vinculados a las fluctuaciones de la volatilidad.

Entonces, considerando lo anterior y en combinación con la SML del CAPM, se captura de manera más precisa la dinámica de los precios de Mercado Libre y los cambios en la volatilidad condicional. Dada la especificación del modelo, se reúnen las variables necesarias para la estimación del CAPM y del GARCH-M. La base para la obtención de las series es la ecuación de la SML, la cual posee a tres elementos: r_i , r_f y r_m . Por lo tanto, se requieren los precios de cierre de la empresa Mercado Libre, para posteriormente estimar su rendimiento, la tasa CETES representando el activo libre de riesgo y el IPC tomando el papel del mercado. Así, después de un tratamiento a la base de datos, se obtienen un total de 290 registros que comprenden del 28 de febrero de 2008 al 8 de junio de 2023.

Antes de la estimación del modelo, se debe garantizar que no exista una raíz unitaria en los datos y así evitar una regresión falsa. En un primer análisis de estacionariedad, empleando pruebas gráficas, la DF y DFA, se concluye que ninguna de las tres variables es estacionaria. Como indica la literatura, existen diversas transformaciones matemáticas que permiten eliminar la raíz unitaria de una serie. Aprovechando que las variables necesarias para el modelo son excesos de rendimiento, se procede a su cálculo y revisión de estacionariedad. Empleando pruebas gráficas se observa la eliminación de la tendencia en los dos procesos y una FAC que disminuye a lo largo de los rezagos. Mediante las pruebas estadísticas formales como la DF, DFA y PP se confirma que las variables er_{ML_t} y er_{IPC_t} son estacionarias.

Dada la verificación de estacionariedad, se estima mediante el software EViews los coeficientes de regresión del CAPM, obteniendo la siguiente forma

$$er_{ML_t} = 0.01150_{ML} + 1.08411_{ML} \cdot er_{IPC_t} + \varepsilon_{ML_t}$$

De la regresión se tiene que ambos coeficientes resultan estadísticamente significativos a un nivel de significancia del 10%. Analizando el coeficiente beta se observa que es ligeramente mayor a uno, lo cual indica que Mercado Libre se clasifica como un activo financiero agresivo.

Como siguiente paso, se emplea la prueba ARCH-LM para examinar la presencia de efectos ARCH en la ecuación de media. Los resultados muestran la presencia de heteroscedasticidad en los datos, por consiguiente, se procede a la selección del mejor modelo de volatilidad. Comparando entre diferentes criterios de información, resulta que la especificación ideal es un GARCH(1,1) con distribución para el término de error GED (*Generalized Error Distribution*). Una vez obtenidos los coeficientes, se verifica la validez del modelo, para lo cual se estima una vez más la prueba de efectos ARCH, comprobando así que el modelo seleccionado ha capturado correctamente la volatilidad.

Después de evaluar el modelo ideal de volatilidad, sigue la elección de la mejor especificación del GARCH en media. Mediante los criterios de información proporcionados por EViews, se selecciona el modelo ideal, el cual es un GARCH-M que incluye la raíz cuadrada del GARCH. La estimación de esta especificación está representada de la siguiente manera

$$er_{ML_t} = -0.02553_{ML}^* + 1.01131_{ML}^* \cdot er_{IPC_t} + 0.43844_{ML} \sigma_t^2 + e_{ML_t}$$

Se tiene que tanto el coeficiente beta como la prima de riesgo son estadísticamente significativos fijando un nivel de significancia del 5%, mientras que el término constante no lo es. Si se realiza una vez más el análisis del coeficiente beta, se observa que el valor disminuyó, acercándolo más al uno. Lo que indica que Mercado Libre es un activo financiero neutro.

A continuación, se presentan más a detalle los resultados obtenidos del modelo CAPM y del GARCH-M:

Tabla 15. Resultados de la regresión del CAPM y GARCH-M

CAPM				GARCH-M			
Coef.	Estimación	t - estadística	Valor de p	Coef.	Estimación	z - estadística	Valor de p
α_{ML}	0.01150	1.90666	0.05760	δ_{ML}	0.43844	2.01721	0.04370
β_{ML}	1.08411	7.19718	0.00000	α_{ML}^*	-0.02553	-1.35336	0.17590
				β_{ML}^*	1.01131	8.09175	0.00000
R^2	0.15289	R^2 ajustado	0.14994	R^2	0.16757	R^2 ajustado	0.16175
CIA	-1.71326	CBS	-1.68789	CIA	-1.95377	CBS	-1.86496
HQ	-1.70309	d	2.06715	HQ	-1.91818	d	2.10595

Fuente: Elaboración propia con EViews.

Por parte de las primeras medidas de bondad de ajuste, se tiene que tanto la R^2 y el R^2 ajustado mejoran ligeramente para el GARCH en media, lo cual indica que se ajusta mejor a los datos. Siguiendo con los criterios de información, se observa que los tres son superiores para el segundo modelo, lo que señala que es una mejor opción para ajustar el exceso de rendimiento de Mercado Libre. Una forma de observar de manera numérica la mejora de la implementación es calcular en cada punto de tiempo la resta en valor absoluto entre la serie real y la pronosticada para diferentes lapsos de tiempo. En seguida se muestra un resumen con el total de las diferencias.

Tabla 16. Diferencias absolutas

	Total de datos	Dif. Abs. CAPM	Dif. Abs. GARCH-M
2008-2016	54	6.36903	6.16542
2017-2019	67	4.67361	4.62775
2020	47	2.49024	2.48261
2021	51	2.48698	2.44316
2022-2023	70	4.50724	4.52268

Fuente: Elaboración propia con EViews.

En general, se observa que el GARCH-M presenta valores más reducidos y en consecuencia con mejor ajuste. Si se comparan ambos pronósticos se tiene que el CAPM posee una diferencia absoluta de 20.52710 y el GARCH-M una de 20.24162, reafirmando una vez más la mejora. Un estudio complementario para medir la eficacia de los valores predichos es contar las veces en que acertaron el signo del rendimiento, lo cual puede ser de suma relevancia a la hora de realizar una inversión. Para el caso del CAPM se tiene que lo realizó correctamente en un 58.96552% de las

veces, mientras que el GARCH en media tiene una eficiencia del 61.72414% con respecto al total.

Un aspecto para destacar en primera instancia es que la ecuación SML efectivamente presenta el fenómeno de volatilidad condicional, esto implica que cualquier extensión de los modelos de heteroscedasticidad puede ser empleada para modelar este fenómeno. Como por ejemplo los modelos GARCH asimétricos, los cuales han sido desarrollados para superar las limitaciones de los GARCH tradicionales de asumir una respuesta simétrica de la volatilidad a los choques. Un ejemplo de lo anterior es el modelo desarrollado por Glosten, Jaganathan, and Runkle (1994), el cual permite que los efectos de las buenas y malas noticias tengan diferentes efectos sobre la volatilidad, la especificación es conocida como TGARCH (*threshold* - GARCH). Otro modelo que permite el efecto asimétrico de las noticias es el EGARCH (*exponential* - GARCH), desarrollado por Nelson en 1991 (Enders, 2014).

Con respecto del GARCH en media, se resalta el hecho de que la raíz cuadrada del GARCH resultó estadísticamente significativa, lo cual implica que la serie er_{ML_t} sí es determinada en cierta medida por su volatilidad y, además, ésta afecta de forma positiva al exceso de rendimiento. Lo anterior confirma el hecho de que la propuesta de mejora es adecuada, ya que esto es justamente lo que se espera, que en efecto exista una relación entre el riesgo y el rendimiento en los precios de los activos financieros, además, para este caso en particular, esta relación resulta incrementar de manera positiva al retorno.

Una implicación de cómo afecta esta implementación al CAPM se muestra en un elemento clave de este modelo. El coeficiente beta estimado por la especificación propuesta varía ligeramente con respecto al obtenido con la SML, siendo éste más parecido a la unidad, provocando el cambio de clasificación de Mercado Libre de un activo agresivo a uno neutro. Esta nueva estimación del beta podría ser una más adecuada si se toma en consideración que la ecuación que la origina se ajusta de mejor forma a los datos. Generando así una nueva medida de riesgo mejorada bajo la consideración anterior.

Los resultados anteriores concuerdan con los obtenidos en los trabajos desarrollados por Engle y Kroner (1995) y Chen y Firth (2005). En los cuales encontraron que la inclusión de la volatilidad condicional en el CAPM si mejora significativamente la capacidad del modelo para explicar los

rendimientos de los activos financieros. No obstante, en el trabajo de da Silva (2007) si existen algunas diferencias, en primera lugar el coeficiente de volatilidad condicional en la ecuación de media no resultó significativo, en segundo lugar, el valor de beta obtenido en el GARCH-M no varía mucho con respecto al del CAPM y finalmente el valor de R^2 y de CBS benefician al CAPM. A pesar de lo anterior da Silva señala que la elección final queda a cargo del investigador y con base en el CIA el modelo elegido es el GARCH en media, agregándole la ventaja de no presentar heteroscedasticidad condicional.

En términos generales, se observa que la implementación de un modelo GARCH en media al CAPM, genera pronósticos ligeramente superiores que este último, cumpliendo así el objetivo planteado. Lo anterior de igual forma se aprecia al comparar las diferentes métricas empleadas en el análisis. Por lo tanto, la hipótesis se cumplió de cierta forma, dado que si se logra apreciar una mejora en las diferentes medidas utilizadas, sin embargo, estas no resultan tan elevadas. No obstante, el aplicar la metodología GARCH en media al modelo CAPM si resulta un factor diferenciador en términos de mejorar el ajuste de los rendimientos de activos financieros.

La información generada por el modelo propuesto es fundamental para los inversionistas que se benefician al poder evaluar los niveles futuros del exceso de retorno de los activos. Principalmente es relevante el hecho de ser capaz de predecir el signo futuro con cierta certeza, ya que esto funciona como guía para los inversionistas y aminora el ambiente de incertidumbre al que están expuestos. Cabe señalar que los datos brindados por el modelo no son infalibles y existe margen de error, por tal, la decisión final de realizar o no un movimiento queda a decisión del agente económico. Así, los resultados deben ser tomados únicamente como parte de una estrategia de inversión.

Con respecto del nuevo coeficiente beta, se presenta como una alternativa al tradicional producido mediante la ecuación de la SML ya sea por regresión lineal o por el cociente. Implicando el hecho de que es obtenido mediante una especificación que logra mejores resultados de ajuste que su contraparte, se podría considerar que refleja de una mejor forma el riesgo sistemático al incluir la volatilidad condicional en su estimación. De esta forma se logra evaluar el riesgo asociado a los activos financieros de forma más precisa y así tomar decisiones informadas.

Como añadido, cabe mencionar que una limitante del modelo propuesto es que no es posible observar el pronóstico del precio ni del rendimiento del activo. Esto debido a la construcción del CAPM, ya que los valores estimados futuros estarán compuestos por la resta entre el rendimiento del instrumento y la tasa libre de riesgo. Así, únicamente es posible tener la proyección del exceso de rendimiento. Esta situación debe ser considerada al momento de implementar la propuesta en una estrategia de inversión.

Otro elemento para considerar son las posibles exenciones del modelo, como se menciona, dado que la SML presenta efectos ARCH se puede emplear cualquier especificación de la familia GARCH, los cuales podrían ser capaces de capturar de mejor forma el fenómeno de volatilidad condicional y así, brindar un mayor ajuste del GARCH en media. Dentro de las opciones de mejora a la propuesta está la inclusión de variables *dummies* para reflejar los posibles quiebres estructurales que son comunes en algunas series financieras.

En relación con las futuras áreas de investigación, queda pendiente realizar este mismo análisis para otras empresas, principalmente para reafirmar los hallazgos sobre pronósticos y la estimación del nuevo coeficiente beta. Para observar si los resultados son consistentes o en todo caso clasificar que tipo de comportamiento deben poseer los precios de las empresas para replicar los descubrimientos. Lo anterior debido a que en el estudio de da Silva (2007) no se llegaron a las mismas conclusiones que en el presente trabajo de investigación. De esta forma se refirman los hallazgos y se descarta la posibilidad de que solo se obtienen con los precios de Mercado Libre. En adición, resultaría interesante efectuar el estudio utilizando los precios de las empresas que tienen una mayor participación dentro del IPC. En una primera instancia, se podría esperar que el exceso de rendimiento del mercado explicara de mejor forma a estas empresas, sin embargo, habría que revisar las implicaciones metodológicas y la validez de estos resultados.

En resumen, la investigación ha conseguido cumplir con el objetivo e hipótesis planteados al comienzo del estudio, entregando una herramienta útil para estrategias de inversión y gestión del riesgo. Se emplean dos áreas de conocimiento, tanto financieras como actuariales, que en conjunto lograron producir un modelo más eficiente para ajustar el exceso de rendimiento de los activos financieros. Además, ha quedado pendiente variedad de estudios futuros que seguramente entregarán resultados igual de satisfactorios. Por lo tanto, el presente análisis puede tomarse

como un punto de partida para académicos, estudiantes de actuaría y la comunidad financiera en general.

BIBLIOGRAFÍA

Abril, J. C. (2011). Análisis de la evolución de las técnicas de series de tiempo: Un enfoque unificado. *Estadística (Santiago de Chile)*, 63(181), 5-56. Recuperado de <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/71449>

Aguilar, A., Diego, M., Elizondo, R. y Roldán, J. (2020). Dinámica de la Prima por Plazo y sus Determinantes: El Caso Mexicano. *Documentos de Investigación del Banco de México*. Recuperado de <https://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-prensa/documentos-de-investigacion-del-banco-de-mexico/%7BE9D95139-F2B9-770B-BA38-A9168BD7F6E4%7D.pdf>

Allen, F., Myers, S. C. y Brealey, R. A. (2009). *Principios de finanzas corporativas* (9a. ed.). Editorial McGraw-Hill.

Ang, A. y Chen, J. (2005). CAPM over the long run: 1926-2001. *Journal of Empirical Finance*, 14, 1-40. Recuperado de <https://www.nber.org/papers/w11903>

Arce Borda, R. (2004). 20 años de modelos ARCH: una visión de conjunto de las distintas variantes de la familia. *Estudios de Economía Aplicada*, 22(1), 1-27. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30122111>

Astaiza Gómez, J. G. (2012). El teorema de la separación de Tobin: información del primer semestre de 2008 del mercado accionario colombiano. *AD-minister*, (21), 135-154.

Banco de México. (s.f.). Bolsa Mexicana de Valores, Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) [Conjunto de datos]. Recuperado de Sistema de Información Económica. <https://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?sector=7&accion=consultarCuadroAnalitico&idCuadro=CA54&locale=es>

Banco de México. (s.f.). Valores Gubernamentales – (CF107) [Conjunto de datos]. Recuperado de Sistema de Información Económica.

<https://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF107§or=22&locale=es>

BBVA México. (s.f.). ¿Qué es un riesgo de inversión? Puntos clave para evitarlo. Recuperado de <https://www.bbva.mx/educacion-financiera/ahorro/que-es-un-riesgo-en-una-inversion.html#riesgo-alto>

Barrón Cornejo, A., Centurión Cruz, M., Iwaya Kanashiro, A., López Velásquez, G. y Román Vergara, F., (2020). *Sustentación de caso: análisis y diagnóstico de mercado libre* (Trabajo de fin de curso, Universidad de Lima, Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas). Recuperado de <https://hdl.handle.net/20.500.12724/12559>

Bera, A. K. y Higgins, M. L. (1993). ARCH models: properties, estimation and testing. *Journal of economic surveys*, 7(4), 305-366.

Botello Peñaloza, H. A. y Guerrero Rincón, I. (2021). Modelo CAPM para valorar el riesgo de los inversionistas a partir de la información contable antes y después de las NIIF en los bancos de Colombia. *17*(1), 122-135. Recuperado de <https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.1.7242>

Bolsa Mexicana de Valores. (s.f.). Acerca de. Recuperado de <https://www.bmv.com.mx/es/grupo-bmv/acerca-de>

Bolsa Mexicana de Valores. (s.f.). Empresas listadas. Recuperado de <https://www.bmv.com.mx/es/emisoras/perfil/-6910>

Bolsa Mexicana de Valores. (s.f.). IPC. Recuperado de <https://www.bmv.com.mx/es/bmv/busqueda/ipc?tab=0>

Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance* (2a. ed.). Editorial Cambridge University Press.

Castañeda González, F. y Aguirre Álvarez, J. P. (2014). *Manual de finanzas corporativas* (2a. ed.). Editorial Universidad de Santiago de Chile.

Chen, N. y Firth, M. (2005). Multivariate GARCH in Mean: A Value-at-Risk Application. *Journal of Financial Econometrics*, 3(1), 19-44.

Cowpertwait, P. S. P. y Metcalfe, A. V. (2009). *Introductory Time Series with R*. Editorial Springer.

Cryer, J.D. y Chan, K. (2008). *Time Series Analysis with Applications in R* (2a. ed.). Editorial Springer.

Czerwinski, F. (2014). *Valoración de Activos, con enfoque sobre CAPM y APT* (Universidad Pontificia de Comillas, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales). Recuperado de <https://repositorio.comillas.edu/xmlui/bitstream/handle/11531/400/TFG000189.pdf?sequence=4&isAllowed=y>

da Silva Alves, J. (2007). Análise comparativa e teste empírico da validade dos modelos CAPM tradicional e condicional: o caso das ações da Petrobrás. *Revista Ciências Administrativas*, 13(1), 147-157. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475647703011>

Díaz Contreras, C. A. e Higuera Cartes, F. H. (2012). Contraste empírico del CAPM en el mercado accionario chileno. *Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería*, 20(2), 255-266. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77225001012>

El Economista. (31 de marzo de 2014). ¿Qué factores influyen en el precio de acciones y CFDs?. *El Economista*. Recuperado de <https://www.economista.com.mx/mercados/Que-factores-influyen-en-el-precio-de-acciones-y-CFDs-20140331-0126.html>

El Universal. (26 de Octubre de 2007). La historia de la Bolsa Mexicana. *El Universal*. Recuperado de <https://archivo.eluniversal.com.mx/notas/457518.html>

Enders, W. (2014). *Applied Econometric Time Series* (4ta. ed). Editorial John Wiley & Sons.

Engle, R. F. y Kroner, K. F. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11(1), 122-150.

Engle, R. F., Lilien, D. M., y Robins, R. P. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 55(2), 391-407.

Engle, R. F. y Ng, V. K. (1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *The Journal of Finance*, 48(5), 1749-1778.

Feigelson, E. (2014). astrodatR: Astronomy Datasets for R. Versión del paquete de R 0.1, <http://CRAN.R-project.org/package=astrodatR>

Ferguson, M. F. y Shockley, R. L. (2003). Equilibrium ‘Anomalies’. *The Journal of Finance*, 58(6), 2549-2580.

Fernández, V. (2005). El modelo CAPM para distintos horizontes de tiempo. *Revista Ingeniería de Sistemas*, 19.

Financiera Nacional de Desarrollo Agropecuario, Rural, Forestal y Pesquero. (s.f.). Administración de Riesgos. Recuperado de [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/435086/Revelacion de Informacion AR 2018-12.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/435086/Revelacion_de_Informacion_AR_2018-12.pdf)

Flórez Ríos, L. S. (2008). Evolución de la Teoría Financiera en el Siglo XX. *Ecos de Economía*, 12(27), 145-168. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=329027263004>

Francq, C., y Zakoian, J. M. (2010). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Editorial John Wiley & Sons.

García, B. J. (2013). *Inversiones financieras: selección de carteras, teoría y práctica*. Editorial Ediciones Pirámide.

Gaytán Cortés, J. (2018). Clasificación de los riesgos financieros. *Mercados y Negocios*, (38), 123-136. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=571864088006>

GBM Academy. (2022). CETES: ¿Qué son, para qué sirven y cómo invertir en ellos?. Recuperado de <https://gbm.com/academy/cetes-que-son-para-que-sirven-y-como-invertir-en-ellos/>

González Martínez, L. (2019). *Optimización del riesgo en carteras de inversión* (Trabajo de fin de Grado, Ingeniería en Tecnología Industriales). Recuperado de https://oa.upm.es/54151/1/TFG_LUIS_ANTONIO_GONZALEZ_MARTINEZ.pdf

González Videgaray, M. C. (2011). *Pronósticos: Metodología de Box-Jenkins*. Editorial Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Acatlán.

Granger, C. W. (2004). Análisis de series temporales, cointegración y aplicaciones: discurso pronunciado en el acto de entrega del premio Nobel de Economía 2003. *RAE: Revista Asturiana de Economía*, (30), 197-206.

Granger, C. W. y Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of econometrics*, 2(2), 111-120.

Graves, S. (2019). FinTS: Companion to Tsay (2005) Analysis of Financial Time Series. Versión del paquete de R 0.4-6, <https://CRAN.R-project.org/package=FinTS>

Greene, W. H. (2003). *Econometric analysis* (5a. ed.). Editorial Prentice Hall.

Guerrero Castanedo, E. (2014). *Fundamentos teoría moderna de portafolio y su aplicación en el mercado de capitales de México "Utilizando factores microeconómicos (CAPM) y macroeconómicos (APT), periodo 2008 - 2012"* (Ensayo para obtener el grado de especialista en economía monetaria y financiera, Universidad Nacional Autónoma de México).

Gujarati, D. N. y Porter, D. C. (2010). *Econometría* (5a. ed.). Editorial McGraw-Hill.

Heij, C., Boer, P., Franses, P. H., Kloek, T. y Dijk, H. K. V. (2004). *Econometric Methods with Applications in Business and Economics*. Editorial Oxford University Press.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (s.f.). Remuneraciones [Conjunto de datos]. Recuperado de Encuesta Nacional de Empresas Constructoras (ENEC). https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/interactivos/?px=ENEC_ENTIDAD_3&bd=ENEC

Kantun Uc, O. J. (2019). *Series de tiempo cointegradas y una aplicación* (Tesis, Universidad Autónoma de Yucatán). Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Orlando-Uc-2/publication/335825923_Series_de_tiempo_cointegradas_y_una_aplicacion/links/5d7da6754585155f1e4de425/Series-de-tiempo-cointegradas-y-una-aplicacion.pdf

Korkmaz, T. (2019). Modeling volatility with generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Economics and Political Economy*, 6(2), 212-222.

Kristjanpoller Rodríguez, W. y Liberona Maturana, C. (2010). Comparación de modelos de predicción de retornos accionarios en el Mercado Accionario Chileno: CAPM, FAMA y

FRENCH y REWARD BETA. *EconoQuantum*, 7(1), 119-138. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=125015197005>

Latorre Bisén, A. T. (2016). *Valoración de títulos bursátiles mediante el modelo CAPM*. Recuperado de <http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/96823/1/TFG-ADE-Latorre-AlejandroTomas-feb16.pdf>

Lintner, J. (1965). Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. *The Journal of Finance*, 20(4), 587-615.

Lumby, S. y Jones, C. (2011). *Corporate Finance - Theory and Practice* (8a. ed.). Editorial Cengage Learning EMEA.

Lütkepohl, H. y Krätzig, M. (2004). *Applied Time Series Econometrics*. Editorial Cambridge University Press.

Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, (7), 77-91.

Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio Selection: efficient diversification of investments*. Editorial John Wiley & Sons.

Markowitz, H. M. (1999). La historia temprana de la teoría del portafolios 1600 a 1960. *Revista Contaduría y Administración*, (195), 13-30.

Medina, L. Á. (2003). Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano. *Cuadernos de economía*, 22(39), 129-168.

Mejía Carvajal, O. D. (2002). Discusión Sobre La Teoría Moderna Del Portafolio: Aplicación De La Internacionalización Del Portafolio, Incluyendo El Caso Colombiano. *Estudios Gerenciales*, 18(83), 107-123.

Mercado Libre. (s.f.). Historia de Mercado Libre: nuestros primeros pasos, nuestro recorrido. Recuperado de <https://www.mercadolibre.com.mx/institucional/somos/historia-de-mercado-libre>

Miller, M. y Scholes, M. (1972). Rate of Return in Relation to Risk: A Reexamination of Some Recent Findings. *Studies in the Theory of Capital Markets*, 47-78.

Negrete García, G. (2019). *Modelo de valoración de precios de activos (modelo CAPM)* (Trabajo de fin de grado, Universidad de Cantabria). Recuperado de <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/17502/TFG%20Negrete%20Garc%C3%ADa,%20G.pdf?sequence=1>

Osorio García, D. (2016). *Flujo de carga probabilístico con estimación de la carga utilizando técnicas de series de tiempo y redes neuronales* (Trabajo de grado, Universidad Tecnológica de Pereira). Recuperado de <https://repositorio.utp.edu.co/items/ecce44af-4b2a-4acc-885b-5bf8186c9250>

Pfaff, B. (2008). *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R* (2a. ed.). Editorial Springer.

Pinzón, J. E. D. (2018). Modelos media móvil simple y media móvil exponencial como pronóstico de la acción de isa. *FACE: Revista de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales*, 18(1), 44-52. Recuperado de <https://ojs.unipamplona.edu.co/ojsviceinves/index.php/face/article/view/506>

Qiu, D. (2015). aTSA: Alternative Time Series Analysis. Versión del paquete de R 3.1.2, <https://CRAN.R-project.org/package=aTSA>

R Core Team (2023). R: A language and environment for statistical computing (Versión 4.2.3) [Software]. Recuperado de R Foundation for Statistical Computing: <https://www.R-project.org/>

Romero Moreno, C. (2011). *La Teoría Moderna de Portafolio: Un Ensayo Sobre Sus Formulaciones Originales y Sus Repercusiones Contemporáneas (Modern Portfolio Theory: An Essay on Their Original Formulations and its Contemporary Implications)* (in Spanish). *ODEON*, (1). Recuperado de https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1865976

Schwert, G. W. (1989). Why Does Stock Market Volatility Change Over Time? *The Journal of Finance*, 44(5), 1115-1153.

Shumway, R. H. y Stoffer, D. S. (2011). *Time Series Analysis and Its Applications* (3a. ed.). Editorial Springer.

Svetlozar, T., Stefan, Frank, J., Sergio, M. y Teo Jašić (2007). *Financial Econometrics From Basics to Advanced Modeling Techniques*. Editorial John Wiley & Sons.

S&P Dow Jones Indices LLC. (2023). S&P 500 [Conjunto de datos]. Recuperado de FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis. <https://fred.stlouisfed.org/series/SP500>

Tsai, C. L., Chan, C. H., y Lee, C. H. (2017). Modelling the volatility of the Asian stock markets using a fractionally integrated asymmetric power ARCH model. *Quantitative Finance*, 17(2), 297-312.

Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series* (2a. ed.). Editorial John Wiley & Sons.

Tsay, R. S. (2013). *An Introduction to analysis of financial data with R*. Editorial John Wiley & Sons.

Weston, F. y Brigham, E. (1994). *Fundamentos de la Administración Financiera*. Editorial McGraw-Hill.

Wooldridge, J. M. (2010). *Introducción a la econometría Un enfoque moderno* (4a. ed.). Editorial Cengage Learning.

Wuertz, D., Setz, T. y Chalabi, Y. (2022). fUnitRoots: Rmetrics - Modelling Trends and Unit Roots. Versión del paquete de R 4021.80, <https://CRAN.R-project.org/package=fUnitRoots>

Yahoo! finanzas. (s.f.). Datos históricos (MELIN.MX) [Conjunto de datos]. Recuperado de Precios históricos. <https://es-us.finanzas.yahoo.com/quote/MELIN.MX/history?p=MELIN.MX>

ANEXOS

La siguiente liga almacena en tres diferentes carpetas todos los archivos necesarios para replicar las gráficas, simulaciones y hallazgos de la investigación.

<https://drive.google.com/drive/folders/1deZ8vwj7f-hNrn4aCR-xDHsxgkRLeN9K?usp=sharing>