



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO



FACULTAD DE INGENIERÍA

Doctorado en Ciencias de la Ingeniería

**Contribución al estudio de la estabilidad
robusta de sistemas con retardos temporales**

Tesis:

**Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias de la Ingeniería
Sistemas Dinámicos**

Presenta:

Luis Felipe Ramírez Jerónimo

Director de tesis:

Dra. Martha Belem Saldívar Márquez

Director de tesis:

Dr. Alfonso Baños Torrico

Tutor Adjunto

Dr. Juan Carlos Ávila Vilchis

Toluca de Lerdo, Estado de México, septiembre del 2023.

Resumen

El análisis y control de sistemas dinámicos, es un área de investigación en auge, debido a las repercusiones que tienen en aplicaciones prácticas. Entre las muchas limitantes e investigaciones pendientes que se identifican en la literatura del control automático, en este trabajo de investigación se aborda el problema de análisis y control de sistemas en los que se identifican retardos temporales. Además, se proponen soluciones eficientes las cuales son capaces de alcanzar su objetivo a pesar que se presenten incertidumbres paramétricas o limitación en la información de entrada.

En el Capítulo 1 se presenta el marco teórico que sirve como base para el entendimiento del contenido de la tesis, se definen conceptos básicos de la teoría que permite el desarrollo de los procedimientos descritos.

En el Capítulo 2 se presenta el diseño de un control por modos deslizantes para la estabilización de sistemas con retardos temporales sujetos a perturbaciones acopladas. Para el análisis de estabilidad se emplea una extensión de la teoría de Lyapunov para sistemas con retardos, lo que mejora los resultados al no utilizar aproximaciones de modelo o simplificaciones. El enfoque propuesto se pone a prueba con el estudio de un ejemplo académico y un caso de aplicación práctica, además, se compara con un controlador encontrado en la literatura.

En el Capítulo 3 se presenta el diseño de un control adaptable que estabiliza un sistema con retardos e incertidumbres paramétricas, con acceso parcial al estado del sistema. La limitación en el acceso al estado completo es resuelta mediante el uso de la integración, con lo cual se establece un subsistema que se estabiliza con una ley de adaptación, basada en el modelo de referencia de control adaptable. Se demuestra que la ley de control estabiliza al sistema original y es probada la efectividad del enfoque en un ejemplo académico.

En el Capítulo 4 se presenta el diseño de un control conmutado basado en la acción de reset, el cual es planteado con la idea de mejorar el desempeño de un sistema en lazo cerrado bajo una ley de control no lineal, en este caso un control por modos deslizantes. Se busca que cuando el error en la salida sea grande, un control se sume al existente y así el error sea menor. Cuando el error se acerque a el equilibrio, la señal de control extra es desconectada mediante la acción de reset, con lo que se asegura que solo trabaja el control por modos deslizantes. El sistema formado se considera un sistema híbrido y se garantiza la estabilidad con el planteamiento de

un análisis basado en Lyapunov. Se evalúa el desempeño del enfoque propuesto en un ejemplo de aplicación práctica. Además, el enfoque se aplica al caso de sistemas con retardo en el estado.

Finalmente se presentan las conclusiones generales de este trabajo de investigación y se plantean algunas perspectivas de trabajo futuro como consecuencia de los desarrollos aquí presentados.

Abstract

The analysis and control of dynamical systems is a growing area of research due to the implications on practical applications. Among the many limitations and remaining research identified in the automatic control literature, this research work addresses the problem of analysis and control of systems in which time delays are identified. Furthermore, efficient solutions are proposed which are able to achieve the established control objective despite parametric uncertainties or limited input data.

Chapter 1 presents the theoretical framework which provides the basis for the understanding of the content of the thesis, defining basic concepts of the theory that allows the development of the described procedures.

Chapter 2 presents the design of a sliding mode controller for the stabilisation of time-delay systems with coupled disturbances. An extension of the Lyapunov theory for systems with delays is used for the stability analysis, which improves the results by avoiding model approximations or simplifications. The proposed approach is tested with the study of an academic example and a practical application case, moreover it is compared with a controller found in the literature.

Chapter 3 presents the design of an adaptive controller that stabilises a system with delays and parametric uncertainties, with partial access to the system state. The lack of whole state knowledge is solved by integration, whereby a subsystem is stabilised with an adaptive law, based on the model reference adaptive control. The control law is shown to be effective in stabilising the original system, the effectiveness of the approach is tested in an academic example.

Chapter 4 presents the design of a switched controller based on the reset action, which is proposed with the idea of improving the performance of a closed-loop system under a non-linear control law, in this case a sliding mode controller. The aim is that when the error in the output is large, a control is added to the existing one and thus the error becomes smaller. When the error approaches to equilibrium, the extra control signal is switched off by the reset action, thus ensuring that only sliding mode control works. The system formed is considered a hybrid system and stability is ensured by a Lyapunov-based analysis approach. The performance of the proposed approach is evaluated in a practical application example. In addition, the approach is applied to the case of systems with state delay.

Finally, the general conclusions of this research work are presented and some perspectives for future work are raised as a consequence of the developments presented here.

Contenido

	Página
Resumen	II
Abstract	IV
Índice de figuras	VIII
Nomenclatura	X
Introducción	1
1. Marco teórico	4
1.1. Sistemas con retardos temporales	4
1.1.1. Problema de valor inicial	5
1.1.2. Concepto de estado	6
1.2. Existencia y unicidad	7
1.3. Propiedades de continuidad	8
1.4. Estabilidad	9
1.4.1. Conceptos de estabilidad para sistemas con retardos	10
1.4.2. Extensiones de la teoría de Lyapunov para sistemas con retardos	11
1.5. Controlabilidad de sistemas con retardos	14
1.6. Estado del arte	15
2. Estabilización robusta de sistemas con retardos mediante el diseño de control por modos deslizantes	21
2.1. Introducción	22
2.2. Planteamiento del problema	24
2.3. Determinación de condiciones de estabilidad	26
2.4. Diseño del controlador por modos deslizantes	29
2.4.1. Controlador por modos deslizantes de primer orden	30
2.4.2. Controlador por modos deslizantes de segundo orden	32

2.5. Ejemplos	32
2.5.1. Ejemplo académico	32
2.5.2. Ejemplo de aplicación práctica: estabilización de la combustión en motores de cohetes de propulsión líquida	36
2.5.3. Ejemplo académico: análisis comparativo	41
2.6. Conclusiones del capítulo	45
3. Estabilización robusta de sistemas con retardos mediante el diseño de control adaptable	46
3.1. Introducción	47
3.2. Planteamiento del problema	49
3.3. Diseño de control	49
3.4. Simulaciones numéricas	54
3.4.1. Ejemplo académico	54
3.4.2. Ejemplo de aplicación práctica: un reactor químico con sistema de reciclado	57
3.5. Conclusiones del capítulo	59
4. Diseño de control basado en reset para mejorar la respuesta del control por modos deslizantes	61
4.1. Introducción	61
4.2. Preliminares y planteamiento del problema	64
4.2.1. Marco de inclusiones híbridas	64
4.2.2. Propuesta de configuración del control: controlador por modos deslizantes	65
4.3. Nuevo control híbrido	66
4.4. Análisis de estabilidad	69
4.5. Caso de estudio: regulación de un Sistema Aerodinámico Angular	71
4.5.1. Control por modos deslizantes	72
4.5.2. Control híbrido	73
4.5.3. Simulaciones numéricas	73
4.6. Conclusiones del capítulo	76
Conclusiones	78
Bibliografía	81

Índice de figuras

	Página
1.1. Problema del valor inicial. Se muestra la evolución en las trayectorias de un sistema $(x(t, t_0, \phi))$, para calcular dicha evolución se conoce un pedazo de trayectoria ϕ y se muestra que es exponencialmente estable ya que $\forall t, \ x(t, t_0, \phi)\ \leq \beta \phi e^{-\alpha(t-t_0)}$	6
1.2. Plano complejo con las regiones de estabilidad [1].	10
2.1. Respuesta del sistema (2.23) en lazo cerrado con el SMC de primer orden. Se muestra que la salida del sistema en lazo cerrado con el control tiende a cero (superficie de deslizamiento establecida) en tres segundos.	34
2.2. Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.24).	34
2.3. Señal de control para el sistema (2.23).	34
2.4. Respuesta del sistema (2.23) bajo el control super-twisting.	35
2.5. Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.24).	35
2.6. Señal del SMC Super-twisting (2.23).	35
2.7. Respuesta del sistema (2.23) en lazo cerrado con el SMC de primer orden considerando la aproximación definida en (2.25) con $c = 150$	36
2.8. Señal de control del SMC de primer orden y la aproximación (2.25) con $c = 50$	36
2.9. Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley de control de primer orden.	39
2.10. Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.27). La línea roja es el SMC de primer orden original y la línea azul es el SMC de primer orden considerando la aproximación (2.25) con $c = 50$	39
2.11. Señal del controlador para el sistema (2.26). La línea roja es la señal del SMC de primer orden original y la línea azul la señal del SMC de primer orden considerando la aproximación (2.25) con $c = 50$	40
2.12. Respuesta del sistema (2.26) en lazo cerrado con el SMC de segundo orden.	40
2.13. Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.27). Super-twisting SMC.	40
2.14. Señal del controlador de segundo orden.	41
2.15. Respuesta del sistema (2.28) en lazo cerrado con el SMC de segundo orden (2.29).	42
2.16. Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.30) correspondiente al SMC de segundo orden (2.29).	43

2.17. Señal del controlador (2.29).	43
2.18. Respuesta del sistema (2.28) en lazo cerrado con el controlador de segundo orden (2.10), (2.13), (2.21).	44
2.19. Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.31).	44
2.20. Trayectoria del controlador definido por las ecuaciones (2.10), (2.13), (2.21).	44
3.1. Salidas del sistema controlado.	55
3.2. Parámetros estimados del modelo de referencia.	55
3.3. Señales de control y error obtenidas en la simulación del sistema (3.29).	55
3.4. Trayectorias del sistema controlado con una incertidumbre en el retardo.	56
3.5. Trayectorias del sistema (3.29) en lazo cerrado con el controlador propuesto en [2].	57
3.6. Respuesta del sistema controlado, alcanzando la referencia x_{ref}	57
3.7. Seguimiento de trayectoria del sistema 3.29, control y error.	58
3.8. Trayectorias del sistema controlado por el enfoque propuesto.	59
3.9. Señal de control $u(t)$ aplicado al reactor.	59
4.1. Representación de las bandas de reset.	68
4.2. Sistema de control en lazo cerrado.	69
4.3. Sistema aerodinámico angular	72
4.4. Respuesta del SAA en lazo cerrado con el SMC (línea roja) y con el esquema de control basado en reset propuesto (línea negra).	74
4.5. Evolución del SMC definido en la Sección 4.5.1.	75
4.6. Evolución del HC definido en la Sección 4.5.2.	75
4.7. Respuesta del sistema en lazo cerrado con el SMC con un cambio abrupto en el valor de la referencia para diferentes valores de las ganancias de control.	76
4.8. Respuesta del sistema en lazo cerrado con el controlador basado en reset propuesto bajo un cambio abrupto de referencia para diferentes valores de ganancias de control.	76
4.9. Señal del SMC bajo un cambio abrupto de referencia con $\phi = 50$ y $k_1 = 19$	77
4.10. Controlador basado en reset bajo un cambio abrupto en el valor de la referencia de $\phi = 50$ y $k_1 = 19$	77

Nomenclatura

Matrices y vectores

A_i, B_i	Matrices de estado
M^T	Matriz transpuesta
$Q > 0$	Matriz simétrica definida positiva
$Q \geq 0$	Matriz simétrica semidefinida positiva
$Q < 0$	Matriz simétrica definida negativa
$Q \leq 0$	Matriz simétrica semidefinida negativa
*	Dentro de una matriz, elementos simétricos

Espacios y conjuntos

\mathbb{R}	Conjunto de números complejos
\mathbb{C}	Conjunto de números reales
\mathbb{R}^n	Espacio euclidiano n -dimensional con norma $ \cdot $
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espacio de matrices reales con dimensión $m \times n$ y con la norma $ \cdot $
\mathbb{R}^+	Conjunto de números reales no negativos
\mathbb{Z}	Conjunto de números enteros
\mathbb{Z}^+	Conjunto de números enteros no negativos

\mathbb{N}	Conjunto de números naturales
\mathbb{S}_n	Conjunto de matrices simétricas
\mathbb{S}_n^+	Conjunto de matrices simétricas definidas positivas
\dot{z}, \ddot{z}	La primera y segunda derivada con respecto al tiempo de z
$x : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$	Donde $x(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$
$\mathcal{C}[a, b]$	El espacio de funciones continuas $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con la norma $\ \phi\ _C = \max_{\theta \in [a, b]} \phi(\theta) $

Introducción

Una herramienta fundamental del control automático es el análisis de estabilidad mediante el cual se determinan, con el uso de herramientas matemáticas condiciones ideales de operación para un sistema. El análisis de estabilidad puede ser aplicado a sistemas físicos (mecánicos, eléctricos, entre otros) descritos por modelos matemáticos, que son representaciones paramétricas de las interacciones de las variables de un sistema (entradas y salidas) y que muestran su comportamiento con respecto al tiempo.

Los modelos matemáticos deben representar los sistemas físicos de forma precisa, de tal forma que los análisis de estabilidad realizados con base en los modelos sean aplicables a los sistemas físicos. Entonces la caracterización de las variables y el conocimiento del valor cuantitativo de cada uno de los parámetros de los modelos se convierte en un punto de partida fundamental.

Debido a la dificultad en la caracterización de los modelos, la descripción de algunos sistemas es llevada a cabo mediante aproximaciones o linealizaciones; esta incertidumbre en la parametrización da lugar a una adecuación en el valor de los parámetros, para los cuales se considera que su valor se encuentra dentro de un intervalo. Otro de los retos en la formulación del modelo es la existencia de algunas dinámicas en el fenómeno físico que no se pueden caracterizar y para introducirlas se considera que están expuestas a variables externas (perturbaciones), que a pesar de no estar caracterizadas, deben estar acotadas para así tener un modelo adecuado.

Los modelos matemáticos que caracterizan a sistemas físicos se expresan típicamente en términos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Además de las EDO, las Ecuaciones Diferenciales Funcionales también se ocupan para modelar sistemas físicos aunque son menos comunes que las anteriores.

Un tipo de sistemas definidos mediante Ecuaciones Diferenciales Funcionales son los sistemas con retardos temporales, los cuales, en general se pueden definir como sistemas que para su caracterización necesitan de valores pasados de sus variables; las herramientas matemáticas requeridas para su análisis son limitadas debido a la condición infinito-dimensional (infinito número de soluciones de la ecuación característica) presente en este tipo de sistemas.

Mediante la teoría de control es posible plantear análisis para modelos de sistemas con retardos temporales que contienen incertidumbres paramétricas y pertur-

baciones. En este tipo de análisis (conocidos como análisis robustos) se proponen condiciones que aseguren la estabilidad del sistema con retardos a pesar de que existan incertidumbres en los parámetros o perturbaciones [3], [4], [5], [6].

Controlar o supervisar el comportamiento de fenómenos físicos ha sido una tarea intrínseca del ser humano, y a consecuencia de esta búsqueda, ha desarrollado la teoría de control. Una de sus partes fundamentales es el análisis de estabilidad, mediante el cual se asegura que el comportamiento de un sistema sea el que se requiere, o por lo menos cercano a éste.

Los sistemas con retardos temporales son objeto de estudio de diversas investigaciones en distintas áreas del conocimiento por ejemplo [7]:

- Diseño Automotriz
- Termofluidos
- Redes hidráulicas
- Redes eléctricas
- Estructuras (construcción)
- Sistemas robóticos teleoperados
- Crecimiento poblacional
- Procesos de manufactura
- Procesos biológicos y médicos (epidemias, tratamientos)

Entonces los análisis de estabilidad teóricos de modelos de sistemas con retardos temporales impactan directamente en la generación de estudios para casos específicos, y al considerar análisis robustos, es posible aplicar los resultados a problemas físicos que presentan incertidumbres o perturbaciones.

En este trabajo de investigación se busca proponer análisis de estabilidad robusta que deriven en condiciones de estabilidad para sistemas representados mediante ecuaciones diferenciales con retardos temporales. Para garantizar que las propuestas planteadas sean novedosas, se realizará una documentación bibliográfica de la literatura sobre los análisis existentes de estabilidad robusta. Las condiciones de estabilidad obtenidas serán validadas mediante demostraciones matemáticas.

Hipótesis

Es posible replantear algunos resultados de estabilidad y control para sistemas libres de retardo establecidos en la literatura para abordar el problema de estabilidad y estabilización robusta de sistemas con retardos.

Objetivos

Contribuir al estudio de estabilidad robusta de sistemas con retardos, mediante la derivación de condiciones de estabilidad y diseño de controladores capaces de operar en presencia de incertidumbres paramétricas, desconocimiento parcial del estado o perturbaciones acopladas.

Objetivos específicos:

- Documentar los distintos enfoques propuestos en la literatura para el análisis de estabilidad robusta de sistemas con retardos temporales.
- Proponer criterios para el análisis de estabilidad y diseñar controladores robustos para sistemas con retardos temporales.
- Validar la efectividad de los enfoques de control propuestos a través del desarrollo de simulaciones numéricas.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Sistemas con retardos temporales

La descripción matemática de sistemas dinámicos es usualmente expresada en términos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en las cuales el comportamiento del proceso presenta la forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado y la derivada representa la evolución de las variables de estado con respecto al tiempo [1], [8].

De un sistema dinámico que se describe mediante la ecuación con la forma (1.1), se establece la presunción fundamental de que el valor actual de las variables de estado determina completamente la evolución futura de las trayectorias del sistema, esto es, de las variables de estado $x(t)$, $t_0 \leq t < \infty \forall t_0$, su valor queda completamente definido con base en la condición inicial establecida $x(t_0) = x_0$ [1], [8], [9].

En determinados casos, el modelado mediante EDO no es suficiente para conocer el comportamiento de algunos sistemas dinámicos, ya que la evolución de las variables de estado $x(t)$ no depende únicamente del valor actual sino que además de los valores previos, la solución se construye a partir tomando como base un pedazo de trayectoria la cual se erige como la condición inicial del sistema $x(\theta)$, $t_0 - h \leq \theta \leq t_0$. Si estas condiciones se presentan se dice que el sistema esta sujeto a retardos temporales [10]. Los retardos temporales en los sistemas son generalmente debidos a procesos que involucran transporte de materia, energía o información [1], [4], [5].

La representación matemática de sistemas con retardos temporales es llevada a cabo mediante Ecuaciones Diferenciales Funcionales (EDF) que se presentan en la forma [9]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(g(t))) \quad (1.2)$$

en donde por lo menos uno de los argumentos de la ecuación es dependiente de una función $g(t)$ y no depende directamente del tiempo t a diferencia de las EDO [1], [7], [11].

Las EDF permiten hacer descripciones de sistemas en los cuales la tasa de cambio en el estado esta asociada a argumentos diferentes al estado actual. Este tipo de ecuaciones se clasifican en tres: de tipo retardadas, neutrales y avanzadas [7], [11].

EDF retardada. El sistema es dependiente de valores presentes y pasados de la variable de estado.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h)$$

EDF neutral. El sistema es dependiente del valor presente y pasado de la variable de estado, así como de sus derivadas.

$$\dot{x}(t) + B\dot{x}(t-h) = Ax(t) + A_1x(t-h)$$

EDF avanzada. El sistema es dependiente de valores presentes y futuros de la variable de estado. En la naturaleza no es posible encontrar fenómenos definidos mediante esta descripción matemática.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t+h)$$

Los estudios encontrados en el estado del arte se centran en los tipos retardados y neutrales, dentro de este trabajo se desarrollan criterios para los sistemas de tipo retardado. A continuación se presenta una breve introducción a la teoría de sistemas con retardos de tipo retardado.

1.1.1. Problema de valor inicial

Un sistema descrito por EDO, encuentra solución particular partiendo de condiciones iniciales dadas, es decir, el valor en un instante de tiempo inicial t_0 y su estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Esta información no es suficiente para determinar la solución de un sistema descrito por las EDF retardada o EDF neutral, (véase la Figura 1.1). Los sistemas de tipo retardado establecen su solución con un momento inicial $t_0 \geq 0$, una función inicial $\phi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Con esto en mente, para sistemas con retardos temporales el problema de valor inicial se define como:

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \theta \in [-h, 0]$$

donde ϕ es una función perteneciente a un espacio funcional, el cual, que puede ser un espacio de funciones continuas, $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ un espacio de funciones continuas por trozos $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ o algún otro espacio funcional [7], [12], [13].

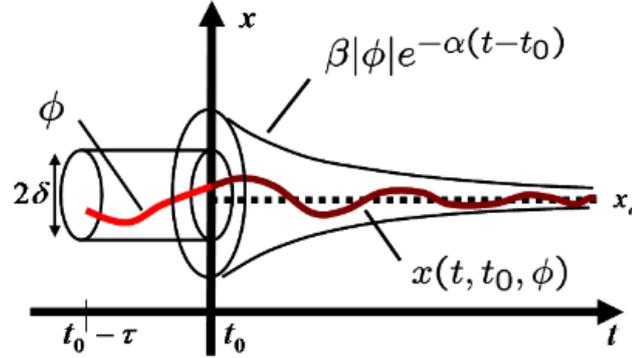


Figura 1.1: Problema del valor inicial. Se muestra la evolución en las trayectorias de un sistema $(x(t, t_0, \phi))$, para calcular dicha evolución se conoce un pedazo de trayectoria ϕ y se muestra que es exponencialmente estable ya que $\forall t, \|x(t, t_0, \phi)\| \leq \beta|\phi|e^{-\alpha(t-t_0)}$

Dependiendo del espacio funcional se debe definir el tipo de norma, por ejemplo la correspondiente norma euclidiana para vectores y matrices. En el caso del espacio $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ se presenta la norma estándar uniforme [12], [13],

$$\|\phi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\phi(\theta)\|$$

El que la función inicial pertenezca a un espacio funcional se puede interpretar como que los sistemas con retardos son parte de una clase de sistemas infinito dimensionales (número infinito de soluciones en su ecuación característica). Por otro lado, ya que las trayectorias del sistema yacen en \mathbb{R}^{n+1} , es posible afirmar que también pueden ser tratados como finito-dimensionales [7], [9], [12], [13].

1.1.2. Concepto de estado

El estado del sistema para un instante de tiempo dado $t_1 \geq t_0$ debe contener información mínima para permitir continuar con la dinámica en $t \geq t_1$ [1], [7], [9], [12], [13].

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales para un sistema con retardos es necesario conocer un pedazo de trayectoria previa $x(t_1 + \theta)$ con $\theta \in [-h, 0]$ para calcular la solución para $t \geq t_1$. En otras palabras, el estado de un sistema para un instantes de tiempo $t \geq t_0$ definido como la restricción a la solución del segmento $[t - h, t]$, expresada con la siguiente forma

$$x_t : \theta \rightarrow x(t + \theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Para casos donde la condición inicial debe ser indicada de forma explicita se utiliza la notación $x(t, t_0, \phi)$ y $x_t(t_0, \phi)$ [7], [9].

1.2. Existencia y unicidad

En un sistema con retardos la dinámica depende del estado retardado $x(t-h)$ y del estado completo x_t , por lo que se dice que el sistema no es una función sino una funcional que esta definida en un espacio funcional particular [9], [12]. Un procedimiento generalizado para calcular la solución de un sistema con retardos se presenta en esta sección [12], [13].

Definición 1 Dada una funcional

$$F : PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

se dice que es continua en el punto $\phi_0 \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ la desigualdad $\|\phi - \phi_0\|_h < \delta$ implica que

$$\|F(\phi) - F(\phi_0)\| < \epsilon.$$

La funcional F se dice que es continua en el conjunto $\Phi \subset PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ si es continua en cada punto del conjunto.

El sistema con retardos se define como

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.3}$$

donde

$$f : [0, \infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

Teorema 1 ([9], [12]) Dado un sistema con retardos (1.3) donde la funcional (1.4) satisface las siguientes condiciones:

- Para cualquier $H > 0$ existe $M(H) > 0$ tal que

$$\|f(t, \phi)\| \leq M(H), \quad (t, \phi) \in [0, \infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n), \quad y \|\phi\|_h \leq H;$$

- La funcional $f(t, \phi)$ es continua para el conjunto $[0, \infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ respecto a ambos argumentos;
- La funcional $f(t, \phi)$ satisface la condición de Lipschitz respecto al segundo argumento, es decir, para cualquier $H > 0$ existe una constante de Lipschitz $L(H) > 0$ tal que la desigualdad

$$\|f(t, \phi^{(1)}) - f(t, \phi^{(2)})\| \leq L(H) \|\phi^{(1)} - \phi^{(2)}\|_h$$

se cumple para todo $t \leq 0$, $\phi^{(k)} \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ y $\|\phi^{(k)}\|_h \leq H$, $k = 1, 2$. Entonces para un instante de tiempo dado $t_0 \geq 0$ y la función inicial $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ existe $\tau > 0$ de tal forma que el sistema acepta una única solución $x(t)$ del problema de valor inicial y la solución es definida en el segmento $[t_0 - h, t_0 + \tau]$

La prueba del Teorema 1 puede encontrarse en [12].

Teorema 2 *Sea el sistema (1.3) que satisface las condiciones del Teorema 1. Se supone además que $f(t, \phi)$ cumple con la desigualdad*

$$\|f(t, \phi)\| \leq \eta(\|\phi\|_h), \quad t \geq 0, \quad \phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$$

donde la función $\eta(r)$, $r \in [0, \infty)$, es continua, no decreciente y tal que para cualquier $r_0 \geq 0$ la condición siguiente se mantiene:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r_0}^R \frac{dr}{\eta(r)} = \infty.$$

Entonces cualquier solución $x(t, t_0, \phi)$ del sistema esta definida en $[t_0, \infty)$.

La prueba del Teorema 2 puede encontrarse en [13].

1.3. Propiedades de continuidad

A continuación se exponen las propiedades de continuidad para las soluciones del sistema (1.3) en consideración a condiciones iniciales y a perturbaciones del sistema [9], [12]. Estas propiedades se establecen con base en el Teorema 3

Teorema 3 ([9], [12]) *Suponiendo que $f(t, \phi)$ cumple con las condiciones del Teorema 1. Sea $x(t, t_0, \phi)$ una solución del sistema 1.3 tal que*

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Dado un sistema con perturbaciones

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t),$$

en el que la funcional $g(t, \phi)$ es continua para el conjunto $[0, \infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, satisface la condición de Lipschitz respecto al segundo argumento y

$$\|g(t, \phi)\| \leq m \quad t \geq 0, \quad \phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

sea $y(t, t_0, \Psi)$ la solución del sistema perturbado con la condición inicial

$$y(t_0 + \theta) = \Psi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

si las soluciones son definidas para $t \in [t_0 - h, t_0 + T]$, y si H es tal que

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq H, \quad \|y(t, t_0, \Psi)\| \leq H, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + T],$$

entonces la desigualdad

$$\|x(t, t_0, \phi) - y(t, t_0, \Psi)\| \leq \|x_t(t_0, \phi) - y_t(t_0, \Psi)\|_h \left(\|\Psi - \phi\|_h + \frac{m}{L(H)} \right) e^{L(H)(t-t_0)}$$

se mantiene para $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Corolario 1 Sea $g(t, \phi) \equiv 0$; por lo tanto $m = 0$, $x(t, t_0, \phi)$ y $y(t, t_0, \Psi)$ son soluciones del sistema (1.3). Se supone que estas soluciones están definidas para $t \in [t_0, t_0 + T]$. Para cualquier ϵ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\Psi - \phi\|_h < \delta$, entonces la siguiente desigualdad se cumple:

$$\|x(t, t_0, \phi) - x(t, t_0, \Psi)\| < \epsilon \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Dicho de otra forma, $x(t, t_0, \phi)$ depende continuamente de ϕ .

Corolario 2 Sea $\Psi(\theta) = \phi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$; lo que indica que las soluciones $x(t, t_0, \phi)$ y $y(t, t_0, \Psi)$ comparten las mismas condiciones iniciales. Se asume que las soluciones están definidas para $t \in [t_0, t_0 + T]$. Para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $m < \delta$, entonces

$$\|x(t, t_0, \phi) - y(t, t_0, \phi)\| < \epsilon, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Lo que indica que $x(t, t_0, \phi)$ depende continuamente de la parte derecho del sistema (1.3).

1.4. Estabilidad

La continuidad en el comportamiento dinámico de las interacciones del sistema esta relacionado con la estabilidad, es decir, si se presentan en las variables de entrada o condiciones iniciales pequeñas perturbaciones, un sistema estable presentaría modificaciones despreciables en el comportamiento de su respuesta de salida. Por otro lado, si se presentan perturbaciones en las variables de entrada o condiciones iniciales en un sistema inestable, por despreciable que parezca, causará que las salidas o estados sistema crezcan sin límite, lo cual en la práctica constituiría un sistema quemado, desintegrado o saturado [1]. Esta situación hace que garantizar la estabilidad sea una condición necesaria en el diseño de sistemas de control para sistemas dinámicos que realizan operaciones o procesan señales [1], [8], [13].

En las investigaciones desarrolladas dentro de la teoría de control, el estudio de condiciones de estabilidad es uno de los principales temas planteados por los investigadores desde sus orígenes. Para sistemas descritos por EDO lineales de dimensión finita se aplican nociones de estabilidad conocidas basadas en conceptos básicos desarrollados y es posible caracterizar a la estabilidad por medio de términos algebraicos [1], [8]. Como ejemplo, es bien conocido que la estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo está garantizada determinando la posición de todas las raíces del polinomio característico del sistema, esto es, deben encontrarse en la parte izquierda del plano complejo (véase Figura 1.2).

Sin embargo, para los sistemas no lineales o descritos por EDF existen comportamientos variados y los métodos de clasificación que se realiza para los sistemas lineales no es posible ya que no es posible conocer la solución explícita de este tipo

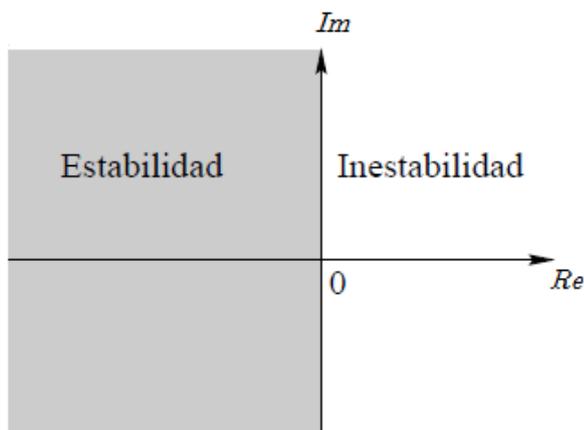


Figura 1.2: Plano complejo con las regiones de estabilidad [1].

de sistemas. Obtener condiciones de estabilidad en un sistema donde no se conocen explícitamente las soluciones es una propuesta en el estudio de sistemas no lineales o particulares, en este sentido, el punto de partida clave son las contribuciones realizadas por Lyapunov [1]. El método directo o segundo método de análisis de estabilidad permite encontrar condiciones locales y globales de estabilidad, fundamentadas en una función de energía y la capacidad del sistema para disipar la misma [7], [14].

Los teoremas propuestos por Lyapunov permiten determinar condiciones de estabilidad con base en la propuesta funciones de energía (conocidas como funciones de Lyapunov) que captan la naturaleza del sistema al evaluar su comportamiento en el tiempo se puede establecer la estabilidad local, así como global. El segundo método de Lyapunov o análisis de la disipación de energía es usado en el diseño de los métodos de control no lineal con aplicación a sistemas con dimensión finita [1], [7].

1.4.1. Conceptos de estabilidad para sistemas con retardos

Para sistemas con retardos se han extendido las definiciones de estabilidad tomando en cuenta el problema de valor inicial y conceptos previamente mencionados [1], [7].

A continuación se presentan los conceptos de estabilidad para el sistema (1.3). Suponiendo que los sistemas cumplen con las condiciones del Teorema 1 y que acepta una solución trivial, $f(t, 0_h) \equiv 0$, para $t \geq 0$, donde 0_h se refiere a la solución trivial, $0 : \theta \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in [-h, 0]$.

Definición 2 ([12]) *La solución trivial del sistema (1.3) se dice que es estable si para cualquier $\epsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\delta(\epsilon, t_0)$ de tal forma que para cada función inicial*

$\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, $\|\phi\|_h < \delta(\epsilon, t_0)$, la siguiente desigualdad se cumple:

$$\|x(t, t_0, \phi)\| < \epsilon, \quad t \geq t_0.$$

Si $\delta(\epsilon, t_0)$ puede elegirse independientemente de t_0 , entonces la solución trivial se dice es uniformemente estable.

Definición 3 ([12]) El sistema (1.3) tiene una solución trivial asintóticamente estable si el valor para cualquier $\epsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\Delta(\epsilon, t_0) > 0$ de tal forma que para cada función inicial $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, con $\|\phi\|_h < \delta(\epsilon, t_0)$, las siguientes condiciones se cumplen:

1. $\|x(t, t_0, \phi)\| < \epsilon$, para $t \geq t_0$.
2. $x(t, t_0, \phi) \rightarrow 0$ cuando $t - t_0 \rightarrow \infty$.

Si puede elegirse $\Delta(\epsilon, t_0)$ independiente del instante t_0 y existe $H_1 > 0$ tal que $x(t, t_0, \phi) \rightarrow 0$ cuando $t - t_0 \rightarrow \infty$, uniformemente con respecto a $t_0 \geq 0$ y $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, con $\|\phi\|_h < H_1$, entonces la solución trivial se dice que es uniformemente asintóticamente estable.

Definición 4 ([12]) La solución trivial del sistema (1.3) se dice que es exponencialmente estable si existe $\Delta > 0$, $\sigma > 0$ y $\gamma \geq 1$ tal que para cada $t_0 \geq 0$ y cualquier función inicial $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, con $\|\phi\|_h < \delta_0$, la siguiente desigualdad se cumple (véase Figura 1.1):

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq \gamma \|\phi\|_h e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

1.4.2. Extensiones de la teoría de Lyapunov para sistemas con retardos

La investigación “*The general problem of motion stability*” desarrollada por Alexandr Mikhailovich Lyapunov a fines del siglo XIX [13], establece los métodos de análisis de estabilidad, conocidos como primer método o el método de linealización y segundo método o el método directo, que constituyen la Teoría de estabilidad de Lyapunov [1]. El primer método ofrece conclusiones, mediante aproximaciones lineales, de la estabilidad local alrededor de un punto de equilibrio de sistemas no lineales. Acerca del método directo, es considerada como la herramienta más trascendente en los análisis de sistemas no lineales [1], [9], [11], [12].

El enfoque de Lyapunov no puede ser aplicado directamente para sistemas con retardos temporales, para tal caso algunas modificaciones han sido propuestas. La extensión de la teoría de Lyapunov a resultados aplicables a sistemas con retardos temporales es propuesta en los trabajos de Nikolai Nikolaevich Krasovskii y Boris Sergeevich Razumikhin, ya que para analizar estos sistemas es necesario tomar en cuenta las propiedades básicas mencionadas anteriormente (véase sección 1.1.1). Antes de continuar con la descripción de los enfoques, es conveniente establecer las siguientes definiciones [1], [9], [11], [12].

Definición 5 Una función $V_1(x)$ se dice que es positiva definida si existe $H > 0$ tal que la función es continua en el conjunto $\{x \mid \|x\| \leq H\}$ y y satisface las condiciones siguientes:

1. $V_1(0) = 0$
2. $V_1(x) > 0$ para $0 < \|x\| \leq H$

Definición 6 Se dice que una funcional $V(t, \phi)$ es positiva definida si existe $H > 0$ de tal forma que se cumplen las condiciones siguientes.

1. La funcional $V(t, \phi)$ esta definida en $t \geq 0$ y cualquier $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\phi\|_h \leq H$.
2. $V(t, 0_h) = 0, t \geq 0$.
3. Existe una función definida positiva $V_1(x)$ tal que

$$V_1(\phi(0)) \leq V(t, \phi), \quad t \geq 0, \quad y \quad \phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n), \quad \|\phi\|_h \leq H.$$

4. Para cualquier tiempo inicial dado $t_0 \geq 0$ la funcional $V(t_0, \phi)$ es continua en ϕ en el punto 0_h , es decir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\|\phi\|_h < \delta$ implica

$$|V(t_0, \phi) - V(t_0, 0_h)| = V(t_0, \phi) < \epsilon$$

Con las ideas previamente establecidas se describen a continuación los enfoques propuestos por Razumikhin y Krasovskii.

Enfoque de Lyapunov-Razumikhin [9]: Considerando una función diferenciable $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ con derivada dada por:

$$\dot{V}(t, x(t)) = \frac{d}{dt}V(t, x(t)) = \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} f(t, x_t)$$

Teorema 4 (Teorema de Lyapunov-Razumikhin [9]) Suponga que las funciones continuas no decrecientes $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, para $s > 0$ $u(s)$ y $v(s)$ son positivas, y para $u(0) = v(0) = 0$, v es estrictamente creciente. Un sistema con retardos tiene una solución trivial uniformemente estable si existe una función diferenciable $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida positiva, tal que satisface

$$u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|),$$

y de tal manera que la derivada de V para la solución $x(t)$ del sistema con retardos satisface

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|) \text{ si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)) \quad \forall \theta \in [-h, 0]$$

Si, también, $w(s) > 0$ con $s > 0$, y una función no decreciente $\rho(s) > s$ existe para $s > 0$ cumpliendo con la siguiente condición

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|) \text{ si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq \rho(V(t, x(t))) \quad \forall \theta \in [-h, 0]$$

siendo así que la solución trivial es uniformemente asintóticamente estable, si además, $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, entonces es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Enfoque de Lyapunov-Krasovskii [9]: Sea $V : [0, \infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional continua y la solución $x(t, \phi)$ del sistema con retardos con la condición inicial $x(t_0 + \theta) = x_t(\theta) = \phi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, donde el espacio de funciones $\phi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en $[-h, 0]$. Se establece la derivada $\dot{V}(t, \phi)$ tal que:

$$\dot{V}(t, \phi) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, \phi)) - V(t, \phi)]$$

si $\dot{V}(t, \phi)$ no es definida positiva, denotaría que la solución $x(t, \phi)$ no crece con el tiempo t , por lo tanto el sistema es estable.

Teorema 5 (Teorema de Lyapunov-Krasovskii [9]) *Suponga que las funciones $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continuas no decrecientes, para $s > 0$ $u(s)$ y $v(s)$ son positivas, y $u(0) = v(0) = 0$. Si existe una funcional continua $V : [0, \infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+$, la solución trivial de un sistema con retardos es uniformemente estable, la que es definida positiva, satisfaciendo*

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_h),$$

y también, que no sea positiva la derivada cumpliendo

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|).$$

Si para $s > 0$ $w(s) > 0$, entonces la solución trivial es uniformemente asintóticamente estable, si además $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, entonces es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Además la solución trivial es exponencialmente estable si $V(t, \phi)$ es definida positiva y existen constantes α_1, α_2 para las cuales

$$\alpha_1 \|\phi(0)\|^2 \leq V(t, \phi) \leq \alpha_2 \|\phi\|_h^2, \quad \forall t \geq 0,$$

tal que exista una constante $\sigma > 0$ que cumpla

$$\frac{d}{dt} V(t, \phi) + 2\sigma V(t, \phi) \leq 0$$

Las pruebas de los teoremas pueden encontrarse en [13], [9].

En otras palabras podemos resumir la idea principal y resaltar las diferencias de los enfoques anteriores como:

1. El enfoque de Lyapunov-Krasovskii propone reemplazar las funciones clásicas de Lyapunov que dependen de un estado instantáneo $x(t)$, del sistema por funcionales que dependen del estado completo x_t .
2. El enfoque de Lyapunov-Razumikhin, se basa en las funciones de Lyapunov clásicas pero con una condición inicial que tolera la comparación de los valores $x(t)$ y $x(t-h)$, y facilita condiciones de negatividad para la derivada con respecto al tiempo de las funciones a lo largo de las soluciones del sistema.

La mayoría de los resultados basados en el enfoque de Lyapunov-Krasovskii requieren de conocimiento suficiente de matemáticas, ya que el manejo de funcionales pueden complicarse. Entre las diversas herramientas matemáticas en el contexto destaca el uso de la desigualdad de Jensen [1], [15] propuesta en la proposición siguiente.

Proposición 1 (Desigualdad de Jensen) *Para cualquier función continua $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con escalares $a, b > 0$ y R una matriz definida positiva de dimensión $n \times n$ lo siguiente se cumple:*

$$\int_a^b \vartheta^T(s)R\vartheta(s)ds \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \vartheta^T(s)ds R \int_a^b \vartheta(s)ds$$

1.5. Controlabilidad de sistemas con retardos

Con base en [16], se presenta una metodología para encontrar los índices de controlabilidad.

Considere un sistema lineal, invariante en el tiempo con retardos en el estado, entrada y salidas (los retardos son múltiplos de h).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + \dots + A_ax(t-ah) \\ &\quad + B_0u(t) + B_1u(t-h) + \dots + B_bu(t-bh) \\ y(t) &= C_0x(t) + C_1x(t-h) + \dots + C_cx(t-ch) \end{aligned} \tag{1.5}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, a, b y $c \in \mathbb{N}$.

La solución de las ecuaciones de estado (1.5) necesita las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x(t) = \phi(t)$ para $-ah \leq t < 0$.

Definición 7 [16] *El sistema (1.5) es \mathbb{R}^n -controlable en el instante inicial t_0 si para cualquier $\phi \in PC([-ah, 0], \mathbb{R}^n)$, $x_0 = x(0)$ y x_1 , existe $t_1 > 0$ y un control $u(t)$, $t \in [0, t_1]$ tal que $x(t_1) = x_1$.*

Note que

- Si $x_1 = 0$, se conoce como controlabilidad en el origen.
- Esta definición expresa la controlabilidad solo del cruce por cero del estado, es decir del cruce por x_1 .

La caracterización de la controlabilidad necesita las siguientes matrices de orden $\mathbb{R}^{n \times m}$,

$$Q_{k+1}(j) = \sum_{i=0}^R A_i Q_k(j-i) \quad (1.6)$$

con

$$\begin{aligned} Q_0(i) &= B_i, \quad i = 0, 1, \dots, R \\ Q_k(j) &= 0 \quad \text{si } k < 0 \text{ o } j < 0 \end{aligned}$$

donde $R = \max\{a, b\}$, $A_i = 0$ para $i > a$ y $B_i = 0$ para $i > b$. Estas matrices tienen las siguientes propiedades:

- $Q_k(j) = 0$ para $j > (k+1)R$,
- Para todo $j \in \mathbb{N}$, $Q_n(j) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^j \alpha_{ip^j} Q_i(p)$ donde $\alpha_{ip^j} \in \mathbb{R}$.

Teorema 6 *El sistema (1.5) es \mathbb{R}^n -controlable si y solo si*

$$\begin{aligned} \text{rango}[Q_0(0), Q_0(1), \dots, Q_0(R), Q_1(0), Q_1(1), \dots, Q_1(2R), \dots \\ \dots, Q_{n-1}(0), \dots, Q_{n-1}(nR)] = n \end{aligned}$$

1.6. Estado del arte

A principios de siglo XX, se propusieron algunos modelos matemáticos descritos por ecuaciones diferenciales con retardos [17], [18]. Fue hasta la década de 1950 cuando se desarrollaron los primeros análisis de estabilidad para sistemas con retardos, los cuales se clasifican generalmente como enfoques en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo [19], [18].

En el dominio de la frecuencia los métodos que determinan estabilidad del sistema se basan en el análisis de la posición de las raíces de la ecuación característica y se dividen en dos categorías: métodos analíticos (criterio de Hurwitz, criterio de Pontryagin) y métodos gráficos (método D-particiones, método de τ -particiones) [20]. Los métodos en el dominio de la frecuencia son considerados rápidos computacionalmente, pero necesitan de simplificaciones para su aplicación y no es posible incluir no linealidades [19], [21].

Los dos enfoques en el dominio del tiempo más utilizados fueron presentados a finales de la década de 1950. Estos enfoques se basan en extensiones de la teoría

de Lyapunov para sistemas retardados y se conocen como Lyapunov-Krasovskii y Lyapunov-Razumikhin. Sin embargo, su popularidad inició hasta la década de 1990 con la presentación de las soluciones basadas en ecuaciones de Ricatti, desigualdades matriciales lineales (LMI por sus siglas en inglés) y toolboxes de Matlab[®] [18], [22]. De ambos, el enfoque de Lyapunov-Krasovskii es actualmente la herramienta de análisis de estabilidad para sistemas lineales y no lineales más utilizada debido a que se han incluido recientemente manipulaciones matemáticas que permiten reducir su conservadurismo (propio de los análisis basados en el método directo de Lyapunov).

El enfoque de Lyapunov-Krasovskii se basa en el método directo de Lyapunov en el que se proponen candidatas a funcionales que deben cumplir ciertas restricciones y mediante el análisis de su derivada se obtienen las condiciones suficientes de estabilidad dependientes de LMI [5], [6], [10], [23]. En general, se busca obtener el valor máximo admisible del retardo que garantice la estabilidad del sistema. Para obtener la forma de LMI se hace uso de transformaciones algebraicas que implican aproximaciones de términos integrales que imprimen conservadurismo en las condiciones de estabilidad obtenidas [3], [5], [10].

El conservadurismo inherente del enfoque ha llevado al desarrollo de diversas investigaciones durante los últimos años; algunos de los trabajos destacados incluyen el uso de la desigualdad de Jensen, la desigualdad de Wirtinger y las desigualdades de Bessel-Legendre [5] [6], [10], [24]. El uso de este tipo de herramientas matemáticas, ha motivado que diversas investigaciones se enfoquen en la propuesta de alternativas, como el uso de particiones en el retardo o transformaciones de modelo, que buscan cada vez disminuir el conservadurismo del enfoque [25].

Las técnicas para el análisis de estabilidad se han extendido para los casos de sistemas con retardos variantes en el tiempo y sistemas con retardos invariantes en el tiempo [4], [23], [24], pero la estabilidad está restringida por el tipo de condiciones obtenidas, es decir, si las condiciones de estabilidad son dependientes o independientes del retardo, ya que los resultados de uno y otro tipo de condiciones son diferentes y no garantizan la reducción del conservadurismo en cada uno de los casos [4], [5].

El análisis de estabilidad robusta es utilizado cuando se identifican incertidumbres (paramétricas, dinámicas) o perturbaciones en el modelo de un sistema. El análisis garantiza que un sistema es robustamente estable si su comportamiento es tolerante a cambios para cotas específicas de perturbaciones y cuando las condiciones de estabilidad se satisfacen para todos los valores de los parámetros dentro de los intervalos definidos [4], [6], [26], [19]. Algunos enfoques de análisis de sistemas retardados sin incertidumbres o perturbaciones se han extendido para establecer criterios de estabilidad robusta [22], [19].

En las últimas décadas se han identificado diversas aplicaciones prácticas descritas mediante sistemas con retardos temporales, lo cual ha intensificado las investigaciones enfocadas al desarrollo de controladores para este tipo de sistemas. Algunos de estos enfoques se adaptan de estudios previos desarrollados para sistemas libres de retardos, como ejemplos se tienen: diseño de control por estabilización [7], control H_∞ [27], control tolerante a fallos [28], control por modos deslizantes [29], control adaptable, control de costo garantizado (guaranteed-cost control), filtrado H_∞ , filtrado Kalman, control reseteado y control estocástico [30]. Cabe destacar que los controladores antes mencionados incluyen como parte fundamental de su desarrollo un análisis de estabilidad y al ser sistemas con aplicaciones prácticas (perturbaciones o incertidumbres) incluye análisis de robustez [18].

A continuación se describen algunos trabajos recientes concernientes al estudio de estabilidad robusta en sistemas con retardos temporales.

En [10] un sistema con retardo variante en el tiempo e incertidumbres politópicas es analizado. Con base en un nuevo tipo de funcional de Lyapunov-Krasovskii es propuesto un criterio de estabilidad que se complementa con el diseño de un controlador en lazo cerrado, con ello se asegura la estabilidad del sistema para un retardo máximo. El criterio es expresado en términos de LMI y su desempeño se muestra mediante su aplicación en dos ejemplos académicos que muestran una reducción en el conservadurismo con respecto a previos trabajos que usan los mismos ejemplos, esto se traduce en el límite más alto del valor del retardo obtenido.

Sistemas con retardos variantes en el tiempo e incertidumbres de norma acotada son estudiados en [27], donde se propone un control robusto H_∞ . La ley de control robusto H_∞ de estado realimentado se obtiene analizando la factibilidad de una LMI planteada con base en la propuesta de una novedosa desigualdad integral. Dos ejemplos muestran la efectividad del método propuesto. El desarrollo está fundamentado en el uso de una aproximación del estado retardado, el análisis de estabilidad se establece con una función de Lyapunov. El uso de una aproximación aunado al análisis de Lyapunov implican un aumento en el conservadurismo de los resultados.

En [31] es presentado un criterio de estabilidad robusto para un sistema de redes neuronales recurrentes en tiempo discreto (discrete-time recurrent neural networks DRNNs) con retardos variantes en el tiempo y perturbaciones no lineales. Este criterio es desarrollado mediante una funcional de Lyapunov-Krasovskii, una novedosa desigualdad de suma (summation inequality) y la desigualdad de Wintinger. Las condiciones suficientes propuestas son expresadas en términos de LMI y se muestra la efectividad con un ejemplo numérico que compara sus resultados con los existentes en la literatura. El método es novedoso y presenta mejoras a trabajos presentados con anterioridad, sin embargo, el enfoque se desarrolla en específico para un sistema,

esto limita su aplicación e impacto.

En [32] es propuesta una funcional de Lyapunov-Krasovskii aumentada que mejora el desempeño en los análisis de estabilidad de sistemas con retardos, la cual permite establecer un criterio de estabilidad novedoso basado en dos términos tipo producto retardado (delay-product-type terms). En este trabajo se presenta además una comparativa del conservadurismo obtenido con una funcional clásica acotada mediante el uso de las desigualdades de Jensen y de Wintinger contra los resultados obtenidos con el nuevo enfoque en un ejemplo numérico. Se concluye que proponer una mejora a la candidata de Lyapunov-Krasovskii puede reducir considerablemente el conservadurismo comparado con los métodos de acotamiento (desigualdades de Jensen y de Wintinger).

En [33] se propone un control para la estabilización robusta de sistemas inciertos con retardos discretos y distribuidos bajo realimentación de estado saturado mediante un nuevo enfoque politópico y la representación de la no linealidad con una combinación convexa de la realimentación de estado y retardos distribuidos auxiliares. Además se utiliza una funcional de Lyapunov-Krasovskii aumentada y desigualdades integrales para obtener condiciones de estabilidad en términos de LMI. Se exponen algunos ejemplos numéricos para mostrar la efectividad y reducción del conservadurismo conseguidos por el método propuesto.

En [28] se propone un control adaptable tolerante a fallos (adaptive fault-tolerant control) para un sistema no lineal incierto con retardos en el tiempo sujeto a perturbaciones acotadas (Liptchiz). Se propone que el efecto de las incertidumbres, perturbaciones externas y las fallas del actuador pueden ser compensadas completamente mediante una función de ganancia de control no lineal positiva, un enfoque de acotamiento estimado y una señal auxiliar integrable. La estabilidad en lazo cerrado es investigada mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii, el cual muestra que los estados del sistema son asintóticamente estables. Mediante un ejemplo de simulación se muestra la efectividad de los resultados. Las simulaciones presentadas muestran que el controlador es capaz de regular la salida, cabe destacar que el desempeño del controlador está limitado al esquema establecido del control tolerante a fallos, en el cual solo se consideran los fallos en los actuadores y deja solo el planteamiento del caso de fallos en los sensores, lo cual se establece como trabajo futuro.

En [34] se realiza la identificación y la estimación del retardo de un sistema no lineal con retardos en el tiempo. Mediante la combinación de control por modos deslizantes de alto orden y el método de Leibniz-Newton (transformación de modelo) se estima el retardo máximo y mediante la teoría de anillos no conmutativos se realiza la identificabilidad (encontrar una ecuación retardada de salida y verificar, dadas condiciones necesarias y suficientes, si el retardo obtenido es constante, periódico o

no periódico). La estimación del valor de los retardos presentes en un sistema es una área de trabajo fundamental para el planteamiento de los análisis que se proponen en el área, sin estos esfuerzos la mayoría de desarrollos no serían aplicables, en este trabajo se presenta una herramienta útil para estimación de retardos en sistemas no lineales.

En [30] se propone un método de reducción del error debido al ruido presente en la medición en la salida con respecto a lo que sucede en la planta. Este error conlleva a incertidumbres en la medida del retardo y de los parámetros. El nuevo método para la formulación de estimación de los parámetros se basa en un algoritmo de optimización; la efectividad del método se muestra con dos ejemplos. Al igual que el trabajo anterior, se realiza una estimación de retardos y parámetros del sistema, en este caso con base en herramientas estadísticas, en los ejemplos muestra su efectividad al comparar sus resultados con el valor aceptado del sistema analizado.

En [35] se analiza el problema de estabilidad robusta para sistemas con retardos variantes en el tiempo con perturbaciones no lineales mediante la partición del retardo en dos subintervalos desiguales y el uso de una novedosa funcional de Lyapunov-Krasovskii. Los términos integrales obtenidos de la derivada de la funcional son acotados mediante un enfoque de desigualdad integral y con la técnica de combinación recíproca convexa. El criterio presentado en términos de LMI muestra mejoras con respecto a otras técnicas utilizadas para lidiar con términos cruzados resultado de derivadas de integrales (algo común en el enfoque de Lyapunov-Krasovskii), un ejemplo numérico muestra la eficiencia del método propuesto en comparación con otros previamente utilizados.

El diseño de control por modos deslizantes (SMC por sus siglas en inglés) para sistemas con retardos en el tiempo y sujetos a perturbaciones acotadas ha sido investigado por algunos autores [29], [36]. Condiciones de estabilidad dadas en términos de LMI derivadas con el enfoque de Lyapunov-Krasovskii aseguran que la superficie de deslizamiento sea asintóticamente estable y dan paso a la síntesis del controlador que envía las trayectorias del sistema a la superficie establecida en un tiempo finito. Ambos trabajos cumplen con el objetivo de control, es decir alcanzan la superficie de deslizamiento en tiempo finito, con algunas limitaciones como el conservadurismo del análisis de estabilidad o el diseño enfocado en un problema específico.

En [37] se presenta el diseño de SMC de primer orden para un sistema retardado con perturbaciones asociadas con el estado y la entrada, aproximan el retardo mediante la fórmula de Leibniz-Newton. Las condiciones de estabilidad del sistema transformado son expresadas en términos de desigualdades matriciales lineales (LMI por sus siglas en inglés) derivadas de un análisis de estabilidad de Lyapunov, con las condiciones se establecen las ganancias del primer orden SMC, lo cual se ve reflejado

en la salida del sistema.

En [29] es presentado el diseño de SMC de primer orden para un sistema con retardos variantes en el tiempo, el retardo es aproximado con la formula de Leibniz-Newton y después dividido en segmentos para su análisis. Para poder analizar el sistema libre de perturbaciones es propuesta una transformación de modelo para desacoplar la perturbación y así establecer condiciones de estabilidad sobre la ganancia de control mediante Lyapunov, los resultados de ejemplos numéricos muestran que el controlador efectivamente regula la salida de los sistemas, sin embargo, el chattering afecta la respuesta y la aproximación del retardo añade conservadurismo a la obtención de la ganancia.

Una ley de control por modos deslizantes de primer orden, para sistemas con retardos con incertidumbres acopladas, es presentado en [38]. Mediante la función W de Lambert es diseñada un hiperplano de conmutación para generar el movimiento deslizante, una vez establecido, un criterio de estabilidad en términos de LMI es derivado. La complejidad en la derivación del criterio de estabilidad es la principal desventaja del método.

En [39] se desarrollan dos leyes de control basadas en modos deslizantes de primer y segundo orden que buscan mejorar la respuesta transitoria de sistemas con retardos. La estabilidad de la superficie de deslizamiento es analizada mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii, una vez asegurada la estabilidad se plantea una funcional no lineal de conmutación, con la cual el movimiento deslizante es gobernado mediante una dinámica libre de retardos. La desventaja del enfoque es que esta diseñado para el problema específico presentado.

Loukianov et al. [40] en el 2017 presenta un SMC de primer orden para sistemas con retardos en la entrada y en el estado. Basado en un predictor para compensar el efecto del retardo en la entrada de control y el modo deslizante es usado para compensar el efecto de la perturbación. Se presenta un ejemplo de aplicación en el que se muestra el desempeño del método propuesto, el cual regula de manera efectiva la salida del sistema, la principal desventaja es la implementación del controlador, ya que es necesario contar con una forma específica de la matriz de estado retardada y presenta una integral definida como parte del controlador.

Con base en [40] Caballero-Barragán H. et al [41] presenta una ley de control basada en SMC de segundo orden para el mismo tipo de sistema, a diferencia del anterior se observa una mejora en la respuesta (chattering). Además en [42] extiende el resultado a sistemas con retardos variantes en el tiempo en la entrada y en el estado. Este trabajo resalta sus resultados con ejemplos numéricos que muestran una regulación en tiempo finito de la salida del sistema, al igual que en [40], es necesario contar con una forma específica de la matriz de estado retardada y una integral definida como parte del controlador.

Capítulo 2

Estabilización robusta de sistemas con retardos mediante el diseño de control por modos deslizantes

Con base en la documentación de enfoques aplicables a sistemas con retardos, se propone el uso del control por modos deslizantes, debido a que se considera una estrategia de control robusto ante perturbaciones acopladas y aunque existen trabajos referentes al tema, se pueden proponer mejoras ya que utilizan aproximaciones del retardo, funcionales conservativas o solo presentan SMC de primer orden. Se presenta entonces, un esquema novedoso para la síntesis de controladores por modos deslizantes de primer y segundo orden (super-twisting) para la estabilización robusta de sistemas lineales con retardos temporales y perturbaciones acopladas.

Se inicia con un análisis de estabilidad del sistema que garantice que la dinámica del modo deslizante resultante sea asintóticamente estable, las condiciones de estabilidad de conservadurismo reducido son expresados en forma de desigualdades matriciales lineales obtenidas con el uso del enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Con base en el análisis de estabilidad, se sintetizan controladores por modos deslizantes que obligan que la evolución de la trayectorias del sistema en lazo cerrado converjan a una superficie de deslizamiento previamente definida y aseguran que permanecerán ahí para todo el tiempo subsecuente.

A diferencia de resultados presentados en la literatura, la implementación de este enfoque no necesita de requerimientos especiales en la estructura del sistema. Los beneficios y la efectividad de la propuesta son resaltados mediante un ejemplo numérico, uno práctico así como un análisis comparativo.

2.1. Introducción

El análisis y control de sistemas con retardos en el tiempo constituye una de las más importantes áreas de investigación debido a su importancia práctica en diferentes campos del conocimiento: Economía, Biología, Química, Mecánica, Electricidad, entre otras [43], [9]. Los sistemas con retardo tienen un número infinito de soluciones en su respectiva ecuación característica. Por esta razón, el uso de métodos clásicos de análisis para sistemas sin retardos no es aplicable para el caso [9], [44].

En años recientes, muchos trabajos de investigación han publicado análisis de estabilidad de sistemas con retardos basados en, por ejemplo, el método de la ecuación característica o en la teoría de Lyapunov. Para facilitar los análisis, algunos de ellos consideran particiones o aproximaciones del retardo [37], [39], [45], [46]. Sin embargo, la presencia de incertidumbres y perturbaciones externas afecta el desempeño del análisis.

Para hacer frente a las incertidumbres y perturbaciones externas que surgen en los sistemas con retardos, se han sugerido diferentes esquemas de control, por ejemplo, el Control por Modos Deslizantes (SMC por sus siglas en inglés), el predictor Smith y el control tolerante a fallos [45]. SMC es, en este contexto, una herramienta útil debido a la rapidez en su respuesta, una buena respuesta transitoria y de considerarse robusta ante incertidumbres paramétricas del sistema y perturbaciones externas [43], [47].

El control por modos deslizantes presenta ventajas en su implementación debido a la rapidez de su respuesta, respuesta transitoria favorable y robustez contra incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas [43], [47]. La idea general de los modos deslizantes es definir una superficie de deslizamiento para la cual, si las trayectorias del sistema pueden ser forzadas a permanecer cercanas a esta, entonces el sistema se comportará de modo deseado. La técnica de control por modos deslizantes es considerada una ley de control discontinua diseñada para enviar las trayectorias del sistema a una superficie preestablecida en un tiempo finito, además se asegura la estabilidad robusta de el sistema en lazo cerrado [48], [49], [50]. El mayor inconveniente de esta estrategia de control es el efecto del control discontinuo, es decir la conmutación intrínseca del método que genera un chattering en la respuesta [43]. Los modos deslizantes se presentan dos principales estructuras primer orden y segundo orden o supertwisting SMC.

Dentro del análisis de sistemas con retardo, los criterios de estabilidad normalmente se clasifican en dos categorías según su dependencia del retardo: los criterios de estabilidad dependientes e independientes del retardo, siendo los primeros menos conservadores que los segundos [29], [38].

A continuación se describen brevemente algunos ejemplos de propuestas de SMC basadas en criterios de estabilidad independientes del retardo. En [47], un SMC de primer orden se diseña mediante el uso de un estado virtual que permite determinar una superficie deslizante para un sistema sujeto a incertidumbres paramétricas y

perturbaciones no acopladas. En [51], se aplica un SMC de primer orden basado en un criterio de estabilidad desarrollado a partir del enfoque Lyapunov-Krasovskii y del uso de Desigualdades Matriciales Lineales (LMI) aplicado a una clase de sistema con múltiples retardos fijos sujetos a incertidumbres paramétricas y a perturbaciones externas acopladas. Basado en el enfoque Lyapunov-Krasovskii, en [52], se propone un SMC basado en una red neuronal adaptable difusa de Takagi-Sugeno (TS-FNN) para una clase de sistemas no lineales de retardo temporal con incertidumbres no-acopladas. En [53], se investiga una estrategia de SMC de primer orden para sistemas con retardos de tipo neutral sujetos a incertidumbres paramétricas y a perturbaciones externas no-acopladas; se obtienen condiciones suficientes de estabilidad independientes del retardo para el diseño de un plano de modo deslizante estable en términos de LMIs.

Otros trabajos de investigación presentan propuestas basadas en SMC de primer orden utilizando criterios de estabilidad dependientes del retardo derivados del enfoque de Lyapunov-Krasovskii y expresados en LMIs. Por ejemplo [37], donde este enfoque se aplica a sistemas sujetos a un retardo constante y a perturbaciones externas asociadas con el estado y con el estado retardado; la fórmula de Newton-Leibniz se utiliza para aproximar el retardo. En [29], el problema del SMC dependiente del retardo para una clase de sistemas con retardos variantes en el tiempo se resuelve dividiendo el intervalo de retardo en múltiples segmentos según la fórmula de Newton-Leibniz; también se obtiene una parametrización explícita de la superficie de deslizamiento deseada. En [38], se presenta una ley SMC para una clase de sistemas con retardos con incertidumbres paramétricas y perturbaciones acopladas; el diseño de un hiperplano de conmutación para generar el movimiento de deslizamiento en el sistema se lleva a cabo proponiendo una función W de Lambert, y luego se establece un criterio de estabilidad dependiente del retardo en términos de una LMI.

El diseño de SMC de segundo orden para sistemas con retardo solo ha sido presentado por Khimani D. and Patil M. [39] y por Caballero-Barragan H. *et al.* [41], [42]. De los cuales se habla brevemente a continuación.

Khimani D. and Patil M. [39] presentan un SMC convencional de primer orden y uno de segundo orden que dan lugar a respuestas transitorias mejoradas para una clase de sistemas con retardo temporal incierto. Sin embargo, el controlador está diseñado específicamente para el caso de estudio propuesto; difícilmente puede aplicarse a un sistema diferente, ya que no se definen varios procedimientos de diseño para el caso general. Además, el criterio de estabilidad dependiente del retardo se deriva de una funcional de Lyapunov-Krasovskii, la cual en [44] se ha demostrado tiene resultados conservadores en comparación con otras funcionales propuestas.

El SMC de segundo orden propuesto por Caballero-Barragan H. *et al.*, para sistemas con retardos constantes [41], y para sistemas con retardos variantes en el tiempo [42], es una extensión del trabajo [40], el cual, presenta un SMC de primer orden para una clase de sistemas con retardos. El enfoque propuesto en [41] y en

[42] trata de la estabilización robusta de una clase de sistemas inciertos con retardos tanto en el estado como en el control. Un predictor es diseñado para compensar el efecto de retardo en la entrada de control y después la técnica de control por modos deslizantes integral junto con la estructura de segundo orden se aplica para compensar parcialmente el efecto de la perturbación. A diferencia del enfoque propuesto en este trabajo, una desventaja importante del método propuesto en [41] y en [42] es que sólo puede aplicarse si la matriz asociada al estado retardado tiene una estructura específica.

En este capítulo se presenta una propuesta del SMC para una clase de sistemas lineales con retardos de tipo retardado que se basa en un criterio de estabilidad dependiente del retardo derivado mediante el uso de la funcional de Lyapunov-Krasovskii mejorada propuesta en el [44] y el enfoque descriptor introducido en [9]. Como resultado, se obtienen condiciones de estabilidad expresadas en LMIs de conservadurismo reducido y se aplican a la síntesis de SMC de primer orden y de segundo orden. Debe subrayarse que tanto el enfoque descriptor como el uso de la funcional de Lyapunov-Krasovskii mejorada no han sido considerados previamente para el diseño de SMC.

Aunque se ha demostrado ampliamente que el desempeño del SMC de segundo orden es superior al del SMC de primer orden, en este capítulo también se presentan los resultados del SMC de primer orden, ya que, como se verá, al evitar la discontinuidad en la estructura de control, se reduce el ruido y se consiguen respuestas similares a las obtenidas con el SMC de segundo orden.

La principal contribución del documento es el desarrollo de un nuevo esquema para la síntesis del SMC que puede aplicarse a cualquier sistema controlable de tipo retardado con un retardo constante y con perturbaciones acopladas acotadas cuya matriz asociada a la entrada de control es de rango columna completo. Es importante mencionar que no se requiere una estructura específica del sistema para aplicar el método propuesto y que cada paso del diseño se presenta claramente.

La efectividad del enfoque es puesta a prueba mediante su aplicación en un ejemplo académico y en un caso de aplicación práctica. También se presenta una comparación del controlador propuesto con respecto al proporcionado en [41].

2.2. Planteamiento del problema

Considere una clase de sistema con retardos sujeto a perturbaciones acopladas de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + B(u(t) + v(t)) \quad t > 0 \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $v(t) \in \mathbb{R}^m$ corresponden a los vectores de estado, entrada de control y perturbación acoplada, respectivamente, con $n > m$. A , A_h y B son matrices constantes conocidas de dimensión apropiada, y h es un retardo constante, del cual su valor se asume conocido o que puede ser obtenido mediante

un estimador (vea por ejemplo [40], [54]). Las condiciones iniciales del sistema son representadas por la función continuamente diferenciable $\phi(t), \forall t \in [-h, 0]$.

Para el desarrollo de la propuesta de diseño de control, se consideran las siguientes suposiciones.

Suposición 1 *El sistema (2.1) es controlable. El criterio de controlabilidad para sistemas con retardos puede encontrarse en [55] (criterio basado en el Gramiano) y en [16], [56] (criterio algebraico, véase la Sección 1.5).*

Suposición 2 *El vector perturbación y su derivada de primer orden son acotadas, es decir, $\|v(t)\| \leq \Gamma$, $\|\dot{v}(t)\| \leq \Gamma^+$, donde Γ y Γ^+ son cotas conocidas.*

Suposición 3 *La matriz B es de rango columna completa.*

El SMC está diseñado de tal manera que el sistema en lazo cerrado es estable para cualquier perturbación externa que satisface la Suposición 2.

El diseño de una ley SMC consta de dos fases. En la primera, se debe definir una superficie de deslizamiento; esta superficie es tal que si las trayectorias del sistema están confinadas en ella, se comportarán de la manera deseada. En la segunda fase se construye una ley de control que permite alcanzar ese objetivo y mantiene las trayectorias del sistema en la superficie de deslizamiento.

Con el fin de diseñar la superficie de deslizamiento para controlar el sistema, se propone una transformación del sistema a la forma regular. La transformación del estado se describe mediante $z(t) = Tx(t)$, donde T se define como:

$$T = \begin{bmatrix} B^{\perp+} \\ B^+ \end{bmatrix}$$

donde $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$ es la pseudo-inversa por la izquierda de la matriz B , y $B^{\perp+}$ es la pseudo-inversa por la izquierda del complemento ortogonal de B^T representado por B^\perp . Las columnas de B^\perp se extienden por el espacio nulo de B^T , es decir, $B^\perp = \text{null}(B^T)$, $B^\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$.

Observación 1 *La matriz T es no-singular, ya que, para cualquier matriz B que satisface la Suposición 3, su inversa esta dada por $T^{-1} = [B^\perp \ B]$. Entonces, $T^{-1}T = B^\perp B^{\perp+} + BB^+ = I_n$ [57].*

El papel de T es desacoplar los estados que son directamente afectados por las entradas desconocidas del resto de los estados. Así, se puede verificar que

$$TB = \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema transformado esta dado por:

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{A}_h z(t-h) + \tilde{B}(u(t) + v(t)) \quad (2.2)$$

donde $\tilde{B} = TB$, $\tilde{\phi}(t) = T\phi(t), \forall t \in [-h, 0]$,

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_h = TA_hT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{h11} & \tilde{A}_{h12} \\ \tilde{A}_{h21} & \tilde{A}_{h22} \end{bmatrix}$$

y $z^T(t) = [z_1^T(t) \quad z_2^T(t)]^T$, $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$.

De forma equivalente, el sistema transformado puede reescribirse como:

$$\dot{z}_1(t) = \tilde{A}_{11}z_1(t) + \tilde{A}_{12}z_2(t) + \tilde{A}_{h11}z_1(t-h) + \tilde{A}_{h12}z_2(t-h) \quad (2.3)$$

$$\dot{z}_2(t) = \tilde{A}_{21}z_1(t) + \tilde{A}_{22}z_2(t) + \tilde{A}_{h21}z_1(t-h) + \tilde{A}_{h22}z_2(t-h) + u(t) + v(t) \quad (2.4)$$

La ecuación (2.3) no esta directamente afectada por la señal de control, por lo tanto la superficie de deslizamiento $s(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ se elige como:

$$s(t) = \tilde{C}z(t) = [C \quad I_m] z(t) = Cz_1(t) + z_2(t) \quad (2.5)$$

donde $C \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ corresponde a la ganancia de la superficie de deslizamiento a ser diseñada.

Cuando las trayectorias del sistema alcanzan la superficie de deslizamiento, se satisfacen la igualdades $s(t) = 0$ y $\dot{s}(t) = 0$. Entonces, la siguiente igualdad se cumple:

$$z_2(t) = -Cz_1(t) \quad (2.6)$$

y la dinámica de orden reducido $n - m$ del movimiento deslizante se obtiene sustituyendo la ecuación (2.6) en la ecuación (2.3):

$$\dot{z}_1(t) = (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}C)z_1(t) + (\tilde{A}_{h11} - \tilde{A}_{h12}C)z_1(t-h) \quad (2.7)$$

La ley de conmutación debe ser diseñada para forzar las trayectorias del sistema a alcanzar la superficie de deslizamiento en tiempo finito, mientras que la ganancia de deslizamiento C debe ser diseñada de tal manera que el movimiento de deslizamiento (2.7) sea asintóticamente estable.

2.3. Estabilidad de la dinámica del modo deslizante mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii

En esta sección se derivan las condiciones de estabilidad que garantizan la estabilidad asintótica de la dinámica de modo deslizante de orden reducido definida en (2.7).

Los sistemas con retardos presentan un número infinito de soluciones en su ecuación característica, lo que complica el análisis de estabilidad. El enfoque Lyapunov-Krasovskii, que es una extensión del segundo método de Lyapunov, puede utilizarse para determinar las condiciones de estabilidad asintótica de los sistemas con retardos incluso sin conocer sus soluciones explícitas. Una desventaja del método es

su conservadurismo inherente. Sin embargo, en este trabajo se utiliza la funcional mejorada de Lyapunov-Krasovskii introducida en [9] que combinada con el enfoque descriptor presentado en [15] ha demostrado producir condiciones de estabilidad de conservadurismo reducido.

Las condiciones de estabilidad se resumen en el Teorema 7.

Teorema 7 Para escalares $h > 0$ y $\varepsilon > 0$, el sistema (2.7) con la ganancia de superficie de deslizamiento C dada por:

$$C^T = (\bar{P}^T)^{-1} K_1$$

es asintóticamente estable si existen matrices K_1 , \bar{P} no singulares, $\hat{P} = \hat{P}^T > 0$, $\hat{Q} = \hat{Q}^T > 0$ y $\hat{R} = \hat{R}^T > 0$ de dimensión apropiada, tal que se cumple la siguiente LMI:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} < 0$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \bar{P}^T \tilde{A}_{11}^T - K_1 \tilde{A}_{12}^T + \tilde{A}_{11} \bar{P} - \tilde{A}_{12} K_1^T + \hat{Q} - \hat{R} \\ \Psi_{12} &= \hat{P} - \bar{P} + \bar{P}^T \tilde{A}_{11}^T \varepsilon - K_1 \tilde{A}_{12}^T \varepsilon \\ \Psi_{13} &= \tilde{A}_{h11} \bar{P} - \tilde{A}_{h12} K_1^T + \hat{R} \\ \Psi_{22} &= -\varepsilon \bar{P}^T - \varepsilon \bar{P} + h^2 \hat{R} \\ \Psi_{23} &= \varepsilon \tilde{A}_{h11} \bar{P} - \varepsilon \tilde{A}_{h12} K_1^T \\ \Psi_{33} &= -\hat{Q} - \hat{R} \end{aligned}$$

Demostración. Considere la funcional de Lyapunov-Krasovskii mejorada introducida en [9]:

$$V(t, z_t) = z_1^T(t) P z_1(t) + \int_{t-h}^t z_1^T(\varsigma) Q z_1(\varsigma) d\varsigma + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{z}_1^T(\varsigma) R \dot{z}_1(\varsigma) d\varsigma d\theta$$

donde h es un retardo constante, y P , Q y R son matrices simétricas, definidas positivas. La derivada con respecto al tiempo de $V(t, z_t)$ es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z_t) &= 2z_1^T(t) P \dot{z}_1(t) + z_1^T(t) Q z_1(t) - z_1^T(t-h) Q z_1(t-h) \\ &\quad + h^2 \dot{z}_1^T(t) R \dot{z}_1(t) - h \int_{t-h}^t \dot{z}_1^T(\varsigma) R \dot{z}_1(\varsigma) d\varsigma \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para obtener las condiciones de estabilidad en términos de una desigualdad matricial, el término integral en (2.8) puede ser reemplazado por el siguiente término cuadrático

mediante el uso de la desigualdad de Jensen:

$$\begin{aligned} -h \int_{t-h}^t \dot{z}_1^T(\varsigma) R \dot{z}_1(\varsigma) d\varsigma &\leq - \int_{t-h}^t \dot{z}_1^T(\varsigma) d\varsigma R \int_{t-h}^t \dot{z}_1(\varsigma) d\varsigma \\ &= -[z_1^T(t) - z_1^T(t-h)] R [z_1(t) - z_1(t-h)] \end{aligned}$$

El enfoque descriptor lidia con el conservadurismo inherente del enfoque Lyapunov-Kasovskii [9]. Consiste en añadir el siguiente término nulo a la derivada con respecto al tiempo $V(t, z_t)$:

$$0 = 2 [z_1^T(t) P_2^T + \dot{z}_1^T(t) P_3^T] \left[-\dot{z}_1(t) + (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}C)z_1(t) + (\tilde{A}_{h11} - \tilde{A}_{h12}C)z_1(t-h) \right]$$

donde $P_2, P_3 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ son variables de holgura no singulares.

Considerando el enfoque descriptor y la desigualdad de Jensen, la derivada de $V(t, z_t)$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, z_t) &\leq 2z_1^T(t) P \dot{z}_1(t) + 2 [z_1^T(t) P_2^T + \dot{z}_1^T(t) P_3^T] \left[-\dot{z}_1(t) \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}C)z_1(t) + (\tilde{A}_{h11} - \tilde{A}_{h12}C)z_1(t-h) \right] \\ &\quad - z_1^T(t-h) Q z_1(t-h) + z_1^T(t) Q z_1(t) + h^2 \dot{z}_1^T(t) R \dot{z}_1(t) \\ &\quad - [z_1^T(t) - z_1^T(t-h)] R [z_1(t) - z_1(t-h)] \end{aligned}$$

O de forma equivalente, en forma matricial:

$$\dot{V}(t, z_t) \leq [z_1^T(t) \quad \dot{z}_1^T(t) \quad z_1^T(t-h)] \bar{\Psi} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ z_1(t-h) \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \bar{\Psi}_{12} & \bar{\Psi}_{13} \\ * & \bar{\Psi}_{22} & \bar{\Psi}_{23} \\ * & * & \bar{\Psi}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\bar{\Psi}_{11} = (\tilde{A}_{11}^T - C^T \tilde{A}_{12}^T) P_2 + P_2^T (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}C) + Q - R$$

$$\bar{\Psi}_{12} = P - P_2^T + (\tilde{A}_{11}^T - C^T \tilde{A}_{12}^T) P_3$$

$$\bar{\Psi}_{13} = P_2^T (\tilde{A}_{h11} - \tilde{A}_{h12}C) + R$$

$$\bar{\Psi}_{22} = -P_3 - P_3^T + h^2 R$$

$$\bar{\Psi}_{23} = P_3^T (\tilde{A}_{h11} - \tilde{A}_{h12}C)$$

$$\bar{\Psi}_{33} = -Q - R$$

Entonces, el sistema (2.7) es asintóticamente estable si existen matrices C , P_2 , P_3 , $Q = Q^T > 0$, $R = R^T > 0$ y $P = P^T > 0$ de dimensión apropiada tal que se satisfice la desigualdad matricial $\bar{\Psi} < 0$ con $\bar{\Psi}$ definida en la ecuación (2.9).

Note que la condición $\bar{\Psi} < 0$ corresponde a una Desigualdad Matricial Bilineal (BMI por sus siglas en inglés) cuya factibilidad es claramente complicada de verificar comparada con la de una LMI.

En [58] se introduce una conocida técnica de síntesis de ganancia que permite superar la bi-linealidad de las condiciones. Consiste en establecer

$$\bar{P} = P_2^{-1} \text{ and } P_3 = \varepsilon P_2 \quad \varepsilon > 0$$

y definir

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \bar{P}^T P \bar{P} \\ \hat{R} &= \bar{R}^T R \bar{P} \\ \hat{Q} &= \bar{P}^T Q \bar{P} \\ K_1 &= \bar{P}^T C^T \end{aligned}$$

Multiplicando el lado derecho de (2.9) por $\Omega = \text{diag}\{\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}\}$ y el lado izquierdo por Ω^T es posible obtener las condiciones LMI de estabilización expresadas en el Teorema 7 el cual puede resolverse mediante el uso de Matlab[®] LMI toolbox o el paquete Sedumi[®]-Yalmip[®] (a free toolbox for Matlab). ■

Observación 2 *Note que con el enfoque propuesto es posible generar diferentes valores para la ganancia de deslizamiento C dependiendo de la elección de ε . Esto significa que el rango de ganancias del controlador que garantiza la estabilización de la dinámica del movimiento deslizante es más amplio en comparación con otros métodos, como el propuesto en [29], esto significa que el diseñador puede probar diferentes valores de ganancia hasta encontrar un resultado conveniente desde su punto de vista para el problema considerado. Además, las variables de holgura introducidas con el enfoque descriptor reducen el conservadurismo del método, ampliando el alcance de la factibilidad de las condiciones de estabilidad establecidas en términos de una LMI, esto último ha sido probado con demostraciones, para mayor referencia véase [44], [9] y referencias incluidas en estos trabajos.*

Después de establecer la estabilidad asintótica del movimiento deslizante, el siguiente paso es diseñar un SMC con el objetivo de conducir las trayectorias del sistema hacia la superficie de deslizamiento $s(t) = 0$ (con $s(t)$ definido en (2.5)) en un tiempo finito.

2.4. Diseño del controlador por modos deslizantes

El control por modos deslizantes envía las trayectorias del sistema a una superficie predefinida, lo que permite alcanzar el equilibrio. En general, este método consta

de dos elementos: el control equivalente $u_{eq}(t)$ y la ley de conmutación $u_n(t)$. La ley de conmutación constituye un control discontinuo que se aplica para alcanzar la superficie de deslizamiento mientras que el control equivalente es continuo y tiene como objetivo mantener el estado del sistema en la superficie de deslizamiento.

El SMC se define por:

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n(t) \quad (2.10)$$

El control equivalente se obtiene de la siguiente manera. Para garantizar que el estado del sistema permanezca en $s(t)$ durante la fase de deslizamiento, debe cumplirse la siguiente condición:

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0 \quad \text{when } s(t) = 0 \quad (2.11)$$

Note que

$$\frac{ds(t)}{dt} = \bar{C}\dot{z}(t) = 0$$

Entonces, para $v(t) = 0$, la condición (2.11) se satisface considerando el control equivalente siguiente:

$$u_{eq}(t) = -[\bar{C}\tilde{B}]^{-1}[\bar{C}\tilde{A}z(t) + \bar{C}\tilde{A}_h z(t-h)] \quad (2.12)$$

Ya que $[\bar{C}\tilde{B}] = I_m$, el control equivalente esta dado por:

$$u_{eq}(t) = -[\bar{C}\tilde{A}z(t) + \bar{C}\tilde{A}_h z(t-h)] \quad (2.13)$$

En los siguientes apartados se definen dos estructuras de control de conmutación $u_n(t)$: SMC de primer y segundo orden.

En cuanto a la Suposición 2, es importante mencionar que el diseño del SMC de primer orden sólo requiere el cumplimiento de la condición $\|v(t)\| \leq \Gamma$, mientras que el diseño del SMC de segundo orden requiere también que $\|\dot{v}(t)\| \leq \Gamma^+$ sea cumplido.

2.4.1. Controlador por modos deslizantes de primer orden

La estructura de $u_n(t)$ para el SMC de primer orden se define por [29]:

$$u_n(t) = -[\rho + \epsilon] \text{Sign}(s(t)) \quad (2.14)$$

donde $\rho > \Gamma$, $\epsilon > 0$ y la función matricial $\text{Sign}(s(t))$ definida como:

$$\text{Sign}^T(s(t)) = [\text{sign}(s_1(t)) \quad \text{sign}(s_2(t)) \quad \dots \quad \text{sign}(s_m(t))] \quad (2.15)$$

Teorema 8 *Considere el sistema transformado (2.2) bajo la ley de control $u(t)$ definida en (2.10) con $u_{eq}(t)$ dado por (2.13) y $u_n(t)$ definido en (2.14). Entonces, el sistema en lazo cerrado es estable y el controlador elimina el efecto de la perturbación $v(t)$ si y solo si $\rho > \Gamma$.*

Demostración. Considere la función de Lyapunov $V(t) = \frac{1}{2}s(t)^T s(t)$. Su derivada con respecto al tiempo esta dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s(t)^T \dot{s}(t) \\ &= s(t)^T [\tilde{C}\tilde{A}z(t) + \tilde{C}\tilde{A}_h z(t-h) + I_m(u(t) + v(t))]\end{aligned}$$

Sustituyendo $u(t)$ definido en (2.10) con $u_{eq}(t)$ dado en (2.13) y $u_n(t)$ dado en (2.14), reduciendo términos se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s(t)^T [u_n(t) + v(t)] \\ &= s(t)^T [-[\rho + \epsilon] \text{Sign}(s(t)) + v(t)] \\ &\leq s(t)^T [-[\rho + \epsilon - \Gamma] \text{Sign}(s(t))] \\ &\leq -[\rho + \epsilon - \Gamma] \sum_{i=1}^m |s_i(t)|\end{aligned}\tag{2.16}$$

Ya que $\rho > \Gamma$, la desigualdad (2.16) puede reducirse:

$$\dot{V}(t) < -\epsilon \sum_{i=1}^m |s_i(t)| < 0\tag{2.17}$$

Queda demostrado que con la ley de control propuesta las trayectorias del sistema alcanzarán la superficie de deslizamiento en tiempo finito a pesar de la perturbación.

■

El Lema 1, basado en los resultados presentados en [50] y [59], e indicado en [60], permite establecer la estabilidad de tiempo finito del sistema y proporciona una estimación del tiempo de asentamiento.

Lema 1 [60] *Considere el sistema transformado (2.2) y la superficie de deslizamiento $s(t)$ definida en (2.5). Si existe una función de Lyapunov $V(t)$ y números reales $\beta > 0$ y $0 < \gamma < 1$ tal que*

$$\dot{V}(t) + \beta V^\gamma(t) \leq 0\tag{2.18}$$

entonces, el origen del sistema es estable en tiempo finito y el tiempo de establecimiento, dependiente de la condición inicial establecido como $s_0 = \tilde{C}\tilde{\phi}(t)$, $\forall t \in [-h, 0]$, es dado por

$$T(s_0) \leq \frac{1}{\beta(1-\gamma)} V^{1-\gamma}(s_0)\tag{2.19}$$

La prueba del Lema 1 puede encontrarse en [60].

Se tiene de la ecuación (2.17) que

$$\dot{V}(t) < -\epsilon \sum_{i=1}^m |s_i(t)| < -\epsilon \sqrt{2V(t)}$$

Entonces, la condición (2.18) del Lema 1 se cumple para $\beta = \sqrt{2}\epsilon$ y $\gamma = \frac{1}{2}$ y el tiempo de asentamiento satisface

$$T(s_0) < \frac{2}{\sqrt{2}\epsilon} V^{\frac{1}{2}}(s_0) \quad (2.20)$$

2.4.2. Controlador por modos deslizantes de segundo orden

El súper-twisting, también conocido como SMC de segundo orden, presenta una mejora en cuanto a atenuación del ruido mientras que preserva su robustez.

Se introduce la siguiente función de matricial:

$$\Xi(s, k) = \text{diag} \{ |s_1|^k \quad |s_2|^k \quad \dots \quad |s_m|^k \}$$

De acuerdo con [50] y considerando la función definida, el controlador de segundo orden esta dado por la siguiente ley:

$$u_n(t) = -\lambda_1(\Gamma^+)^{\frac{1}{2}} \Xi(s, \frac{1}{2}) \text{Sign}(s(t)) - \int_0^t \lambda_2 \Gamma^+ \Xi(s, 0) \text{Sign}(s(\tau)) d\tau \quad (2.21)$$

donde Γ^+ viene de la Suposición 2, y λ_1 y λ_2 son ganancias de diseño que pueden ser calculadas con el procedimiento propuesto por L. Fridman en [43] (Capítulo 1, Sección 3, sub-sección 2). Ha sido probado que con la elección de $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 1.1$ se obtiene un desempeño satisfactorio del controlador super-twisting (véase [43], [49], [50]).

Teorema 9 *Considere el sistema transformado (2.2) con la ley de control $u(t)$ definido en (2.10) con $u_{eq}(t)$ dado en (2.13) y $u_n(t)$ definido en (2.21). Tomando en cuenta las Suposiciones 1-3, el controlador lleva a las variables s y \dot{s} a cero mientras elimina el efecto de las perturbaciones $v(t)$.*

Es importante mencionar que la estructura de control súper-twisting definida en (2.21) ha sido ampliamente estudiada. La convergencia en tiempo finito y la robustez del algoritmo de súper-twisting ha sido probada desde diferentes marcos (métodos geométricos, técnicas de Lyapunov, entre otros) [50]. En el Apéndice I se detalla una prueba alternativa basada en la teoría de estabilidad de Lyapunov que explota las propiedades de homogeneidad del algoritmo.

2.5. Ejemplos

2.5.1. Ejemplo académico

Para probar el desempeño del enfoque propuesto, se analiza un ejemplo numérico previamente estudiado en [29].

Considere un sistema con retardos en el tiempo de la forma (2.1) con las matrices definidas en (2.22) y un retardo constante $h = 0.8$. Las condiciones iniciales están dadas por $\phi(t) = [-3 \ 2]$, $\forall t \in [-h, 0]$, y la perturbación acoplada se define como $v(t) = \cos(t)$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1.5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad A_h = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

En [29], ha sido mostrado que corresponde a un sistema inestable, entonces se propone el diseño de un control por modos deslizantes para estabilizarlo.

Se parte de una transformación del sistema (2.22) a la forma regular mediante:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual se obtiene el sistema transformado mostrado a continuación:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1.5 & -4 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_h = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Con base en el Teorema 7, para $\varepsilon = 100$ se obtiene una ganancia $C = 0.8111$ (véase Observación 2). Entonces, la superficie de deslizamiento se obtiene sustituyendo C en (2.5), es decir,

$$s(t) = [0.8111 \ 1] z(t) \quad (2.24)$$

El SMC de primer orden esta dado por las ecuaciones (2.10), (2.13)-(2.14), donde, de acuerdo con el Teorema 8, ρ y ϵ pueden elegirse como $\rho = 1.01$, $\epsilon = 0.1$.

En las Figuras 2.1-2.3 se muestran los resultados de la simulación del sistema en lazo cerrado con las matrices definidas en (2.23). La Figura 2.1 muestra el comportamiento de las trayectorias del sistema donde la convergencia de los estados a cero pueden ser observada. Figura 2.2 muestra el desempeño de la superficie de deslizamiento definida en (2.24), y finalmente la Figura 2.3, muestra la señal de control.

El SMC de segundo orden esta dado por las ecuaciones (2.10), (2.13), (2.21), donde, para este ejemplo, se eligen los siguientes valores de las constantes $\Gamma^+ = 1$, $\lambda_1 = 1.5$ y $\lambda_2 = 1.1$.

Las Figuras 2.4-2.6 muestran los resultados de las simulaciones para el sistema (2.23) en lazo cerrado con el SMC de segundo orden. La Figura 2.4 muestra la convergencia de las trayectorias a cero. Las Figuras 2.5 y 2.6 muestran el comportamiento de la superficie de deslizamiento y la señal de control, respectivamente.

En las Figuras 2.1 y 2.4, es posible notar que ambos controladores son capaces de enviar los estados a la superficie de deslizamiento en tiempo finito a pesar de las perturbaciones acopladas. No obstante, es notorio el ruido en la respuesta del sistema obtenida con el uso del SMC de primer orden. Este fenómeno se evita con el SMC

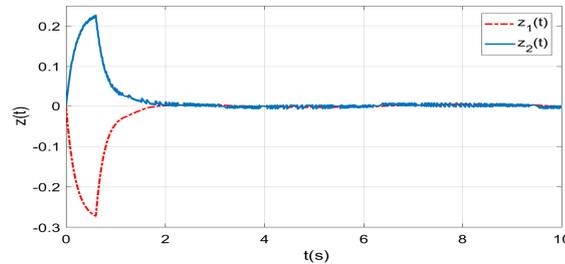


Figura 2.1: Respuesta del sistema (2.23) en lazo cerrado con el SMC de primer orden. Se muestra que la salida del sistema en lazo cerrado con el control tiende a cero (superficie de deslizamiento establecida) en tres segundos.

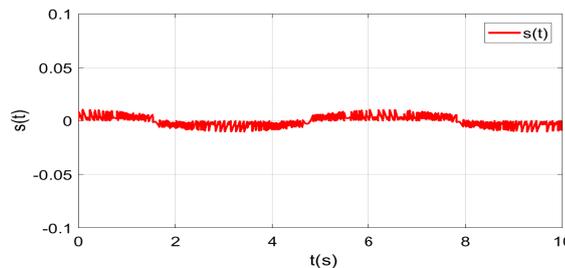


Figura 2.2: Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.24).

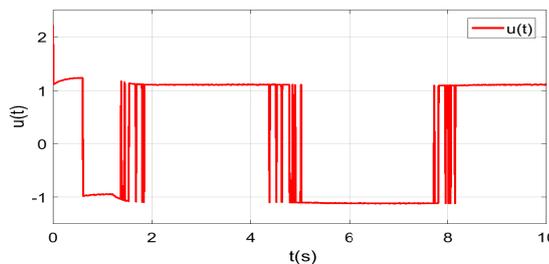


Figura 2.3: Señal de control para el sistema (2.23).

de segundo orden, sin embargo, el precio a pagar por esta mejora es la complejidad del controlador de segundo orden, esto puede verse en las Figuras 2.3 y 2.6.

Es importante mencionar que la señal de control como la mostrada en la Figura 2.3, es poco probable pueda ser implementada en práctica debido a las limitaciones físicas de los actuadores, especialmente en sistemas mecánicos debido a la velocidad de conmutación. En [61] (y sus referencias) se muestra que el ruido se activa por la discontinuidad asociada al control de conmutación no lineal. Para suavizar el efecto de la discontinuidad, se considera la siguiente aproximación en la estructura de control:

$$\text{sign}(x) \approx \tanh cx \quad (2.25)$$

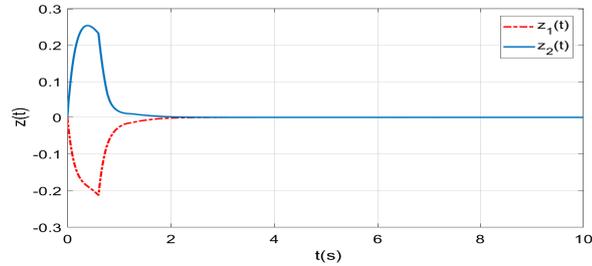


Figura 2.4: Respuesta del sistema (2.23) bajo el control super-twisting.

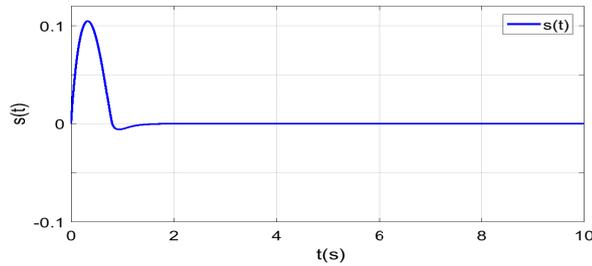


Figura 2.5: Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.24).

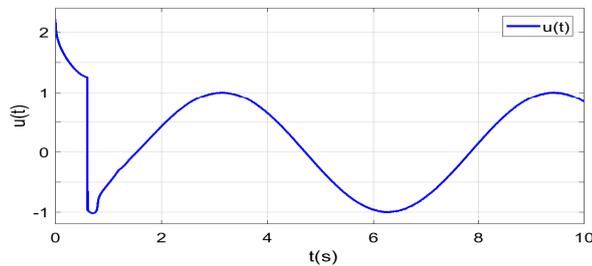


Figura 2.6: Señal del SMC Super-twisting (2.23).

donde c es un escalar, tal que, cuando $c \rightarrow \infty$ la función $\tanh cx$ converge a la función *sign*.

Se desarrollan simulaciones para evaluar el desempeño de la aproximación (2.25) con el SMC de primer orden. La Figura 2.7 muestra la respuesta del sistema (2.23) bajo SMC de primer orden modificado considerando $c = 50$. La correspondiente señal de control es mostrada en la Figura 2.8.

La respuesta del sistema observada en la Figura 2.7 y la trayectoria del sistema mostrada en la Figura 2.8 son parecidas a los generadas por el SMC de segundo orden (véanse las Figuras 2.4 y 2.6). Esto significa que el controlador de primer orden con la aproximación dada en (2.25) es adecuado para ser implementado en la práctica. Produce casi el mismo rendimiento que el SMC super-twisting, pero requiere menos

esfuerzo computacional, debido a que se obtiene una respuesta similar al SMC de segundo orden con uno de primer orden.

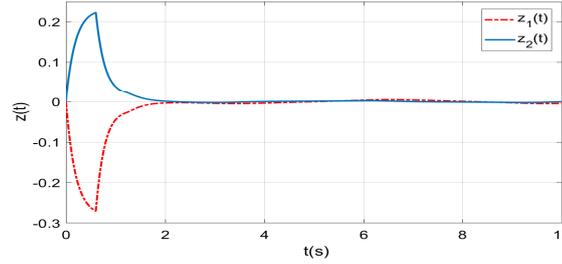


Figura 2.7: Respuesta del sistema (2.23) en lazo cerrado con el SMC de primer orden considerando la aproximación definida en (2.25) con $c = 150$.

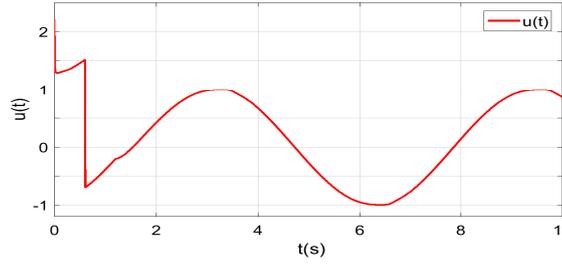


Figura 2.8: Señal de control del SMC de primer orden y la aproximación (2.25) con $c = 50$.

2.5.2. Ejemplo de aplicación práctica: estabilización de la combustión en motores de cohetes de propulsión líquida

Considere un motor de cohete de monopropulsor líquido con un sistema de alimentación a presión. Un modelo linealizado del sistema de alimentación y de las ecuaciones de la cámara de combustión, considerando el flujo no estacionario, es dado por Crocco (1951) [62] y Fiagbedzi y Pearson (1986) [63]:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t) &= (\zeta - 1)\Phi(t) - \zeta\Phi(t - h) + \Lambda(t - h) \\ \dot{\Lambda}_1(t) &= \frac{1}{\Omega J} [-\psi(t) + u(t)] \\ \dot{\Lambda}(t) &= \frac{1}{(1 - \Omega)J} [-\Lambda(t) + \psi(t) - \varrho\Phi(t)] \\ \dot{\psi}(t) &= \frac{1}{E} [\Lambda_1(t) - \Lambda(t)]\end{aligned}$$

donde t es el tiempo reducido normalizado por el tiempo de residencia del gas θ_g en operación estacionaria, $h = \bar{\tau}/\theta_g$ es el tiempo de retardo reducido con $\bar{\tau}$ el valor del retardo en operaciones estacionarias.

Las variables de estado se definen como sigue:

- $x_1(t) = \Phi(t)$ es la desviación relativa en la presión instantánea de la cámara de combustión $p(t)$ desde su valor en estado estable \bar{p} , es decir, $\Phi(t) = [p(t) - \bar{p}] / \bar{p}$.
- $x_2(t) = \Lambda_1(t)$ es la desviación relativa del flujo másico instantáneo ascendente de la capacitancia $\dot{m}(t)$ desde su valor en estado estacionario \bar{m} , es decir, $\Lambda_1(t) = [\dot{m}(t) - \bar{m}] / \bar{m}$.
- $x_3(t) = \Lambda(t)$ es la desviación relativa de la tasa de flujo másico instantáneo del propulsor inyectado $\dot{m}_i(t)$ desde su valor en estado estacionario \bar{m}_i , es decir, $\Lambda_1(t) = [\dot{m}_i(t) - \bar{m}_i] / \bar{m}_i$.
- $x_4(t) = \psi(t)$ es la relación entre la desviación de la presión instantánea $p_1(t)$, en un punto de la línea de alimentación en el que la capacitancia representa la elasticidad, a partir de su valor de estado estacionario \bar{p}_1 y dos veces la presión de caída de presión en el inyector en operación en estado estacionario $\Delta p = \bar{p}_1 - \bar{p}$, es decir, $\psi(t) = [p_1(t) - \bar{p}_1] / (2\Delta p)$.

El parámetro del modelo ϱ dado por $\varrho = \bar{p} / (2\Delta p)$, ζ es el exponente de presión que depende de la presión del proceso de combustión tomado durante el tiempo de retardo, Ω representa la longitud fraccional del suministro de la presión, J es el parámetro inercial de la línea, y E es el parámetro de elasticidad de la línea.

De acuerdo con Fiagbedzi and Pearson (1986) [63], la variable de control es tal que $u = (p_0 - p_1) / (2\Delta p)$, donde p_0 es la presión de gas regulada para el suministro de presión.

Los siguientes valores numéricos representativos son tomados de [43]:

$$\begin{array}{ccc} \zeta = 0.8 & h = 0.82 & \Omega = 0.5 \\ \varrho = 1 & J = 1 & E = 1 \end{array}$$

Entonces, la representación en el espacio de estados del sistema toma la forma (2.1) con las matrices constantes definidas como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_h = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, se asume que el sistema tiene una perturbación externa de la forma $v(t) = \cos(t)$, que se interpreta como una alteración en la desviación relativa

del flujo másico instantáneo ascendente de la capacitancia desde su valor en estado estacionario.

Como fue explicado anteriormente, para aplicar SMC, el primer paso es transformar el sistema a la forma regular mediante la definición:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema transformado es entonces definido por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_h = \begin{bmatrix} -0.8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Las sub-matrices reducidas son:

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{h11} = \begin{bmatrix} -0.8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_{h12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con base en el Teorema 7, con $\varepsilon = 100$ se obtiene

$$C = [C_1 \ C_2 \ C_3] = [-1.0548 \ -0.3796 \ 4.2251]$$

Por lo tanto, la superficie de deslizamiento está dada por:

$$s(t) = \bar{C}z(t) = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ 1] z(t) = [-1.0548 \ -0.3796 \ 4.2251 \ 1] z(t) \quad (2.27)$$

donde

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad z_1(t) = \begin{bmatrix} z_{11}(t) \\ z_{12}(t) \\ z_{13}(t) \end{bmatrix}$$

Para estabilizar los estados del sistema, los SMC de primer y segundo orden se diseñan mediante el enfoque propuesto.

El de primer orden se define para la siguiente elección de parámetros: $\rho = 1.5$, $\epsilon = 0.1$ (véase Observación 2).

La Figura 2.9 muestra las trayectorias del sistema en lazo cerrado; La Figura 2.10, el comportamiento de la superficie de deslizamiento; y la Figura 2.11, la señal de control. Las Figuras 2.10 y 2.11 incluyen además la respuesta obtenida con la aproximación de la función *sign* (2.25).

Note que, como se esperaba, las trayectorias del sistema en lazo cerrado convergen a cero en tiempo finito. Note también que, como en el ejemplo anterior, el uso de la aproximación definida en (2.25) permite mejorar las características de la superficie de deslizamiento y de la señal de control.

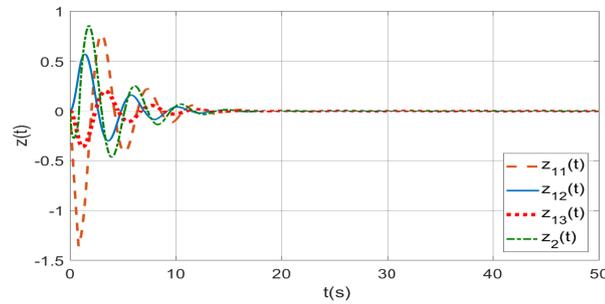


Figura 2.9: Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ley de control de primer orden.

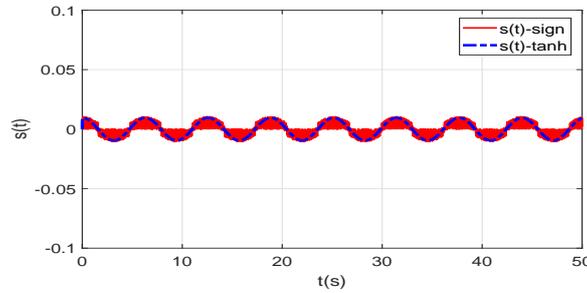


Figura 2.10: Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.27). La línea roja es el SMC de primer orden original y la línea azul es el SMC de primer orden considerando la aproximación (2.25) con $c = 50$.

El SMC Super-twisting, para este ejemplo de aplicación práctica, está definido por los parámetros $\Gamma^{++} = 1$, $\lambda_1 = 1.5$ y $\lambda_2 = 1.1$. Las Figuras 2.12, 2.13 y 2.14 muestran el comportamiento de los estados del sistema, la superficie deslizante y la entrada de control, respectivamente.

Aunque el controlador de primer orden con la aproximación propuesta de la función *sign* elimina el ruido en la señal de control, y el tiempo de convergencia obtenido con este controlador coincide con el obtenido con el SMC super-twisting, falla al enviar a cero la superficie de deslizamiento (ver Figura 2.10). Dado que el comportamiento de control tiene un impacto en el sistema de alimentación del motor

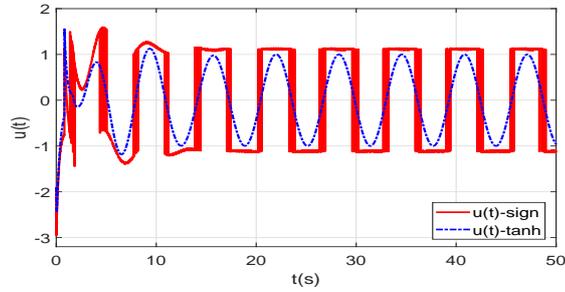


Figura 2.11: Señal del controlador para el sistema (2.26). La línea roja es la señal del SMC de primer orden original y la línea azul la señal del SMC de primer orden considerando la aproximación (2.25) con $c = 50$.

del cohete, el SMC de segundo orden puede considerarse la opción de control más conveniente.

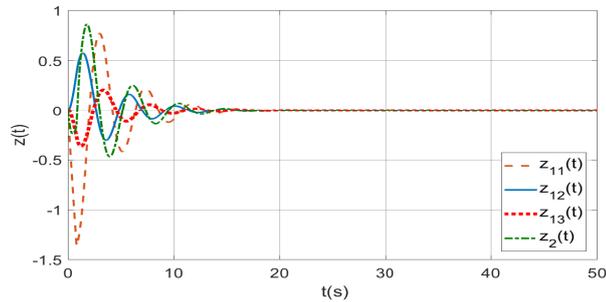


Figura 2.12: Respuesta del sistema (2.26) en lazo cerrado con el SMC de segundo orden.

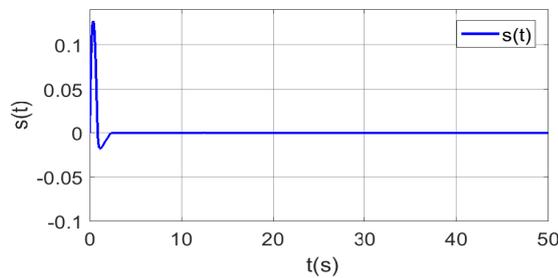


Figura 2.13: Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.27). Super-twisting SMC.

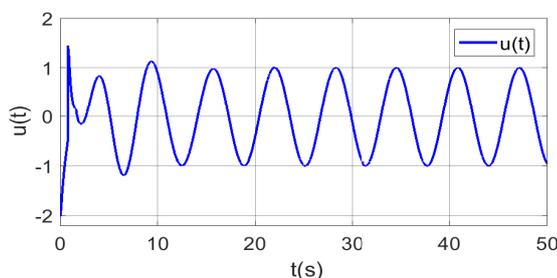


Figura 2.14: Señal del controlador de segundo orden.

2.5.3. Ejemplo académico: análisis comparativo

Como se ha señalado anteriormente, el SMC de segundo orden para sistemas con retardos ha sido poco investigado. La falta de información sobre los pasos de diseño para el SMC de segundo orden propuesto en [39] impide el desarrollo de un análisis comparativo con el SMC propuesto en este documento.

Por otro lado, el riguroso requisito sobre la estructura del sistema con retardos impuesto por el método introducido en [41] para la síntesis de un SMC de segundo orden no permite una comparación directa considerando los ejemplos numéricos presentados en las Secciones 2.5.1 y 2.5.2. Para hacer frente a esto, se ha modificado el ejemplo académico de la Sección 2.5.1 para que satisfaga el requisito de la matriz asociada al estado retardado.

Observación 3 Para aplicar el método propuesto en [41], debe encontrarse una matriz \bar{D} tal que la igualdad $A_h = B\bar{D}$ se cumpla. Para los ejemplos numéricos presentados en las Secciones 2.5.1 y 2.5.2, la matriz \bar{D} no existe.

Para el desarrollo del análisis comparativo, se considera un sistema con retardos con la forma (2.1) definido por las matrices (2.28).

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1.5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad A_h = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

donde $h = 0.8$. Las condiciones iniciales están dadas por $\phi(t) = [-3 \ 2]$ y la perturbación acoplada se define como $v(t) = \sin(t)$. Bajo estas condiciones el sistema es inestable.

En [41] se propone un control predictivo por modos deslizantes para sistemas lineales inciertos con retardos tanto en las variables de estado como en el control. El método se basa en un predictor para compensar el efecto de retardo en la entrada de control, y se aplica la técnica integral de SMC junto con un algoritmo de super-twisting para compensar parcialmente el efecto del término de perturbación. La ley

de control propuesta en [41], para un sistema con un retardo constante en el estado está dada por:

$$u(t) = -K_0 x(t) - k_1 \frac{s(t)}{\|s(t)\|^{\frac{1}{2}}} - \int k_2 \frac{s(t)}{\|s(t)\|} dt - \bar{D}x(t-h) \quad (2.29)$$

donde $K_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ debe elegirse tal que $(A + BK_0)$ es una matriz Hurwitz, y \bar{D} satisface $A_h = B\bar{D}$. Las ganancias de control se definen como:

$$k_1 > \sqrt{2\Gamma^+} \quad k_2 > \Gamma^+ \left(\frac{2\Gamma^+}{k_1^2} + 3 \right)$$

La superficie de deslizamiento se define por la ecuación (2.30).

$$\begin{aligned} s(t) &= B^T x(t) + \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= -B^T [Ax(t) + Bu_0(t)] \end{aligned} \quad (2.30)$$

La matriz $(A + BK_0)$ es Hurwitz si $K_0 = [K_0^1 \quad K_0^2]$, $K_0^1 > 4$, $K_0^2 > 1.5$. Sustituyendo en las ecuaciones (2.29) y (2.30), $h = 0.8$, $\Gamma^+ = 1$, A , B dados en (2.28) y seleccionando $K_0^1 = 4.5$, $K_0^2 = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, se obtiene:

$$\begin{aligned} u(t) &= - [4.5 \quad 2] x(t) - 2 \frac{s(t)}{\|s(t)\|^{\frac{1}{2}}} - \int 4 \frac{s(t)}{\|s(t)\|} dt - [0.7 \quad 0.8] x(t-0.8) \\ s(t) &= x_1(t) + \int (4x_1(t) - 1.5x_2(t) - u_0(t)) dt \end{aligned}$$

La respuesta del sistema bajo la ley de control propuesta en [41] se muestra en las Figuras 2.15-2.17. La Figura 2.15 muestra las trayectorias del sistema en lazo cerrado; la Figura 2.16, el comportamiento de la superficie de deslizamiento; y la Figura 2.17, la señal de control.

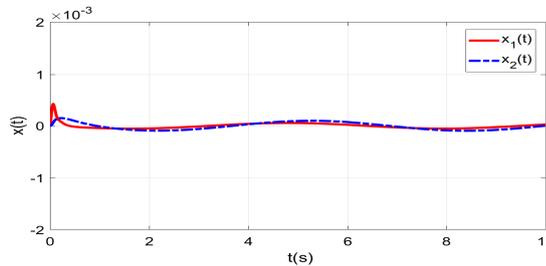


Figura 2.15: Respuesta del sistema (2.28) en lazo cerrado con el SMC de segundo orden (2.29).

Ahora, el SMC de segundo orden propuesto en este trabajo se aplica para estabilizar el sistema definido por las matrices dadas en (2.28). El sistema puede ser

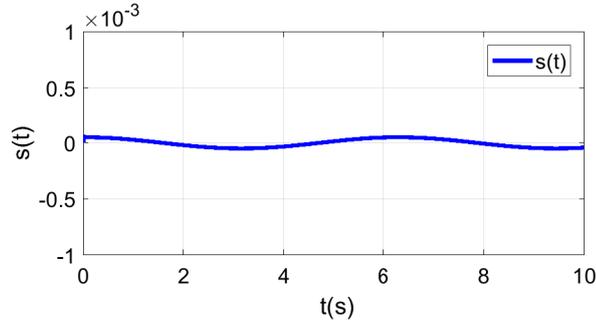


Figura 2.16: Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.30) correspondiente al SMC de segundo orden (2.29).

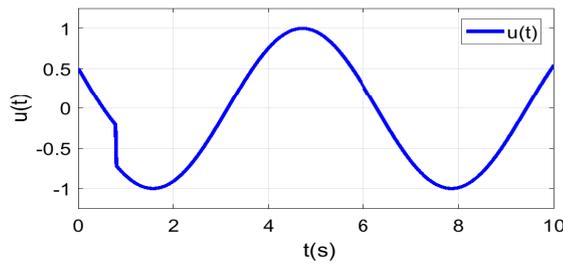


Figura 2.17: Señal del controlador (2.29).

representado en forma regular considerando la transformación de la matriz T dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema transformado está entonces definido por las matrices:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1.5 & -4 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con base en el Teorema 7, con $\varepsilon = 18$ se obtiene $C = 0.2949$. Entonces, la superficie de deslizamiento se obtiene sustituyendo C en (2.5), es decir:

$$s(t) = [0.2949 \quad 1] z(t) \quad (2.31)$$

Entonces, según el Teorema 9, el modo deslizante de segundo orden puede definirse considerando las siguientes constantes: $\Gamma^+ = 1$, $\lambda_1 = 1,5$ y $\lambda_2 = 1,1$. Los resultados de las simulaciones son mostrados en las Figuras 2.18-2.20. La Figura 2.18 muestra las trayectorias del sistema en lazo cerrado; la Figura 2.19, el comportamiento de la superficie de deslizamiento; y la Figura 2.20, la trayectoria del controlador.

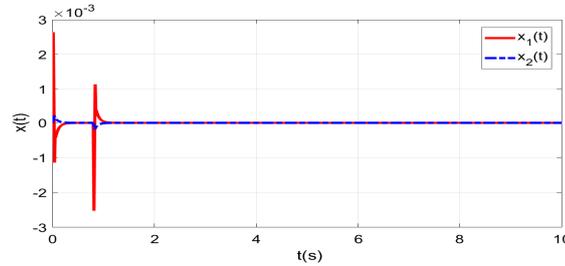


Figura 2.18: Respuesta del sistema (2.28) en lazo cerrado con el controlador de segundo orden (2.10), (2.13), (2.21).

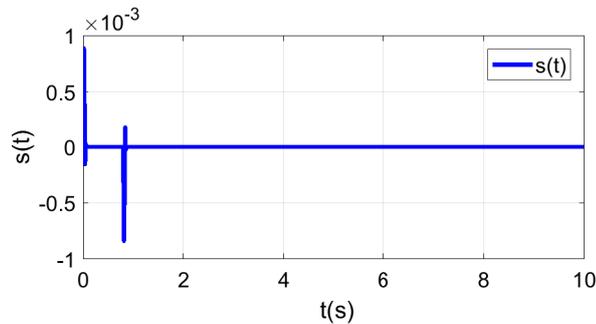


Figura 2.19: Comportamiento de la superficie de deslizamiento (2.31).

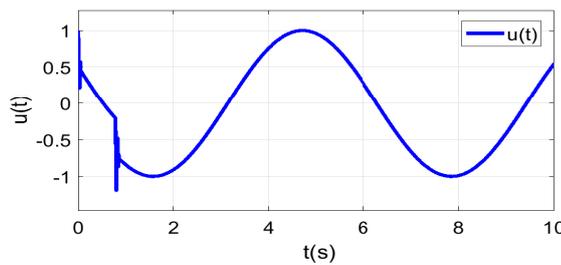


Figura 2.20: Trayectoria del controlador definido por las ecuaciones (2.10), (2.13), (2.21).

Resultados similares se consiguen con los dos controladores: el presentado en este trabajo y el introducido en [41]. Sin embargo, las condiciones de estabilidad impuestas a la dinámica del movimiento deslizante formuladas en el Teorema 7 garantizan estabilidad asintótica. Note que la respuesta del sistema bajo el controlador propuesto en [41] muestra un comportamiento oscilatorio alrededor del equilibrio mientras que la obtenida con el enfoque propuesto tiende a cero en un tiempo finito (alrededor de 1,5 s).

2.6. Conclusiones del capítulo

Se ha desarrollado un nuevo método para la síntesis de SMC de primer orden y de segundo orden que aseguran la estabilización robusta de sistemas con retardos. El método se basa en el enfoque Lyapunov-Krasovskii, que es ampliamente conocido por ser una herramienta poderosa para el análisis de estabilidad y la estabilización de los sistemas con retardo.

El potencial del método propuesto se verifica a través de un ejemplo académico y un caso de aplicación práctica. Además, un análisis comparativo resalta los principales beneficios de la estrategia de control propuesta: su facilidad de aplicación y su robustez frente a perturbaciones acopladas. Sin embargo, una limitación del enfoque propuesto es la falta de robustez frente a perturbaciones no acopladas.

Capítulo 3

Estabilización robusta de sistemas con retardos mediante el diseño de control adaptable

Con base en la documentación de enfoques aplicables a sistemas con retardos, se propone el uso del control adaptable, debido a que es una herramienta efectiva cuando los parámetros del sistema son desconocidos o se tienen acceso parcial al estado. Cabe resaltar que existen pocos trabajos que utilicen esta herramienta reportados en la literatura.

Se presenta entonces el diseño de controladores adaptables con la tarea de seguimiento de trayectoria de un sistema con retardos, lineal e invariante en el tiempo con incertidumbres paramétricas. El diseño se basa en el método conocido como control adaptable por modelo de referencia (MRAC por sus siglas en inglés), el operador integral y el control por Backstepping. El MRAC ha mostrado ser una eficiente herramienta para lidiar con incertidumbres paramétricas en diferentes tipos de sistemas dinámicos incluyendo lineales y no lineales, continuos y discretos, determinísticos y estocásticos.

En la siguiente propuesta, se presenta un control adaptable para un sistema con retardos e incertidumbres paramétricas lineal de segundo orden con acceso limitado al estado (solo la posición) y con conocimiento del signo de la entrada de control. La limitación en el conocimiento del estado es resuelta mediante el uso de la integración del sistema original y la obtención de un subsistema equivalente con incertidumbres paramétricas (el estado completo es medible). El subsistema puede verse como un proceso en cascada, para una de las etapas del proceso se establece un análisis por modelo de referencia de control adaptable para obtener estabilidad asintótica; una vez asegurada la estabilidad de esa etapa, se usa la técnica Backstepping junto con leyes de adaptación para estabilizar el subsistema completo. La estabilidad se analiza con el enfoque de Lyapunov-Krasovskii y el Lema de Barbalat.

3.1. Introducción

En el control adaptable por modelo de referencia un entendimiento completo de la planta y los requerimientos de la salida (regulación o seguimiento de trayectoria) permite establecer de forma precisa un modelo de referencia, el cual describe las entradas/salidas deseadas de la planta en lazo cerrado. El objetivo del MRAC es encontrar el control en lazo cerrado que modifica la estructura y dinámica de la planta de tal forma que las entradas/salidas son iguales a las del modelo de referencia previamente establecido. Mediante leyes de adaptación es posible obtener las salidas deseadas y encontrar valores estimados de los parámetros.

Algunos diseños basados en técnicas de control adaptable se han desarrollado para la estimación de parámetros de sistemas con retardos, los cuales se describen brevemente a continuación. En [64] y [65] se presenta la síntesis de un identificador de parámetros adaptable para sistemas dinámicos lineales con retardos en el estado y en la entrada de control. Se asume que el estado del sistema es medible todo el tiempo, el sistema es conocido pero los parámetros incluyendo el retardo son desconocidos. Se establece el principio de identificabilidad que depende de la controlabilidad del sistema; esta condición establece un marco para la identificación adaptable de sistemas con parámetros y retardos desconocidos. El marco establece un sistema de error que compara las evoluciones del estado con la estimación, el sistema tiene forma de una ecuación diferencial funcional. Se generan las condiciones suficientes y necesarias para la identificabilidad de los parámetros y los retardos, lo cual garantiza el funcionamiento del identificador adaptable que permite la estimación simultánea en línea. Los resultados teóricos son respaldados por simulaciones numéricas en [64] y un caso de estudio experimental mostrado en [65]. El análisis propuesto muestra convergencia de la estimación con los valores reales, el identificador es similar en planteamiento a un modelo de referencia de control adaptable.

En [66], se diseña un controlador adaptable para sistemas con largos periodos de retardo. La propuesta de control consiste en un control de orden reducido que depende del grado relativo de la planta, combinado con un control Posicast. Se muestra que esta arquitectura es amigable con la adaptación y con la estabilidad dentro de un dominio acotado para un retardo pequeño. Las leyes de adaptación estable son generadas mediante el uso sintonizadores de alto orden y una funcional de Lyapunov-Krasvoskii que garantizan la estabilidad en lazo cerrado. El control se diseña para sistemas de combustión continua, es probado en simulaciones obteniéndose una mejora comparado con previos controles implementados.

En [67] se diseña un controlador adaptable para sistemas con retardos con grados relativo menor o igual a dos, de la cual se conoce el orden, así como el retardo. No se tiene acceso a los estados solo se dispone de la medición de la entrada y salida. Se presenta un controlador de Smith adaptable, con leyes de adaptación similares a las establecidas para sistemas libres de retardos, tomando en cuenta un modelo transformado (modelo de referencia) del original se obtiene, mediante el

enfoque de Lyapunov-Krasovskii, estabilidad semiglobal del sistema en lazo cerrado y se establece convergencia asintótica del error de salida a cero. El controlador es sencillo de desarrollar y se muestra como su aplicación teórica y práctica tiene buenos resultados.

En [68] y [69] se presenta el diseño de MRAC para una clase de sistemas con retardos lineal multi-entradas multi-salidas (MIMO por sus siglas en inglés). En [68], el objetivo de control es el seguimiento de trayectorias de un sistema con retardos invariante en el tiempo, este problema se resuelve mediante un controlador cuya estructura se establece en una parametrización de la ecuación del error con base en la clásica estructura MRAC para plantas sin retardo. La propuesta de control incluye un componente adicional de control adaptable en lazo cerrado como salida del sistema dinámico. En un ejemplo propuesto se aprecia que el controlador es capaz de establecer un seguimiento de trayectoria con convergencia asintótica, sin embargo, la complejidad en la implementación es un tema importante en el diseño. Como extensión del trabajo anterior, en [69], un esquema de control adaptable con realimentación de la salida cuyo desarrollo se basa en el enfoque de Lyapunov-Krasovskii es utilizado para el diseño de algoritmos de adaptación y para comprobar la estabilidad de sistemas no lineales con retardos variantes en el tiempo desconocidos y perturbaciones externas. El diseño utiliza el control adaptable por modelo de referencia, a pesar de la complejidad del sistema analizado, el diseño es capaz de establecer el seguimiento de trayectoria.

En [70], se investiga el diseño de un control adaptativo para sistemas no lineales con retardos y parámetros desconocidos; se utiliza la aproximación de Padé para obtener un sistema aproximado libre de retardos. El controlador diseñado mediante la aplicación de la técnica Backstepping garantiza que todas las señales en lazo cerrado están acotadas; el error de seguimiento converge a una dinámica estable predefinida. Finalmente se analiza la efectividad del método en simulaciones de un ejemplo. En [71] se desarrolla un diseño MRAC mediante la retroalimentación de estado basada en Lyapunov para una clase de sistemas no lineales con perturbaciones externas y con retardos tanto en la entrada como el estado. El procedimiento se establece en la predicción de las trayectorias de referencia; el controlador intenta anticiparse a estados futuros. El análisis de estabilidad utiliza el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. En [72] se trabaja con un esquema de control adaptable junto con una transformación por Backstepping de un sistema lineal con retardos en el tiempo. La propuesta, basada en un análisis de Lyapunov, es capaz de abordar un conjunto de problemas clásicos de regulación del equilibrio. La eficacia del enfoque propuesto se ilustra mediante simulaciones numéricas de una planta de segundo orden en las que no se conoce el estado del actuador.

En este capítulo, se presenta el diseño de un control adaptable para un sistema con retardos basado en el control adaptable por modelo de referencia descrito en [73] junto con el procedimiento Backstepping, para los problemas de regulación y seguimiento de trayectorias para una clase de sistemas lineales inciertos de segundo

orden con retardos. Teniendo en cuenta que sólo el estado $x(t)$ es medible, e inspirándose en el trabajo de Aguilar Ibañez et. al. [2], se utiliza el operador integral para reconstruir el estado no disponible. Se proporcionan ejemplos numéricos para resaltar la eficacia del método propuesto.

3.2. Planteamiento del problema

Se considera un sistema incierto de segundo orden con retardos temporales con la forma:

$$\ddot{x}(t) = a_1x(t) + a_hx(t-h) + a_2\dot{x}(t) + bu(t) \quad (3.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}$ es el estado del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, h es el retardo constante y conocido, a_1 , a_h y $a_2 \in \mathbb{R}$ y $b > 0 \in \mathbb{R}$ son constantes desconocidas. La condición inicial del sistema se representa mediante la función continuamente diferenciable $\phi(\theta), \forall \theta \in [t_0 - h, t_0]$.

Se aborda el problema de seguimiento de trayectoria para este sistema, para el cual, se diseña una ley de control tal que $x(t) \rightarrow x_{ref}$, donde x_{ref} es una trayectoria de referencia suave preestablecida. Este enfoque de diseño de control adaptable se basa en los resultados previos presentados en [2], [74], [75].

A continuación se presentan suposiciones críticas para alcanzar los objetivos de control:

Suposición 4 *La trayectoria de referencia $x_{ref}(t)$ es una función suave con la primera y la segunda derivada acotadas y continuas.*

Suposición 5 *La condición inicial es tal que $\int_{t_0-2h}^{t_0-h} \phi(s)ds$ esta acotado.*

Suposición 6 *El estado $x(t)$ esta disponible para medición para todo $t > 0$.*

Para solucionar el problema de seguimiento de trayectoria adaptable, se considera la siguiente función error:

$$e(t) = x(t) - x_{ref}(t) \quad ; \quad \dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_{ref}(t). \quad (3.2)$$

3.3. Diseño de control

En esta sección se presenta el diseño de control para el problema de seguimiento de trayectoria adaptable del sistema (3.1) considerando un retardo constante y conocido h .

Para alcanzar el objetivo de control, el estado no disponible $\dot{x}(t)$ se reconstruye mediante el uso del operador integral sobre el sistema dado por la ecuación (3.1).

Por lo tanto, integrando ambos lados del sistema, desde $t_0 - h$ hasta t , se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{x}(t) = a_1 \int_{t_0-h}^t x(s) ds + a_h \int_{t_0-h}^t x(s-h) ds + a_2 x(t) + a_3 + bv(t).$$

con $a_3 = -a_2 x(t_0 - h) + \dot{x}(t_0 - h)$ y el nuevo control $v(t)$ se establece como:

$$v(t) = \int_{t_0-h}^t u(s) ds.$$

Entonces es posible reescribir la ecuación del error como sigue:

$$\dot{e}(t) = a_1 \int_{t_0-h}^t x(s) ds + a_h \int_{t_0-h}^t x(s-h) ds + a_2 x(t) + a_3 + bv(t) - \dot{x}_{ref}(t). \quad (3.3)$$

Note que la ecuación (3.3) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\dot{e}(t) = a^T H(t, t_0 - h) + bv(t), \quad (3.4)$$

donde a es un vector de parámetros desconocidos dado por:

$$a = [a_1 \quad a_h \quad a_2 \quad a_3 \quad 1]^T,$$

y $H(t, t_0 - h)$ se define como:

$$H(t, t_0 - h) = \left[\int_{t_0-h}^t x(s) ds \quad \int_{t_0-h}^t x(s-h) ds \quad x(t) \quad 1 \quad -\dot{x}_{ref} \right]^T. \quad (3.5)$$

Por lo tanto, el sistema extendido se escribe como:

$$\dot{e}(t) = a^T H(t, t_0 - h) + bv(t); \quad (3.6)$$

$$\dot{v}(t) = u(t). \quad (3.7)$$

La técnica de Backstepping integral se aplica al sistema (3.6)-(3.7). Este sistema puede verse como una conexión en cascada de dos componentes; el primer componente se define en (3.6), con v como entrada, y el segundo componente esta dado por (3.7).

Entonces, se debe diseñar una ley de control de retroalimentación del estado $v = \sigma(x)$ tal que el origen de

$$\dot{e} = a^T H(t, t_0 - h) + b\sigma(x) \quad (3.8)$$

sea asintóticamente estable.

Ya que siempre se tiene acceso a $H(t, t_0 - h)$, es posible aplicar el método MRAC clásico como se muestra a continuación.

Con base en [2], [76], la siguiente parametrización es considerada:

$$b^{-1} \left(-a^T H(t, t_0 - h) - e(t) - \int_{t_0-h}^t e(s) ds \right) = H^T(t, t_0 - h) \theta_*, \quad (3.9)$$

donde $\theta_* \in \mathbb{R}^5$ es el vector ideal, en el que todos los parámetros son conocidos y definen el controlador adaptativo $\sigma(x)$ como:

$$\sigma(x) = H^T(t, t_0 - h) \hat{\theta}, \quad (3.10)$$

donde $\hat{\theta}$ es una estimación del vector θ_* . Entonces, para determinar cómo evoluciona $\hat{\theta}$, la ecuación (3.8) puede escribirse en términos de las ecuaciones (3.9) y (3.10) como:

$$\dot{e}(t) = -e(t) - \int_{t_0-h}^t e(s) ds + bH^T(t, t_0 - h) \Delta\theta, \quad (3.11)$$

donde $\Delta\theta = \hat{\theta} - \theta_*$.

El siguiente paso consiste en encontrar la evolución adaptable de los parámetros en el vector $\hat{\theta}$ tal que las trayectorias del sistema (3.11) satisfacen $e \rightarrow 0$ y $\dot{e} \rightarrow 0$.

Es bien sabido que el método Lyapunov es efectivo para determinar la estabilidad de un sistema. Para un sistema libre de retardo, esto requiere la construcción de una función de Lyapunov $V(t, x(t))$, que podría considerarse como una medida que cuantifica la desviación del estado $x(t)$ de la solución trivial 0.

Para el caso de los sistemas con retardos, el estado en el instante de tiempo t_0 necesario para especificar la evolución futura del sistema más allá de t_0 es el valor de $x(t)$ en el intervalo $[t_0 - h, t_0]$, es decir, x_t . Entonces, es natural esperar que para un sistema con retardos, la correspondiente función de Lyapunov sea una funcional $V(t, x_t)$ en función de x_t , que también debería medir la desviación de x_t de la solución trivial 0. Tal funcional se conoce como funcional de Lyapunov-Krasovskii [12].

Para encontrar la evolución adaptable de los parámetros del vector $\hat{\theta}$, se considera la siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V_0(*) = \frac{1}{2b} e^2 + \frac{1}{2b} \left(\int_{t_0-h}^t e(s) ds \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta\theta^T \Lambda \Delta\theta, \quad (3.12)$$

con una constante $\Lambda > 0$. Tomando la derivada con respecto al tiempo de $V_0(*)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (3.11) se obtiene:

$$\dot{V}_0(*) = -\frac{1}{b} e^2(t) + e(t) H^T(t, t_0 - h) \Delta\theta + \hat{\theta}^T \Lambda \Delta\theta. \quad (3.13)$$

La función de adaptación:

$$\dot{\hat{\theta}}^T = -e(t) \Lambda^{-1} H^T(t, t_0 - h), \quad (3.14)$$

permite expresar la ecuación (3.13) como:

$$\dot{V}_0(*) = -\frac{1}{b}e^2(t) \quad (3.15)$$

Es posible concluir que $e(t) \in L_\infty \cap L_2$, $\Delta\theta \in L_\infty$, también $\hat{\theta}$ y $\int_{t_0-h}^t e(s)ds \in L_\infty$, cuando $t \rightarrow \infty$. En consecuencia, se demuestra que cada término de \dot{e} , definido en la ecuación (3.11), es acotado. La Suposición 4 junto con $e(t) \in L_\infty$ y $\int_{t_0-h}^t e(s)ds \in L_\infty$ implican que $\int_{t_0-h}^t x(s)ds \in L_\infty$ y todos los elementos de $H(t, t_0 - h)$ definido en (3.5), menos el segundo están acotados. En el caso del segundo elemento, nótese que $\int_{t_0-h}^t x(s-h)ds = \int_{t_0-2h}^{t_0-h} x(s)ds + \int_{t_0-h}^{t-h} x(s)ds$, donde ya se ha probado que el segundo término está acotado y, si la Suposición 5 se cumple, el primer término también es acotado. Entonces, se concluye que $\dot{e} \in L_\infty$. A partir del lema de Barbalat, $\dot{e} \rightarrow 0$ y de la definición de $\hat{\theta}$, dada por (3.14), se concluye que $\hat{\theta} \in L_\infty$ con $\hat{\theta} \rightarrow 0$. Basándose en estos hechos, se asegura que las trayectorias del sistema (3.11) están acotadas y satisfacen $e \rightarrow 0$ y $\dot{e} \rightarrow 0$.

La Proposición 2, que figura a continuación resume la idea anterior.

Proposición 2 *Considere el sistema (3.8). Entonces, la ley de control adaptable por modelo de referencia (MRAC)*

$$\sigma(x) = H^T(t, t_0 - h)\hat{\theta}, \quad (3.16)$$

donde $\hat{\theta}$ evoluciona de acuerdo con:

$$\dot{\hat{\theta}} = -e(t)\Lambda^{-1}H(t, t_0 - h) = \varpi(t, t_0 - h),$$

asegura, para cualquier condición inicial, que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0$, con todas las señales acotadas.

Observación 4 *Note que no existen restricciones en la magnitud del retardo, ya que el análisis de estabilidad es independiente del retardo. Esto es, la negatividad en la derivada de la funcional de Lypaunov-Krasovskii está garantizada sin importar el valor del retardo mediante la correcta elección de la función de adaptación.*

Una vez que la ley de control $\sigma(x)$ garantiza la estabilidad asintótica del sistema (3.6), el siguiente paso es diseñar una ley de control u que estabilice el sistema completo (3.6)-(3.7). Sumando y restando $b\sigma(x)$ de la parte derecha de la ecuación (3.6), se obtiene la representación equivalente:

$$\dot{e}(t) = [a^T H(t, t_0 - h) + b\sigma(x)] + b[v(t) - \sigma(x)]; \quad (3.17)$$

$$\dot{v}(t) = u(t). \quad (3.18)$$

donde $v = \int_{t_0-h}^t u(s)ds$.

Considerando el cambio de variable $\xi = v - \sigma(x)$, las ecuaciones (3.17)-(3.18) pueden reescribirse como:

$$\dot{e}(t) = [a^T H(t, t_0 - h) + b\sigma(x)] + b\xi; \quad (3.19)$$

$$\dot{\xi}(t) = z. \quad (3.20)$$

donde $z = u - \dot{\sigma}$.

El sistema (3.19)-(3.20) es similar al sistema inicial (3.6)-(3.7), excepto que ahora el primer componente tiene un origen asintóticamente estable cuando la entrada ξ es cero. Esta característica permite el diseño del control adaptable u que estabiliza el sistema extendido (3.6)-(3.7). El control adaptable u es descrito en la Proposición 3.

Proposición 3 *Considere el sistema (3.19)-(3.20), con un origen asintóticamente estable cuando la entrada ξ es cero, y su dinámica definida en la Proposición 2. Considere además las ecuaciones de error definidas como: $\xi = v - \sigma(x)$ y $\tilde{p} = \hat{p} - p \in \mathbb{R}^5$, donde:*

$$p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ; \quad \hat{p} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}.$$

Entonces, la salida realimentada de control adaptable:

$$u(t) = -\kappa_0 \xi - \Phi(t, t_0 - h), \quad (3.21)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0 - h) = & e(t) - x\hat{\theta}_1 - x(t-h)\hat{\theta}_h - \hat{\theta}_3 - \hat{\theta}_2 \left(H^T(t, t_0 - h)\hat{a} + \hat{b}v + \dot{x}_{ref}(t) \right) \\ & - H^T(t, t_0 - h)\varpi(t, t_0 - h) + \ddot{x}_{ref}\hat{\theta}_4 \end{aligned} \quad (3.22)$$

y

$$\dot{\hat{p}} = -\kappa_1 \hat{\theta}_2 \begin{bmatrix} H(t, t_0 - h) \\ v \end{bmatrix} \xi, \quad (3.23)$$

con $\kappa_0, \kappa_1 > 0$, asegura la estabilidad del sistema (3.11), con $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, para el sistema extendido con todas las señales acotadas.

Demostración. Sustituyendo las ecuaciones (3.9) y (3.16) en la ecuación (3.19) se obtiene:

$$\dot{e}(t) = -e(t) - \int_{t_0-h}^t e(s)ds + bH^T(*)\Delta\theta + b\xi. \quad (3.24)$$

Para analizar la convergencia, se propone la siguiente funcional Lyapunov-Krasovskii:

$$V_T(*) = V_0(*) + \frac{1}{2\kappa_1} |\tilde{p}|^2 + \frac{1}{2} \xi^2. \quad (3.25)$$

De la cual, su derivada con respecto al tiempo de V_T a lo largo de las trayectorias de (3.24) satisface, utilizando la ecuación (3.14), lo siguiente:

$$\dot{V}_T(*) = \dot{V}_0(*) + e(t)\xi + \frac{1}{\kappa_1} \tilde{p}^T \dot{\hat{p}} + \xi \left(u - \dot{H}^T(*)\hat{\theta} - H^T(*)\varpi(*) \right). \quad (3.26)$$

Nótese que:

$$\dot{H}^T(*)\hat{\theta} = x(t)\hat{\theta}_1 + x(t-h)\hat{\theta}_h + \dot{x}(t)\hat{\theta}_2 - \ddot{x}_{ref}(t)\hat{\theta}_4. \quad (3.27)$$

Por otro lado, $\dot{x}(t)$ puede escribirse en términos de los parámetros \hat{a} , \hat{b} y \tilde{p} como:

$$\dot{x}(t) = \hat{a}^T H(*) + \hat{b}v - \tilde{p}^T \begin{bmatrix} H(*) \\ v \end{bmatrix} + \dot{x}_{ref}(t). \quad (3.28)$$

Entonces se sustituye (3.15), (3.27) y (3.28) en (3.26) y tomando en cuenta a (3.21)-(3.23), se obtiene:

$$\dot{V}_T(*) = -\frac{1}{b}e^2(t) - \kappa_0 |\xi|^2,$$

Una vez más, se concluye que $e(t) \rightarrow 0$ y $\xi \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, con el conjunto de señales $\{\tilde{p}, \phi, e, \xi\} \in L_\infty$. Acorde a la definición de \tilde{p} , se puede concluir que $\hat{p}^T = [\hat{a}^T, \hat{b}]$ esta acotada con $\hat{p} \rightarrow 0$ (véase (3.23)). Usando los argumentos dados en la Proposición 2, se puede concluir que $\dot{e} \rightarrow 0$, con $\hat{\theta} \in L_\infty$ y $v \in L_\infty$. Finalmente, de las ecuaciones (3.21) y (3.22), u es acotada. ■

3.4. Simulaciones numéricas

3.4.1. Ejemplo académico

Considere el sistema con retardos inestable de la forma (3.1) mostrado a continuación

$$\ddot{x} = 2x(t) + x(t-h) + 8\dot{x}(t) + 2u(t), \quad (3.29)$$

donde $h = 2$, con la condición inicial $(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = (-1, 2)$. La tarea de control consiste en alcanzar el punto de equilibrio $(x(t), \dot{x}(t)) = (5, 0)$.

Mediante el uso de las Proposiciones 2 y 3 con las ganancias de control que se eligen como $\kappa_0 = 25$, $\kappa_1 = 0.6$, se logra el objetivo de control. La Figura 3.1 muestra los resultados de la simulación obtenidos.

El controlador estabiliza eficazmente el sistema inestable de segundo orden. Nótese en la Figura 3.2 que incluso cuando las estimaciones de los parámetros convergen a valores constantes después de $t = 2, 5$, estos no corresponden con los valores reales. En la Figura 3.3(a) se puede ver el comportamiento de la señal de control. La magnitud de la señal de error se aproxima rápidamente a cero, esto se muestra en la Figura 3.3(b).

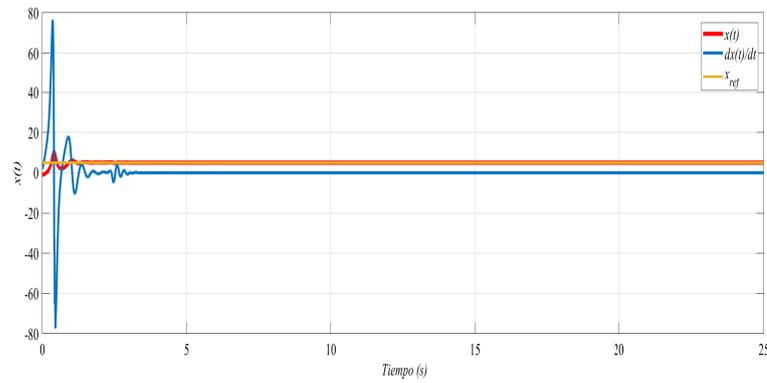


Figura 3.1: Salidas del sistema controlado.

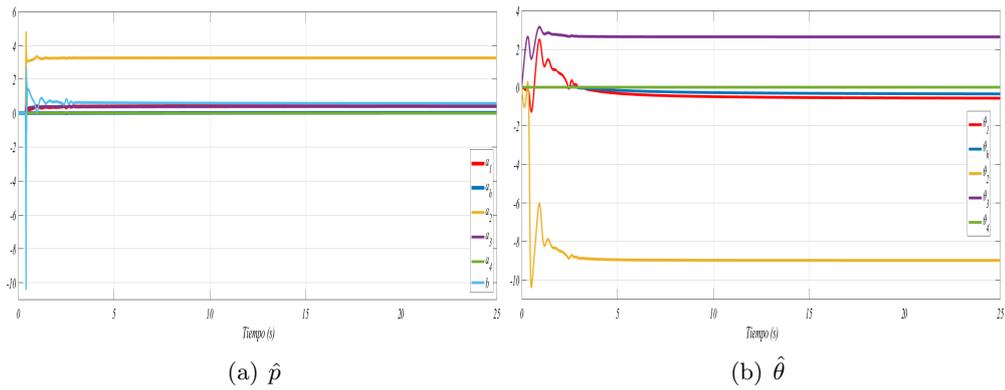


Figura 3.2: Parámetros estimados del modelo de referencia.

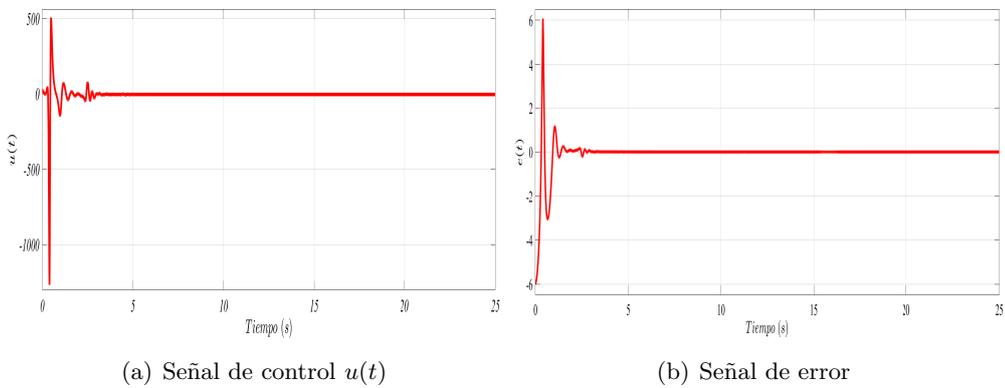


Figura 3.3: Señales de control y error obtenidas en la simulación del sistema (3.29).

Una condición que podría ser vista como una fuerte restricción del enfoque propuesto es la necesidad de conocer el valor del retardo. Con esto en mente, a continuación se muestra con un ejemplo que el esquema de control propuesto es robusto ante perturbaciones en el retardo.

Se realizan simulaciones del sistema definido en (3.29) asumiendo que el valor del retardo usado en la función de adaptación (3.14) no corresponden al valor del retardo de la planta, es decir, la planta tiene un retardo $h = 2$ mientras que en la función de adaptación se considera $h = 1.85$. La Figura 3.4 (a) muestra la salida del sistema controlado.

A pesar de no usar el valor exacto del retardo es evidente que la tarea de control es alcanzada. Sin embargo, la magnitud de la señal de control se incrementa considerablemente (véase la Figura 3.4 (b)).

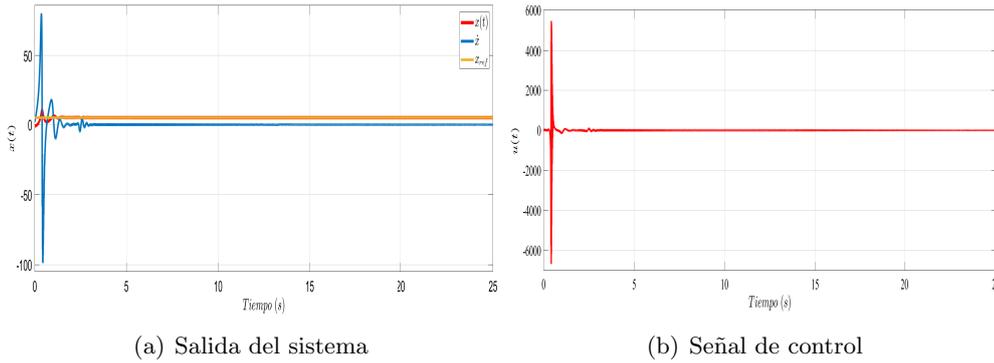


Figura 3.4: Trayectorias del sistema controlado con una incertidumbre en el retardo.

Para probar el desempeño del controlador propuesto, se compara con el controlador presentado en [2]. Los resultados de la simulación numérica del sistema definido en (3.29) en lazo cerrado con el controlador de [2] se muestran en la Figura 3.5. Para aplicar este controlador, el retardo se establece como cero. Note que las trayectorias del sistema convergen al valor de la referencia en un corto periodo de tiempo (Figura 3.5(a)). Sin embargo, en la señal de este controlador se observan oscilaciones conforme avanza el tiempo lo que representa un inconveniente desde el punto de vista práctico (Figura 3.5(b)).

Considere ahora el problema de seguimiento de trayectoria para el sistema (3.29), donde $x_{ref} = \sin 0.5t$. Las Proposiciones 2 y 3 se aplican para alcanzar la tarea de control establecida. Las Figuras 3.6-3.7 muestran los resultados obtenidos de la simulación, considerando las ganancias de control $\kappa_0 = 25$, $\kappa_1 = 0.5$.

Note que el controlador cumple con la tarea de seguimiento de la trayectoria de referencia deseada para el sistema inestable.

Las Figuras 3.7(a) y 3.7(b) muestran la señal de control y la señal de error del sistema con respecto a la referencia, respectivamente. Note que aunque el error no

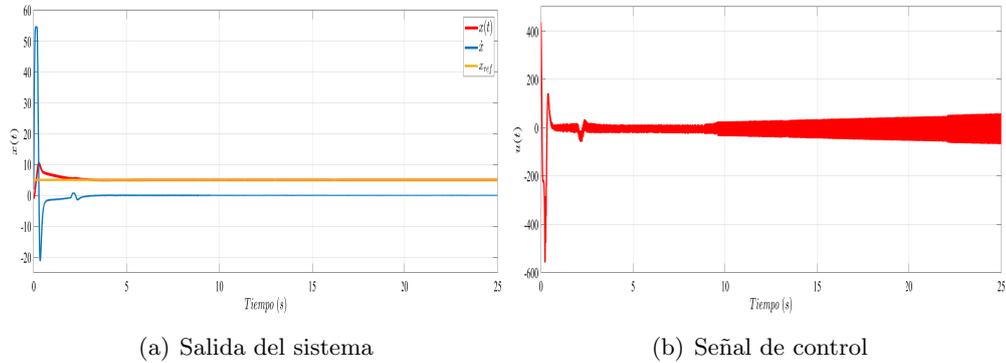


Figura 3.5: Trayectorias del sistema (3.29) en lazo cerrado con el controlador propuesto en [2].

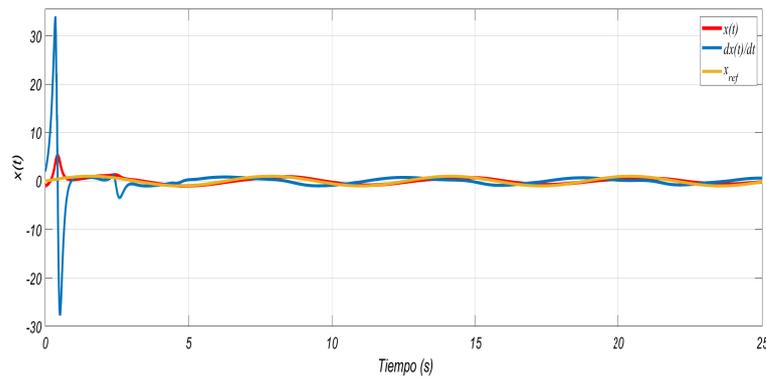


Figura 3.6: Respuesta del sistema controlado, alcanzando la referencia x_{ref} .

converge a cero, si se mantiene cerca de este valor, considerando que se trata de una planta inestable.

3.4.2. Ejemplo de aplicación práctica: un reactor químico con sistema de reciclado

Reactores químicos con sistema de reciclado son usualmente utilizados dentro de la industria química cuando la reacción es autocatalítica (si uno de los productos de la reacción es también un catalizador de la misma o de una reacción acoplada), o cuando se requiere una operación isotérmica del reactor. Los reactores de reciclado permiten incrementar la conversión global y dar lugar a la reducción de costos. En este tipo de sistemas, muchas operaciones están involucradas, los principales son la separación de los insumos a reciclar de los rendimientos y el transporte a través de tuberías. Estas operaciones introducen retardos temporales en el sistema.

El estudio abordado en [77] se considera para ilustrar la eficacia del enfoque

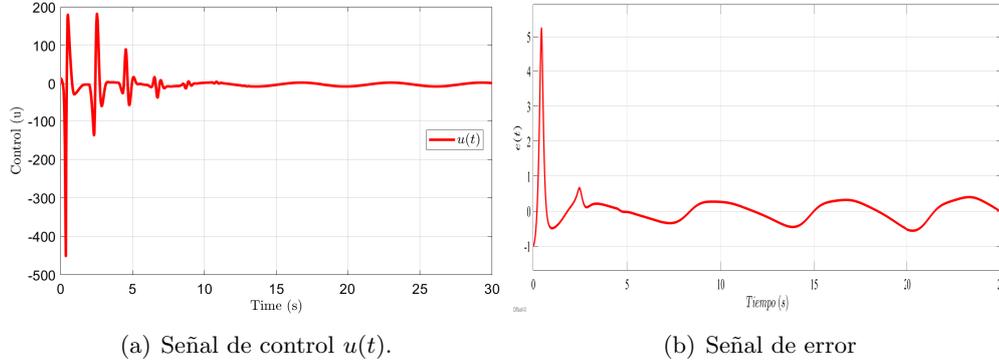


Figura 3.7: Seguimiento de trayectoria del sistema 3.29, control y error.

propuesto. Es importante recalcar que aun cuando el sistema en general no se ajusta al sistema con retardos de segundo orden bajo consideración, el análisis propuesto puede aplicarse para estabilizar uno de los estados del sistema.

En este ejemplo, una reacción irreversible $A \rightarrow B$ con un efecto térmico despreciable tiene lugar en el sistema de reactor de dos etapas. La temperatura se mantiene constante, por lo que sólo se necesita controlar la composición de las corrientes de producto de los dos reactores c_1, c_2 . las ecuaciones de balance de materiales para el sistema del reactor incluyen parámetros variables en el tiempo que representan incertidumbres del sistema ($\delta k_1, \delta k_2$ y $d(t)$). El objetivo de control es dirigir c_1 y c_2 a un punto de referencia determinado (c_{1s}, c_{2s}). Los estados del sistema se definen como $x_1 = c_1 - c_{1s}$ y $x_2 = c_2 - c_{2s}$, entonces $(c_1, c_2) \rightarrow (c_{1s}, c_{2s})$ siempre que $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$.

El modelo del reactor de reciclado esta dado por la ecuación matricial con retardos en el tiempo (3.30) que describe la dinámica de de los dos estados del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + Bu(t) + w(t) \quad (3.30)$$

donde $A = \begin{bmatrix} 2.3333 + \delta k_1 & 0 \\ 0.25 & 3 + \delta k_2 \end{bmatrix}$, $A_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $w(t) = \begin{bmatrix} 0.1d(t) + \delta k_1 c_{1s} \\ \delta k_2 c_{2s} \end{bmatrix}$, con $h = 1$, $c_{1s} = 0.5$, $c_{2s} = 1$, $\delta k_1 = 0.4 \sin 2t$ y $\delta k_2 = d(t) = 0.5 \sin 2t$, los valores iniciales se eligen como $(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = (-0.4, 0)$. El sistema es inestable, véase, por ejemplo [77], [78] y las referencias que contienen.

El enfoque propuesto es utilizado para estabilizar el estado x_1 del sistema químico. La dinámica de este estado del sistema es descrita por una ecuación de segundo orden con retardos en el tiempo con la forma (3.1). El objetivo de control, como se menciona arriba, consiste en alcanzar el punto de equilibrio $(x_1(t), \dot{x}_1(t)) = (0, 0)$.

Las ganancias de control se eligen $\kappa_0 = 20$, $\kappa_1 = 20$. La efectividad del enfoque para estabilizar al reactor se ilustra en la Figura 3.8. Note que alrededor de los cinco

segundos las trayectorias del sistema son llevadas al equilibrio del sistema. Figura 3.9 muestra la correspondiente señal de control; para este caso particular se obtiene una señal de control de pequeña magnitud.

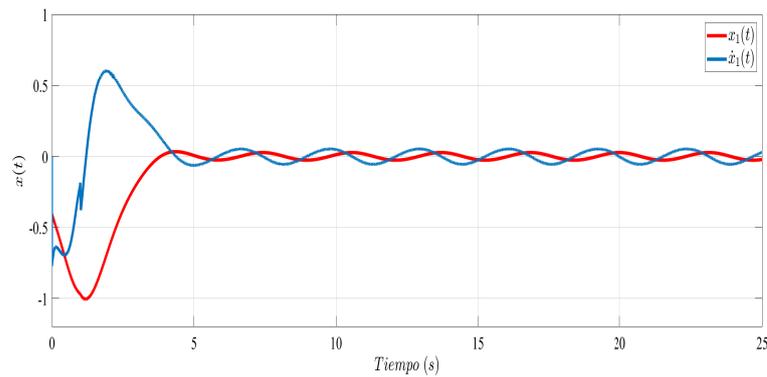


Figura 3.8: Trayectorias del sistema controlado por el enfoque propuesto.

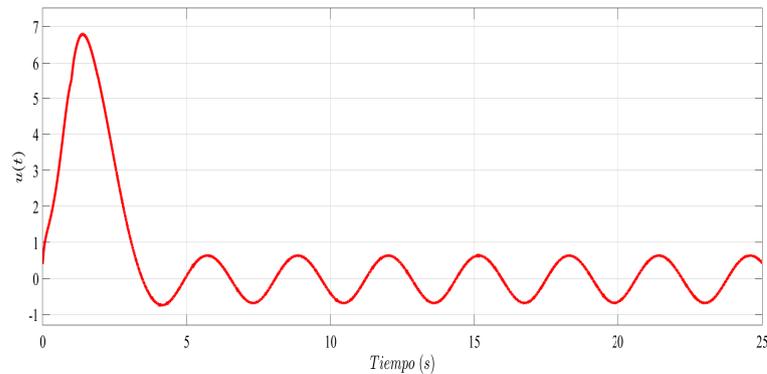


Figura 3.9: Señal de control $u(t)$ aplicado al reactor.

3.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo, se presenta el diseño basado en control adaptable que resuelve el problema de regulación y seguimiento de trayectoria para un sistema inestable incierto lineal con retardos en el tiempo de segundo orden. El enfoque propuesto se desarrolla bajo el supuesto de que la posición del sistema está siempre disponible, que se conoce el signo de la ganancia de control y se conoce el valor del retardo. Se aplica el operador integral para obtener una nueva representación del sistema original, lo cual permite conocer todo el estado. El uso del operador integral permite dividir el problema de control original en dos subproblemas: el primero consiste en utilizar

el método MRCA para estabilizar el nuevo subsistema incierto, el segundo aplica la técnica Backstepping para estabilizar el sistema extendido completo. Hay que señalar que la estabilización del sistema extendido es equivalente a la estabilización de la salida realimentada del sistema incierto original.

Las simulaciones numéricas de una aplicación académica y práctica demuestran la eficacia del enfoque propuesto, tanto para la tarea de regulación como para el problema de seguimiento de la trayectoria.

Capítulo 4

Diseño de control basado en reset para mejorar la respuesta del control por modos deslizantes

Con base en la documentación de enfoques aplicables a sistemas con retardos, se propone el uso del control reseteado, debido a que ha demostrado ser una herramienta efectiva en algunos de los problemas que genera la aparición de retardos en los sistemas; el adelanto de fase extra obtenido con la acción de reset puede aliviar el desfase del retardo en lazo cerrado.

En este capítulo, se analizan los beneficios de sumar controladores basados en reset a plantas en lazo cerrado con controladores no lineales. Se busca que el estado continuo del reset coadyuve al control no lineal en el alcance del equilibrio, una vez alcanzado se desconecta mediante un cambio súbito en el estado (acción de reset). La idea principal es mejorar la respuesta transitoria de un sistema. Como punto de partida se toma una planta en lazo cerrado con una ley de control por modos deslizantes, con dicha configuración es posible visualizar los beneficios de la propuesta.

4.1. Introducción

Los enfoques de control no lineal surgen con la idea de superar limitaciones en la implementación y el desempeño de las técnicas de control lineales [79]. El control por modos deslizantes es un enfoque no lineal extendido y ampliamente utilizado, el cual se considera una herramienta robusta y poderosa para lidiar con sistemas no lineales. La idea de los modos deslizantes se basa en el diseño de una superficie de deslizamiento, que representa el comportamiento ideal del sistema, y una ley de

control discontinua, la cual se encarga de llevar a las trayectorias del sistema a la superficie en tiempo finito [43], [80]. Se le reconoce a este enfoque por su respuesta rápida, buena respuesta transitoria y robustez frente a incertidumbres de los parámetros del sistema y perturbaciones externas [43]. No obstante, ciertas complicaciones pueden surgir en su implementación, por ejemplo, no existe una metodología para calcular las ganancias de control, lo que impide obtener un “óptimo” desempeño con una elección arbitraria de ganancias que satisfagan los requerimientos generales. Por ejemplo, algunos valores de ganancias de control deben ser verificadas antes de encontrar la que produzca una respuesta apropiada cuando se utiliza un método heurístico de sintonía. Además, la implementación física está restringida a ciertos valores de ganancia, ya que pueden corresponder a desplazamientos o velocidades inalcanzables para un actuador [43], [81]. Una señal de control extra para apoyar al control por modos deslizantes durante la respuesta transitoria puede mejorar la salida del sistema. Bajo esta idea, se propone el uso del control reseteado para mejorar el rendimiento teniendo en cuenta las restricciones de la implementación física. En 1958, J. C. Clegg presenta un integrador lineal cuyo estado es llevado a cero de forma instantánea cuando su entrada es cero [82]. El desempeño de este integrador no lineal (conocido como integrador de Clegg o integrador reseteado, IC) supera al de su contra parte lineal [83], caracterizado por generar un desfase de 38.1 grados contra los 90 grados de un integrador lineal (generando un adelanto de fase extra de 51.9 grados en cada frecuencia), lo que se relaciona con reducción del sobre impulso sin sacrificar la velocidad de respuesta.

Aunque algunos métodos de diseño que explotan las propiedades del IC se desarrollaron en un principio en [84] y [85], la idea fue abandonada por algunas décadas. En [84] se propuso un control en lazo cerrado con una estructura de reseteo basado en un IC en paralelo con un integrador lineal que permite obtener una reducción en la magnitud del bucle de transmisión y, en consecuencia, el ruido del sensor se reduce [83]. En [85], se propone el elemento de reset de primer orden (FORE, por sus siglas en inglés) y es usado para reducir el sobreimpulso mientras que se añade un compensador lineal para satisfacer el resto de las especificaciones de diseño. A pesar de los resultados, no se formaliza teóricamente la investigación en el área de control reseteado. Es hasta el inicio de siglo que surgen diversos estudios encaminados al desarrollo de la teoría que enmarque a este tipo de sistemas, por ejemplo, los sistemas dinámicos impulsivos [86], [87], [88], [89], [90] y los sistemas dinámicos híbridos [91], [92], [93], [94], con lo que el diseño de control con acción de reset se convierte en una línea de investigación principal.

La teoría fundamental y los resultados trascendentales de sistemas reseteados son presentados en [87] y [95]. Estos trabajos resaltan las ventajas potenciales en el uso del Integrador de Clegg con la demostración de la capacidad de los controladores basados en reset para superar limitaciones fundamentales de los controladores lineales.

En [96], [97], se presenta una línea de investigación práctica en la que se establece

que las acciones de reset se producen en instantes fijos y los estados no se ponen a cero. Este enfoque se ha implementado con éxito en algunas aplicaciones como el control de servosistemas de discos duros y al control de estado de posicionamiento de microactuadores piezoeléctricos. El enfoque basado en reset es simple de entender y de implementar, ya que consiste en sistemas lineales que presentan saltos (cambios de estado súbitos) dictaminados por su entrada y la dinámica de estado. Este enfoque permite buscar soluciones que mejoren el desempeño de controladores sin incrementar su complejidad.

En este capítulo se propone la incorporación de un control conmutado basado en reset a un sistema estable en lazo cerrado que consiste en una planta y un control por modos deslizantes. La función del control por reset añadido es mejorar la respuesta transitoria para valores de error significantes. Si el error es aceptable, el control extra se desconecta. Así, el control extra trabaja de acuerdo al estado del error. Para el caso reportado en este trabajo, el sistema presenta un comportamiento aleatorio alrededor del punto de equilibrio, debido al chattering asociado a los modos deslizantes. Entonces, el enfoque propuesto usa la idea de una banda de reset, inspirado en [98], para determinar si el error es grande (fuera de la banda) o aceptable (dentro de la banda), activando o desactivando la acción de reset, respectivamente. Se adopta el marco de referencia de sistemas dinámicos híbridos mostrado en [94], para el desarrollo del enfoque. En este marco de referencia existen dos dinámicas, cada una con un conjunto asociado: la dinámica continua y la dinámica de salto. El sistema evoluciona de forma continua o con saltos (acción de reset) dependiendo de si el estado del sistema se encuentra al conjunto continuo o al conjunto de salto, respectivamente. En consecuencia, este marco proporciona buenas propiedades estructurales como la robustez frente al ruido de las mediciones.

El resto del capítulo se organiza de la siguiente manera. La Sección 4.2 presenta conceptos preliminares de el marco de inclusiones híbridas. Además, se aborda el planteamiento del problema; el sistema en estudio es un sistema no lineal de control afín que se controla mediante un SMC de primer orden que asegura la estabilidad del sistema y resuelve el problema de regulación. En la Sección 4.3 se presenta el diseño de un novedoso controlador híbrido destinado a mejorar la respuesta transitoria del sistema. La Sección 4.4 presenta el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado que valida al enfoque propuesto. En la Sección 4.5 el desempeño del controlador es evaluado en un ejemplo académico y en un ejemplo de aplicación práctica. Finalmente, en la Sección V se comentan las observaciones y conclusiones encontradas con el trabajo presentado.

4.2. Preliminares y planteamiento del problema

4.2.1. Marco de inclusiones híbridas

El análisis y control de sistemas híbridos requiere desarrollarse en un marco apropiado de trabajo. Recientemente, se ha extendido el uso del Marco de Inclusiones Híbridas (del inglés Hybrid Inclusions framework, con siglas HI) en particular, para el modelado de sistemas de control reseteado [94], [93], como el caso del trabajo aquí presentado.

Un sistema híbrido con entradas \mathcal{H}_w puede describirse mediante

$$\mathcal{H}_w : \begin{cases} \dot{x} \in f(x, w), & (x, w) \in \mathcal{C}, \\ x^+ \in g(x, w), & (x, w) \in \mathcal{D}, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde x^+ es el estado después del reset y la dinámica del sistema se rige por una inclusión diferencial acotada y una inclusión en diferencias acotada. Un sistema híbrido con esta forma se define por cuatro elementos conocidos como *Datos del sistema híbrido* (del inglés Data of a hybrid system) [94]:

- *Conjunto de flujo.* Un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
- *Mapa de flujo.* Un mapeo conjunto-valor $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{C} \subset \text{dom } f$.
- *Conjunto de salto.* Un conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
- *Mapa de salto.* Un mapeo conjunto-valor $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{D} \subset \text{dom } g$.

A continuación se presentan los conceptos básicos de sistemas híbridos dentro del marco de inclusiones híbridas.

Dominios temporales híbridos y arcos híbridos

En este marco, las soluciones están parametrizadas tanto por la cantidad de tiempo transcurrido, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, como por el número de saltos que se han producido, $j \in \mathbb{N}$ [94], [99].

Se definen los conjuntos denominados *dominios temporales híbridos*, en los que se parametrizan las evoluciones de los sistemas híbridos correspondientes sólo a determinados subconjuntos de $(t, j) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$, ya que es imposible para todo $(t, j) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$.

Definición 8 *Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$ es un dominio temporal híbrido compacto si*

$$E = \bigcup_{j=0}^{J-1} ([t_j, t_{j+1}], j)$$

para una secuencia finita de tiempo $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_J$. Es un dominio híbrido de tiempo si para todo $(T, J) \in E$, $E \cap ([0, T] \times \{0, 1, \dots, J\})$ es un dominio híbrido compacto.

De forma equivalente, E es un dominio temporal híbrido compacto si E es una unión de una secuencia finita de intervalos $([t_j, t_{j+1}] \times j)$ mientras que E es un dominio de tiempo híbrido si es una unión de una secuencia finita o infinita de intervalos $([t_j, t_{j+1}] \times j)$, con el último intervalo (si existe) posiblemente de la forma $[t_j, T)$ con T finito o $T = \infty$ [94], [99].

Las señales híbridas se definen como funciones en dominios de tiempo híbrido. Una señal híbrida $w : \text{dom}w \mapsto \mathbb{R}^m$ es llamada entrada híbrida si $w(\cdot, j)$ es Lebesgue medible y localmente esencialmente acotada para cada j . Una señal híbrida $x : \text{dom}x \mapsto \mathbb{R}^n$ es llamada arco híbrido si $x(\cdot, j)$ es localmente absolutamente continuo para cada j [93].

Solución de un sistema híbrido

El *par solución* (x, w) de un sistema híbrido $(\mathcal{C}, f, \mathcal{D}, g)$ en (4.1), se compone de un arco híbrido $x : \text{dom}x \mapsto \mathbb{R}^n$ y una entrada híbrida $w : \text{dom}w \mapsto \mathbb{R}^m$ si $\text{dom}x = \text{dom}w$, $(x(0, 0), w(0, 0)) \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$, y

- (S1) para todo $j \in \mathbb{N}$ y casi todo t tal que $(t, j) \in \text{dom}x$, $(x(t, j), w(t, j)) \in \mathcal{C}$ y $\dot{x}(t, j) = f(x(t, j), w(t, j))$;
- (S2) para todo $(t, j) \in \text{dom}x$ tal que $(t, j + 1) \in \text{dom}x$, $(x(t, j), w(t, j)) \in \mathcal{C}$ y $x(t, j + 1) = g(x(t, j), w(t, j))$.

Note que el conjunto de salto \mathcal{D} habilita los saltos pero no los fuerza si hay puntos en los cuales también es posible el flujo (un argumento similar se aplica al conjunto de flujo \mathcal{C}); y entonces si \mathcal{D} y \mathcal{C} son no disjuntos entonces para un punto $(\xi, \psi) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ pueden existir varios pares solución (x, w) de \mathcal{H}_w con $x(0, 0) = \xi$, para cualquier entrada híbrida w con $w(0, 0) = \psi$ [99], [93].

4.2.2. Propuesta de configuración del control: controlador por modos deslizantes

Considere el siguiente sistema afín al control no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + \bar{z}(x_p) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_i(x_p) u_i, \\ y_p &= C_p x_p \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $x_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ es el vector de estado, $u_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ son las entradas de control, y_p es la salida de la planta, C_p es una matriz de dimensión apropiada,

$A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$, $n_p \geq m$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n_p \times 1}$ y $\bar{g}_i \in \mathbb{R}^{n_p \times 1}$ y son respectivamente:

$$\bar{z}(x_p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z(x_p) \end{bmatrix}, \quad \bar{g}_i(x_p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_i(x_p) \end{bmatrix}$$

donde $z(x_p)$ y $g_i(x_p)$ son funciones escalares no lineales. Este sistema se conecta a un SMC de primer orden que ha demostrado estabilizar de forma efectiva los estados del sistema a una superficie predefinida, permitiendo alcanzar el punto de equilibrio.

Considere una superficie de deslizamiento definida mediante $S = Kx_p$, donde K es un vector renglón con elementos constantes de diseño. La superficie de deslizamiento se alcanza por los estados del sistema si la condición

$$S\dot{S} = Kx_pK\dot{x}_p < 0 \quad (4.3)$$

se cumple. Tomando en cuenta la dinámica del sistema, la desigualdad (4.3) se satisface para la elección adecuada de u_i . El SMC de primer orden consta de un control equivalente $u_{i_{eq}}$ y una ley de conmutación u_{i_s} [61]:

$$u_i = u_{i_{eq}} + u_{i_s} := f_{ci} \quad (4.4)$$

donde

$$u_{i_{eq}} = -\frac{1}{m} \frac{K(A_px_p + \bar{z}(x_p))}{K\bar{g}_i(x_p)}, \quad (4.5)$$

$$u_{i_s} = -\phi \operatorname{sgn}(S) \frac{|K(A_px_p + \bar{z}(x_p))|}{K\bar{g}_i(x_p)} \quad (4.6)$$

Se asume que el controlador asegura estabilidad y convergencia de las trayectorias del sistema a una referencia (o equilibrio) en tiempo finito, no obstante, existe la posibilidad de mejorar su desempeño. Es bien sabido que el uso de controladores no lineales como el SMC, presentan beneficios sobre los controles lineales [79], pero los problemas en su implementación aunado a malos rendimientos están siempre presentes. En algunos casos, la respuesta transitoria del sistema es inapropiada, ya que se tiene un tiempo de convergencia alto como resultado de una selección inadecuada de las ganancias de control. Para superar estos inconvenientes, se propone el uso de un controlador basado en reset, en la Sección 4.3 se detalla el diseño del enfoque de control propuesto.

4.3. Nuevo control híbrido

La contribución principal de este capítulo es la formulación de un nuevo control híbrido que consiste en la adición de una estrategia de control basado en reset a el

previamente establecido SMC, con el objetivo de mejorar la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado. Los controladores basados en acciones de reset se han utilizado para superar las limitaciones fundamentales de los controladores lineales e invariantes en el tiempo mediante un procedimiento sencillo: resetear el estado del controlador (o una parte del mismo) cuando se cumple alguna ley de reset, por ejemplo, el cruce por cero del error en lazo cerrado [93] o la pertenencia a una banda de error en lazo cerrado [86], [98].

A continuación se presenta el diseño de una estrategia de control híbrido que combina los beneficios de un control por modos deslizantes y un control basado en reset. Después de diseñar el sistema de control por modos deslizantes (4.2)-(4.4), se añade un lazo de control basado en reset para mejorar la respuesta transitoria del sistema. El controlador reseteado propuesto (inspirado en el controlador de banda de reset desarrollado en [100]) se puede definir como un sistema híbrido con el estado x_c y entrada $e := r - y_p$, donde r es una señal que la salida de la planta y_p debe seguir. La dinámica del controlador basado en reset esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c e && \text{if } e \in \mathcal{C}_1 \\ \dot{x}_c &= 0 && \text{if } e \in \mathcal{C}_2 \\ x_c^+ &= A_\rho x_c && \text{if } e \in \mathcal{D} \\ u_c &= C_c x_c \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, A_c , B_c , C_c son matrices de dimensión apropiada.

El conjunto de flujo \mathcal{C} se obtiene con

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{e \in \mathbb{R} : |e| \geq \delta_1 + \delta_2\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{e \in \mathbb{R} : |e| \leq \delta_1\}. \end{aligned}$$

$\delta_1 > 0$ es el ancho del conjunto \mathcal{C}_2 , y $\delta_2 > 0$ es el espesor de las bandas de reset (véase la Figura 4.1).

El conjunto de salto \mathcal{D} es definido como:

$$\mathcal{D} = \{e \in \mathbb{R} : \delta_1 \leq |e| \leq \delta_2 + \delta_1\} \quad (4.9)$$

La tercera ecuación del controlador (4.7) es la acción de reset, un cambio instantáneo o impulsivo del estado ($x_c \rightarrow x_c^+$) que ocurre cuando la condición de reset es activada, en este caso esta condición depende del comportamiento del error $e(t)$. El reset se define mediante la matriz A_ρ dada por

$$A_\rho = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2})$$

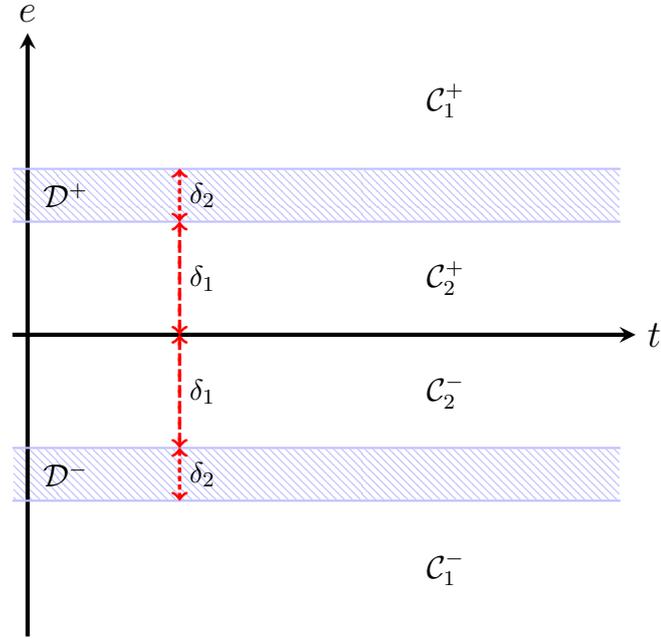


Figura 4.1: Representación de las bandas de reset.

el cual causa que los últimos n_2 estados se reseteen, mientras que los $n_1 = n_c - n_2$ primeros estados permanecen sin cambios. Las dimensiones de n_1 y n_2 dependen de los requerimientos del sistema. El reset completo toma lugar cuando $n_2 = n_c$, mientras un reseteo parcial se define cuando $0 < n_2 < n_c$ [88].

Tomando en cuenta la dinámica del reset y la conmutación, el control $u(t)$, dado por la ecuación (4.4), puede reescribirse como

$$u(t) = f_c(x_p(t)) + u_c, \quad (4.10)$$

la conexión de la planta con los controladores se representa en forma esquemática mediante la Figura 4.2.

Los conjuntos de flujo o continuos $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_1^-$ y $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_2^-$ se establecen de tal forma que si el error es grande, se genera una señal que busca mejorar el desempeño del controlador (4.4). Si el error es cercano a cero, no se añade ninguna señal de control. En caso de reset completo note que cuando la señal de error cruza desde \mathcal{C}_1 hasta \mathcal{C}_2 el estado forzosamente es puesto a cero, y permanece constante cuando el error esta en \mathcal{C}_2 . Para el caso de reset parcial, una señal constante puede añadirse. Las bandas de reset ¹, pertenecen al conjunto discreto o de salto $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$, y se diseñan de tal manera que el estado del controlador (u_c) cambia súbitamente

¹Idealmente líneas, es decir, valores constantes, que usualmente resultan demasiado restrictivas para su implementación física, por lo que se establece un pequeño intervalo para asegurar que los saltos ocurran

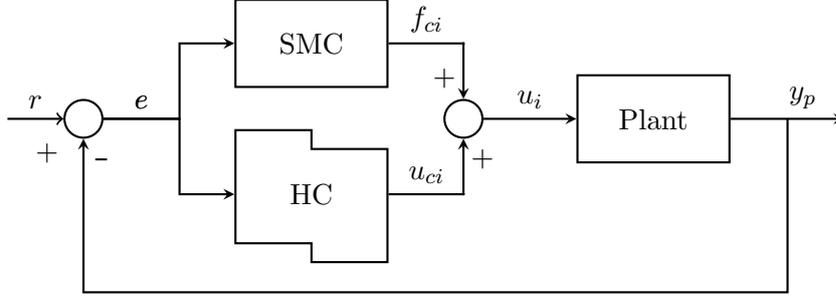


Figura 4.2: Sistema de control en lazo cerrado.

a cero cuando el error es lo suficientemente cercano al equilibrio. La separación que existe entre las bandas de reset y el equilibrio es establecido de acuerdo con la oscilación intrínseca del modo deslizante. Además, las bandas de reset se usan para prevenir que la acción de reset se active de forma sucesiva. Así, la condición de reset debe activarse cuando el error alcanza las líneas de reset (Figura 4.1) establecidas alrededor del equilibrio (cercanas a cero).

Una representación compacta del sistema híbrido se alcanza estableciendo el lazo cerrado con $x = (x_p, x_c)$ en la forma $x(t) = (x_p(t), x_c(t))$ definido por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 \eta + \hat{z}(x) & \text{when } x \in \mathcal{C}_1 \\ \dot{x} &= A_2 x + B_2 \eta + \hat{z}(x) & \text{when } x \in \mathcal{C}_2 \\ x^+ &= A_r x & \text{when } x \in \mathcal{D} \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{n_p+n_c}$, $A_1 = \begin{bmatrix} A_p & P \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$, $\hat{z}(x) = \begin{bmatrix} \bar{z} \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$B_1 = \begin{bmatrix} \bar{g}_1(x_p) & \cdots & \bar{g}_m(x_p) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_c \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \bar{g}_1(x_p) & \cdots & \bar{g}_m(x_p) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} f_{c1} \\ \vdots \\ f_{cm} \\ r \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ g_1(x_p)C_{c1} & \cdots & g_m(x_p)C_{cm} \end{bmatrix} \text{ y } A_r = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & A_\rho \end{bmatrix}.$$

El siguiente paso consiste en determinar la estabilidad del sistema para lo cual se define lo siguiente.

4.4. Análisis de estabilidad

La buena formulación del sistema híbrido en lazo cerrado propuesto (4.11) se garantiza directamente ya que satisface las condiciones híbridas básicas (véase [94] para definiciones y detalles técnicos). Más específicamente, es sencillo de comprobar

que el sistema híbrido (4.11) tiene funciones continuas de flujo y de salto, además los conjuntos de flujo y de salto son conjuntos cerrados.

El análisis de estabilidad de un sistema híbrido puede ser complicado debido a sus propiedades dinámicas de flujo y discreta. El uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov puede ser una poderosa herramienta de análisis, debido a que el enfoque permite que la función de Lyapunov no esté definida en todo \mathbb{R}^n ni que sea continuamente diferenciable en todo \mathbb{R}^n . Sólo es necesario que sea continuamente diferenciable en una vecindad del conjunto de flujo [94].

Definición 9 Una función $V : \text{dom}V \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una función candidata de Lyapunov para un sistema híbrido (C, F, D, G) si las siguientes condiciones se cumplen:

1. $\bar{C} \cup \mathcal{D} \cup g(\mathcal{D}) \subset \text{dom}V$
2. V es continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene \bar{C} ; donde \bar{C} denota el cierre de C .

Definición 10 (Distancia a un conjunto cerrado) Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto cerrado $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, la distancia desde x hasta \mathcal{A} se denota con $|x|_{\mathcal{A}}$ y se define mediante $|x|_{\mathcal{A}} := \inf_{y \in \mathcal{A}} |x - y|$.

Teorema 10 (Condiciones suficientes de Lyapunov) Sea (C, f, \mathcal{D}, g) un sistema híbrido y sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ cerrado. Una función suave V es una función de Lyapunov estable de entrada estado para el sistema si existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_{\infty}$ y $\rho \in \mathcal{PD}$ continuo tales que

$$\alpha_1(|x|_{\mathcal{A}}) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|_{\mathcal{A}}) \quad \forall x \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup g \quad (4.12)$$

$$\langle \nabla V(x), f \rangle \leq -\rho(|x|_{\mathcal{A}}) \quad \forall x \in \mathcal{C}, f \quad (4.13)$$

$$V(g) - V(x) \leq -\rho(|x|_{\mathcal{A}}) \quad \forall x \in D, g \quad (4.14)$$

El diseño de un SMC de primer orden para el sistema definido en (4.2) se desarrolla con base en un análisis de estabilidad de Lyapunov. Siguiendo esta idea, la estabilidad del sistema híbrido dado por la ecuación (4.11) puede ser investigado. Para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado descrito por las ecuaciones (4.2)-(4.4), se propone una función de Lyapunov con la forma:

$$V_0(x_p) = S^T S \quad (4.15)$$

Tomando la derivada a lo largo de las trayectorias del sistema y sustituyendo el

controlador definido en (4.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}_0 &= \dot{S}^T S + S^T \dot{S} = \dot{x}_p^T K^T S + S^T K \dot{x}_p \\
&= \left(x_p^T A_p^T + \bar{z}^T(x_p) + \sum_{i=1}^m u_i^T \bar{g}_i^T(x_p) \right) K^T S \\
&\quad + S^T K \left(A_p x_p + \bar{z}(x_p) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_i(x_p) u_i \right) \\
&= (-\phi \operatorname{sgn}(S) |K^T(x_p^T A_p^T + \bar{z}^T(x_p))|) S \\
&\quad + S^T (-\phi \operatorname{sgn}(S) |K(A_p x_p + \bar{z}(x_p))|) \\
&= -2\phi |S| |K(A_p x_p + \bar{z}(x_p))|
\end{aligned}$$

con lo cual es posible decir que el sistema (4.2)-(4.4) es estable si $\dot{V}_0 < 0$, es decir, $\phi > 0$. Entonces, considerando la acción de reset que se establece en la ecuación (4.7), la estabilidad del sistema híbrido (4.11) se aborda mediante la siguiente función de Lyapunov:

$$V_r(x) = V_0 + x_c^T x_c, \quad (4.16)$$

Sin pérdida de generalidad, la derivada a lo largo de las trayectorias del sistema $x \in \mathcal{C}_1$, considerando el origen como la referencia $r = 0$, se denota por:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_r &= \dot{V}_0 + x_c^T P^T K^T S + x_c^T \dot{x}_c + S^T K P x_c + \dot{x}_c^T x_c \\
&= \dot{V}_0 + x_c^T P^T K^T K x_p + x_c^T A_c x_c - x_c^T B_c C_p x_p \\
&\quad + x_p^T K^T K P x_c + x_c^T A_c^T x_c - x_p^T C_p^T B_c^T x_c.
\end{aligned}$$

Las matrices de diseño A_c , B_c y K se eligen de tal forma que $\dot{V}_r < 0$. Si se considera que $\dot{V}_0 < 0$, para asegurar estabilidad, se elige $A_c < 0$ y K , B_c de tal forma que $P^T K^T K < B_c C_p$.

Durante los saltos ($x \in \mathcal{D}$), la estabilidad se explora analizando la condición expresada en la ecuación (4.14), la cual se satisface ya que

$$V(x^+) - V(x) = (V_0 + x_c^T A_\rho^T A_\rho x_c) - (V_0 + x_c^T x_c)$$

Note que para el caso de reset completo, es decir, $A_\rho = 0$, se tiene $V(x^+) - V(x) \leq 0$. Bajo este escenario, la función V_r no crece durante los saltos.

Note que cuando $x \in \mathcal{C}_2$, la señal de control reseteado no influye (se desconecta), entonces la estabilidad del sistema queda asegurada mediante $\dot{V}_0 < 0$ ecuación (4.15).

4.5. Caso de estudio: regulación de un Sistema Aerodinámico Angular

Se considera el sistema aerodinámico representado en la Figura 4.3. Este sistema consiste de una barra horizontal rígida (línea punteada) articulada en el origen del

marco de referencia inercial $x_0y_0z_0$, y el objetivo de control es llevar la barra a una posición angular deseada θ_r . Este movimiento angular es el resultado de la acción del par τ que se produce por la diferencia entre dos fuerzas aerodinámicas F_1 y F_2 . Cada fuerza se genera mediante un par de hélices que giran con respecto a un eje vertical (ω_1 y ω_2 en la Figura 4.3). En cada extremo de la barra rígida hay un motor de corriente continua que proporciona la velocidad angular al respectivo par de hélices. Los dos motores permanecen siempre verticales ya que sus soportes están articulados. En la Figura 4.3 se ilustra un movimiento angular positivo ($\theta > 0$), entonces la barra rígida se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj. Todo el conjunto de los elementos mencionados se apoya en un pedestal que está alineado con el eje y_0 . Cabe resaltar que para este sistema aerodinámico las señales de control son $u_1 = F_1$ y $u_2 = F_2$.

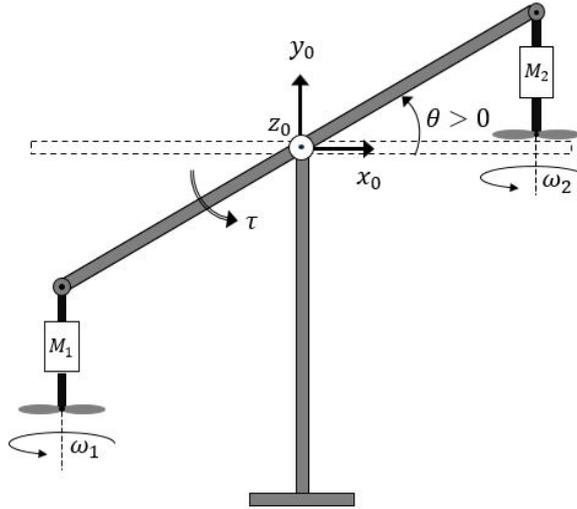


Figura 4.3: Sistema aerodinámico angular

4.5.1. Control por modos deslizantes

El modelo matemático de este sistema es dado por la ecuación (4.2) con $i = 1, 2$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + \bar{z}(x_p) + \bar{g}_1(x_p)u_1 + \bar{g}_2(x_p)u_2 \\ y_p &= C_p x_p\end{aligned}\quad (4.17)$$

donde $u_i = f_{ci}(x_p)$, $x_p = \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$, $A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$, $\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ z(x_p) \end{bmatrix}$, $z(x_p) = \alpha_2 \sin(\theta)$, $\bar{g}_i(x_p) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_i(x_{p1}) \end{bmatrix}$, $g_1(x_{p1}) = \alpha_3 \sin \theta + \alpha_4 \cos \theta$, $g_2(x_{p1}) = \alpha_3 \sin \theta - \alpha_4 \cos \theta$

$$\text{y } C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un SMC de primer orden para este sistema se propone en [81]. Ahí se utiliza la superficie de deslizamiento definida como $S = Ke$, donde $K = [k_1 \ 1]$, k_1 es un parámetro de diseño y

$$e = r - y_p = \begin{bmatrix} \theta_r - \theta \\ -\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

donde $r^T = [\theta_r \ 0]^T$, lo que implica que para $S = 0$ se tiene

$$\dot{\theta} = k_1(\theta_r - \theta).$$

Entonces, el SMC es dado por:

$$f_{c_i} = u_{i_{eq}} + u_{i_s} \quad (4.18)$$

para $i = 1, 2$, donde

$$u_{i_{eq}} = -\frac{1}{2} \frac{K(A_p x_p + \bar{z}(x_p))}{K\bar{g}_i(x_p)}, \quad (4.19)$$

$$u_{i_s} = -\phi \operatorname{sgn}(S) \frac{|K(A_p x_p + \bar{z}(x_p))|}{K\bar{g}_i(x_p)} \quad (4.20)$$

4.5.2. Control híbrido

Para mejorar el rendimiento en lazo cerrado del sistema angular aerodinámico, el controlador híbrido propuesto es añadido al SMC. Considere entonces el controlador dado en la ecuación (4.10) donde $u_{c_i} = g_i^{-1} C_{c_i} x_{c_i}$. Note que la dinámica en lazo cerrado se obtiene de (4.11) donde $x \in \mathbb{R}^{n_p+n_c}$, $A_1 = \begin{bmatrix} A_p & P \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$B_1 = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 & \bar{g}_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_c \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 & \bar{g}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} f_{c_1} \\ f_{c_2} \\ r \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_1(x_p)C_{c_1} & g_2(x_p)C_{c_2} \end{bmatrix},$$

$$A_r = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_\rho \end{bmatrix} \text{ y } \hat{z}(x) = \begin{bmatrix} \bar{z} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando en cuenta el análisis presentado anteriormente, con la función de Lyapunov dada por (4.16), considerando el origen como la referencia $r = 0$, la estabilidad esta garantizada si $A_c < 0$ y $P^T K^T K < B_c C_p$.

4.5.3. Simulaciones numéricas

A continuación se presentan simulaciones numéricas del ejemplo de aplicación para ilustrar el desempeño del enfoque propuesto. Los valores numéricos para las ganancias del control por modos deslizantes y de los parámetros del sistema son

tomados del trabajo [81]. Estos son $k_1 = 0.2$ y $\phi = 25$ para el control y $\alpha_1 = -0.01764$, $\alpha_2 = 0.04079$, $\alpha_3 = -0.02352$, $\alpha_4 = -1.435$, $\theta_r = -5^\circ$, para el sistema.

La condición $P^T K^T K < B_c C_p$, obtenida del análisis del sistema, restringe a la matriz de diseño

$$B_c = \begin{bmatrix} B_{c_1} & B_{c_3} \\ B_{c_2} & B_{c_4} \end{bmatrix}$$

para satisfacer $B_{c_1} > 0.2C_{c_1}$, $B_{c_2} > C_{c_1}$, $B_{c_3} > 0.2C_{c_2}$, $B_{c_4} > C_{c_2}$.

La Figura 4.4 muestra la salida del sistema (posición angular) considerando el control por modos deslizantes sin la acción de reset (línea roja), y la salida del sistema obtenida bajo el control híbrido (línea negra). Note que se alcanza una mejora en la respuesta transitoria con la acción de reset; sobre todo se observa que el enfoque propuesto evita que el controlador presente un periodo de espera para ejercer su acción sobre el sistema. Además, es posible calcular el error numérico para medir el desempeño, en este caso el error porcentual obtenido del sistema bajo el SMC es 20.4975 %, mientras que con HC se obtiene un error porcentual de 12.7837 %. Con la misma idea, el error cuadrático medio es 3.3381 del sistema con el SMC, y 1.5343 con el HC.

Las Figuras 4.5 y 4.6 muestran las señales de salida del sistema obtenidas bajo la acción del SMC que se presenta en la Sección 4.5.1 y las obtenidas bajo el HC presentado en la Sección 4.5.2, respectivamente. Note que la diferencia entre las magnitudes de ambos controladores no es significativa.

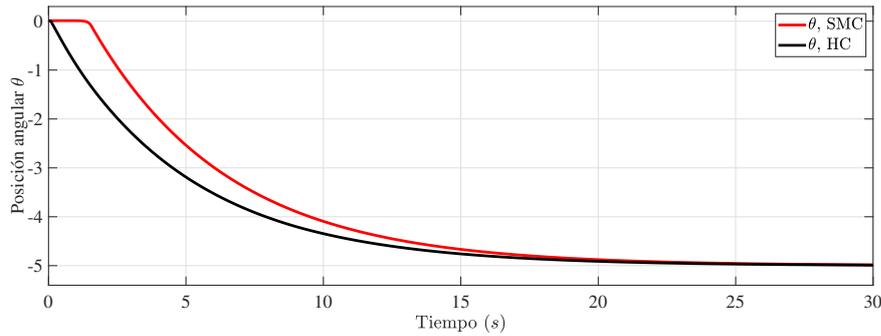


Figura 4.4: Respuesta del SAA en lazo cerrado con el SMC (línea roja) y con el esquema de control basado en reset propuesto (línea negra).

Como se menciona en [81], la respuesta del sistema bajo la acción del SMC cambia de acuerdo a la elección de los valores de ganancia ϕ y k_1 . Para obtener una respuesta satisfactoria es necesario realizar un ajuste heurístico de las ganancias del controlador. En la Figura 4.7 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado con el SMC cuando la posición angular de referencia que va 0 a 15° en el instante inicial cambia bruscamente de 15° a -5° a los 25 segundos. Se consideran diferentes valores para las ganancias ϕ y k_1 . La línea roja representa la respuesta del sistema

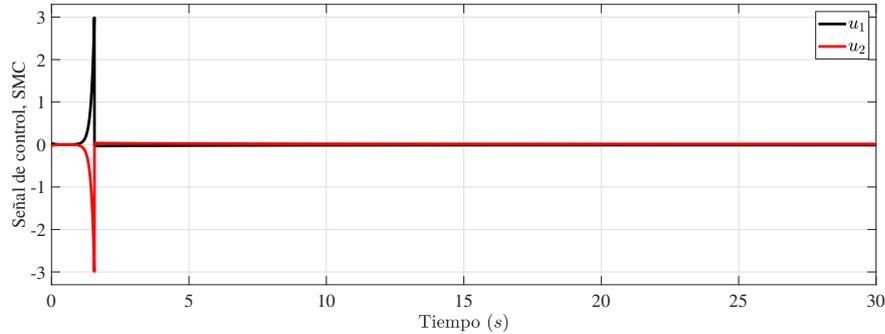


Figura 4.5: Evolución del SMC definido en la Sección 4.5.1.

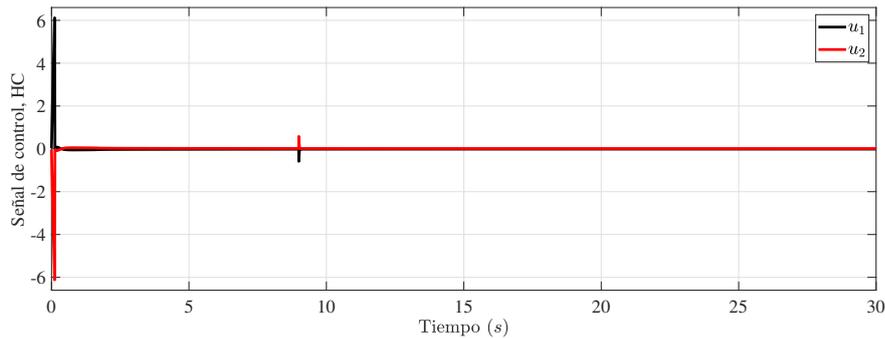


Figura 4.6: Evolución del HC definido en la Sección 4.5.2.

con ganancias $\phi = 50$ y $k_1 = 19$, la línea negra corresponde a la respuesta bajo las ganancias $\phi = 20$ y $k_1 = 0.2$, y la línea azul muestra la respuesta del sistema para $\phi = 5$ y $k_1 = 1.5$. Note que solo para la primera elección de ganancias el desempeño del controlador es satisfactorio, es decir, la posición angular del sistema alcanza los valores de referencia con un tiempo de estabilización adecuado.

El mismo experimento se implementa para retar el desempeño del controlador basado en reset. La Figura 4.8 muestra los resultados. Note que el desempeño del controlador es satisfactorio independientemente de la elección de las ganancias de control. Es importante mencionar que incluso con la elección de $\phi = 5$, $k_1 = 1.5$ la respuesta del sistema es capaz de ir desde una referencia 15° a -5° en aproximadamente 15 segundos mientras que bajo la acción del SMC esto no es posible.

Las Figuras 4.9 y 4.10 muestran la evolución de las señales de control SMC y HC, respectivamente, considere las ganancias de control $\phi = 50$ y $k_1 = 19$ cuando el valor de la referencia cambia de 15° a -5° a los 25 segundos. Note que la magnitud del SMC es considerablemente grande comparada con la magnitud del HC. La acción del reset no solo mejora la respuesta del sistema si no que también permite reducir

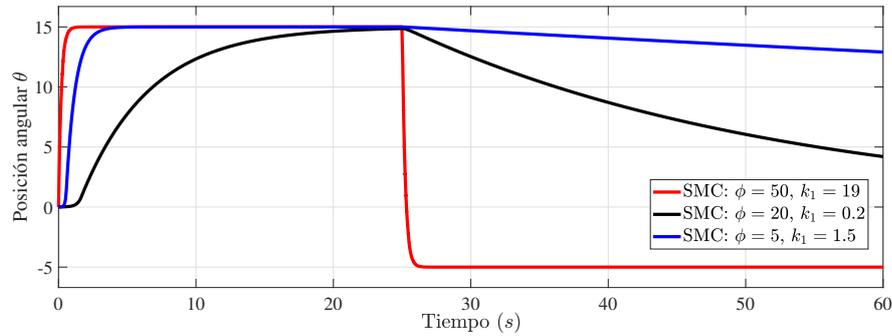


Figura 4.7: Respuesta del sistema en lazo cerrado con el SMC con un cambio abrupto en el valor de la referencia para diferentes valores de las ganancias de control.

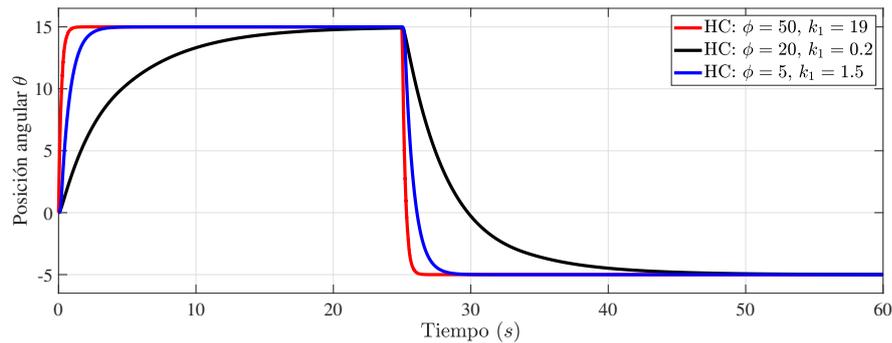


Figura 4.8: Respuesta del sistema en lazo cerrado con el controlador basado en reset propuesto bajo un cambio abrupto de referencia para diferentes valores de ganancias de control.

la magnitud en las señales de control lo cual puede tener un impacto directo en la implementación física, evitando la saturación de los actuadores.

4.6. Conclusiones del capítulo

El trabajo realizado presenta un enfoque novedoso mediante el cual se busca mejorar el desempeño de un controlador. Partiendo de una planta en lazo cerrado con el control por modos deslizantes que tiene una salida estable, se plantea un control híbrido que ayuda en la tarea de regulación cuando sea necesario, y es capaz de desconectarse cuando el desempeño del SMC es ideal. Un ejemplo de aplicación práctica resalta la efectividad del enfoque propuesto, donde se alcanza una importante mejora en la respuesta transitoria. Además, se ha demostrado que con el esquema de control propuesto se relaja la tarea de elegir o sintonizar adecuadamente las ganancias de los

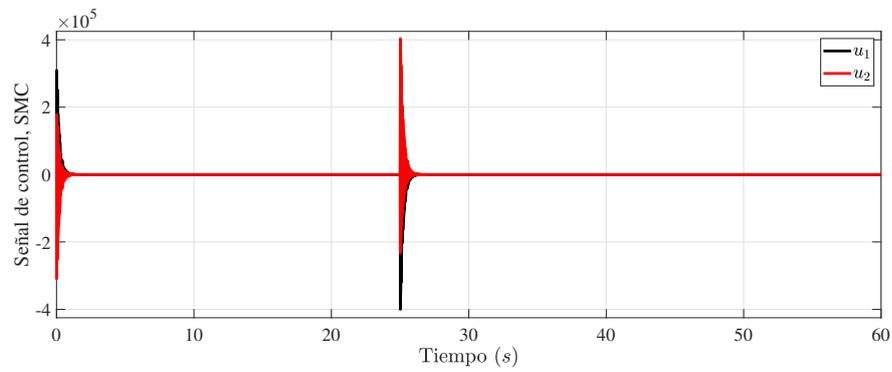


Figura 4.9: Señal del SMC bajo un cambio abrupto de referencia con $\phi = 50$ y $k_1 = 19$.

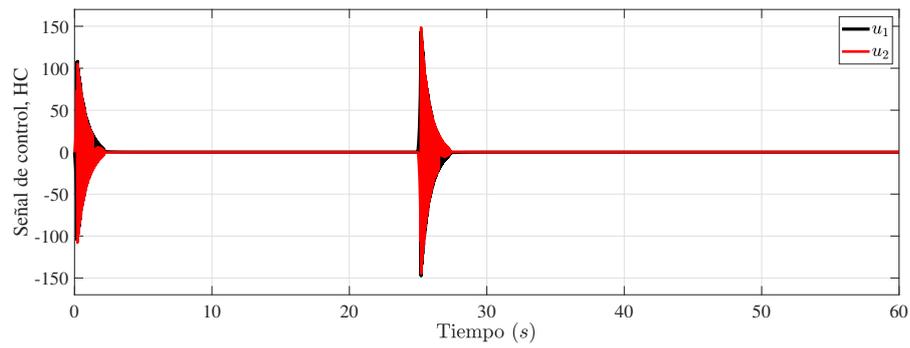


Figura 4.10: Controlador basado en reset bajo un cambio abrupto en el valor de la referencia de $\phi = 50$ y $k_1 = 19$.

controladores. Por otra parte, la magnitud de los controladores puede reducirse, lo que supone una ventaja adicional en relación con la aplicación práctica considerada.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo de investigación se formulan novedosos enfoques de control para sistemas con retardos temporales. Se parte de desarrollos encontrados en la literatura para sistemas libres de retardo, se retoman las ideas y se extienden para el caso de sistemas con retardos. A continuación se exponen brevemente las contribuciones realizadas en cada uno de los casos.

En el Capítulo 2 se diseña un controlador por modos deslizantes para una clase de sistemas con retardos, este enfoque se propone después de la revisión del estado del arte, donde se identifican áreas de oportunidad en las que se basa la propuesta. Se plantea entonces un SMC de primer y segundo orden, para el cual se obtiene la estabilidad del movimiento deslizante de forma novedosa mediante el uso del enfoque de Lyapunov-Krasovskii el cual no se había explorado en trabajos previos, donde normalmente se aproxima el término retardado lo que produce un aumento en el error (el conservadurismo aumenta). Además, a diferencia de otras propuestas el enfoque no requiere una estructura específica o particular para ser aplicado, lo cual permite su aplicación en una mayor cantidad de problemas. El enfoque es puesto a prueba con ejemplos variados que permiten visualizar su efectividad en diversas aplicaciones.

En el Capítulo 3 se diseña un controlador adaptable por modelo de referencia para una clase de sistema incierto con retardos, un análisis de la literatura permite encontrar un área de oportunidad ya que el seguimiento de trayectoria no se ha explorado con el uso de MRAC. Se propone el control de un sistema de segundo orden lineal con retardos y parámetros desconocidos, del cual se tiene acceso limitado a los estados. Esto se resuelve con el uso de la integral, con lo cual se construye un estado completo totalmente accesible a medición. Además, la integral permite dividir el problema en subproblemas que se atacan con MRAC y backstepping. La propuesta de análisis es rigurosa en su desarrollo y asegura que los objetivos de control se alcanzan. Un ejemplo académico es planteado para visualizar el desempeño del controlador.

En el Capítulo 4 se diseña un control conmutado basado en reset, se revisa la literatura y, tomando en cuenta el control por modos deslizantes, se concluye que existe una oportunidad de auxiliar su desempeño. Se propone entonces el uso de control basado en reset por su sencillez para mejorar la respuesta transitoria de

una planta en lazo cerrado con un SMC, se establecen zonas de acción del control añadido (de ahí la conmutación) y se muestra que el reset es indispensable para desconectar cualquier señal parásita que modifique el desempeño del SMC cuando no es requerido. El análisis de estabilidad se basa en el desarrollado previamente para el control por modos deslizantes y se establece con base en el marco de referencia de Inclusiones Híbridas. Para mostrar el rendimiento de la propuesta se analiza un ejemplo de aplicación práctica y se valida su efectividad para el caso de una planta con retardo.

Trabajo futuro

Para el caso del Capítulo 2, el análisis de estabilidad basado en Lyapunov-Krasovskii puede extenderse a sistemas con retardos variantes en el tiempo y diseñar controladores por modos deslizantes, para compararse directamente con algunos enfoques que se encuentran en la literatura.

El control adaptable por modelo de referencia, en el que se basa el enfoque mostrado en el Capítulo 3, es un tema de gran interés dentro de la comunidad científica, esta idea se continuará explorando y enfocando a posibles contribuciones para sistemas con retardos.

El trabajo mostrado en el Capítulo 4 se retomará para posibles aplicaciones, la idea del control reseteado puede ser explorada en distintos problemas debido a la sencillez de su planteamiento. Por ejemplo, en aplicaciones industriales donde los controladores no lineales son muy poco utilizados.

Resultados

A continuación se describen brevemente los resultados obtenidos durante la realización del trabajo de investigación:

Movilidad:

- Del 21 de septiembre al 6 de octubre del 2019 se realiza una movilidad al Centro de Investigación Científica de Yucatán (CICY) en la Unidad de Energías Renovables, teniendo como anfitrión al Dr. Víctor Manuel Ramírez Rivera. Durante la estancia se revisan las líneas de investigación que maneja el centro y se analizan los posibles escenarios de colaboración.
- De agosto del 2020 a mayo del 2021 se realiza una estancia virtual en la universidad de Murcia en la sección de posgrado, como parte del convenio de cotutela de tesis doctoral. Durante este periodo se acreditan las materias obligatorias que son parte del programa de doctorado.

Colaboraciones:

- El desarrollo del Capítulo 2 se lleva a cabo con la colaboración de la Maestra Jazmín Zenteno Torres estudiante de doctorado de la Universidad de Bordeaux y el Doctor Jorge Dávila del Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UPT.

- El desarrollo del Capítulo 4 se realiza con la colaboración del Doctor Carlos Aguilar Ibañez del Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional y el Doctor José Ángel Acosta del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla.

Publicación:

Ramírez J., Luis F., Torres Z., J., Saldivar, B., Dávila, J., y Ávila V., J. C. Robust stabilisation of linear time-invariant time-delay systems via first order and super-twisting sliding mode controllers. *IET Contr. Theory Appl*, 2019, vol. 14, no 1, p. 175-186.

Bibliografía

- [1] L. F. Ramírez Jerónimo, “Modelado y análisis de vibraciones en el proceso de fresado,” Master’s thesis, Universidad Autónoma del Estado de México, 2017.
- [2] C. Aguilar-Ibañez, B. Saldivar, M. Jiménez-Lizarraga, E. García-Canseco, and R. Garrido, “Parametric uncertain second-order linear system output-adaptive stabilization: an integral and mrca based approach,” *European Journal of Control*, 2020.
- [3] N. El Fezazi, F. El Haoussi, E. H. Tissir, T. Alvarez, and F. Tadeo, “Robust stabilization using lmi techniques of neutral time-delay systems subject to input saturation,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 783, no. 1. IOP Publishing, 2017, p. 012031.
- [4] H. Wang, A. Xue, R. Lu, and J. Wang, “Delay-dependent robust stability and stabilization for uncertain singular system with time-varying delay,” in *American Control Conference, 2008*. IEEE, 2008, pp. 3626–3631.
- [5] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, A. Seuret, and D. Peaucelle, “Stability analysis of time-delay systems via bessel inequality: A quadratic separation approach,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, no. 5, pp. 1507–1527, 2018.
- [6] F. Gouaisbaut and D. Peaucelle, “Delay-dependent robust stability of time delay systems,” in *5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2006, p. 12p.
- [7] C. T. Abdallah, R. Sipahi, S.-J. Niculescu, W. Michiels, and K. Gu, “Stability and stabilization of systems with time delay: limitations and opportunities,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 31, no. 1, p. 38, 2011.
- [8] K. Ogata, *Modern control engineering*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2009.
- [9] E. Fridman, *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer, 2014.

- [10] F. E. Sarabi, H. Khatibi, and H. R. Momeni, “Robust stability analysis and synthesis of linear time-delay systems via lmis,” in *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*. IEEE, 2010, pp. 615–620.
- [11] T. Insperger and G. Stépán, *Semi-discretization for time-delay systems: stability and engineering applications*. Springer Science & Business Media, 2011, vol. 178.
- [12] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of time-delay systems*. Birkhäuser, New York, USA, 2003.
- [13] V. Kharitonov, *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] R. Sipahi, T. Vyhlídal, S.-I. Niculescu, and P. Pepe, *Time delay systems: Methods, applications and new trends*. Springer, 2012, vol. 423.
- [15] E. Fridman., “New lyapunov–krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 43, no. 4, pp. 309–319, 2001.
- [16] O. Sename, J.-F. Lafay, and R. Rabah, “Controllability indices of linear systems with delays,” *Kybernetika*, vol. 31, no. 6, pp. 559–580, 1995.
- [17] V. Volterra, “Lectures on the mathematical theory of struggle for life,” *Gauthier-Villars, Paris*, 1931.
- [18] M. Wu, Y. He, and J.-H. She, *Stability analysis and robust control of time-delay systems*. Springer, 2010.
- [19] S.-I. Niculescu, E. I. Verriest, L. Dugard, and J.-M. Dion, “Stability and robust stability of time-delay systems: A guided tour,” in *Stability and control of time-delay systems*. Springer, 1998, pp. 1–71.
- [20] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and H. Lin, “Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges,” *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 61–71, 1988.
- [21] C. S. Hsu and S. Bhatt, “Stability charts for second-order dynamical systems with time lag,” *Journal of applied mechanics*, vol. 33, no. 1, pp. 119–124, 1966.
- [22] M. Jankovic, “Control lyapunov-razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 7, pp. 1048–1060, 2001.

- [23] X.-M. Zhang, Q.-L. Han, A. Seuret, and F. Gouaisbaut, “An improved reciprocally convex inequality and an augmented lyapunov–krasovskii functional for stability of linear systems with time-varying delay,” *Automatica*, vol. 84, pp. 221–226, 2017.
- [24] K. Liu, A. Seuret, and Y. Xia, “Stability analysis of systems with time-varying delays via the second-order Bessel–Legendre inequality,” *Automatica*, vol. 76, pp. 138–142, 2017.
- [25] R. Zhong and Z. Yang, “Robust stability analysis of singular linear system with delay and parameter uncertainty,” *Journal of Control Theory and Applications*, vol. 3, no. 2, pp. 195–199, 2005.
- [26] S.-S. WANG, B.-S. CHEN, and T.-P. LIN, “Robust stability of uncertain time-delay systems,” *International Journal of Control*, vol. 46, no. 3, pp. 963–976, 1987.
- [27] W. Huijiao, X. Anke, L. Renquan, Z. Xiaodong, and Z. Xiaohui, “Delay-dependent robust h_∞ control for uncertain singular systems with time-varying delay,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 5874–5879, 2008.
- [28] Y.-X. Li and G.-H. Yang, “Robust adaptive fault-tolerant control for a class of uncertain nonlinear time delay systems,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, no. 7, pp. 1554–1563, 2017.
- [29] H. Xia, L. Li, Y. Wang, A. Wu, and G. Ma, “A novel approach to sliding mode control of time-delay systems,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, 2013.
- [30] C. Liu, Z. Gong, and K. L. Teo, “Robust parameter estimation for nonlinear multistage time-delay systems with noisy measurement data,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 53, pp. 353–368, 2018.
- [31] C. Hua, S. Wu, and X. Guan, “New robust stability condition for discrete-time recurrent neural networks with time-varying delays and nonlinear perturbations,” *Neurocomputing*, vol. 219, pp. 203–209, 2017.
- [32] C.-K. Zhang, Y. He, L. Jiang, and M. Wu, “Notes on stability of time-delay systems: bounding inequalities and augmented lyapunov–krasovskii functionals,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 10, pp. 5331–5336, 2017.
- [33] Y. Chen, S. Fei, and Y. Li, “Robust stabilization for uncertain saturated time-delay systems: a distributed-delay-dependent polytopic approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 7, pp. 3455–3460, 2017.
- [34] G. Zheng, A. Polyakov, and A. Levant, “Delay estimation via sliding mode for nonlinear time-delay systems,” *Automatica*, vol. 89, pp. 266–273, 2018.

- [35] Y.-B. Wu, H.-X. Zhang, G.-L. Li, D.-W. Sun, and Y.-Q. Li, “Novel robust stability criteria for interval time-varying delay systems with nonlinear perturbations,” in *2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*. IEEE, 2018, pp. 4744–4749.
- [36] D. Khimani and M. Patil, “High performance super-twisting control for state delay systems,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 16, no. 5, pp. 2063–2073, 2018.
- [37] Y. Orlov, W. Perruquetti, and J. Richard, “Sliding mode control of uncertain time-delay systems,” in *European Control Conference (ECC), 2003*. IEEE, 2003, pp. 53–58.
- [38] K. Kumari and S. Janardhanan, “Sliding mode control of uncertain time delay system using lambert w function,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 1, pp. 173–177, 2016.
- [39] D. Khimani and M. Patil, “High performance super-twisting control for state delay systems,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, pp. 1–11, 2018.
- [40] A. Loukianov, H. Caballero-Barragán, L. Osuna-Ibarra, O. Espinosa-Guerra, and B. Castillo-Toledo, “Robust control for uncertain linear delay systems via sliding mode control,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 18, pp. 4825–4845, 2017.
- [41] H. Caballero-Barragán, L. P. Osuna-Ibarra, A. G. Loukianov, and F. Plestan, “Sliding mode predictive control of linear uncertain systems with delays,” *Automatica*, vol. 94, pp. 409–415, 2018.
- [42] H. Caballero-Barragán, L. Osuna-Ibarra, A. Loukianov, and F. Plestan, “Robust control for perturbed linear systems with time-varying delay via sliding mode control,” in *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. IEEE, 2018, pp. 7–12.
- [43] L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte, “Sliding modes after the first decade of the 21st century,” *Lecture notes in control and information sciences*, vol. 412, 2011.
- [44] E. Fridman., “Tutorial on lyapunov-based methods for time-delay systems,” *European Journal of Control*, vol. 20, no. 6, pp. 271–283, 2014.
- [45] S. Santra, R. Sakthivel, and B. Kaviarasan, “Dissipativity-based reliable sampled-data control with nonlinear actuator faults,” *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 11, no. 6, p. 061006, 2016.

- [46] G. Liu, A. Zinober, and Y. B. Shtessel, "Second-order sm approach to siso time-delay system output tracking," *IEEE transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3638–3645, 2009.
- [47] Y. S. Song, S.-H. Kwon, S. K. Park, D.-C. Oh, and E. T. Jeung, "Sliding mode control for time-delay system using a virtual state," in *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, vol. 6. IEEE, 2001, pp. 4669–4674.
- [48] V. Utkin, "Sliding modes in optimization and control problems," 1992.
- [49] A. Levant, "Robust exact differentiation via sliding mode technique," *automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998.
- [50] J. A. Moreno and M. Osorio, "Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 57, no. 4, pp. 1035–1040, 2012.
- [51] X. Li and R. DeCarlo, "Robust sliding mode control of uncertain time delay systems," *International Journal of control*, vol. 76, no. 13, pp. 1296–1305, 2003.
- [52] T.-S. Chiang and P. Liu, "Sliding mode control for a class of multiple time-delay systems," in *Time-Delay Systems*. InTech, 2011.
- [53] Q. Shao-Cheng, G. Mei-Jing, and W. Yong-Ji, "Sliding mode control for uncertain neutral system with time-delays," *Kybernetes*, vol. 38, no. 3/4, pp. 448–456, 2009.
- [54] S. V. Drakunov, W. Perruquetti, J.-P. Richard, and L. Belkoura, "Delay identification in time-delay systems using variable structure observers," *Annual reviews in control*, vol. 30, no. 2, pp. 143–158, 2006.
- [55] L. Weiss, "On the controllability of delay-differential systems," *SIAM Journal on Control*, vol. 5, no. 4, pp. 575–587, 1967.
- [56] F. M. Kirillova and S. Churakova, "On the problem of controllability of linear systems with aftereffect," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 3, no. 3, pp. 436–445, 1967.
- [57] F. Castaños and L. Fridman, "Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 5, pp. 853–858, 2006.
- [58] V. Suplin, E. Fridman, and U. Shaked, "H/sub/spl infin//control of linear uncertain time-delay systems-a projection approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 4, pp. 680–685, 2006.

- [59] R. Villafuerte, S. Mondié, and A. Poznyak, “Practical stability of time delay systems: Lmi’s approach,” in *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2008, pp. 4807–4812.
- [60] C. Suttirak and C. Pukdeboon, “Finite-time convergent sliding mode controllers for robot manipulators,” *Applied Mathematical Sciences*, vol. 7, no. 63, pp. 3141–3154, 2013.
- [61] B. Saldivar, “Sliding mode control for a class of control-affine nonlinear systems,” *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, vol. 20, no. 3, pp. 3–11, 2018.
- [62] L. Crocco, J. Grey, and G. B. Matthews, “Preliminary measurements of the combustion time lag in a monopropellant rocket motor,” *Symposium (International) on Combustion*, vol. 5, no. 1, pp. 164 – 170, 1955. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0082078455800240>
- [63] Y. Fiagbedzi and A. Pearson, “A state observer for systems described by functional differential equations,” *Automatica*, vol. 26, no. 2, pp. 321 – 331, 1990. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109890901263>
- [64] Y. Orlov, L. Belkoura, J.-P. Richard, and M. Dambrine, “Adaptive identification of linear time-delay systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, vol. 13, no. 9, pp. 857–872, 2003.
- [65] Y. Orlov, I. Kolmanovsky, and O. Gomez, “Adaptive identification of linear time-delay systems: From theory toward application to engine transient fuel identification,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 23, no. 2, pp. 150–165, 2009.
- [66] S. Evesque, A. Annaswamy, S. Niculescu, and A. Dowling, “Adaptive control of a class of time-delay systems,” *Transactions-American Society of Mechanical Engineers Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, vol. 125, no. 2, pp. 186–193, 2003.
- [67] S.-I. Niculescu and A. M. Annaswamy, “An adaptive smith-controller for time-delay systems with relative degree $n^* \leq 2$,” *Systems & control letters*, vol. 49, no. 5, pp. 347–358, 2003.
- [68] B. M. Mirkin and P.-O. Gutman, “Output feedback model reference adaptive control for multi-input–multi-output plants with state delay,” *Systems & Control Letters*, vol. 54, no. 10, pp. 961–972, 2005.
- [69] B. Mirkin and P.-O. Gutman, “Lyapunov-based adaptive output-feedback control of mimo nonlinear plants with unknown, time-varying state delays,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 43, no. 2, pp. 33–38, 2010.

- [70] D. Yao, J. Li, and J. Wu, “Adaptive control design with assigned tracking accuracy for a class of nonlinearly parameterized input-delayed systems,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2019, 2019.
- [71] B. Mirkin, E. L. Mirkin, and P.-O. Gutman, “Model reference adaptive control of nonlinear plant with dead time,” in *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2008, pp. 1920–1924.
- [72] D. Bresch-Pietri, J. Chauvin, and N. Petit, “Adaptive control scheme for uncertain time-delay systems,” *Automatica*, vol. 48, no. 8, pp. 1536–1552, 2012.
- [73] P. A. Ioannou and J. Sun, “Robust adaptive control, prenticehall,” *Inc., USA*, 1995.
- [74] M. S. S.-C. Carlos Aguilar-Ibáñez, Eloísa García-Canseco, “Control adaptable basado en inmersión e invarianza (i&i) de una clase de sistemas lineales de segundo orden con parámetros desconocidos,” in *Lecture Notes in Computer Science; Congreso Nacional de Control Automático (CNCA)*. AMCA, 2013, pp. 56–61.
- [75] R. Ortega, L. Hsu, and A. Astolfi, “Immersion and invariance adaptive control of linear multivariable systems,” *Systems & control letters*, vol. 49, no. 1, pp. 37–47, 2003.
- [76] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust adaptive control*. Courier Corporation, 2012.
- [77] A. K. Ali and M. M. Mahmoud, “Improved design of nonlinear control systems with time delay,” *International Journal of Robotics and Control Systems*, vol. 2, no. 2, pp. 317–331, 2022.
- [78] S. Phoojaruenchanachai, K. Uahchinkul, and Y. Prempraneerach, “Robust stabilisation of a state delayed system,” *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 145, no. 1, pp. 87–91, 1998.
- [79] J.-J. E. Slotine, W. Li *et al.*, *Applied nonlinear control*. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991, vol. 199, no. 1.
- [80] L. Fridman, A. Levant *et al.*, “Higher order sliding modes,” *Sliding mode control in engineering*, vol. 11, pp. 53–102, 2002.
- [81] C. C. Martínez, J. C. Ávila-Vilchis, J. M. Jacinto-Villegas, B. Saldivar, and A. H. Vilchis-González, “Sliding mode control for the regulation problem of an aerodynamic angular system: Experimental platform and validation,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, pp. 1–11, 2021.

- [82] J. Clegg, “A nonlinear integrator for servomechanisms,” *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, vol. 77, no. 1, pp. 41–42, 1958.
- [83] M. Á. Davó Navarro *et al.*, “Analysis and design of reset control systems= análisis y diseño de sistemas de control reseteados,” Ph.D. dissertation, Universidad de Murcia, 2015.
- [84] K. Krishnan and I. Horowitz, “Synthesis of a non-linear feedback system with significant plant-ignorance for prescribed system tolerances,” *International Journal of Control*, vol. 19, no. 4, pp. 689–706, 1974.
- [85] I. Horowitz and P. Rosenbaum, “Non-linear design for cost of feedback reduction in systems with large parameter uncertainty,” *International Journal of Control*, vol. 21, no. 6, pp. 977–1001, 1975.
- [86] A. Baños and A. Barreiro, *Reset control systems*. Springer, 2012.
- [87] O. Beker, C. V. Hollowt, Y. Chait, and H. Han, “Fundamental properties of reset control systems,” *Automatica*, vol. 40, no. 6, pp. 905–915, 2004.
- [88] A. Barreiro and A. Baños, “Sistemas de control basados en reset,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 9, no. 4, pp. 329–346, 2012.
- [89] A. Baños, J. I. Mulero, A. Barreiro, and M. A. Davó, “An impulsive dynamical systems framework for reset control systems,” *International Journal of Control*, vol. 89, no. 10, pp. 1985–2007, 2016.
- [90] N. Saikumar, K. Heinen, and S. H. HosseinNia, “Loop-shaping for reset control systems: A higher-order sinusoidal-input describing functions approach,” *Control Engineering Practice*, vol. 111, no. 104808, 2021.
- [91] L. Zaccarian, D. Nesic, and A. R. Teel, “First order reset elements and the clegg integrator revisited,” in *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005*. IEEE, 2005, pp. 563–568.
- [92] C. Prieur, I. Queinnec, T. S., and Z. L., “Analysis and synthesis of reset control systems,” *Foundations and Trends in Systems and Control*, vol. 6, no. 23, pp. 117–338, 2004.
- [93] A. Baños and A. Barreiro, “Reset control systems: the zero-crossing resetting law,” *arXiv preprint arXiv:2105.13950*, 2021.
- [94] R. Goebel, R. G. Sanfelice, and A. R. Teel, *Hybrid dynamical systems*. Princeton University Press, 2012.

- [95] H. Hu, Y. Zheng, C. V. Hollot, and Y. Chait, “On the stability of control systems having clegg integrators,” in *Topics in Control and its Applications*. Springer, 1999, pp. 107–115.
- [96] V. Ghaffari, P. Karimaghaee, and A. Khayatian, “Development of a real-time model-prediction-based framework for reset controller design,” *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 53, no. 38, pp. 14 755–14 764, 2014.
- [97] Y. Guo, Y. Wang, L. Xie, and J. Zheng, “Stability analysis and design of reset systems: Theory and an application,” *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 492–497, 2009.
- [98] A. Baños, S. Dormido, and A. Barreiro, “Stability analysis of reset control systems with reset band,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 42, no. 17, pp. 180–185, 2009.
- [99] C. Cai and A. R. Teel, “Characterizations of input-to-state stability for hybrid systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 58, no. 1, pp. 47–53, 2009.
- [100] A. Barreiro, A. Baños, S. Dormido, and J. A. González-Prieto, “Reset control systems with reset band: Well-posedness, limit cycles and stability analysis,” *Systems & Control Letters*, vol. 63, pp. 1–11, 2014.