De cómo es que los estados cuánticos gaussianos bipartitas codifican dos bits cuánticos

Giselle N. **Morales Rosales**
Fabiola **García Gutiérrez**
Manuel **Ávila Aoki**

BITS CUÁNTICOS (CUBITS)

En el procesamiento clásico de información que emplea el cómputo usual, la información es portada por bits clásicos representados por los dígitos binarios 0 y 1. La cantidad física portadora de un bit clásico deberá entonces tener dos diferentes valores. Así, por ejemplo, puede ser un potencial eléctrico con valores positivo y negativo.

En general, es necesario que dichas cantidades físicas deben ser todas las variables macroscópicas que puedan ser manipuladas con alta precisión dentro de las tecnologías actuales. El bit clásico necesariamente está en un solo estado, ya sea 0 o 1. El bit clásico no puede estar en ambos estados simultáneamente.

En Procesamiento de la Información Cuántica (PIC) se emplea el cubit (abreviación de bit cuántico) (Nielsen, 2000).

El cubit es la unidad lógica mínima del PIC y se representa matemáticamente mediante la expresión:

$$|Q\rangle = A|0\rangle + B|1\rangle, \qquad (1)$$

donde A y B son números complejos que satisfacen $A^*A + B^*B = 1$. Las cantidades A ^ * A y B ^ * B representan las probabilidades de que la respuesta lógica sea $|0\rangle$ o $|1\rangle$ respectivamente. Así, a diferencia de los bits clásicos, el cubit puede tener dos respuestas lógicas diferentes a la vez, pero con diferentes pesos estadísticos o probabilidades para cada una de ellas.

ESTADOS LÓGICOS DE DOS CUBITS Y MATRIZ DE DENSIDAD DE ESTADOS CUÁNTICOS

La respectiva expresión matemática para un estado de dos cubits deberá expresar las cuatro diferentes posibilidades lógicas para cada uno de los cubits:

$$|Q_1Q_2\rangle = c_0|00\rangle + c_1\ |01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle \qquad (2)$$

donde los coeficientes c_i (i=0, 1, 2, 3) son números complejos tales que $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$. La interpretación física de dichos coeficientes es como sigue: $|c_0|^2$ es la probabilidad de que una medición del estado $|Q_1Q_2\rangle$ de dos cubits resulte en el estado $|00\rangle$. Por otra parte, $|c_1|^2$ es la probabilidad de que una medición del estado $|Q_1Q_2\rangle$ arroje el estado $|01\rangle$. Y así, sucesivamente, para los coeficientes c_2 y c_3. La información cuántica de un sistema de cubits también está contenida en la matriz de densidad de estados cuánticos dada por:

$$\rho = |Q_1Q_2\rangle\langle Q_1Q_2| = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0^*c_1 & c_0^*c_2 & c_0^*c_3 \\ c_1^*c_0 & |c_1|^2 & c_1^*c_2 & c_1^*c_3 \\ c_2^*c_0 & c_2^*c_1 & |c_2|^2 & c_2^*c_3 \\ c_3^*c_0 & c_3^*c_1 & c_3^*c_2 & |c_3|^2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación (2). La matriz de densidad de estados de la ecuación (3) contiene exactamente la misma información cuántica lógica que el estado de la ecuación (2). Son dos formalismos equivalentes. La matriz de densidad de estados de la ecuación (3) es mucho más conveniente para extraer información cuántica que el estado de la ecuación (2). La razón es que no es matemáticamente engorroso y, por lo tanto, resulta más simple para el PIC. La traza (suma de los elementos de la diagonal principal) de la matriz de densidad de estados de la ecuación (3), es precisamente la condición de conservación de la probabilidad total mencionada líneas debajo de la ecuación (2). Las cantidades fuera de la diagonal principal de la ecuación (3) se interpretan como las probabilidades de transiciones entre los cuatro diferentes estados lógicos $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. En suma, la matriz de densidad de estados de la ecuación (3) describe completamente un estado de dos cubits.

COMUNICACIONES CUÁNTICAS

En PIC se emplean estados cuánticos entrelazados de dos o más cubits. Dichos estados cuánticos se caracterizan matemáticamente por ser no separables (Nielsen, 2000).

Existe una gran cantidad de dispositivos físicos que implementan cubits y estados entrelazados. Pero, en lo referente a tareas de comunicación, la luz parece ser el mejor candidato para implementar cubits y estados entrelazados debido a que puede ser transmitida a grandes distancias eficientemente. Aquí surge la siguiente pregunta: ¿cuán robustamente podemos manipular los estados cuánticos preparados con luz?

Antes de responderla, se debe entender que la luz está cuantizada, es decir, está compuesta de partículas o corpúsculos llamados fotones. Entonces, preparar experimentalmente de manera determinista estados cuánticos de un solo fotón o estados cuánticos entrelazados de dos o más fotones es técnicamente imposible. Lo que sí puede ser preparado y manipulado de manera fácil son paquetes (pulsos) de luz láser tradicional. Estos estados coherentes son llamados estados gaussianos (Ferraro *et al*., 2005).

También se emplean estados del vacío exprimido de un modo o dos modos. Los cubits preparados a partir de la luz son sumamente apropiados para protocolos de comunicaciones cuánticas, tales como el Internet Cuántico (Yin *et al*., 2020).

La razón es que se pueden transmitir a grandes distancias, además de que son relativamente sencillos de preparar.

ESTADOS GAUSSIANOS BIPARTITAS

La definición matemática de un estado gaussiano es todo aquel estado cuya función de distribución en el espacio de fase o su operador de densidad en el espacio de Fock tiene forma de una campana de Gauss. Los estados gaussianos son robustos para una variedad importante de protocolos de PIC. Casi todos de los más importantes experimentos de información cuántica han sido hechos con luz gaussiana. Dichos estados son un subconjunto de sistemas de variable continua, área de PIC que hace uso de observables físicos que toman valores continuos, tales como la intensidad de campo electromagnético.

En cierto sentido, la computación cuántica de variable continua es analógica, mientras que la computación cuántica usando cubits es digital. La primera hace uso de espacios de Hilbert de dimensión infinita, y la segunda emplea espacios de Hilbert de dimensión finita asociados a conjuntos de cubits. Los estados gaussianos son un recurso importante para la óptica cuántica (Weedbrook *et al*., 2012). Las ventajas que ofrecen son que ellos pueden ser fácilmente descritos usando solo el desplazamiento y la matriz de covariancia, así como los primer y segundo momentos estadísticos de los operadores de cuadratura. Pero, sobre todo, son importantes para estudiar entrelazamiento.

Así, por ejemplo, para determinar el entrelazamiento de un sistema de dos sistemas de niveles, ha sido demostrado que con estados gaussianos bipartitas bimodales, separabilidad es equivalente a la transpuesta parcial positiva (Duan, 2000).

MATRIZ DE COVARIANCIA DE UN ESTADO GAUSSIANO BIPARTITA

Definamos matemáticamente la matriz de covariancia de un estado gaussiano bipartita, mediante la introducción del vector de operadores canónicos (notar la similitud de cuatro salidas lógicas con la definición de estado de dos cubits de la ecuación (2) en términos de los operadores modo y , asociados a los estados cuánticos de partículas de espín del tipo y del tipo respectivamente:

$$\begin{aligned} x_a &= 1/\sqrt{2}\,(a_a^+ + a_a), \\ x_b &= 1/\sqrt{2}\,(a_b^+ + a_b), \\ p_a &= i/\sqrt{2}\,(a_a^+ - a_a), \\ p_b &= i/\sqrt{2}\,(a_b^+ - a_b), \end{aligned} \tag{4}$$

En la ecuación anterior, a_i^+ (a_i) es el operador para creación (aniquilación) del modo ($i = a, b$). Antes de proseguir observe que, en este punto, surge la siguiente pregunta: ¿Qué nos asegura que el estado bipartita gaussiano es un estado genuinamente cuántico? Para responder esta pregunta se definirá la matriz simpléctica

$$\Omega = \omega_a \oplus \omega_b \tag{5}$$

donde ω_a (ω_b) es una matriz dada por

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

La condición que define a los estados bipartitas gaussianos como estados genuinamente cuánticos es la siguiente:

$$[R_j, R_k] = R_j R_k - R_k R_j = i\Omega_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4) \tag{7}$$

La respectiva matriz de covariancia asociada a un estado gaussiano cuántico bipartita será:

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \{\Delta R_1, \Delta R_1\} & \{\Delta R_1, \Delta R_2\} & \{\Delta R_1, \Delta R_3\} & \{\Delta R_1, \Delta R_4\} \\ \{\Delta R_2, \Delta R_1\} & \{\Delta R_2, \Delta R_2\} & \{\Delta R_2, \Delta R_3\} & \{\Delta R_2, \Delta R_4\} \\ \{\Delta R_3, \Delta R_1\} & \{\Delta R_3, \Delta R_2\} & \{\Delta R_3, \Delta R_3\} & \{\Delta R_3, \Delta R_4\} \\ \{\Delta R_4, \Delta R_1\} & \{\Delta R_4, \Delta R_2\} & \{\Delta R_4, \Delta R_3\} & \{\Delta R_4, \Delta R_4\} \end{pmatrix} \tag{8}$$

donde $\{\Delta R_j, \Delta R_k\} = \Delta R_j\, \Delta R_k + \Delta R_k\, \Delta R_j$, siendo $\Delta R_j = R_j - \langle R_j\rangle$ y $\langle R_j\rangle$ el valor promedio de R_j. Se define el valor medio como:

$$\bar{R} = |c_0|^2 x_{\mathrm{a}} + |c_1|^2 p_{\mathrm{a}} + |c_2|^2 x_{\mathrm{b}} + |c_3|^2 p_{\mathrm{b}}, \tag{9}$$

CODIFICACIÓN DE CUBITS POR ESTADOS GAUSSIANOS

La pregunta que surge es la siguiente: ¿de qué manera un estado gaussiano codifica un estado de dos bits cuánticos? La respuesta a esta interrogante

© **Javier Anzures Torres**. Serie "Accidentes", tinta china y spray/papel, 65 x 50 cm, 2009.

radica en la observación de que un estado de dos cubits tiene cuatro diferentes salidas lógicas, como puede observarse de la ecuación (2). Dichas salidas lógicas son $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Pues bien, las cuatro cantidades de la ecuación (4), asociadas a un estado gaussiano, juegan el papel de las cuatro salidas lógicas asociadas a un estado de dos bits cuánticos. Por esto se puede decir que un estado gaussiano descrito por las cuatro cantidades $\{x_a, x_b, p_a, p_b\}$ codifica un estado de dos cubits. La siguiente pregunta es: en la imagen de la densidad de estados de la ecuación (3), ¿cómo se puede concluir que un estado gaussiano codifica un estado de dos bits cuánticos? La respuesta a esta pregunta es como sigue: las 16 diferentes entradas de la matriz de covariancia C de la ecuación (8) juegan el papel de las 16 diferentes entradas de la matriz de densidad de estados p de la ecuación (3). Para propósitos de comunicaciones cuánticas tales como el Internet Cuántico, el formalismo de estados gaussianos de la ecuación (8) es más fácil de manipular que el formalismo de la matriz de densidad de estados de la ecuación (3). Concluimos diciendo que la matriz de covariancia C y el valor promedio asociados a un estado gaussiano, codifican un estado de dos bits cuánticos.

© **Javier Anzures Torres**. Serie "Accidentes", tinta china y spray/papel, 56 x 70 cm, 2009.

GLOSARIO

Estados de vacío: ausencia de partículas en el sistema.

Espacio fase: grados de libertad de espacio y momento lineal permisibles para el sistema.

Espacio de Fock: sistema cartesiano de coordenadas cuyos ejes representan las posiciones y los momentos lineales del sistema de cubits.

Espacio de Hilbert: conjunto de estados cuánticos permisibles para el sistema.

Primer y segundo momentos estadísticos de los operadores de cuadratura: son los valores medios y las desviaciones cuadráticas medias en la ciencia de estadística.

Transpuesta parcial positiva: matriz cuyos valores propios son números reales positivos.

Vector de operadores canónicos: conjunto del total de primeros y segundos momentos asociados al sistema.

Partículas de espín 1: son cuerpos físicos cuyo momento angular de giro intrínseco vale 1.

Matriz simpléctica: matriz de información cuántica del sistema.

REFERENCIAS

Ferraro A, Olivares S and Paris MGA (2005). *Gaussianstates in quantum information*. Bibliopolis, Napoli.

Duan L-M, Giedke G, Cirac JI and Zoller P (2000). Inseparability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.* 84(12):2722-5.

Nielsen MA and Chuang I (2000). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press.

Weedbrook C, Pirandola S, García-Patrón R, Cerf NJ, Ralph TC and Shapiro JH (2012), Gaussian quantum information. *Rev. Mod. Phys.* 84(2):621-669.

Yin J, Li Y-H, Liao S, Yang M, Cao Y, Zhang L, Ren J-G, Cai W-Q *et al.* (2020). Entanglement-based secure quantum cryptography over 1,120 kilometres. *Nature* 582(7813):501-505.

Giselle N. Morales Rosales
Centro Universitario UAEM Valle de Chalco
giselle.mora17@gmail.com

Fabiola García Gutiérrez
Tecnológico Nacional de México
Tecnológico de Estudios Superiores de Ixtapaluca
fabiola_ingenf@hotmail.com

Manuel Ávila Aoki
Centro Universitario UAEM Valle de Chalco
manvlk@hotmail.com