



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

LA ESFERA TIENE LA CAPACIDAD ELECTROSTÁTICA  
MÍNIMA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA:

ASael SALVADOR ROJAS PLATA

TUTORES:

DR. ALFREDO CANO RODRÍGUEZ  
DR. ALBERTO SALDAÑA DE FUENTES



Toluca, México, Junio, 2023

# Índice general

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Simbología</b>                                     | <b>VII</b>  |
| <b>Introducción</b>                                   | <b>VIII</b> |
| <b>1. Capacidad</b>                                   | <b>1</b>    |
| 1.1. Capacidad . . . . .                              | 1           |
| 1.2. Sucesiones . . . . .                             | 5           |
| 1.3. Capacidad variacional . . . . .                  | 10          |
| <b>2. Electrostática</b>                              | <b>16</b>   |
| 2.1. Potencial de una medida . . . . .                | 25          |
| 2.2. Capacidad electrostática . . . . .               | 27          |
| 2.3. Energía de una medida . . . . .                  | 31          |
| <b>3. Simetrización y el problema de la capacidad</b> | <b>36</b>   |
| 3.1. Simetrización de Schwartz . . . . .              | 36          |
| 3.2. El problema de la capacidad . . . . .            | 39          |
| 3.3. La Prueba de Poincaré - Faber - Szegő . . . . .  | 39          |
| 3.4. La Prueba variacional . . . . .                  | 47          |
| <b>Conclusión</b>                                     | <b>50</b>   |
| <b>Apéndices</b>                                      | <b>51</b>   |
| <b>A. Convexidad</b>                                  | <b>51</b>   |
| <b>B. Unidades gaussianas</b>                         | <b>52</b>   |
| <b>C. Teorema de Stokes</b>                           | <b>56</b>   |
| <b>D. Masa total finita</b>                           | <b>58</b>   |
| <b>E. Conjunto compacto y abierto</b>                 | <b>59</b>   |



# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Representación gráfica de la monotonía, donde el conjunto $A$ está contenido dentro del conjunto $B$ . . . . .   | 1  |
| 1.2. Representación gráfica de la regularidad, donde “ $a$ ” es una cota superior, que la $cap(A)$ y $cap(C)$ no pueden superar. . . . .  | 2  |
| 1.3. Representación gráfica de la subaditividad fuerte, donde los conjuntos $A$ y $B$ son compactos. . . . .  | 2  |
| 1.4. Capacidad para un conjunto abierto. . . . .  | 3  |
| 1.5. Representación gráfica del lema 1.1.3. . . . .   | 3  |
| 1.6. Representación gráfica de los conjuntos abiertos $A$ y $B$ . . . . .   | 4  |
| 1.7. Relación de la capacidad entre conjuntos abiertos que contienen a un compacto. . . . .   | 4  |
| 1.8. Representación gráfica de la propiedad (c), donde los conjuntos $A$ y $B$ son abiertos. . . . .  | 5  |
| 1.9. Representación gráfica de la proposición 1.2.7. . . . .  | 7  |
| 1.10. Representación gráfica de la proposición 1.2.8. . . . .   | 8  |
| 1.11. Representación gráfica del corolario 1.2.10. . . . .  | 10 |
| 1.12. Representación gráfica de la definición 1.3.3, donde $K_1$ y $K_2$ son dos subconjuntos compactos de $\mathbf{R}^N$ con $K_1 \subset K_2$ , donde si $u \geq \chi_{K_2}$ entonces $u \geq \chi_{K_1}$ . . . . . | 11 |
| 1.13. Representación gráfica de monotonía, donde el ínfimo de una función $f$ en $D_1$ es menor que el ínfimo de $f$ en $D_2$ . . . . .   | 12 |
| 1.14. Representación gráfica de regularidad, donde existe $a \in D$ tal que $\inf_D f(x) \leq f(a) < \inf_D f(x) + \varepsilon$ . . . . .   | 12 |
| 1.15. Representación gráfica de subaditividad fuerte, donde $A, B \in \mathcal{K}$ y $U, V \in \mathcal{O}$ tal que $A \subset U, B \subset V, \chi_U \leq u, \chi_V \leq v$ . . . . .                                | 14 |
| 2.1. Vectores de posiciones de la ley de Coulomb. . . . .   | 17 |
| 2.2. Esquema de fuerza debida a más de una carga. . . . .   | 18 |
| 2.3. Elemento de carga de una distribución continua. . . . .  | 19 |
| 2.4. Definición de las diversas densidades de carga. . . . .  | 20 |
| 2.5. Cuerpo cargado eléctricamente $\Omega$ y carga de prueba $q_1$ . . . . .   | 21 |
| 2.6. Representación gráfica del cuerpo $\Omega$ , idealizado en una fuente de carga puntual $q$ y sus vectores de posición. . . . .   | 22 |
| 2.7. Representación gráfica de los dos vectores normales $\mathbf{v}^+$ y $\mathbf{v}^-$ . . . . .  | 26 |

2.8. Representación gráfica del experimento ideal. . . . . 28

3.1. Representación gráfica donde la *Simetrización de Schwartz* de  $A^*$  es una bola cen-  
trada en el origen con el mismo volumen de  $A$ . . . . . 37

3.2. Representación gráfica de una función *admisibile* de medida finita con  $u(\mathbf{x}) > t$ ,  
donde el punto  $\mathbf{x}$  debe estar contenido en la simetrización, ya que  $\mathbf{x} \in \{u(\mathbf{x}) > t\}^*$ . . . 38

A.1. Representación gráfica de convexidad. . . . . 51

C.1. Muchos contornos de línea diferenciales, distribuidos sobre cualquier superficie, tie-  
nen una contribución diferente de cero a la circulación sólo a lo largo de esas partes  
de la superficie que están sobre el contorno frontera de  $L$ . . . . . 56

# Simbología

$cap$  = capacidad

$\in$  = pertenece a

$\subset$  = es subconjunto de

$\cup$  = unión

$\cap$  = intersección

$\sup$  = supremo

$\inf$  = ínfimo

$\leq$  = es menor o igual a

$\geq$  = es mayor o igual a

$<$  = es menor a

$>$  = es mayor a

$\forall$  = para cada

$\mathbf{R}$  = números reales

$\mathbf{N}$  = números naturales

$\Sigma$  = suma sobre

$\nabla$  = operador diferencial nabla o gradiente de

$||$  = valor absoluto de

$|||$  = norma de

$C_0^\infty(\Omega)$  = funciones de soporte compacto en  $\Omega$  e infinitamente diferenciables

$D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  = Una vez débilmente diferenciable y con derivada integrable de  $L_p$

$p^*$  = Conjugado

$c.t.p$  = casi en todo punto

$\rho_f$  = Densidad de carga libre

$\delta$  = Función delta de Dirac

$\phi$  = potencial escalar o potencial electrostático

# Introducción

Uno de los usos más antiguos de los conductores en la electrostática fue para almacenamiento de la carga eléctrica; el conductor puede ser cargado, por ejemplo, al proporcionarle un potencial definido por medio de una batería. Resulta de interés natural encontrar la "capacidad" del conductor para almacenar carga, en un sentido muy similar al de la capacidad de un barril respecto al número de manzanas que puede contener. Tales sistemas reciben por lo general el nombre de capacitores y la medida cuantitativa de su capacidad se llama capacitancia [3]. Se da el nombre de capacitor al dispositivo que almacena carga, y el de capacitancia a la propiedad que determina cuánta carga puede guardar [5].

En 1903 Poincaré realizó una conjetura sobre la capacidad electrostática de los sólidos homogéneos. En ella afirmaba que entre todos los cuerpos con un volumen dado, la esfera tiene la capacidad electrostática mínima. En 1930 fue probado por Szegő y en 1948 fue revisado por Polya [8], [9].

Nos referimos a esta conjetura como el problema de la capacidad. Un resultado de notable importancia y elegancia matemática, porque somos capaces de estimar la capacidad eléctrica mínima de carga de una dimensión geométrica (el volumen del cuerpo).

Durante los primeros capítulos de este trabajo, presentamos algunas herramientas matemáticas y físicas que nos permiten dar una mejor descripción del problema de capacidad.

El presente trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera:

**Capítulo 1:** Por medio de un formalismo del análisis matemático se presenta el concepto abstracto de capacidad de un conjunto y algunas de sus propiedades (monotonía, regularidad y subaditividad fuerte), herramientas matemáticas que serán de gran utilidad para conocer las nociones de la capacidad variacional.

**Capítulo 2:** Ya podemos introducir la noción de potencial y energía de una distribución, mediante las ecuaciones de Maxwell en Unidades Gaussianas (Ley de Gauss), cantidades que nos permiten describir el problema de capacidad de una manera más sencilla, definiendo la capacidad de un cuerpo conductor. En este marco podemos vincular la noción de capacidad de un conjunto

con una cantidad que tiene un significado físico preciso, la capacidad electrostática de un cuerpo.

**Capítulo 3:** Se desarrolla de manera breve una herramienta matemática conocida como la Simetrización de Schwartz y su relación con el Cálculo Variacional, misma que nos ayudará más adelante a dar solución a la prueba del problema de capacidad.

Con todo lo anterior, ya podremos describir este problema de una forma física y matemática más precisa partiendo de la conjetura de Poincaré. Se dan dos demostraciones de nuestro problema de relacionar la capacidad variacional con la geometría del dominio, la primera está, en su mayor parte, basada en la demostración que Szegő, Faber y Poincaré que publicaron en 1930, ésta fue la primera prueba rigurosa de la conjetura, la cual menciona que para cada cantidad de carga en  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ , existe una única distribución de equilibrio a la que corresponde el potencial capacitivo en  $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$  que minimiza la energía y, mediante la desigualdad isoperimétrica en el espacio, se prueba que la esfera tiene la capacidad electrostática mínima. La segunda prueba, bajo un enfoque variacional, utiliza la técnica de simetrización, lo que lo lleva directamente a obtener el ínfimo de la capacidad en el caso de una esfera.

# Capítulo 1

## Capacidad

### 1.1. Capacidad

En esta sección presentaremos el concepto abstracto de capacidad de un conjunto y algunas de sus propiedades. La noción de capacidad de un conjunto y de conjunto capacitable aparece en la teoría de potencial. La teoría abstracta fue introducida en 1950 y formulada en 1954 por Gustave Choquet [1]. **Consideramos un espacio métrico, denotado por  $X$  y con  $\mathcal{K}$  la clase de los subconjuntos compactos de  $X$  y con  $\mathcal{O}$  la clase de subconjuntos abiertos de  $X$  (Véase Apéndice E).**

**Definición 1.1.1.** Una **capacidad** en  $X$  es una función  $\text{cap} : \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty)$ , donde a cada conjunto compacto  $K$  en  $X$ , se le asigna un valor real  $\text{cap}(K)$ , tal que cumple lo siguiente:

1.- **Monotonía.** Para cada  $A, B \in \mathcal{K}$  tal que  $A \subset B$ ,  $\text{cap}(A) \leq \text{cap}(B)$

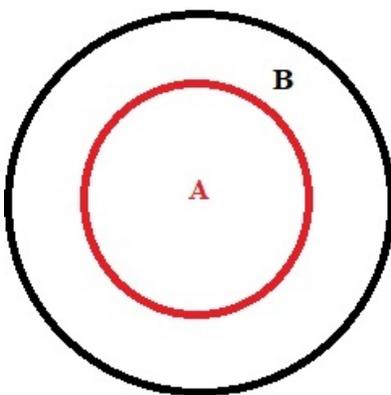


Figura 1.1: Representación gráfica de la monotonía, donde el conjunto  $A$  está contenido dentro del conjunto  $B$ .

2.- **Regularidad.** Para cada  $A \in \mathcal{K}$  y para cada número real “ $a$ ” tal que  $a > \text{cap}(A)$ , existe  $U \in \mathcal{O}$  tal que  $A \subset U$  y para todos los compactos  $C \in \mathcal{K}$  que satisfaga  $C \subset U$ , se cumple  $\text{cap}(C) < a$ .

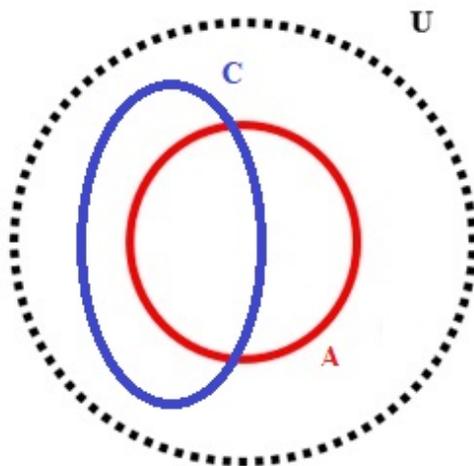


Figura 1.2: Representación gráfica de la regularidad, donde “ $a$ ” es una cota superior, que la  $cap(A)$  y  $cap(C)$  no pueden superar.

**3.- Subaditividad fuerte.** Para cada  $A, B \in \mathcal{K}$

$$cap(A \cup B) + cap(A \cap B) \leq cap(A) + cap(B).$$

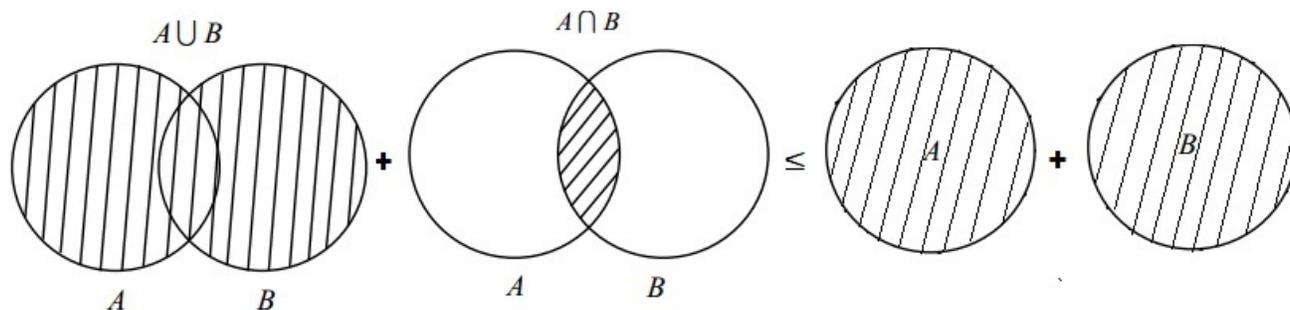


Figura 1.3: Representación gráfica de la subaditividad fuerte, donde los conjuntos  $A$  y  $B$  son compactos.

La definición 1.1.1 es adecuada solo para subconjuntos compactos de  $X$ . Ahora vamos a extender el concepto de **capacidad** a conjuntos y subconjuntos abiertos de  $X$ .

**Definición 1.1.2.** La **capacidad** de  $U \in \mathcal{O}$  está definida por

$$cap(U) = sup\{cap(K) \text{ tal que } K \in \mathcal{K} \text{ y } K \subset U\}.$$

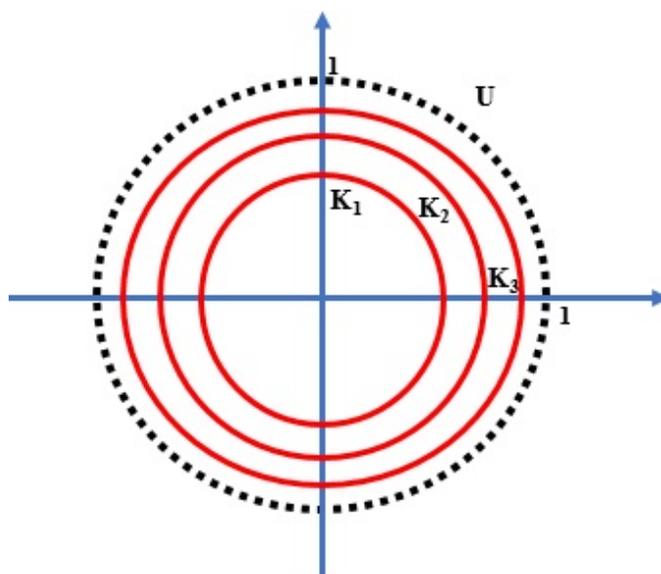


Figura 1.4: Capacidad para un conjunto abierto.

En la Figura 1.4 se considera una esfera unitaria  $U \in O$  y dentro de ella, varios conjuntos compactos  $K_n$  cada vez mas grandes, no existe un último conjunto compacto que alcance a cubrir  $U$ , es decir, no hay un conjunto compacto para el cual se alcance el máximo, sin embargo, el supremo de los números  $cap(K_n)$  sí existe.

Para comprobar que ésta es una **capacidad** en el sentido de la definición 1.1.1, necesitamos lo siguiente:

**Lema 1.1.3.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos abiertos y  $C \in \mathcal{K}$  tal que  $C \subset A \cup B$ . Entonces existen dos conjuntos compactos  $L, M \in \mathcal{K}$  tal que  $L \subset A, M \subset B$  y  $C = L \cup M$ .

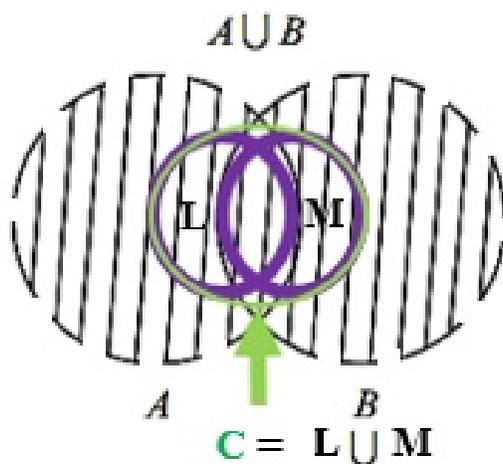


Figura 1.5: Representación gráfica del lema 1.1.3.

Este lema se utilizará para demostrar lo siguiente:

**Proposición 1.1.4.** Sea  $cap(U) = \sup\{cap(K) \mid K \in \mathcal{K} \text{ y } K \subset U\}$ . Entonces, esto satisface lo siguiente:

(a) (Monotonía). Para cada  $A, B \in \mathcal{O}$  tal que  $A \subset B$ ,  $cap(A) \leq cap(B)$ .

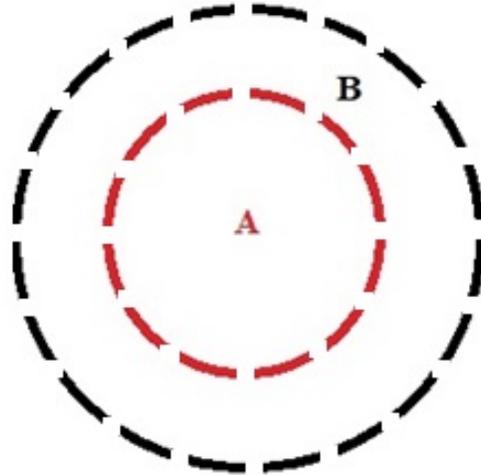


Figura 1.6: Representación gráfica de los conjuntos abiertos  $A$  y  $B$ .

(b) (Regularidad). Para cada  $C \in \mathcal{K}$ ,  $cap(C) = \inf\{cap(U) \mid U \in \mathcal{O} \text{ y } C \subset U\}$ .

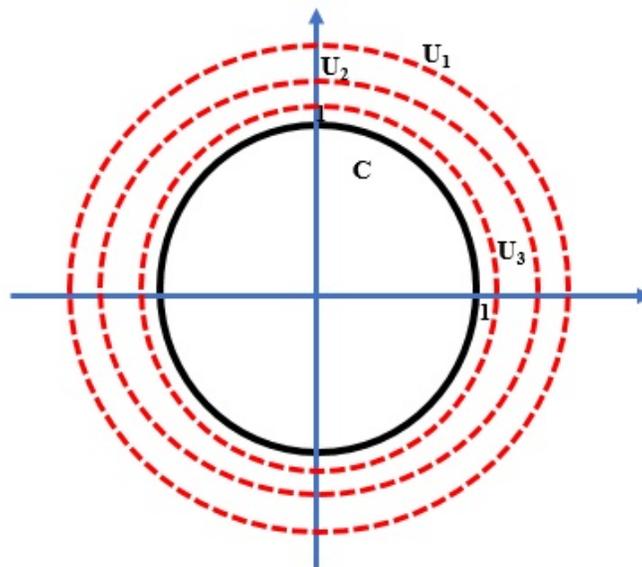


Figura 1.7: Relación de la capacidad entre conjuntos abiertos que contienen a un compacto.

En la Figura 1.7 se considera una esfera unitaria  $C \in \mathcal{K}$  y fuera de ella, varios conjuntos abiertos  $U_n$ , no existe un último conjunto abierto más pequeño que cubra a  $C$ , sin embargo, el ínfimo de los números  $cap(U)$  si existe, pero el mínimo no se alcanza.

(c) (Subaditividad fuerte). Para cada  $A, B \in \mathcal{O}$

$$\text{cap}(A \cup B) + \text{cap}(A \cap B) \leq \text{cap}(A) + \text{cap}(B).$$

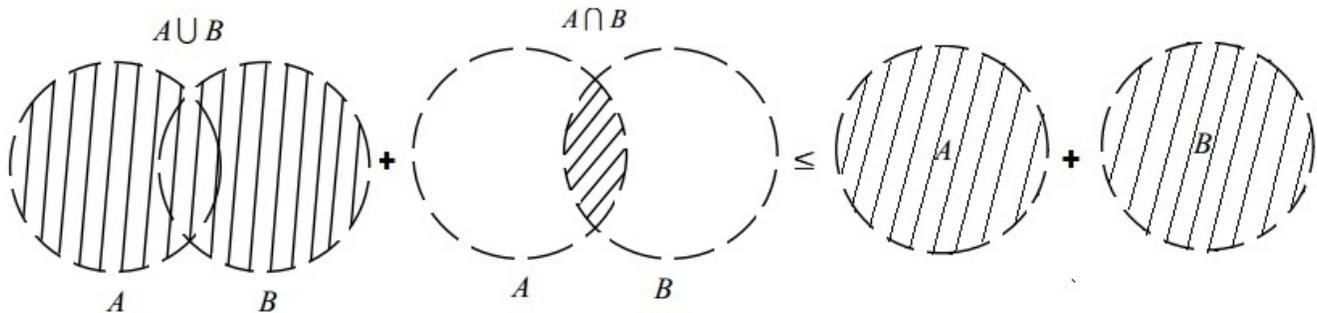


Figura 1.8: Representación gráfica de la propiedad (c), donde los conjuntos  $A$  y  $B$  son abiertos.

Ahora podemos extender la noción de capacidad, para definirla para un subconjunto general de  $X$ .

**Definición 1.1.5.** La **capacidad** de un subconjunto  $A \in X$  está definida por

$$\text{cap}(A) = \inf\{\text{cap}(U) \text{ tal que } U \in \mathcal{O} \text{ y } A \subset U\}.$$

Por la propiedad de regularidad para los compactos, la capacidad de los subconjuntos está bien definida, además la siguiente proposición nos justifica las otras propiedades de capacidad.

El lector puede encontrar la demostración de estos resultados en [1].

**Proposición 1.1.6.** (a) (*Monotonía*). Para cada  $A, B \subset X$  tal que  $A \subset B$ ,  $\text{cap}(A) \leq \text{cap}(B)$ .

(b) (*Subaditividad fuerte*). Para cada  $A, B \subset X$

$$\text{cap}(A \cup B) + \text{cap}(A \cap B) \leq \text{cap}(A) + \text{cap}(B).$$

## 1.2. Sucesiones

Se llama sucesión de números reales, a una agrupación infinita de elementos del conjunto  $\mathbf{R}$ :

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Una sucesión se suele definir como una aplicación de los números naturales  $\mathbf{N}$  en  $\mathbf{R}$ , dada por [3]:

$$\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$n \rightarrow x_n$$

**Definición 1.2.1.** Una sucesión  $\{a_n\}$  es monótona creciente, si  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $a_{n+1} > a_n$ , es decir, los números van aumentando su valor o, a lo sumo, son iguales.

Por ejemplo, la sucesión  $\{a_n\} = \{n^2\}$  es monótona creciente [2].

$$\{a_n\} = \{1, 4, 9, \dots\}$$

**Definición 1.2.2.** Una sucesión  $\{a_n\}$  es monótona decreciente, si  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $a_{n+1} < a_n$ , es decir, los términos van disminuyendo su valor o, a lo sumo, son iguales.

Por ejemplo, la sucesión  $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$  es monótona decreciente.

$$\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

**Definición 1.2.3.** Se dice que una sucesión  $\{a_n\}$  está acotada superiormente si  $\forall n \in \mathbf{N}$ , existe un  $M \in \mathbf{R}$  tal que  $a_n \leq M$  [2].

Por ejemplo, la sucesión  $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$  está acotada superiormente pues  $b_n \leq 1 \forall n \in \mathbf{N}$ .

$$\{b_n\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

**Definición 1.2.4.** Se dice que una sucesión  $\{a_n\}$  está acotada inferiormente si  $\forall n \in \mathbf{N}$ , existe un  $m \in \mathbf{R}$  tal que  $a_n \geq m$  [2].

Por ejemplo, la sucesión  $\{b_n\} = \{n^2\}$  está acotada inferiormente pues  $b_n \geq 1 \forall n \in \mathbf{N}$ .

$$\{b_n\} = \{1, 4, 9, \dots\}$$

En nuestro contexto, vamos a analizar sucesiones de conjuntos, generalizando los conceptos anteriores.

**Definición 1.2.5.** Una sucesión decreciente de conjuntos es una agrupación infinita  $\{A_n\}$  tal que  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

Por ejemplo: Una sucesión de bolas cuyo radio disminuye, tal que  $B(0, \frac{1}{n}) = \{x \in \mathbf{R}^k : \|x\| < \frac{1}{n}\}$

**Definición 1.2.6.** Una sucesión creciente de conjuntos es una agrupación infinita  $\{A_n\}$  tal que  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

Por ejemplo: Una sucesión de bolas con radio creciente, tal que  $B(0, 1 - \frac{1}{n}) = \{x \in \mathbf{R}^k : \|x\| < 1 - \frac{1}{n}\}$ , está acotada.

Por ejemplo: Una sucesión de bolas, tal que  $B(0, n^2) = \{x \in \mathbf{R}^k : \{\|x\| < n^2\}\}$ , no está acotada.

Con lo anterior podemos establecer algunas propiedades adicionales de una capacidad.

**Proposición 1.2.7.** Sea  $\{K_n\}$  una sucesión decreciente en  $\mathcal{K}$ . Entonces tenemos

$$cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} cap(K_n)$$

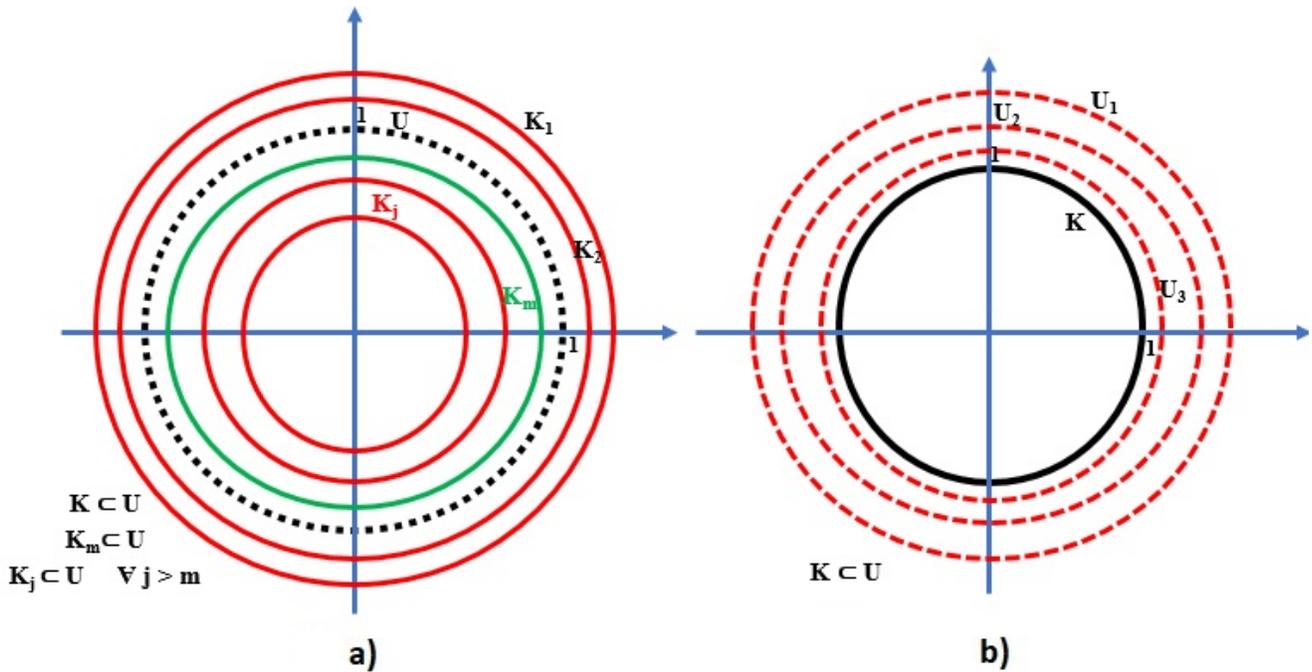


Figura 1.9: Representación gráfica de la proposición 1.2.7.

En el inciso a) de la Figura 1.9 se representa  $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ , donde la sucesión de  $\{K_n\}$ , puede encontrarse en un principio afuera y dentro de  $U$ .  $K_m$  es el primer conjunto compacto que se encuentra en el interior de un abierto  $U$  y sucesivamente los  $K_j$  están contenidos en  $U$ , para  $j > m$ . En el inciso b) se muestra que, para cualquier conjunto abierto  $U_n$  no existe un último, que cubra a  $K$ , por lo que el ínfimo de la capacidad  $U_n$  sí existe, pero el mínimo no se alcanza.

**Demostración.** Sea  $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$  y  $U$  un conjunto abierto que contiene a  $K$ , es decir,  $K \subset U$ . Debido a la compacidad (Véase Apéndice E), existe  $m \in \mathbf{N}$  tal que  $K_m \subset U$  y en particular,  $K_j \subset U$  para cada  $j > m$ . La monotonía implica

$$cap(K) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} cap(K_n) \leq cap(U)$$

Para concluir, tomamos el ínfimo con respecto a  $U$ .

Como  $cap(K)$  es una cota inferior de  $cap(U)$  para cualquier abierto  $U$ , entonces existe el ínfimo, y como para cualquier subconjunto compacto (en particular para  $K$ ) se define

$$cap(K) = inf\{cap(U)\}$$

se tiene

$$cap(K) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} cap(K_n) \leq inf\{cap(U)\} = cap(K)$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} cap(K_n) = cap(K).$$

Esta proposición es adecuada solo para conjuntos compactos de  $\mathcal{K}$ . ○

**Proposición 1.2.8.** Sea  $\{U_n\}$  una sucesión creciente de conjuntos abiertos. Entonces tenemos

$$cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} cap(U_n)$$

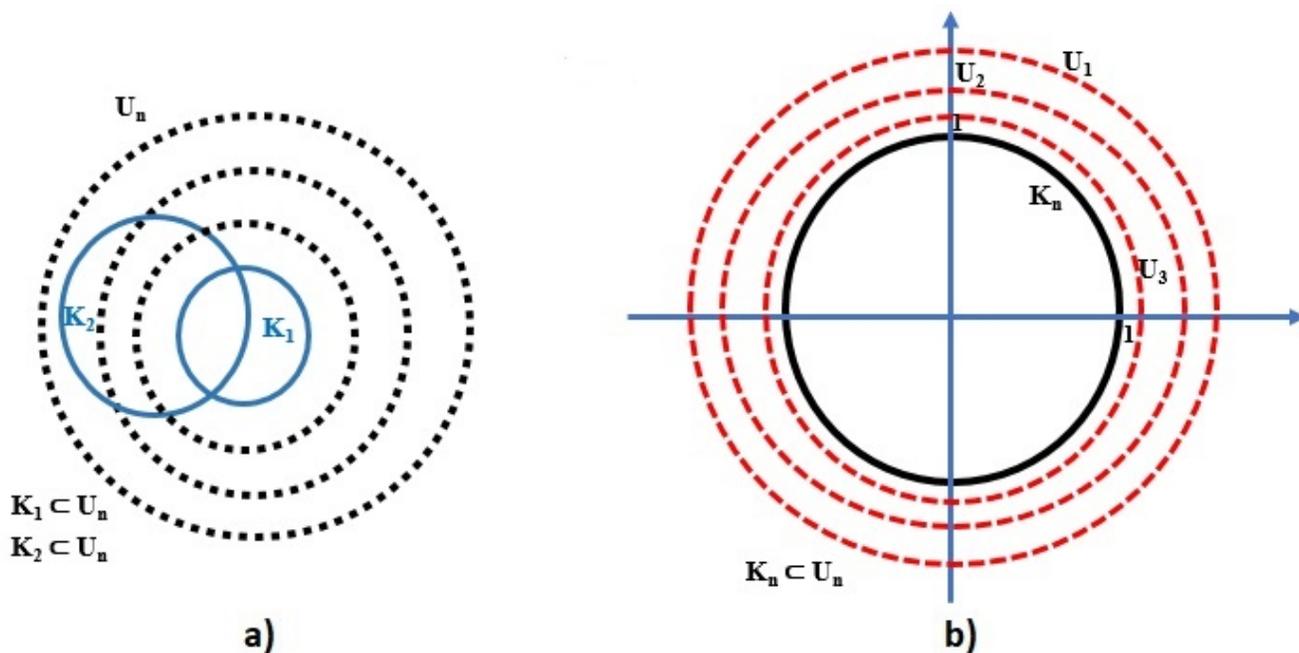


Figura 1.10: Representación gráfica de la proposición 1.2.8.

En el inciso a) de la Figura 1.10 se representa  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  donde la sucesión de los conjuntos abiertos  $U_n$ , va creciendo y mantienen en su interior a algún conjunto compacto  $K_n$ . En el inciso b) se muestra que no existe un último conjunto compacto  $K_n \subset U_n$  que alcance a cubrir  $U_n$ , sin embargo, el supremo de la capacidad  $K_n$  sí existe y el máximo no se alcanza.

**Demostración.** Sea  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  y  $K \in \mathcal{K}$ , tal que  $K \subset U$ . Debido a la compacidad, existe  $m \in \mathbf{N}$  tal que  $K \subset U_m$ . Obtenemos por monotonicidad que

$$\text{cap}(K) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{cap}(U_n) \leq \text{cap}(U).$$

Como antes para concluir, tomamos el supremo con respecto a  $K$ .

Como  $\text{cap}(U)$  es una cota superior de  $\text{cap}(K)$  para cualquier compacto  $K$ , entonces existe el supremo, y por la definición de capacidad para conjuntos abiertos

$$\text{cap}(U) = \sup\{\text{cap}(K)\}$$

por lo que se tiene

$$\text{cap}(U) = \sup\{\text{cap}(K)\} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{cap}(U_n) \leq \text{cap}(U)$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{cap}(U_n) = \text{cap}(U).$$

Esta proposición es adecuada solo para conjuntos abiertos de  $O$ . ○

Ahora podemos extenderlo para cualquier subconjunto del espacio métrico.

**Teorema 1.2.9.** Sea  $\{A_n\}$  una sucesión creciente de subconjuntos de  $X$ , entonces

$$\text{cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{cap}(A_n).$$

**Corolario 1.2.10.** Sea  $\{A_n\}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$ , entonces

$$\text{cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{cap}(A_n).$$

**Demostración.** Sea  $B_k = \bigcup_{n=1}^k A_n$ , tenemos

$$\text{cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{cap}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{cap}(B_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{cap}(A_n).$$

En la Figura 1.11 se define  $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , define una sucesión creciente de conjuntos, donde  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4 \subset \dots$  ○

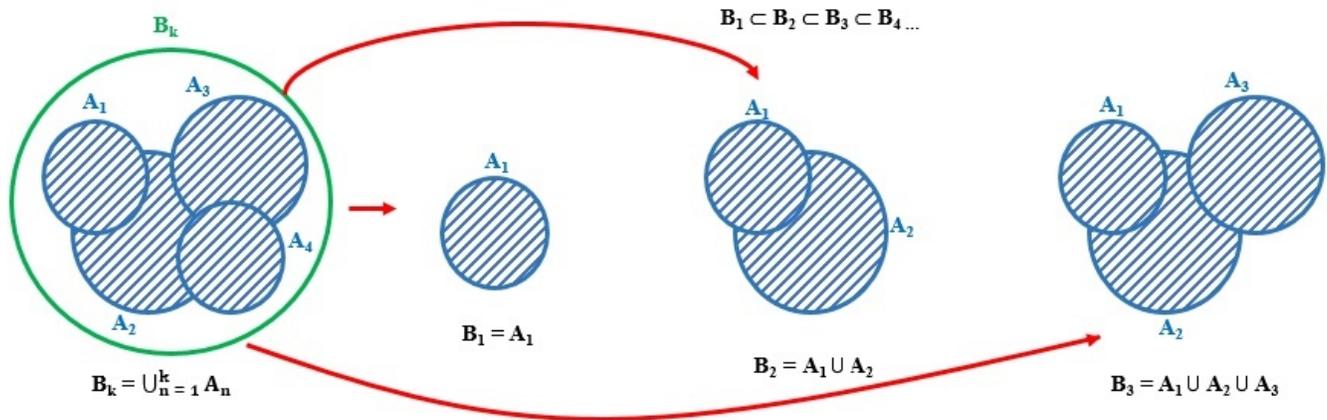


Figura 1.11: Representación gráfica del corolario 1.2.10.

### 1.3. Capacidad variacional

En esta sección se presentará una definición de la capacidad variacional, que será importante para nuestro trabajo, pero antes de definirla introduciremos el espacio  $D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  [1] y algunas de sus propiedades.

**Definición 1.3.1.** Sea  $1 \leq p < N$ ,  $D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  es el cierre del espacio  $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$  de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto con respecto a la norma [1]

$$\|u\|_{D^{1,p}} = \|\nabla u\|_p = \left( \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Proposición 1.3.2:** Enumeramos aquí algunas propiedades interesantes del espacio  $D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ . Consultar [1] para mayor detalle.

(1)  $D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  es completo.

(2) (Desigualdad de Sobolev) Existe  $c = c(p, N)$  tal que para cada  $u \in D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  y  $p^* = \frac{Np}{N-p}$ , con  $N > p$  se cumple que

$$\|u\|_{p^*} \leq c \|\nabla u\|_p.$$

Con esta desigualdad podemos escribir  $D^{1,p} = \{u \in L^{p^*}(\mathbf{R}^N) \mid \nabla u \in L^p(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)\}$ .

(3) Cada sucesión acotada en  $D^{1,p}$  contiene una subsucesión que converge en  $L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$  y casi en todas partes en  $\mathbf{R}^N$ .

Con esta definición podemos considerar el siguiente espacio.

**Definición 1.3.3.** Sea  $1 \leq p < N$  y  $K$  un subconjunto compacto de  $\mathbf{R}^N$ .

$$D_K^{1,p}(\mathbf{R}^N) = \left\{ u \in D^{1,p}(\mathbf{R}^N) \mid \exists U \in \mathcal{O} \text{ tal que } K \subset U \text{ y } \chi_U \leq u \text{ c.t.p.} \right\}.$$

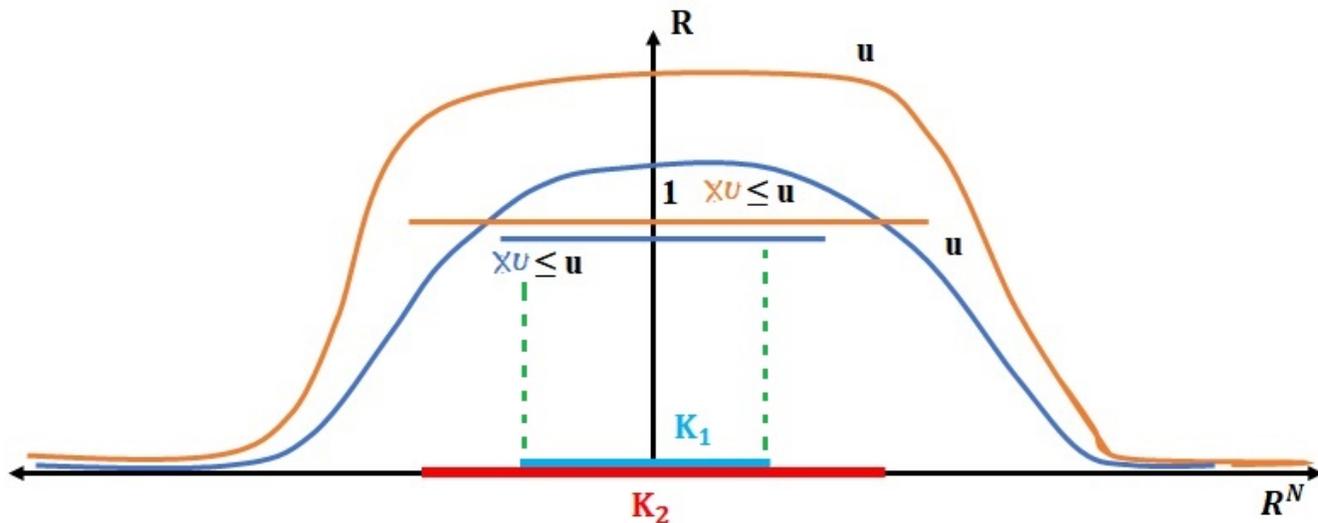


Figura 1.12: Representación gráfica de la definición 1.3.3, donde  $K_1$  y  $K_2$  son dos subconjuntos compactos de  $\mathbf{R}^N$  con  $K_1 \subset K_2$ , donde si  $u \geq \chi_{K_2}$  entonces  $u \geq \chi_{K_1}$

Ahora podemos definir la  $p$ -capacidad.

**Definición 1.3.4.** Sea  $1 \leq p < N$  y  $K$  un subconjunto compacto de  $\mathbf{R}^N$ . La *capacidad de grado  $p$* , o  $p$ -capacidad, de  $K$  se define como

$$cap_p(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx \mid u \in D_K^{1,p}(\mathbf{R}^N) \right\}$$

**Teorema 1.3.5.** La capacidad de grado  $p$  es una capacidad en  $\mathbf{R}^N$ .

**Demostración.**

**1.- Monotonía.** Sea  $K_1$  y  $K_2$  dos subconjuntos compactos de  $\mathbf{R}^N$  con  $K_1 \subset K_2$ , como se muestra en la figura 1.12.

Queremos probar que  $cap_p(K_1) \leq cap_p(K_2)$ .

Entonces debemos comparar  $D_1 = D_{K_1}^{1,p}$  y  $D_2 = D_{K_2}^{1,p}$ .

Sea  $u \in D_2 = D_{K_2}^{1,p}$ , por definición  $\exists U$  tal que  $K_2 \subset U$  y  $\chi_U \leq u$  c.t.p, entonces  $K_1 \subset K_2 \subset U$  de donde  $u \in D_1$ .

Así:  $D_1 = D_{K_1}^{1,p} \subset D_2 = D_{K_2}^{1,p}$ .

Por lo tanto,

$$cap_p(K_1) = \inf_{D_1} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx \leq \inf_{D_2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx = cap_p(K_2)$$

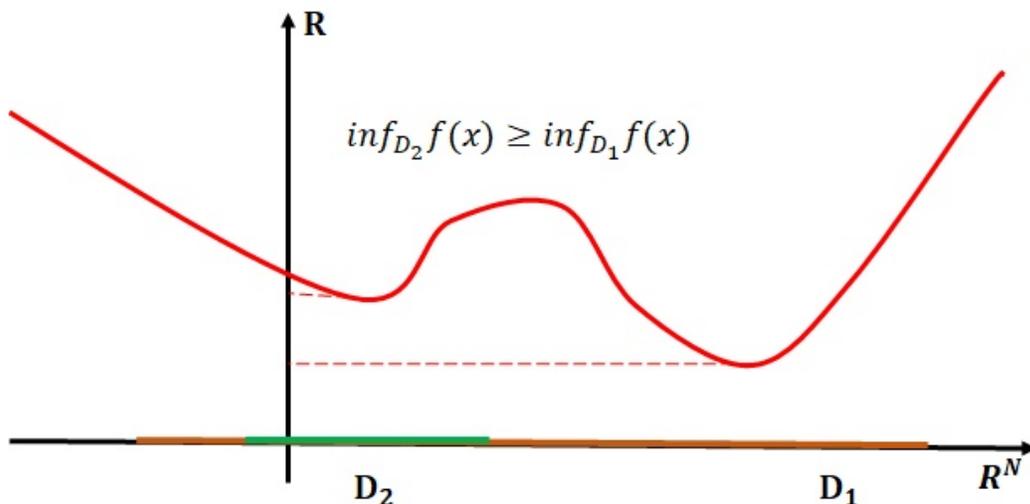


Figura 1.13: Representación gráfica de monotonía, donde el ínfimo de una función  $f$  en  $D_1$  es menor que el ínfimo de  $f$  en  $D_2$ .

**2.- Regularidad.** Sea  $K$  un conjunto compacto y  $a > cap_p(K)$ . Tenemos que existe  $u \in D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  y  $U \in \mathcal{O}$  tal que  $K \subset U$ ,  $\chi_U \leq u$  casi en todas partes y  $\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx < a$ . Para todo conjunto compacto  $C \subset U$  tenemos por definición  $cap_p(C) \leq \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx < a$ . Por lo tanto  $cap_p$  es regular.

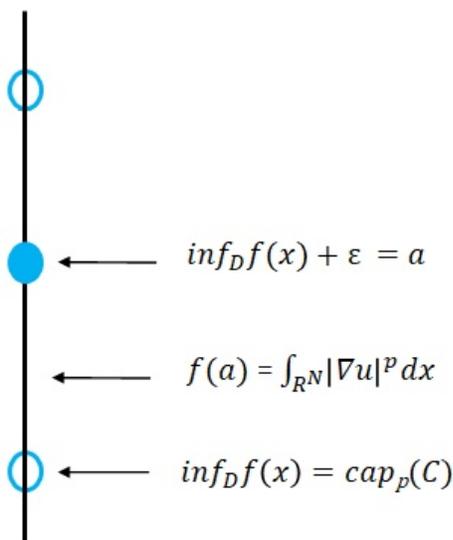


Figura 1.14: Representación gráfica de regularidad, donde existe  $a \in D$  tal que  $\inf_D f(x) \leq f(a) < \inf_D f(x) + \epsilon$ .

**3.- Subaditividad fuerte.** Debemos probar que:

$$\text{cap}_p(A \cup B) + \text{cap}_p(A \cap B) \leq \text{cap}_p(A) + \text{cap}_p(B).$$

Consideremos el funcional  $F(u) = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx$ , así que

$$\text{cap}_p(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx \mid u \in D_A^{1,p}(\mathbf{R}^N) \right\} = \inf \{ F(u) \mid u \in D_A^{1,p} \}$$

y

$$\text{cap}_p(B) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla v|^p dx \mid v \in D_B^{1,p}(\mathbf{R}^N) \right\} = \inf \{ F(v) \mid v \in D_B^{1,p} \}.$$

Sea  $A, B \in \mathcal{K}$  y  $a > \text{cap}_p(A)$ ,  $b > \text{cap}_p(B)$  con  $a$  y  $b$  reales positivos. De la propiedad de ínfimo existe  $u, v \in D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  tal que están en el conjunto considerado en el ínfimo y  $U, V \in \mathcal{O}$  tales que  $A \subset U$ ,  $B \subset V$ ,  $\chi_U \leq u$ ,  $\chi_V \leq v$  casi en todo punto y

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx < a, \quad \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla v|^p dx < b.$$

Con esto tenemos

$$\text{cap}_p(A) \leq F(u) \leq a, \quad \text{cap}_p(B) \leq F(v) \leq b.$$

Definimos las funciones

$$\max(u, v) = \max\{u(x), v(x) \mid x \in \mathbf{R}^N\}, \quad \min(u, v) = \min\{u(x), v(x) \mid x \in \mathbf{R}^N\},$$

donde observamos que

$$\max(u, v) \in D_{A \cup B}, \quad \min(u, v) \in D_{A \cap B}$$

que cumplen  $u, v \leq \max(u, v)$  y  $u, v \geq \min(u, v)$ . Así

$$\text{cap}_p(A \cup B) \leq F(\max(u, v)) \quad \text{además} \quad \text{cap}_p(A \cap B) \leq F(\min(u, v)),$$

véase la figura 1.15.

Con lo anterior tenemos que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla \max(u, v)|^p dx + \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla \min(u, v)|^p dx = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla v|^p dx.$$

Por otra parte,

$$F(\max(u, v)) + F(\min(u, v)) = F(u) + F(v) \leq a + b.$$

Entonces, concluimos

$$\text{cap}_p(A \cup B) + \text{cap}_p(A \cap B) \leq a + b < \text{cap}_p(A) + \text{cap}_p(B).$$

Siendo que  $a > \text{cap}_p(A)$ ,  $b > \text{cap}_p(B)$  son arbitrarios,  $\text{cap}_p$  cumple la subaditividad fuerte.

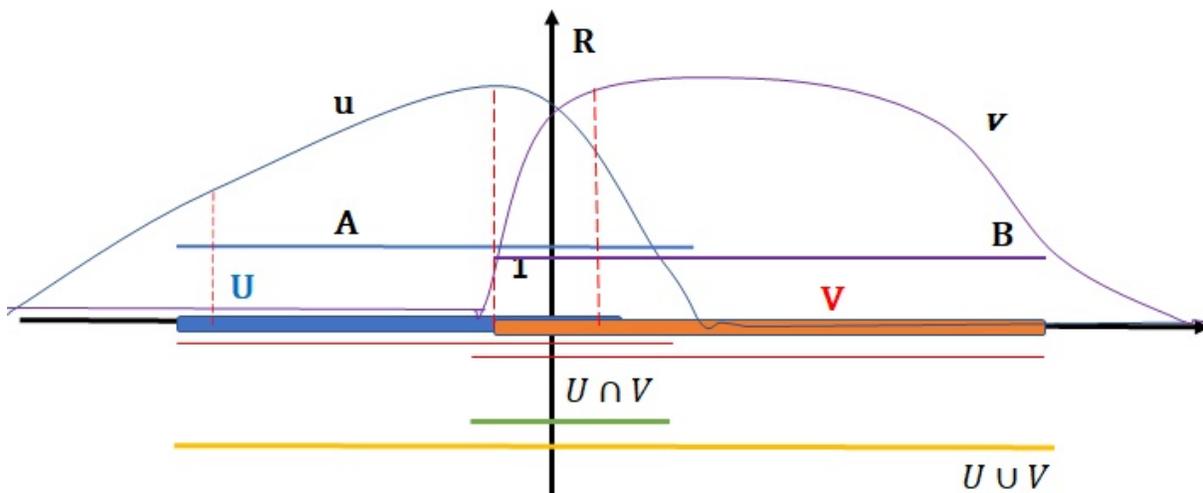


Figura 1.15: Representación gráfica de subaditividad fuerte, donde  $A, B \in \mathcal{K}$  y  $U, V \in \mathcal{O}$  tal que  $A \subset U$ ,  $B \subset V$ ,  $\chi_U \leq u$ ,  $\chi_V \leq v$ .

**Proposición 1.3.6.** Dado un conjunto compacto  $K$  tenemos

$$\text{cap}_p(K) = \text{cap}_p(\partial K),$$

donde  $\partial K$  es la frontera de  $K$ .

**Demostración.** Consideremos  $\text{cap}_p(\partial K) < a$ . Existe  $u \in D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  y un conjunto abierto  $U$  tal que  $\partial K \subset U$ ,  $\chi_U \leq u$  c.t.p y

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx < a.$$

Si planteamos  $V = U \cup \partial K$  y  $v = \max(u, \chi_V)$ , entonces  $v \in D_K^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  y

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla v|^p dx \leq \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx < a$$

de modo que  $\text{cap}_p(K) < a$ . Como  $a > \text{cap}_p(\partial K)$  es arbitrario, tenemos

$$\text{cap}_p(K) \leq \text{cap}_p(\partial K) \leq \text{cap}_p(K).$$

○

**Ejemplo:** Sea  $1 \leq p < N$  y sea  $B$  una bola cerrada en  $\mathbf{R}^N$ . De las proposiciones anteriores deducimos que

$$0 < \text{cap}_p(B) = \text{cap}_p(\partial B).$$

Ahora, como hicimos antes en la proposición 1.1.4, queremos extender la  $p$ -capacidad a la clase de conjuntos abiertos de  $\mathbf{R}^N$ .

**Teorema 1.3.7.** Sea  $1 \leq p < N$  y  $U$  un conjunto abierto, entonces

$$\text{cap}_p(U) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p dx \mid u \in D^{1,p}(\mathbf{R}^N), \chi_U \leq u \text{ c.t.p.} \right\}.$$

La demostración se encuentra en [1].

**Corolario 1.3.8.** Sea  $1 \leq p < N$  y  $U, V$  conjuntos abiertos, tales que  $U \subset V$  y se tiene que  $m(V \setminus U) = 0$ , donde  $m$  es la medida de Lebesgue. Entonces  $\text{cap}_p(U) = \text{cap}_p(V)$ .

**Demostración.**

Sea  $u \in D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$  tal que  $\chi_U \leq u$  en casi todas partes. Como  $m(V \setminus U) = 0$  tenemos  $\chi_V \leq u$  en casi todas partes. Además tenemos  $U \subset V$ . De este modo  $\text{cap}_p(V) = \text{cap}_p(U)$ .

○

# Capítulo 2

## Electrostática

En este capítulo presentamos algunas cantidades que nos permiten describir el problema de capacidad de una manera más sencilla. En particular, definiremos la capacidad de un cuerpo conductor y luego mostraremos que esta cantidad se puede vincular a una capacidad variacional para  $p = 2$ .

Uno de los usos más antiguos de los conductores en la electrostática fue para almacenamiento de la carga eléctrica; el conductor puede ser cargado, por ejemplo, al proporcionarle un potencial definido por medio de una batería. Resulta de interés natural encontrar la "capacidad" del conductor para almacenar carga, en un sentido muy similar al de la capacidad de un barril respecto al número de manzanas que puede contener. Tales sistemas reciben por lo general el nombre de capacitores y la medida cuantitativa de su capacidad se llama capacitancia [4]. Se da el nombre de capacitor al dispositivo que almacena carga, y el de capacitancia a la propiedad que determina cuánta carga puede guardar [5].

Consideremos un cuerpo conductor, que para nosotros será un subconjunto convexo (*Véase Apéndice A*) y compacto  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  sobre el cual se distribuye una carga total "q" de acuerdo con una distribución  $\mu$ , con densidad  $\rho_f \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Eligiendo adecuadamente las constantes físicas, las ecuaciones de Maxwell en unidades gaussianas (*Véase Apéndice B*), que describen el campo electrostático generado por la región  $\Omega$  en el vacío, se convierten en:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f, \tag{2.2}$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico y  $\mathbf{D}$  es el campo de desplazamiento eléctrico, o simplemente el desplazamiento, la característica principal de  $\mathbf{D}$ , y la razón fundamental para su definición, es que su divergencia depende exclusivamente de su densidad de carga libre, que en el caso de Maxwell

es proporcional al campo eléctrico.

De la primera ecuación deducimos que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , y sustituyendo este resultado en la segunda ecuación, obtenemos que  $-\Delta\phi = 4\pi\rho_f$ .

Para entender lo anterior, necesitamos retomar una situación general, donde  $\phi$  será deducida en lo que sigue, recordando que la carga de un objeto se distribuye de una cierta manera, ya sea sobre su superficie o en todo su volumen, y la fuerza entre dos objetos depende tanto de esta distribución como de la cantidad total de carga [4]. En la figura 2.1 se ilustra la situación, en la que se tienen dos cargas puntuales,  $q$  y  $q'$ , separadas por una distancia  $r$ ; supóngase que las cargas están en posiciones fijas y que no hay materia circundante, es decir, que las cargas se encuentran en el vacío. La fuerza sobre  $q$  debida a  $q'$  se escribe  $\mathbf{F}_{q' \rightarrow q}$ .

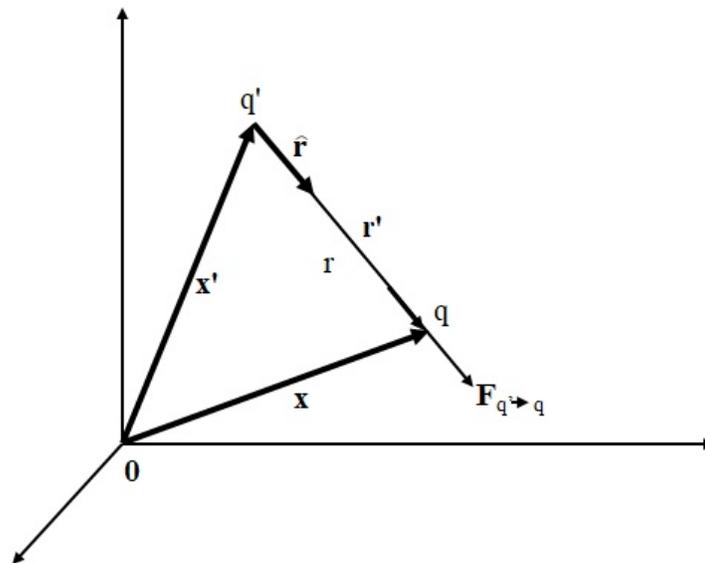


Figura 2.1: Vectores de posiciones de la ley de Coulomb.

Así, se considera a  $q'$  como la fuente de la fuerza y que su posición, dada por  $\mathbf{x}'$ , es el "punto de fuente". Dado que  $q$  es la carga para la cual se va a encontrar la fuerza, se dice que se encuentra en el "punto de campo" localizado por  $\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{r}'$  es el vector de posición relativa de  $q$  con respecto a  $q'$  y se ve que su dirección va del punto de fuente al punto de campo, lo mismo que el vector unitario correspondiente  $\hat{\mathbf{r}}$ , de manera que:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}'}{r}. \quad (2.3)$$

En términos de esas cantidades, la Ley de Coulomb establece que:

$$\mathbf{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{qq'}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.4)$$

de manera que la fuerza es proporcional al producto de las cargas y al inverso del cuadrado de la distancia que las separa.

Ahora podemos generalizarlo para un sistema de cargas puntuales. Consideramos una carga de prueba "q" y un número de  $N$  cargas eléctricas distribuidas en posiciones fijas en el espacio y los campos de fuerza que producen estas cargas. A cada una de estas cargas se les denomina  $q_i$  y su vector de posición es  $\mathbf{x}_i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Esta situación se ilustra en la figura 2.2; por claridad, no se muestran los vectores de posición individuales, pero sí los vectores unitarios,  $\hat{\mathbf{r}}_i$ , que corresponden a las posiciones relativas de  $q$  con respecto a las  $q_i$ . Cada una de estas cargas puede ejercer una fuerza sobre  $q$ ,  $\mathbf{F}_{q_i \rightarrow q}$ . Las propiedades de superposición de las fuerzas ya son conocidas por la mecánica; así, la fuerza total sobre  $q$ , que denotaremos por  $\mathbf{F}_q$ , estará dada por la suma vectorial de las fuerzas individuales, de manera que:

$$\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{q_i \rightarrow q} = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i \mathbf{r}'_i}{r_i^3}, \quad (2.5)$$

donde

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i, \quad r_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|, \quad \hat{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{r}'_i}{r_i}. \quad (2.6)$$

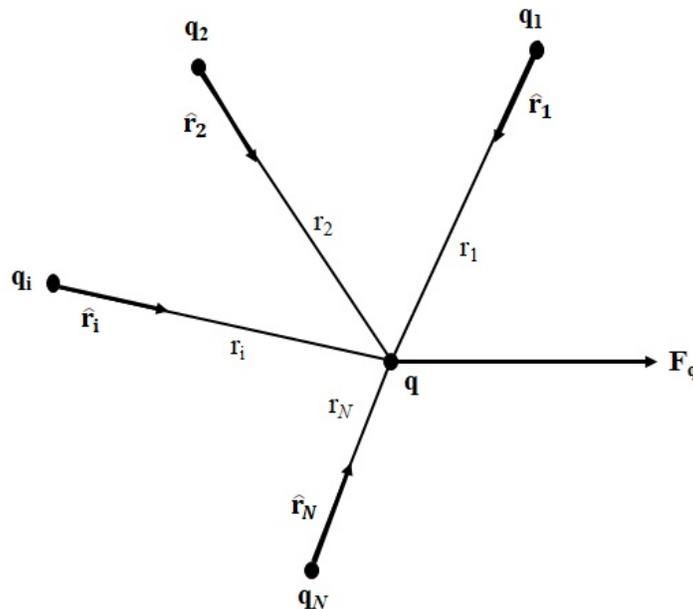


Figura 2.2: Esquema de fuerza debida a más de una carga.

La ecuación (2.5) expresa el hecho de que la fuerza total puede encontrarse como la suma de las fuerzas individuales entre pares de cargas, y estas se calculan a partir de la ley de Coulomb como si no existieran las demás cargas.

A menudo se encuentran diversos casos en los que las cargas están cerca una de otra, en comparación con las demás distancias de interés, que se les puede considerar como distribuidas uniformemente, tal como se podría considerar un vaso con agua, a escala de laboratorio, como una distribución uniforme de masa al despreciar su estructura molecular del agua. Se puede considerar una región con distribución de carga que sea tan pequeña que la carga contenida en ella puede escribirse como  $dq'$  y ser tratada como una carga puntual; esto queda representado en la figura 2.3 [4]. Todavía se puede utilizar (2.5), pero en este caso la suma será la integral sobre toda la distribución de carga, de manera que

$$\mathbf{F}_q = q \int \frac{dq'}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.7)$$

y en las que (2.3) sigue siendo aplicable.

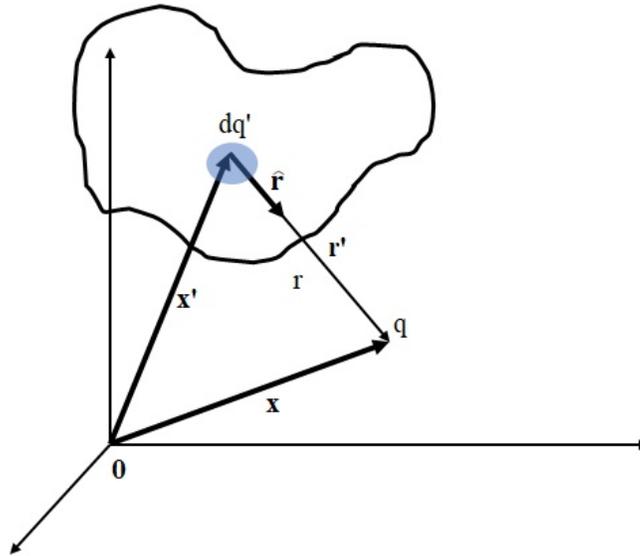


Figura 2.3: Elemento de carga de una distribución continua.

Si las cargas se encuentran distribuidas en un volumen, se puede introducir una *densidad de carga volumétrica*,  $\rho$ , que se define como la carga por unidad de volumen. Así, la carga contenida en un volumen pequeño  $dV'$ , estará dada por

$$dq' = \rho(\mathbf{x}')dV' \quad (2.8)$$

tal como se muestra en la figura 2.4a, por lo que (2.7) queda como

$$\mathbf{F}_q = q \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')dV'}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.9)$$

Se ha descrito  $\rho = \rho(\mathbf{x}')$  porque, en general, la densidad de volumen puede variar con la localización del punto de fuente; la integral de (2.9) debe tomarse sobre todo el volumen,  $V'$ , que contiene a la distribución de carga.

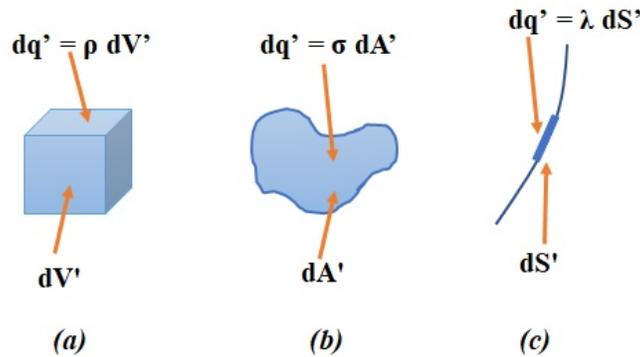


Figura 2.4: Definición de las diversas densidades de carga.

De manera similar, las cargas pueden idealizarse sobre una superficie o sobre una línea. Para tal propósito se introducen densidades de carga análogas: la *densidad de carga superficial*,  $\sigma$ , definida como la carga por unidad de superficie, y la *densidad de carga lineal*,  $\lambda$ , definida como la carga por unidad de longitud, y generalmente pueden variar con la posición. A partir de estas definiciones se tiene que [4]

$$dq' = \sigma(\mathbf{x}')dA', \quad dq' = \lambda(\mathbf{x}')dS' \quad (2.10)$$

como se indica en la figura 2.4b y c. Para tales casos (2.7) se convierte en

$$\mathbf{F}_q = q \int_{D'} \frac{\sigma(\mathbf{x}')dA'}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{F}_q = q \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{x}')dS'}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.12)$$

donde (2.11) se integra en toda la superficie,  $D'$ , sobre la que hay distribución superficial, mientras que (2.12) cubre la línea,  $L'$ , ocupada por la distribución lineal de carga.

Consideremos un cuerpo conductor  $\Omega$  cargado eléctricamente, sobre el cual se distribuye una carga total “ $q$ ”, digamos cargado positivamente, tal como se muestra en la figura 2.5.

Si observamos una partícula de prueba cargada en presencia de este cuerpo, encontramos que una fuerza que actúa sobre ella. Veamos la fuerza como una función de carácter vectorial de tres variables  $(x, y, z)$  en  $\mathbf{F}: \Omega \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , también se le llama campo de fuerzas, y que depende de la posición  $(x, y, z)$  de la partícula, y de su carga  $q_1$ . Tenemos:

$$\mathbf{F}_{q_1} = q_1 \cdot \mathbf{E}(x, y, z). \quad (2.13)$$

(Fuerza sobre la partícula) = (partícula de prueba cargada  $q_1$ ) · (campo eléctrico debido al cuerpo)

Aquí  $\mathbf{E}(x, y, z)$  es un vector independiente de la partícula. Por lo tanto, asociado con nuestro cuerpo cargado, hay un campo vectorial  $\mathbf{E}$  definido en todas partes fuera de cuerpo.

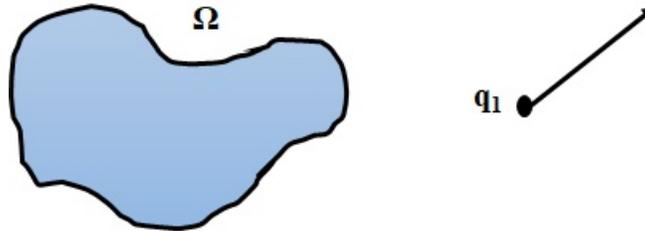


Figura 2.5: Cuerpo cargado eléctricamente  $\Omega$  y carga de prueba  $q_1$ .

Si tenemos varios cuerpos cargados, con campos eléctricos  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_N$ , entonces encontramos que la fuerza sobre una partícula de prueba de carga  $q_1$  ahora será

$$\mathbf{F}_{q_1} = q_1 \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i. \quad (2.14)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico debido a varios cuerpos es la suma de sus campos individuales.

Si consideramos el caso donde el cuerpo  $\Omega$  está reducido a un punto  $x_0$  y  $\delta_{x_0}$  (*en física, la delta de Dirac puede representar la distribución de densidad de una masa unidad concentrada en un punto "a"*), está idealizado para ser una fuente de carga puntual " $q$ " ubicada en un punto  $A$ , entonces el campo eléctrico en el punto  $B$  tiene dirección  $AB$  y magnitud  $\frac{q}{r^2}$  (Ley de Coulomb), donde  $r = \text{distancia}(A, B)$ , si  $q > 0$ , como se muestra en la figura 2.6.

En notación vectorial, una carga puntual  $q$  en  $\mathbf{x}'$  induce un campo  $\mathbf{E}$  tal que, si recordamos la ecuación (2.3) tenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r} = \frac{q}{r^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.15)$$

para toda  $\mathbf{x} \in R^3$ , donde  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ .

Ahora supongamos un sistema compuesto por  $N$  puntos de carga  $q_i$  e indicamos con  $\mathbf{x}_i$  la posición de cada carga, donde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Estas cargas eléctricas producen un campo eléctrico, utilizando (2.15) y (2.6), obtenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (2.16)$$

La ecuación (2.15) y (2.16) constituyen una fórmula para calcular  $\mathbf{E}$  en la posición  $\mathbf{x}$  (el punto de campo) para una carga puntual  $q$  y para una distribución dada de cargas puntuales.

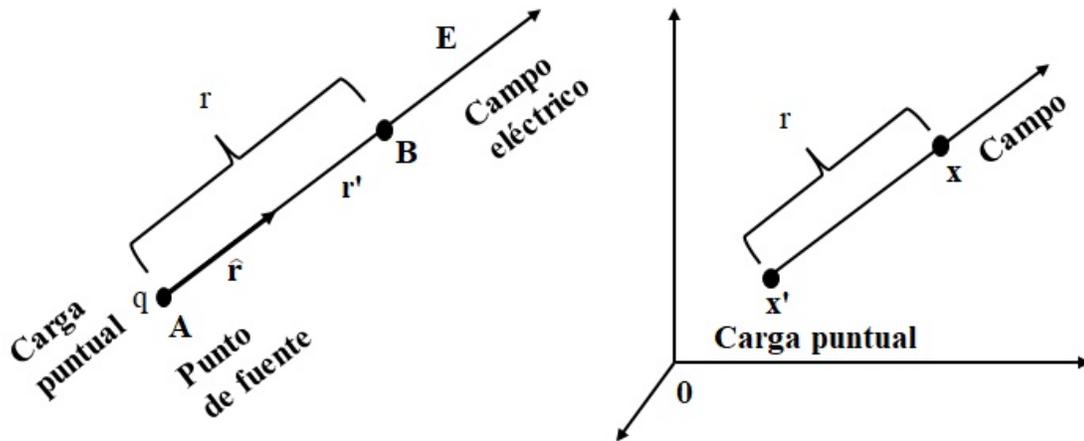


Figura 2.6: Representación gráfica del cuerpo  $\Omega$ , idealizado en una fuente de carga puntual  $q$  y sus vectores de posición.

Si las cargas fuente están distribuidas de manera continua, se puede combinar (2.13) y los resultados obtenidos en (2.9), (2.11) y (2.12) para obtener las expresiones correspondientes para  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}') dV'}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{D'} \frac{\sigma(\mathbf{x}') dA'}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{x}') dS'}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.19)$$

Con todo lo anterior, la definición básica del campo eléctrico se deduce de la ecuación (2.13). Si se hace uso de la siguiente ecuación:

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.20)$$

para reemplazar  $\frac{\hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2}$  por

$$-\nabla \left( \frac{1}{r_i} \right) \quad (2.21)$$

y se usa la linealidad del gradiente  $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$  para escribir la suma de las derivadas como la derivada de la suma, se encuentra que (2.16) queda de la siguiente forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\sum_i q_i \nabla \left( \frac{1}{r_i} \right) = -\nabla \sum_i \left( \frac{q_i}{r_i} \right) \quad (2.22)$$

donde, como siempre,  $r_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ . Por lo tanto, se puede ver que si se define

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \quad (2.23)$$

se puede escribir

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi(\mathbf{x}) . \quad (2.24)$$

El campo escalar recibe el nombre de potencial escalar o potencial electrostático.

De manera que, retomando la ecuación (2.1) tenemos que

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 . \quad (2.25)$$

Dado que el rotacional del campo electrostático es igual a cero en todos los puntos, de acuerdo con (2.22), por medio del Teorema de Stokes (*Véase Apéndice C*) se encuentra que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 , \quad (2.26)$$

donde  $C$  es una trayectoria arbitraria cerrada. Este resultado demuestra en forma explícita que el campo electrostático es un ejemplo de lo que se conoce como campo conservativo, demostrando de esta manera la ecuación (2.1).

En resumen, se ha encontrado que el campo electrostático vectorial se puede escribir como el gradiente negativo del potencial escalar, y que (2.23) viene a ser un método para calcular  $\phi$  en cualquier punto de campo que se desee una vez dados los valores y localizaciones de las distribuciones de cargas puntuales fuente [4].

Dado que  $\phi$  es una cantidad escalar, resulta generalmente más fácil proceder indirectamente evaluando la suma (2.23) y después encontrando  $\mathbf{E}$  por derivación de (2.24), en lugar del procedimiento directo de evaluar la suma vectorial (2.16); ésta es una de las razones por las que  $\phi$  es de gran interés práctico.

Si las cargas fuente poseen una distribución continua, se puede proceder utilizando (2.8) y (2.10) para escribir (2.23) en forma de integral; los resultados son

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')dV'}{r}, \quad (2.27)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{D'} \frac{\sigma(\mathbf{x}')dA'}{r}, \quad (2.28)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{x}')dS'}{r}, \quad (2.29)$$

donde las integrales se toman sobre todos los volúmenes, superficies o líneas que contienen las cargas fuente. De hecho, sobre todo el espacio, ya que las densidades de carga respectivas desaparecen en las regiones donde no hay carga.

Supongamos ahora que se tiene una cantidad de carga distribuida continuamente en un cuerpo  $\Omega$ , es decir, consideramos una distribución  $\mu$  con función de densidad  $\rho$  que es al menos continua en  $\Omega$  y tal que para todo subconjunto  $B \subset \Omega$ , la carga en  $B$  es dada por  $\int_B \rho(\mathbf{x})dx$ . Estamos interesados en el campo eléctrico generado por  $\Omega$ . Luego dividimos  $\Omega$  en partes denotadas por  $B_i, i = 1 \dots N$ , y en cada  $B_i$  elegimos un punto  $\mathbf{x}_i$ . La carga en  $B_i$  es aproximadamente igual  $\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i$ , donde  $\Delta V_i$  es el volumen de  $B_i$ . Por lo tanto, sustituimos la carga en  $B_i$  con una carga puntual  $\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i$  ubicada en  $\mathbf{x}_i$ . El campo eléctrico debido a este sistema de cargas puntuales es

$$\mathbf{E}_N(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (2.30)$$

Haciendo  $N \rightarrow +\infty$  obtenemos, para  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \Omega$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y})dV \quad (2.31)$$

que tiene un potencial igual a

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dV \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \Omega. \quad (2.32)$$

## 2.1. Potencial de una medida

Entre las actividades características de la ciencia destaca la observación de magnitudes, es decir, de las propiedades físicas susceptibles de ser medibles, y su medición.

En esta sección introducimos la noción de potencial asociado a una medida. Al hacerlo, mantenemos siempre los campos de fuerza newtonianos como caso de referencia, por lo que la definición general tendrá algunas similitudes. Además nos referimos sin distinción a una medida como una distribución y viceversa, porque pensamos que la distribución da una visión más intuitiva en el caso físico.

Para entender esto, definiremos que en matemáticas una medida es una función que asigna un número real no negativo  $[0, +\infty)$  a ciertos subconjuntos de un conjunto  $X$ . Este número puede ser interpretado como una cierta medida del tamaño de dicho subconjunto. En este sentido, la medida es una generalización de los conceptos de "longitud", "área", "volumen", "probabilidad" ó "carga". La generalización se extiende tanto a mayores dimensiones (en el sentido de "hipervolumenes") como a conceptos más abstractos. Lo mencionado anteriormente, se formaliza con lo siguiente

**Definición 2.1.1.** Por una medida, en un espacio medible  $(\Omega, A)$  con  $A$  álgebra ó anillo, entonces entenderemos una función no negativa [15]

$$\mu : A \rightarrow [0, \infty),$$

que satisface:

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$ .

(b) Es numerablemente aditiva, es decir, si dados  $A_1, \dots, A_2, \dots \in A$  disjuntos, es decir, tales que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$  y cuya unión esté en  $A$  (esto es automático si  $A$  es  $\sigma$ -álgebra), entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Si la condición (b) sólo es válida para colecciones finitas de conjuntos disjuntos,  $A_1, \dots, A_n$ , diremos que la medida es aditiva.

Diremos que una medida  $\mu$  es  $\sigma$ -finita si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos  $A_n \in A$ , tal que  $\cup A_n = \Omega$  y cada  $\mu(A_n) < \infty$ . Llamaremos probabilidad a toda medida verificando  $\mu(\Omega) = 1$ .

Las ecuaciones (2.23) y (2.32) para la función potencial  $\phi$  sugieren la siguiente generalización. Considere una medida de Borel que sea positiva  $\mu$  (Véase Apéndice D) definida en  $\mathbf{R}^3$  con masa total finita, es decir

$$\int_{\mathbf{R}^3} d\mu(\mathbf{y}) < \infty. \quad (2.33)$$

**Definición 2.1.2.** El potencial de  $\mu$  es la función  $U^\mu$  definida por

$$U^\mu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{d\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (2.34)$$

Consideremos el hecho de que el potencial  $U^\mu$  está definido para toda  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ , por lo que puede asumir valores infinitos para alguna  $\mathbf{x}$ . Consideramos una medida  $\mu$  con soporte compacto en  $\Omega$ , porque queremos una distribución de carga sobre el cuerpo conductor. Por lo tanto,  $U^\mu$  se define para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \Omega$ .

A partir de esta definición podemos observar que

$$U^\mu \in C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \Omega) \text{ y satisface } \Delta U^\mu = 0 \text{ en } \mathbf{R}^3 \setminus \Omega.$$

Ahora damos un resultado sobre los potenciales de distribución superficial en  $\mathbf{R}^3$  que será crucial en la siguiente sección.

Sea  $\Sigma$  una región acotada por una superficie suave en  $\mathbf{R}^3$ , y considere un punto  $\mathbf{x}_0$  de  $\Sigma$ . Denote con  $\mathbf{v}^+$  y  $\mathbf{v}^-$  los dos vectores normales que son perpendiculares a  $\Sigma$  en  $\mathbf{x}_0$ , saliendo y entrando desde  $\Sigma$  respectivamente, como se aprecia en la figura 2.7. Entonces denotamos con  $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^+$  la derivada direccional en la dirección de  $\mathbf{v}^+$  y  $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^-$  la derivada direccional en la dirección de  $\mathbf{v}^-$ .

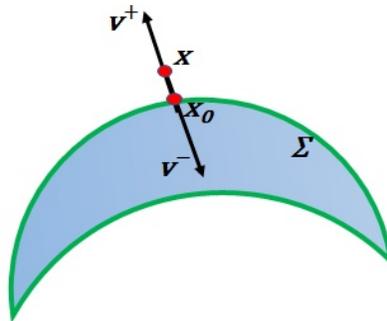


Figura 2.7: Representación gráfica de los dos vectores normales  $\mathbf{v}^+$  y  $\mathbf{v}^-$ .

Para una función  $F$  definida en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ . Escribimos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)^+(\mathbf{x}_0) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\partial F}{\partial n}(\mathbf{x}) \quad (2.35)$$

como  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  a lo largo de  $\mathbf{v}^+$ . De la misma manera definimos  $\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)^-(\mathbf{x}_0)$ . Recordemos que si  $F$  es suave en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ , entonces

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)^+(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)^-(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial F}{\partial n}(\mathbf{x}_0). \quad (2.36)$$

Consideremos ahora una función suave  $\rho$  definida en  $\Sigma$  y recordamos la función de su potencial asociado

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\sigma_y. \quad (2.37)$$

Con lo anterior, ahora podemos enunciar ahora la siguiente

**Proposición 2.1.3.** Sea una región acotada  $\Sigma$  en una superficie suave, y un punto  $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$ . Para  $\rho$  y  $U$  definidos como arriba. Fijamos el vector normal exterior  $\mathbf{v}^+$  en  $\Sigma$  y en  $\mathbf{x}_0$ . Entonces,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^+(\mathbf{x}_0) - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^-(\mathbf{x}_0) = -4\pi\rho(\mathbf{x}_0). \quad (2.38)$$

El lector puede encontrar la demostración en [14]. Esta relación es importante porque nos permite determinar la densidad  $\rho$  conociendo únicamente las derivadas normales del potencial  $U$ .

## 2.2. Capacidad electrostática

Ahora tenemos todas las herramientas físicas y matemáticas para introducir la noción de capacidad electrostática de un cuerpo. Entonces proponemos un experimento ideal.

Ciertos objetos materiales tienen la propiedad de que las cargas eléctricas se mueven libremente bajo la influencia de un campo eléctrico. Tales objetos se llaman conductores.

Consideremos un cuerpo conductor  $B_1$  en  $\mathbf{R}^3$ , con frontera  $S_1$ , que está rodeado por una superficie conductora  $S_2$ , que está conectada a tierra. Entre  $B_1$  y  $S_2$  hay un vacío. Inicialmente el sistema no está cargado (se debe considerar que  $S_2$  está sin carga, contiene cantidades iguales de cargas positivas y negativas). Si colocamos una cantidad de carga igual a  $q$  en  $B_1$ , entonces se crea un campo eléctrico que obliga a las cargas en  $S_2$  a moverse. Estas cargas se mueven hasta que se han redistribuido para producir el equilibrio, es decir, que la fuerza neta sobre cada carga sea igual a 0, de acuerdo con una distribución  $\mu$  que se denomina distribución de equilibrio.

Este sistema, en equilibrio, genera un campo eléctrico  $\mathbf{E}^\mu$ , con potencial  $U^\mu$ . Se observa que  $\mathbf{E}^\mu = -\nabla\phi = 0$  dentro de  $B_1$ ,  $\phi$  es constante en  $B_1$  y que existen densidades superficiales de

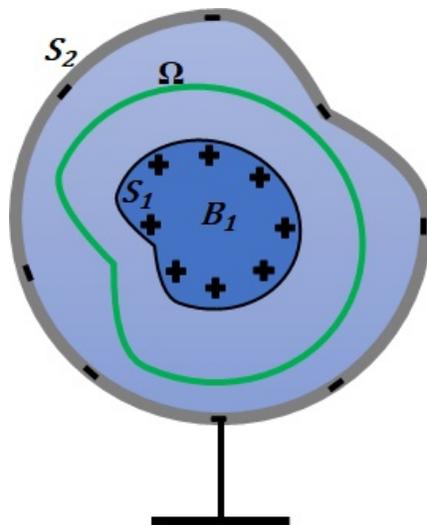


Figura 2.8: Representación gráfica del experimento ideal.

carga  $\rho_1$  en  $S_1$  y  $\rho_2$  en  $S_2$ . Además, como veremos más adelante, el Teorema 2.3.5 establece que el potencial  $U^\mu$  correspondiente a la distribución de equilibrio es constante en  $B_1$ . Por tanto, por continuidad  $U^\mu$  es constante en  $S_1$ .

Entonces existe una constante  $\phi$  tal que  $U^\mu = \phi$  en  $B_1$ , y el valor de esta constante depende de la carga  $q$ . La siguiente proposición nos da la relación entre estas dos cantidades.

**Proposición 2.2.1.** *La constante  $\phi$  es proporcional a la carga  $q$ .*

**Demostración.** Considere alguna otra carga  $q'$  distribuida en  $B_1$ . Supongamos que esta carga ya está distribuida para establecer el equilibrio. Denotamos con  $U'$  el potencial correspondiente y con  $\phi'$  el valor de  $U'$  en  $S_1$ . Sea  $\Omega$  la región entre  $S_1$  y  $S_2$ . Entonces  $\frac{\phi'}{\phi}U$  y  $U'$  son dos funciones armónicas en  $\Omega$ , continuas en  $\Omega$ , iguales a 0 en  $S_2$ , porque está conectado a tierra, e iguales a  $\phi'$  en  $S_1$ . Por tanto, por unicidad de solución tenemos que

$$U' = \frac{\phi'}{\phi}U \text{ en } \Omega. \quad (2.39)$$

Fije un punto  $\mathbf{x} \in S_1$  y tome la normal exterior a  $S_1$  en  $\mathbf{x}$  que apunta a  $\Omega$ . Como  $U$  es constante en  $B_1$ , tenemos  $\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^- = 0$  en  $S_1$ . De la proposición 2.1.3 se sigue que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^+ (\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^- (\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^+ (\mathbf{x}) = -4\pi\rho_1(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in S_1, \quad (2.40)$$

Podemos repetir el mismo argumento para  $U'$ , entonces tenemos

$$-4\pi\rho'_1 = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)^+ = \frac{\phi'}{\phi} \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^+ = -4\pi\frac{\phi'}{\phi}\rho_1 \quad \text{en } S_1, \quad (2.41)$$

deducimos que  $\rho'_1 = \frac{\phi'}{\phi} \rho_1$ . De donde

$$q' = \int_{S_1} \rho'_1 d\sigma_1 = \frac{\phi'}{\phi} \int_{S_1} \rho_1 d\sigma_1 = \frac{\phi'}{\phi} q. \quad (2.42)$$

Por lo tanto  $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{q'}{q}$ .

Se deduce que  $\frac{q}{\phi}$  es una constante  $C$  que depende sólo de  $B_1$  y  $S_2$ , entonces podemos escribir

$$q = C\phi, \quad (2.43)$$

donde  $C$  es la capacidad del capacitor formado por  $S_1$  y  $S_2$ . Como establecimos  $U = 0$  en  $S_2$ , y en  $S_1$  es igual a  $\phi$ , entonces  $\phi$  es la diferencia de potencial entre  $S_1$  y  $S_2$ . En particular, notamos que si  $\phi = 1$ , la capacidad del capacitor es igual a la cantidad de carga  $q$  almacenada en el capacitor.

Ahora fijamos  $S_1$  y  $q$ , hacemos que  $S_2$  se mueva al infinito. Obtenemos, para cada elección de  $S_2$ , un potencial  $U_{S_2}$ , tal que:

1.  $U_{S_2}$  es armónico entre  $S_1$  y  $S_2$ .
2.  $U_{S_2}$  es constante en  $S_1$ .
3.  $U_{S_2} = 0$  en  $S_2$ .

Esperamos que cuando  $S_2 \rightarrow +\infty$ ,  $U_{S_2}$  converja a una función  $U_\infty$  que satisface estas propiedades:

1. (a)  $U_\infty$  es armónico en  $\mathbf{R}^3$  fuera de  $S_1$ .
2. (b)  $U_\infty = 0$  si  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ .
3. (c)  $U_\infty$  es constante en  $S_1$ .

También esperamos que  $U_\infty$  resulte ser el potencial de la distribución de equilibrio  $\mu_\infty$  de la carga  $q$  en  $S_1$ . De hecho, se muestra en [6] que, para cada carga en  $S_1$ , existe una medida única a la que corresponde un potencial que satisface las propiedades 1. (a), 2. (a), 3. (a). Por lo tanto tenemos lo siguiente

**Definición 2.2.2.** La función  $U \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$  solución del problema externo de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & , \quad \mathbf{R}^N \setminus B_1, \\ U = 1 & , \quad S_1, \\ U \rightarrow 0 & , \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.44)$$

se denomina potencial capacitivo de  $B_1$ .

Usando una caracterización variacional [1], podemos decir que el potencial capacitivo  $U$  es la función que minimiza el funcional de energía  $J(v) = \int_{\mathbf{R}^N \setminus B_1} |\nabla v|^2 dx$  entre todas las funciones  $v \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$  tal que  $v = 1$  en  $B_1$ .

Como antes, a cada carga  $q$  en  $B_1$  le corresponde un potencial de equilibrio  $U_\infty$  tomando una constante  $\phi_\infty$  en  $S_1$ . Como antes, vemos que para los capacitores,  $U_\infty$  es proporcional a  $q$ , es decir, existe una constante  $C_\infty$  tal que

$$q = C_\infty \phi_\infty. \quad (2.45)$$

De lo anterior, se deduce que

$$C_\infty = \frac{q}{\phi_\infty}. \quad (2.46)$$

Por lo tanto  $C_\infty$  es igual a la cantidad de carga en  $B_1$  que, si se distribuye para establecer el equilibrio, produce una diferencia de potencial de 1 entre  $S_1$  y infinito (la tierra). Definimos  $C_\infty$  como *la capacidad del cuerpo  $B_1$* .

En otras palabras, podemos decir que la capacidad de  $B_1$  es igual a la cantidad de carga que, cuando se distribuye en  $B_1$  para producir equilibrio, genera un potencial igual a 1 en  $B_1$ . Esto es, si denotamos con  $\mu_0$  la distribución de equilibrio en  $B_1$  de modo que el potencial correspondiente en  $B_1$  es  $U^{\mu_0} = 1$ , entonces

$$\text{cap}(B_1) = q = \int_{B_1} d\mu_0 = \mu_0(B_1). \quad (2.47)$$

Así, si  $\mu$  es una medida genérica en  $B_1$  tal que  $U^\mu \leq 1$  en  $B_1$ , entonces por simetría

$$\mu(B_1) = \int_{B_1} U^{\mu_0} d\mu = \int_{B_1} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{d\mu_0(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mu = \int_{B_1} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{d\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mu_0 = \int_{B_1} U^\mu d\mu_0 \leq \mu_0(B_1). \quad (2.48)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\text{cap}(B_1) = \mu_0(B_1) = \sup_H \mu(B_1), \quad (2.49)$$

donde  $H = \{ \mu \text{ medida} \mid U^\mu \leq 1 \text{ en } B_1 \}$ . Entonces tenemos una caracterización de la capacidad de un cuerpo que no requiere que sepamos la existencia de una distribución de equilibrio.

Tenemos que dar otro paso antes de vincular esta noción de capacidad a la capacidad variacional.

## 2.3. Energía de una medida

**Definición 2.3.1.** Para cada medida de Borel  $\mu$  en  $\mathbf{R}^3$ , definimos la energía  $I(\mu)$  de la medida  $\mu$  como

$$I(\mu) = \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{d\mu(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (2.50)$$

Por la definición de potencial asociado a una medida, obtenemos de manera directa lo siguiente

**Proposición 2.3.2.** Sea  $\mu$  una medida de  $\mathbf{R}^N$  para  $N \geq 3$ , entonces

$$I(\mu) = \int_{\mathbf{R}^N} U^\mu(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x}). \quad (2.51)$$

Con esta proposición podemos caracterizar la distribución de equilibrio. De hecho, como corresponde a una redistribución de carga que establece el equilibrio, esperamos que la distribución de equilibrio minimice la energía.

En general, consideremos una medida sobre un conjunto compacto  $B$  con masa total igual a la carga total distribuida sobre  $B$ . De ahora en adelante, solo por simplicidad, consideraremos medidas de probabilidad sobre  $B$  y denotaremos este conjunto de medidas como  $P(B)$ .

Necesitamos un lema auxiliar, antes del teorema principal. El lector puede encontrar la demostración detallada en [6]. También damos una definición alterna a la convergencia débil, dado que el formalismo para su definición no es motivo de este trabajo.

**Definición 2.3.3.** Dada una sucesión  $\{x_n\}$  en un espacio lineal normado  $X$ , decimos que **converge débilmente** a  $x$  si  $\{F(x_n)\}$  converge a  $F(x)$  para todo funcional lineal  $F$  definido en  $X$ .

**Lema 2.3.4.** Consideremos una sucesión  $(\mu_n)$  de medidas de probabilidad de un conjunto compacto  $B \in \mathbf{R}^N$  que converge débilmente a  $\mu$ . Entonces la sucesión  $(\mu_n \times \mu_n)$  de la medida del producto en  $B \times B$  converge débilmente a  $\mu \times \mu$ , es decir, para todo  $F \in C(B \times B)$

$$\int Fd(\mu_n \times \mu_n) \rightarrow \int Fd(\mu \times \mu) \quad \text{como } n \rightarrow \infty. \quad (2.52)$$

**Teorema 2.3.5.** Sea  $B$  un conjunto compacto en  $\mathbf{R}^N$ . Entre todas las medidas de probabilidad

en  $B$  hay una que minimiza la energía, es decir

$$I(\bar{\mu}) \leq I(\mu) \quad \forall \mu \in P(B).$$

**Demostración.** Sea  $c = \inf_{\mu \in P(B)} I(\mu)$ . Podemos elegir una sucesión minimizante  $(\mu_n) \in P(B)$  tal que  $I(\mu_n) \rightarrow c$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Existe una subsucesión, nuevamente denotada  $(\mu_n)$  que converge débilmente a  $\bar{\mu} \in P(B)$ . Queremos mostrar que  $c = I(\bar{\mu})$ .

Por el Lema 2.3.4. tenemos que

$$\int \int_{B \times B} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_n(\mathbf{x}) d\mu_n(\mathbf{y}) \rightarrow \int \int_{B \times B} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\bar{\mu}(\mathbf{x}) d\bar{\mu}(\mathbf{y}) \quad (2.53)$$

para todo  $K \in C(B \times B)$ . Sin embargo, en nuestro caso  $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \notin C(B \times B)$ .

Entonces se considera

$$K_j(\mathbf{t}) = \begin{cases} \frac{1}{t} & , \quad t > \frac{1}{j}, \\ j & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{j}, \end{cases} \quad (2.54)$$

$K_j$  es continuo, entonces  $K_j(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \in C(B \times B)$ . Además, si establecemos para cada  $\mu$

$$I_j(\mu) = \int \int_{B \times B} K_j(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mu(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{y}), \quad (2.55)$$

tenemos que  $I_j(\mu_n) \rightarrow I_j(\bar{\mu})$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $j$  es fijo. También  $I_j(\mu) \leq I(\mu)$  para todo  $\mu$  por definición de  $K_j$ , entonces

$$I_j(\bar{\mu}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_j(\mu_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n) = c \quad (2.56)$$

o

$$\int \int_{B \times B} K_j(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\bar{\mu}(\mathbf{x}) d\bar{\mu}(\mathbf{y}) \leq c. \quad (2.57)$$

Cuando  $j \rightarrow \infty$ , tenemos que  $K_j(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  aumenta a  $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ . Por lo tanto deducimos, por el teorema de convergencia monótona de Lebesgue, que

$$I(\bar{\mu}) = \int \int_{B \times B} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\bar{\mu}(\mathbf{x}) d\bar{\mu}(\mathbf{y}) \leq c. \quad (2.58)$$

Pero  $c = \inf I(\mu)$ , por lo tanto  $I(\bar{\mu}) = c$ .

Una propiedad importante de la distribución de equilibrio se establece en el siguiente Teorema, cuya prueba es bastante complicada y nos referimos a [6] para obtener todos los detalles.

**Teorema 2.3.6.** Sea  $B$  un conjunto compacto de  $\mathbf{R}^N$ . Consideremos una medida de probabilidad  $\bar{\mu}$  que minimiza la energía y supongamos que  $I(\bar{\mu}) = c$ .

Entonces  $U^{\bar{\mu}} = c$  en  $B$  excepto para un subconjunto de capacidad 0. Además  $U^{\bar{\mu}} \leq c$  en  $\mathbf{R}^N$ .

Para un caso especial, obtenemos una expresión particular de la energía lo cual nos lleva a relacionar la capacidad electrostática con la capacidad variacional.

**Teorema 2.3.7.** Sea  $\mu = \rho dx$ , donde  $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$  y establecer  $U = U^\mu$ , entonces

$$I(\mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla U|^2 dx = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (2.59)$$

**Demostración.** Tomamos  $|x| = r$  lo suficientemente grande como para que  $U = O\left(\frac{1}{r}\right)$  y  $\frac{\partial U}{\partial r} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ .

Fijamos  $y \in \text{supp}(\mu)$  y recordamos que  $U(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial r}(\mathbf{x}) = \int \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) d\mu(\mathbf{y})$ . Claramente  $U = O\left(\frac{1}{r}\right)$ . Además

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.60)$$

donde  $|A_i| \leq 1$ , para toda  $i$ . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \leq \frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}. \quad (2.61)$$

Por eso

$$\left| \frac{\partial U}{\partial r}(\mathbf{x}) \right| \leq \int \frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} d\mu(\mathbf{y}). \quad (2.62)$$

Consideremos  $m = \max_{\mathbf{y} \in \text{supp}(\mu)} |\mathbf{y}|$ . Entonces  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}| - m$  y para  $r$  grande

$$\left| \frac{\partial U}{\partial r}(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{m}|^2} \|\mu\| \leq \frac{\|\mu\|}{r^2} \quad (2.63)$$

lo que implica  $\frac{\partial U}{\partial r} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ .

Fijamos  $R$  lo suficientemente grande, aplicamos el teorema de la divergencia a la región  $|\mathbf{x}| < R$  y obtenemos

$$\int_{|x|=R} U \frac{\partial U}{\partial r} d\sigma = \int_{|x|<R} \nabla U \cdot \nabla U dx + \int_{|x|<R} U \Delta U dx. \quad (2.64)$$

Recordemos que  $-\Delta U = 4\pi\rho_f$  y haciendo  $R \rightarrow \infty$  en (2.64), tenemos del lado derecho

$$\int_{R^3} |\nabla U|^2 dx - 4\pi \int_{R^3} U \cdot \rho dx. \quad (2.65)$$

Por otra parte, usando lo anterior, hacemos una aproximación del lado izquierdo de (2.64)

$$\left| \int_{|x|<R} U \frac{\partial U}{\partial r} d\sigma \right| = O\left(\frac{1}{R}\right) O\left(\frac{1}{R^2}\right) 4\pi R^2 \rightarrow 0. \quad (2.66)$$

Por lo tanto

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|<R} |\nabla U|^2 dx - 4\pi I(\mu). \quad (2.67)$$

○

Consideremos como antes la distribución de equilibrio  $\mu_0$  tal que  $U^{\mu_0} = 1$  en  $B$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que tiene densidad en  $C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$  entonces podemos decir

$$\mu_0(B) = I(\mu_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3 \setminus B} |\nabla U^{\mu_0}|^2 dx. \quad (2.68)$$

Además, sabemos que la distribución de equilibrio es un minimizador de la energía entre todas las medidas  $\mu$  en  $B$  con la misma masa total de  $\mu_0$ . Por eso

$$I(\mu_0) = \frac{1}{4\pi} \inf \left\{ \int_{R^3} |\nabla U^\mu|^2 dx \right\}. \quad (2.69)$$

Como estamos tomando el ínfimo y no estamos interesados en integrales que no convergen, consideramos solo potenciales que están en  $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ .

Entonces como sabemos que el potencial capacitivo es igual a 1 en  $B$ , es lo mismo que tomar el ínfimo sobre  $G = \{U \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3) \mid U \geq 1 \text{ en } B\}$  en lugar del todo  $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ . Así podemos escribir

$$cap(B) = \frac{1}{4\pi} \inf \left\{ \int_{R^3} |\nabla U^\mu|^2 dx \mid U^\mu \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3) \text{ y } U^\mu \geq 1 \text{ en } B \right\} \quad (2.70)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^3 \setminus B} |\nabla U^\mu|^2 dx \mid U^\mu \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3) \text{ y } U^\mu = 1 \text{ en } B \right\}. \quad (2.71)$$

Por lo tanto mostramos que la capacidad electrostática es una capacidad en el sentido del Capítulo 1. Como consecuencia directa de esto, tenemos que la capacidad de un cuerpo es igual a la capacidad de su límite, como sabemos por la teoría de la Física clásica.

# Capítulo 3

## Simetrización y el problema de la capacidad

Una técnica geométrica que combinada con las propiedades variacionales ha permitido resolver problemas isoperimétricos en diversas situaciones es la *Simetrización*. En este capítulo tratamos la noción de *Simetrización de Schwartz*, la cual es una herramienta muy útil, ya que parte de una clase más amplia de técnicas que se denominan reordenamientos. Los matemáticos Pólya y Szegő, y sus seguidores demostraron muchos buenos teoremas isoperimétricos y desigualdades, por medio de reordenamientos.

Antes de comenzar, establecemos aquí algunas notaciones.

- $C_0^+(\mathbf{R}^N) = \{u \in C_0(\mathbf{R}^N) \mid \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \ u(\mathbf{x}) \geq 0\}$ .
- $L_+^p(\mathbf{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbf{R}^N) \mid u(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ c.t.p}\}$ .
- $m : M \rightarrow [0, \infty]$  es la medida de Lebesgue.

### 3.1. Simetrización de Schwartz

**Definición 3.1.1.** La *Simetrización de Schwartz* de un conjunto medible  $A$  de  $\mathbf{R}^N$  es

$$A^* = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \mid |\mathbf{x}|^N V_N < m(A) \right\}$$

donde  $V_N$  es el volumen de la bola unitaria en  $\mathbf{R}^N$ .

Por lo tanto, la *Simetrización de Schwartz*  $A^*$  de  $A$  es la bola  $B_0(\mathbf{R})$  centrada en el origen con radio  $R^N V_N = m(A)$ . De modo que  $A^*$  es una bola con el mismo volumen de  $A$ .

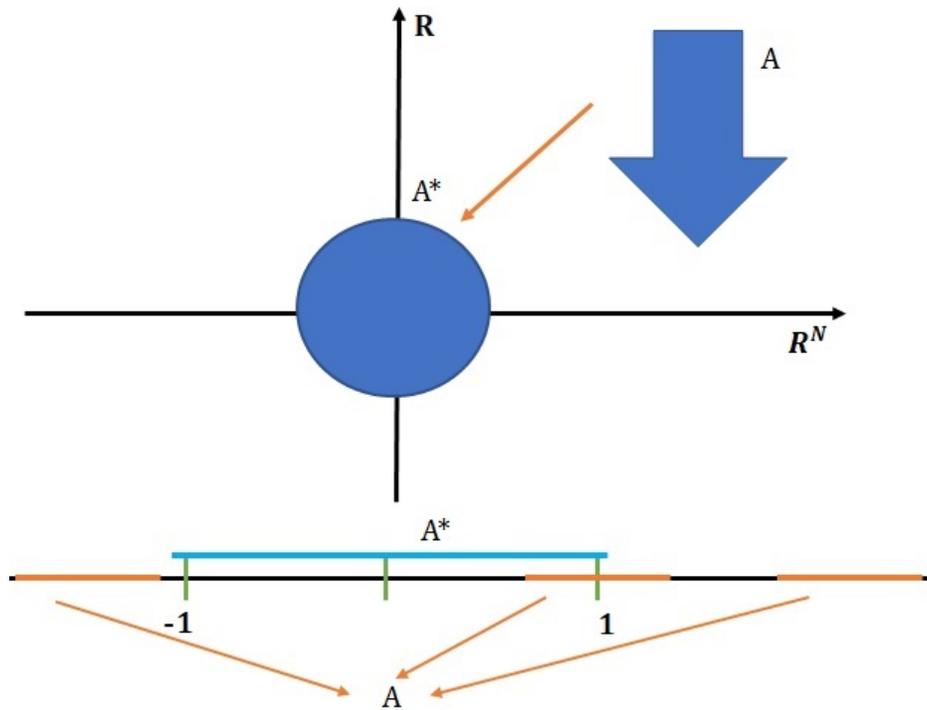


Figura 3.1: Representación gráfica donde la *Simetrización de Schwartz* de  $A^*$  es una bola centrada en el origen con el mismo volumen de  $A$ .

**Definición 3.1.2.** Decimos que una función  $u : \mathbf{R}^N \rightarrow [0, \infty)$  es *admisibile* de medida finita, si es una función medible tal que para cada  $t > 0$  se tiene

$$m_u(t) := \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : u(\mathbf{x}) > t \} < \infty .$$

La *Simetrización de Schwartz* de una función *admisibile*  $u$  en  $\mathbf{R}^N$  es

$$u^*(\mathbf{x}) = \sup \{ t \in \mathbf{R}^N \mid \mathbf{x} \in \{u(\mathbf{x}) > t\}^* \} .$$

**Proposición 3.1.3.** Estas propiedades básicas se derivan directamente de la definición.

1.  $u^*(\mathbf{x})$  es no negativa y radialmente simétrica, es decir,  $u^*(\mathbf{x}) = u^*(|\mathbf{x}|)$ .
2.  $u^*(\mathbf{x})$  es radialmente decreciente, es decir, si  $|\mathbf{x}| \leq |\mathbf{y}|$  entonces  $u^*(\mathbf{x}) \geq u^*(\mathbf{y})$ .
3.  $\chi_{A^*} = \chi_A^*$ .
4. Si  $u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x})$  entonces  $u^*(\mathbf{x}) \leq v^*(\mathbf{x})$ .
5.  $m(A^* \setminus B^*) \leq m(A \setminus B)$ .

Ahora enunciamos y demostramos un lema que será útil para el siguiente teorema.

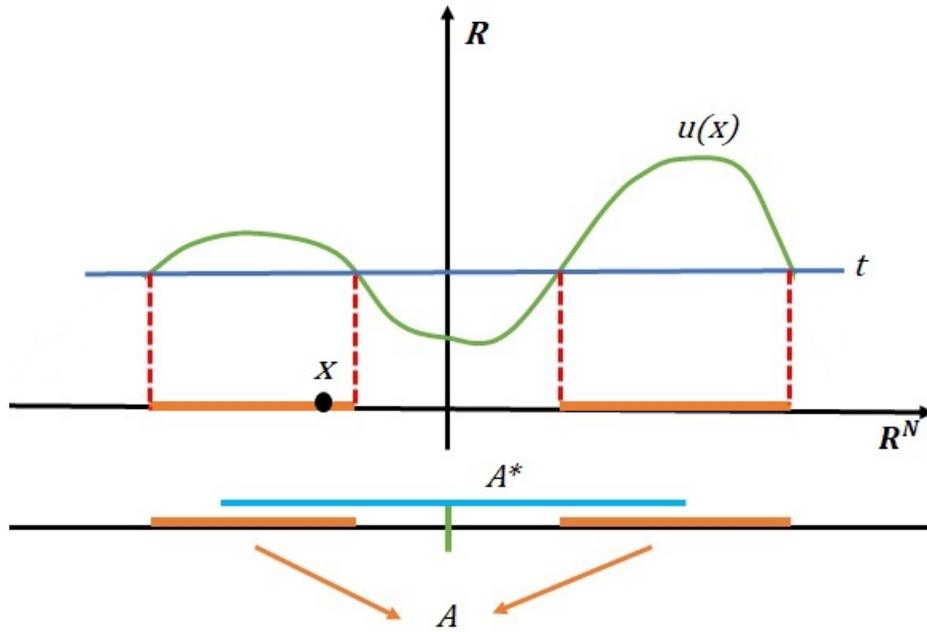


Figura 3.2: Representación gráfica de una función *admisible* de medida finita con  $u(\mathbf{x}) > t$ , donde el punto  $\mathbf{x}$  debe estar contenido en la simetrización, ya que  $\mathbf{x} \in \{u(\mathbf{x}) > t\}^*$ .

**Lema 3.1.4.** Sea  $\{A_n\}$  una sucesión creciente de conjuntos medibles en  $\mathbf{R}^N$ , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^* = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^*.$$

**Demostración.** Por definición tenemos  $A_n^* = B_0(r_n)$  y  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^* = B_0(r)$ , donde  $r_n^N V_N = m(A_n)$  y  $r^N V_N = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ . Una propiedad de la medida de Lebesgue asegura que para un sucesión creciente  $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$ , eso significa que  $r_n \rightarrow r$ . Por lo tanto tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^* = B_0(r) = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^*.$$

○

**Teorema 3.1.5.** Sea  $u$  una función *admisible* y el conjunto  $m_u(t) = m(\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \mid u(\mathbf{x}) > t\})$ . Entonces  $\{u(\mathbf{x}) > t\}^* = \{u^*(\mathbf{x}) > t\}$  para cada  $t > 0$ , y  $m_u(t) = m_{u^*}(t)$ .

**Demostración.** Sea  $t > 0$ . Usando el Lema 3.1.4. afirmamos

$$\{u > t\}^* = \left( \bigcup_{s>t} \{u > s\} \right)^* = \bigcup_{s>t} \{u > s\}^* \subset \{u^* > t\} \subset \{u > t\}^*.$$

Para la primera inclusión, consideremos  $\mathbf{x} \in \bigcup_{s>t} \{u > s\}^*$ . Por lo tanto, existe  $p > t$  tal que  $\mathbf{x} \in \{u > p\}^*$ . También sabemos  $u^*(\mathbf{x}) = \sup\{y \mid \mathbf{x} \in \{u(\mathbf{x}) > y\}^*\}$ , entonces  $u^*(\mathbf{x}) \geq p > t$ , entonces  $\mathbf{x} \in \{u^*(\mathbf{x}) > t\}$ .

Para el segundo tomamos  $x \in \{u^*(\mathbf{x}) > t\}$ . Esto implica

$$\sup \{ y \mid \mathbf{x} \in \{u(\mathbf{x}) > y\}^* \} > t.$$

En particular  $x \in \{u(\mathbf{x}) > t\}^*$ . Entonces

$$m_{u^*}(t) = m(\{u^* > t\}) = m(\{u > t\}^*) = m(B_0(r)) = m(\{u > t\}) = m_u(t)$$

ya que el radio  $r$  es tal que  $r^N V^N = m(\{u > t\})$  por definición. ○

Entonces para cada  $t$ , podemos decir que  $\{u^*(\mathbf{x}) > t\}$  es una bola centrada en el origen con la misma medida que  $\{u > t\}$ . En particular, está abierto para cada  $t$ .

Entonces podemos decir que  $u$  y su reordenamiento decreciente simétrico  $u^*$  están uniformemente distribuidos.

## 3.2. El problema de la capacidad

Con todo lo anterior ya podremos describir el problema de la capacidad de una forma física y matemática más precisa. Partiremos de la conjetura de Poincaré que afirma: *entre todos los cuerpos homogéneos con volumen dado, la esfera tiene la capacidad electrostática mínima.*

Relacionamos la noción de capacidad electrostática con la variacional y para  $n \geq 3$  podemos escribir

$$Cap(\Omega) = \frac{1}{(n-2)(w_{n-1})} cap_2(\Omega), \quad (3.1)$$

donde  $w_{n-1}$  es el área de la superficie de la bola unitaria en  $\mathbf{R}^n$  y usaremos  $n$  en lugar de  $N$  para la dimensión del espacio.

Como sabemos que para cada cantidad de carga en  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  existe una única distribución de equilibrio a la que corresponde el potencial capacitivo en  $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ , podemos probar dicha conjetura.

## 3.3. La Prueba de Poincaré - Faber - Szegö

En esta sección damos una demostración basada en el trabajo de Szegö, [10], y Polya, [8], [9]. Hay dos resultados importantes sobre los cuales se basa esta prueba. El primero es acerca de la

fórmula de Co-área:

**Fórmula de Co-área.** Si  $u$  es continua de *Lipschitz* y  $f$  es integrable, entonces

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) |\nabla u(x)| dx = \int_0^\infty \left( \int_{\{|u(x)|=t\}} f(x) dS(x) \right) dt.$$

En una interpretación geométrica podemos decir que la distancia entre las superficies de nivel de  $u$  es inversamente proporcional a  $|\nabla u|$ .

Destacamos que, respecto a nuestro problema de capacidad,  $\Omega$  es suave y el potencial capacitivo  $u$  es constante dentro de  $\Omega$  y armónico afuera. Por lo tanto,  $u$  es continua de Lipschitz y se puede aplicar la fórmula de co-área. Otro resultado importante es una desigualdad geométrica conocida como:

**Teorema 3.3.1. (Desigualdad Isoperimétrica).** Sea  $\Omega$  un subconjunto acotado abierto de  $\mathbf{R}^n$  con frontera suave, entonces el área de la hipersuperficie  $A$  de  $\partial\Omega$  y el volumen  $V$  de  $\Omega$  están relacionados de la siguiente manera:

$$\left( \frac{A}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \geq \left( \frac{V}{\beta_n} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.2)$$

donde  $\omega_{n-1}$  y  $\beta_n$  son respectivamente el área superficial y el volumen de la bola unitaria en  $\mathbf{R}^n$ .

Recordando el hecho de que  $n\beta_n = \omega_{n-1}$ , tenemos que

$$\frac{A}{\omega_{n-1}} \geq \left( \frac{V}{\beta_n} \right)^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{V^{\frac{n-1}{n}}}{\beta_n^{\frac{n-1}{n}}} (\omega_{n-1}),$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{V^{\frac{n-1}{n}}}{\beta_n^{\frac{n-1}{n}}} (n\beta_n),$$

$$\Rightarrow A \geq \left( V^{\frac{n-1}{n}} \right) \frac{n\beta_n}{\beta_n \beta_n^{\frac{1}{n}}},$$

Por lo tanto, podemos reescribir la desigualdad anterior de la siguiente manera:

$$A \geq \left(V^{\frac{n-1}{n}}\right) \left(n\beta_n^{\frac{1}{n}}\right). \quad (3.3)$$

De lo anterior, nos fijamos en particular si  $(n = 3)$ , y utilizando las ecuaciones de área y volumen de una esfera, tenemos

$$A = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{A}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{3V}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Combinando  $r$  de ambas ecuaciones, se cumple la igualdad en el caso de una esfera

$$\left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Si continuamos, esta igualdad, se puede probar para el espacio

$$\left(\frac{A}{4\pi}\right) = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} (4\pi),$$

$$\Rightarrow \left(A = (3V)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} (4\pi)\right)^3,$$

$$\Rightarrow A^3 = (9V^2) \left(\frac{1}{16\pi^2}\right) (4\pi)^3,$$

$$\Rightarrow A^3 = \left(\frac{576V^2\pi^3}{16\pi^2}\right),$$

$$\Rightarrow A^3 = 36V^2\pi,$$

$$\Rightarrow A = (V^{\frac{2}{3}})(36\pi)^{\frac{1}{3}},$$

y nuevamente, la igualdad es conseguida por las esferas, y solo por ellas.

**Lema 3.3.2.** Si  $\Omega = B_R(0)$  podemos decir que  $\Omega^* = \Omega$  y se tiene que

$$Cap(\Omega^*) = \left( \frac{|\Omega^*|}{\beta_n} \right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Para el caso de la esfera suponemos que la solución es radialmente simétrica, por lo que el problema del Teorema 3.3.3. que se explica más adelante, se reduce a lo siguiente

$$\begin{cases} u''(\rho) + \frac{n-1}{\rho}u'(\rho) = 0 & , \quad \rho > R, \\ u = 1 & , \quad \rho = R, \\ u \rightarrow 0 & , \quad \rho \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde  $R$  es el radio de  $B_R(0)$  y  $\rho$  es la coordenada radial. La solución a esta ecuación es

$$u(\rho) = \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n-2}.$$

Ahora calculamos la capacidad de la esfera a través de  $cap_2$  usando (3.1), primero calculamos la  $cap_2$  mediante un cambio de variable radial

$$\begin{aligned} cap_2(B_R(0)) &= \int_{R^n} |\nabla u|^2 dx \\ &= n\beta_n \int_R^\infty |u'(\rho)|^2 \rho^{n-1} d\rho \\ &= n\beta_n R^{2n-4} (2-n)^2 \int_R^\infty \rho^{1-n} d\rho \\ &= n\beta_n R^{2n-4} (2-n)^2 \left( \frac{\rho^{2-n}}{2-n} \right)_R^\infty \\ &= n\beta_n (n-2) R^{n-2}, \end{aligned}$$

entonces

$$Cap(B_R(0)) = \frac{1}{(n-2)(\omega_{n-1})} cap_2(B_R(0))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-2)(\omega_{n-1})} n\beta_n(n-2)R^{n-2} \\
&= \frac{1}{(n-2)(\omega_{n-1})} \omega_{n-1}(n-2)R^{n-2} \\
&= R^{n-2}
\end{aligned}$$

y recordando que

$$R^n = \frac{|B_R(0)|}{\beta_n}$$

tenemos que

$$Cap(B_R(0)) = \left( \frac{|B_R(0)|}{\beta_n} \right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Si tomamos la simetrización de  $\Omega$  podemos considerar  $\Omega^* = B_R(0)$  y podemos decir que

$$Cap(\Omega^*) = \left( \frac{|\Omega^*|}{\beta_n} \right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Finalmente podemos enunciar y probar la conjetura.

**Teorema 3.3.3. (Poincaré - Faber - Szegő).** Sea  $\Omega$  un subconjunto acotado abierto con frontera suave, de  $\mathbf{R}^n$  para  $n \geq 3$ , entonces

$$Cap(\Omega) \geq \left( \frac{|\Omega|}{\beta_n} \right)^{\frac{n-2}{n}}$$

Además, la igualdad se cumple si y sólo si  $\Omega$  es una bola.

**Demostración.** Sea  $u$  la única función armónica que satisface el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & , \quad \mathbf{R}^n \setminus \Omega, \\ u(x) = 1 & , \quad \partial\Omega, \\ u(x) \rightarrow 0 & , \quad |x| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.5)$$

Por lo tanto,  $u$  es la función, tal que

$$\int_{R^n} |\nabla u|^2 dx = \inf \left\{ \int_{R^n} |\nabla v|^2 dx \mid v \in D_{\Omega}^{1,2}(\mathbf{R}^n) \right\},$$

donde

$$D_{\Omega}^{1,2}(\mathbf{R}^n) = \{u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^n) \mid \exists U \in O \text{ tal que } \Omega \subset U \text{ y } 1 \leq u \text{ c.t.p en } U\}.$$

Consideremos  $t \in [0, 1)$  y sea  $\Sigma_t = \{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x) = t\}$  los conjuntos de nivel de  $u$ . Por la fórmula de Co-área aplicada a  $|\nabla u|$ , tenemos

$$\int_{R^n} |\nabla u|^2 dx = \int_0^1 \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 \frac{1}{|\nabla u|} dA_t dt, \quad (3.6)$$

donde  $dA_t$  es la forma del área de la hipersuperficie.

Denotamos por  $|\Sigma_t|$  el área de  $\Sigma_t$  y tenemos por la desigualdad de *Cauchy - Schwarz*

$$|\Sigma_t|^2 = \left( \int_{\Sigma_t} dA_t \right)^2 = \left( \int_{\Sigma_t} \sqrt{|\nabla u|} \frac{1}{\sqrt{|\nabla u|}} dA_t \right)^2 \leq \left( \int_{\Sigma_t} |\nabla u| dA_t \right) \left( \int_{\Sigma_t} \frac{1}{|\nabla u|} dA_t \right). \quad (3.7)$$

Combinando (3.6) con (3.7) obtenemos

$$\int_{R^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_0^1 \frac{\left( \int_{\Sigma_t} \sqrt{|\nabla u|} \frac{1}{\sqrt{|\nabla u|}} dA_t \right)^2}{\int_{\Sigma_t} \frac{1}{|\nabla u|} dA_t} dt = \int_0^1 \frac{|\Sigma_t|^2}{\int_{\Sigma_t} \frac{1}{|\nabla u|} dA_t} dt. \quad (3.8)$$

Consideremos ahora la región acotada por  $\Sigma_t$  y denotamos con  $V(t)$  su volumen. De nuevo por la fórmula de Co-área tenemos

$$V(t) = |\Omega| + \int_0^t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{|\nabla u|} dA_t dt \quad (3.9)$$

y entonces

$$V'(t) = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{|\nabla u|} dA_t, \quad (3.10)$$

con lo que podemos escribir

$$\int_{R^n} |\nabla u|^2 dx \geq \int_0^1 \frac{|\Sigma_t|^2}{\int_{\Sigma_t} \frac{1}{|\nabla u|} dA_t} dt = \int_0^1 \frac{|\Sigma_t|^2}{V'(t)} dt. \quad (3.11)$$

Hasta este punto es necesario un recordatorio y análisis de las siguiente ecuaciones:

La siguiente ecuación (3.12) se obtiene de relacionar la noción de capacidad electrostática con la variacional, para  $n \geq 3$ .

$$Cap(\Omega) = \frac{1}{(n-2)(\omega_{n-1})} cap_2(\Omega) \Rightarrow cap_2(\Omega) = (n-2)(\omega_{n-1})(Cap(\Omega)), \quad (3.12)$$

La siguiente ecuación se toma de (3.7).

$$|\Sigma_t|^2 = \left( \int_{\Sigma_t} dA_t \right)^2 = A^2, \quad (3.13)$$

Y finalmente la ecuación (3.14) se obtiene de la desigualdad isoperimétrica, ecuación (3.3).

$$A \geq \left( V^{\frac{n-1}{n}} \right) \left( n\beta_n^{\frac{1}{n}} \right). \quad (3.14)$$

Uniendo la ecuación (3.13) y (3.14), tenemos

$$|\Sigma_t|^2 \geq \left( n\beta_n^{\frac{1}{n}} V(t)^{\frac{n-1}{n}} \right)^2,$$

$$\Rightarrow |\Sigma_t|^2 \geq n^2 \beta_n^{\frac{2}{n}} V(t)^{\frac{2(n-1)}{n}},$$

$$\Rightarrow |\Sigma_t|^2 \geq n^2 \beta_n^2 \beta_n^{-2} \beta_n^{\frac{2}{n}} V(t)^{\frac{2(n-1)}{n}},$$

$$\Rightarrow |\Sigma_t|^2 \geq \frac{n^2 \beta_n^2 V(t)^{\frac{2(n-1)}{n}}}{\beta_n^2 \beta_n^{\frac{-2}{n}}},$$

$$\Rightarrow |\Sigma_t|^2 \geq \frac{n^2 \beta_n^2 V(t)^{\frac{2(n-1)}{n}}}{\beta_n^{\frac{-2}{n} + 2}},$$

con  $n\beta_n = \omega_{n-1}$

$$\Rightarrow |\Sigma_t|^2 \geq \omega_{n-1}^2 \frac{V(t)^{\frac{2(n-1)}{n}}}{\beta_n^{\frac{-2}{n}}}.$$

Finalmente se tiene

$$|\Sigma_t|^2 \geq \omega_{n-1}^2 \left( \frac{V(t)}{\beta_n} \right)^{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

Así, combinando los resultados anteriores, utilizando las ecuaciones (3.11) y (3.12), tenemos

$$(n-2)(\omega_{n-1})(Cap(\Omega)) = cap_2(\Omega) \geq \int_0^1 \frac{|\Sigma_t|^2}{V'(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\omega_{n-1}^2 \left( \frac{V(t)}{\beta_n} \right)^{\frac{2(n-1)}{n}}}{V'(t)} dt. \quad (3.15)$$

donde en la segunda desigualdad utilizamos la desigualdad isoperimétrica indicada en el Teorema 3.3.1.

Consideremos el radio  $R(t)$  de la esfera con volumen  $V(t)$ , de este modo podemos escribir  $V(t) = \beta_n R(t)^n$ , por lo tanto obtenemos  $V'(t) = n\beta_n R(t)^{n-1} R'(t)$ , y como  $n\beta_n = \omega_{n-1}$ , sustituyendo estos resultados en (3.15) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\omega_{n-1}^2 \left( \frac{V(t)}{\beta_n} \right)^{\frac{2(n-1)}{n}}}{V'(t)} dt &= \int_0^1 \frac{\omega_{n-1} \omega_{n-1} \left( \frac{\beta_n R(t)^n}{\beta_n} \right)^{\frac{2(n-1)}{n}}}{n\beta_n R(t)^{n-1} R'(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\omega_{n-1} \omega_{n-1} (R(t))^{2n-2}}{\omega_{n-1} R(t)^{n-1} R'(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\omega_{n-1} (R(t))^{2n-2}}{R(t)^{n-1} R'(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\omega_{n-1} (R(t))^{2n-2} R(t)^{-n+1}}{R'(t)} dt. \end{aligned}$$

Por lo que, finalmente se tiene

$$(n-2)(\omega_{n-1})(Cap(\Omega)) \geq \int_0^1 \frac{\omega_{n-1} R(t)^{n-1}}{R'(t)} dt. \quad (3.16)$$

Ahora sea  $\Omega^*$  la bola abierta centrada en el origen con el mismo volumen de  $\Omega$  y  $\Sigma_t^*$  sea la esfera centrada en el origen con radio  $R(t)$ . Sea  $\tilde{u}$  la función tal que  $\tilde{u} = t$  sobre  $\Sigma_t^*$ . Como  $\Sigma_t^*$  es mutuamente simétrica, podemos considerar  $\tilde{u}(R(t)) = t$ , de donde por regla de la cadena  $(\tilde{u}(R(t)))' = 1$ , por lo que

$$(\nabla \tilde{u})R'(t) = 1.$$

Entonces

$$\nabla \tilde{u} = \frac{1}{R'(t)}.$$

Además la función radio  $R(t)$  es creciente, por lo que  $R'(t) > 0$  y podemos escribir

$$|\nabla \tilde{u}| = \frac{1}{R'(t)} \quad \text{en} \quad \Sigma_t^*.$$

Continuando con (3.16) y usando el hecho de que  $\omega_{n-1}R(t)^{n-1} = \int_{\Sigma_t^*} dA_t^*$  y  $|\nabla \tilde{u}| = \frac{1}{R'(t)}$  en  $\Sigma_t^*$ . Se tiene que

$$(n-2)(\omega_{n-1})(Cap(\Omega)) \geq \int_0^1 \frac{\int_{\Sigma_t^*} dA_t^*}{R'(t)} dt.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} (n-2)(\omega_{n-1})(Cap(\Omega)) &\geq \int_0^1 \int_{\Sigma_t^*} |\nabla \tilde{u}| dA_t^* dt \\ &= \int_{R^n} |\nabla \tilde{u}|^2 dx \geq (n-2)(\omega_{n-1})(Cap(\Omega^*)) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se deriva de la definición de capacidad.

En el caso de  $\Omega^*$  la capacidad es fácil de calcular y usando el Lema 3.3.2, tenemos que

$$Cap(\Omega^*) = \left( \frac{|\Omega^*|}{\beta_n} \right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Finalmente, si  $\Omega$  es una esfera, la desigualdad se convierte en igualdad. Esto se sigue directamente del hecho de que la desigualdad isoperimétrica se convierte en igualdad en el caso de una esfera.

○

### 3.4. La Prueba variacional

En esta sección damos otra demostración del problema de capacidad que considera la capacidad desde su punto de vista variacional.

**Teorema 3.4.1.** Sea  $\Omega$  un subconjunto acotado abierto de  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , con frontera suave, entonces

$$Cap(\Omega) \geq \left( \frac{|\Omega|}{\beta_n} \right)^{\frac{n-2}{n}}$$

Además la igualdad se cumple si y solo si  $\Omega$  es una esfera.

**Demostración.** Recordamos que

$$Cap(\Omega) = \frac{1}{(n-2)(w_{n-1})} cap_2(\Omega)$$

$$Cap(\Omega) = \frac{1}{(n-2)(w_{n-1})} \inf \left\{ \int_{R^n} |\nabla u|^2 dx \mid u \in D_{\Omega}^{1,2}(\mathbf{R}^n) \right\}$$

y

$$D_{\Omega}^{1,2}(\mathbf{R}^n) = \{u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^n) \mid \exists U \in \mathcal{O} \text{ tal que } \Omega \subset U \text{ y } 1 \leq u \text{ c.t.p en } U\}$$

Entonces llamemos a  $u_0 \in D^{1,2}(\mathbf{R}^n)$  el potencial capacitivo, solución al teorema 3.3.3. Sabemos que  $u_0$  minimiza el funcional

$$J(u) = \int_{R^n} |\nabla u|^2 dx$$

Además,  $u$  se anula en el infinito ya que resuelve el problema del Teorema 3.3.3. y esto significa que es una función admisible. Así podemos considerar la *Simetrización de Schwarz*  $u_0^*$  de  $u_0$  y aplicar la desigualdad de *Polya-Szegö*, por lo que obtenemos

$$\int_{R^n} |\nabla u_0^*|^2 dx \leq \int_{R^n} |\nabla u_0|^2 dx .$$

Sabemos que  $u_0 \in D^{1,2}$ , así tenemos que  $u_0 \geq 1$  en  $\Omega$  o bien  $m_{u_0}(1) \geq |\Omega|$ .

Recordamos que  $u_0$  y su simetrización  $u_0^*$  están equidistribuidas y que  $\Omega^*$  tiene el mismo volumen de  $\Omega$ . Por lo tanto, tenemos que  $m_{u_0^*}(1) \geq |\Omega^*|$  o bien  $u_0^* \geq 1$  en  $\Omega^*$ . Además tenemos que  $u_0^* \in D^{1,2}$ , esto significa que  $u_0^*$  pertenece a  $D_{\Omega^*}^{1,2}$ , y podemos escribir

$$Cap(\Omega^*) \leq \int_{R^n} |\nabla u_0^*|^2 dx .$$

Por lo tanto tenemos

$$Cap(\Omega) = \int_{R^n} |\nabla u_0|^2 dx \geq \int_{R^n} |\nabla u_0^*|^2 dx \geq Cap(\Omega^*),$$

donde está la última se deriva de la definición de capacidad variacional.

Usando el Lema 3.3.2, tenemos que

$$Cap(\Omega^*) = \left( \frac{|\Omega^*|}{\beta_n} \right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Nuevamente la desigualdad se convierte en igualdad, si  $\Omega$  es una esfera.

○

Estas dos pruebas son equivalentes ya que hay una prueba de la desigualdad de *Polya-Szegö* por medio de la fórmula de co-área. Sin embargo, es importante que nos concentremos en la naturaleza variacional de la prueba, en particular en el hecho de que el potencial capacitivo corresponde a un mínimo funcional.

# Conclusión

En este trabajo se presentaron algunas herramientas matemáticas y físicas, que nos permitieron vincular la noción de capacidad de un conjunto con la capacidad electrostática de un cuerpo.

A través de un formalismo del análisis matemático se presentó el concepto abstracto de capacidad de un conjunto y algunas de sus propiedades, mismas que nos ayudaron para conocer las nociones de la capacidad variacional.

Partimos de la conjetura de Poincaré que afirma: entre todos los cuerpos homogéneos con volumen dado, la esfera tiene la capacidad electrostática mínima, por tal motivo se dan dos demostraciones a nuestro problema de relacionar la capacidad variacional con la geometría del dominio: la primera está, en su mayor parte, basada en la demostración que Szegő, Faber y Poincaré, la cual menciona que para cada cantidad de carga en  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ , existe una única distribución de equilibrio a la que corresponde el potencial capacitivo en  $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$  que minimiza la energía y mediante la desigualdad isoperimétrica en el espacio, se prueba que la esfera tiene la capacidad electrostática mínima, debido a que la desigualdad se convierte en igualdad para este tipo de geometría, y la segunda prueba, bajo un enfoque variacional, utiliza la técnica de simetrización, lo que lo lleva directamente a obtener el ínfimo de la capacidad en el caso de una esfera.

# Apéndice A

## Convexidad

Convexidad de una curva o una superficie, es la zona que se asemeja al exterior de una circunferencia o una superficie esférica, es decir, que tiene su parte sobresaliente dirigida al observador. Es el concepto opuesto a la concavidad.

Una parte  $C$  de un espacio vectorial real es **convexa** si para cada par de puntos de  $C$ , el segmento que los une está totalmente incluido en  $C$ ; es decir, un conjunto es convexo si se puede ir de cualquier punto a cualquier otro en línea recta, sin salir del mismo [11].

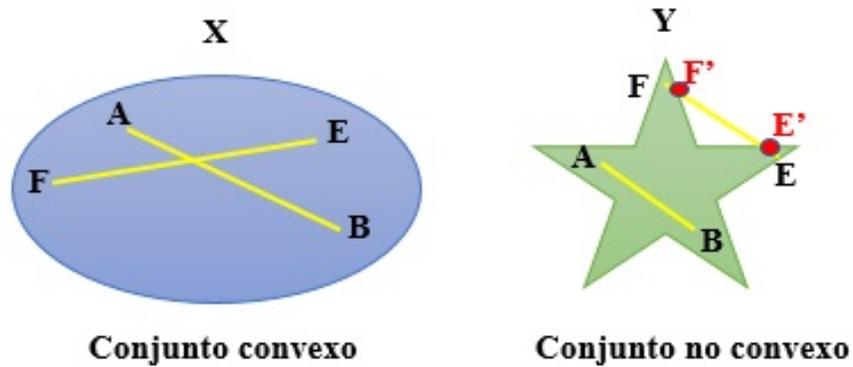


Figura A.1: Representación gráfica de convexidad.

# Apéndice B

## Unidades gaussianas

Las unidades gaussianas constituyen un sistema métrico de unidades físicas. Una diferencia entre las unidades gaussianas y SI (Sistema Internacional de Unidades) está en los factores de  $4\pi$  en varias ecuaciones.

Las unidades electromagnéticas del SI se denominan "racionalizadas", porque las ecuaciones de Maxwell no tienen factores explícitos de  $4\pi$  en las ecuaciones. Por otro lado, ambas leyes de la fuerza del cuadrado inverso, la ley de Coulomb y la ley de Biot-Savart, tienen un factor de  $4\pi$  unidos a la  $r^2$ .

En unidades gaussianas no racionalizadas (no en unidades de Lorentz-Heaviside) la situación se invierte: dos de las ecuaciones de Maxwell tienen factores de  $4\pi$  en las ecuaciones, mientras que ambas leyes de la fuerza del cuadrado inverso, la ley de Coulomb y la ley de Biot-Savart, no tienen factor de  $4\pi$  unido a la  $r^2$  en el denominador.

Por ejemplo, la ley de Coulomb en unidades gaussianas no tiene constante:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza repulsiva entre dos cargas eléctricas,  $q_1$  y  $q_2$  son las dos cargas en cuestión y  $r$  es la distancia que las separa.

La misma ley en unidades SI es:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (\text{B.2})$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío. Se presenta una lista de las ecuaciones básicas del electromagnetismo, dadas en unidades gaussianas y SI. La mayoría de los nombres de los símbolos no se dan.

| Nombre  | Unidades gaussianas                                | Unidades SI   |
|---|--|---|
| Ley de Gauss (macroscópica)                   | $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f$             | $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$  |
| Ley de Gauss (microscópica)                   | $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$               | $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$                               |
| Ley de Coulomb                                | $\mathbf{F} = \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ | $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ |
| Campo eléctrico de carga puntual estacionaria | $\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$      | $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$      |

Cuadro B.1: Ecuaciones básicas del electromagnetismo

A continuación se muestran las expresiones para los diversos campos en un medio dieléctrico. Por simplicidad, se asume que el medio es homogéneo, lineal, isotrópico y no dispersivo, de modo que la permitividad es una constante simple.

| Cantidades gaussianas                      | Cantidades SI                                    |
|--|--|
| $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ | $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ |
| $\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E}$            | $\mathbf{P} = \chi_e\epsilon_0\mathbf{E}$        |
| $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$          | $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$                |
| $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$                | $\epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_e$               |

Cuadro B.2: Expresiones para Materiales Dieléctricos

dónde:

- $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  son el campo eléctrico y el campo de desplazamiento, respectivamente.
- $\mathbf{P}$  es la densidad de polarización.
- $\epsilon$  es la permitividad.
- $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío (utilizada en el sistema SI, pero sin sentido en unidades gaussianas).

- $\chi_e$  es la susceptibilidad eléctrica.

Las cantidades son adimensionales y tienen el mismo valor numérico. Se presenta una lista con los nombres de las unidades electromagnéticas.

| Cantidad                | Símbolo  | Unidad SI | Unidad Gaussiana G   | Factor de conversión  |
|-------------------------|----------|-----------|--|---|
| carga eléctrica         | q        | C         | Fr<br>( $cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$ )                  | $\frac{q^G}{q^{SI}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$<br>$= \frac{(2,998)(10^9)(Fr)}{1C}$                                  |
| corriente eléctrica     | I        | A         | Fr/s<br>( $cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-2}$ )                | $\frac{I^G}{I^{SI}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$<br>$= \frac{(2,998)(10^9)(Fr/s)}{1A}$                                |
| potencial eléctrico     | $\phi$   | V         | statV<br>( $cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$ )               | $\frac{V^G}{V^{SI}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}$<br>$= \frac{1statV}{(2,998)(10^2V)}$   |
| campo eléctrico         | <b>E</b> | V / m     | statV/cm<br>( $cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$ )           | $\frac{\mathbf{E}^G}{\mathbf{E}^{SI}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}$<br>$= \frac{1statV/cm}{(2,998)(10^4V/m)}$                    |
| capacidad               | C        | F         | cm   | $\frac{C^G}{C^{SI}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$<br>$= \frac{(2,998^2)(10^{11}cm)}{1F}$                                      |
| campo de desplazamiento | <b>D</b> | $C/m^2$   | Fr/cm <sup>2</sup><br>( $cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$ ) | $\frac{\mathbf{D}^G}{\mathbf{D}^{SI}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}$<br>$= \frac{(4\pi)(2,998^2)(10^5 Fr/cm^2)}{1C/m^2}$ |

Cuadro B.3: Unidades de electromagnetismo comunes en SI vs Gaussiana.

dónde:

- El **Fr** franklin es la unidad física para la carga eléctrica utilizada en el CGS (sistema de unidades centímetro-gramo-segundo) y las unidades gaussianas.

- El statvolt (**statV**) es una unidad de voltaje y potencial eléctrico que se utiliza en los sistemas de unidades CGS y gaussiano.
- El faradio (símbolo: **F**) es la unidad de capacitancia eléctrica derivada del SI , la capacidad de un cuerpo para almacenar una carga eléctrica.

El número 2.998 es una abreviatura de exactamente 2.99792458 para la velocidad de la luz en el vacío. Cualquier ecuación se puede convertir entre unidades gaussianas y SI utilizando los factores de conversión simbólicos del Cuadro B.3 anterior. Por ejemplo, el campo eléctrico de una carga puntual estacionaria tiene la ecuación en el SI:

$$\mathbf{E}^{\text{SI}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^{\text{SI}}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (\text{B.3})$$

donde  $r$  es la distancia, y los subíndices “SI” indican que el campo eléctrico y la carga se definen utilizando definiciones SI. Si queremos que la ecuación utilice en su lugar las definiciones gaussianas de campo eléctrico y carga, buscamos cómo se relacionan usando el Cuadro B.3, que dice [12]:

$$\frac{\mathbf{E}^{\text{G}}}{\mathbf{E}^{\text{SI}}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{q^{\text{G}}}{q^{\text{SI}}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}. \quad (\text{B.5})$$

Sustituimos ambas ecuaciones (B.4) y (B.5), en la ecuación (B.3) y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\mathbf{E}^{\text{G}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} = \frac{(\sqrt{4\pi\epsilon_0})(q^{\text{G}})}{(4\pi\epsilon_0)(r^2)} \hat{\mathbf{r}}, \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{E}^{\text{G}} = \frac{(\sqrt{4\pi\epsilon_0})(\sqrt{4\pi\epsilon_0})(q^{\text{G}})}{(4\pi\epsilon_0)(r^2)} \hat{\mathbf{r}}, \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{E}^{\text{G}} = \frac{(4\pi\epsilon_0)(q^{\text{G}})}{(4\pi\epsilon_0)(r^2)} \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{B.8})$$

Por lo tanto, después de sustituir y simplificar, obtenemos la ecuación en unidades gaussianas:

$$\mathbf{E}^{\text{G}} = \frac{q^{\text{G}}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (\text{B.9})$$

que es la ecuación correcta de unidades gaussianas, como se mencionó en el Cuadro B.1.

# Apéndice C

## Teorema de Stokes

Si se tiene una superficie macroscópica  $S$  semejante a las de la figura C.1, cada pequeño contorno genera una contribución a la circulación:

$$dC = (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{C.1})$$

por lo tanto la circulación total se obtiene por la adición de todos los pequeños elementos superficiales:

$$C = \int_S (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{C.2})$$

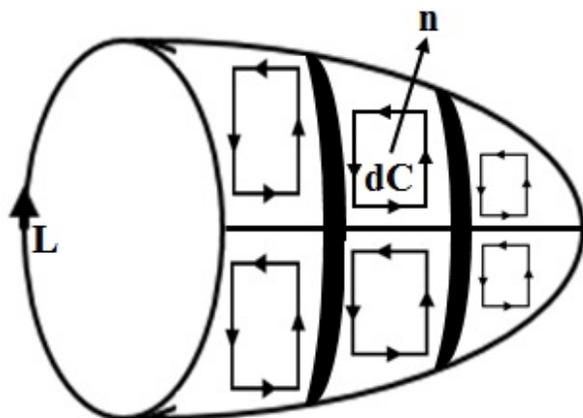


Figura C.1: Muchos contornos de línea diferenciales, distribuidos sobre cualquier superficie, tienen una contribución diferente de cero a la circulación sólo a lo largo de esas partes de la superficie que están sobre el contorno frontera de L.

Cada uno de los términos de (C.1) es equivalente a la integral de línea alrededor de cada pequeño contorno. Sin embargo, todos los contornos interiores comparten lados comunes con contornos adyacentes pero que son recorridos dos veces en sentidos opuestos, no produciendo una contribución neta a la integral de línea, como se muestra en la figura C.1. [7]

Solamente aquellos contornos que tienen un lado sobre la frontera abierta  $L$  tienen una contribución diferente de cero. Si se suman todas las contribuciones de todos los contornos es el Teorema de Stokes, “*el cual convierte la integral de línea sobre el contorno frontera  $L$  del borde externo en una integral de superficie sobre cualquier área  $S$  limitada por el contorno*”:

$$\oint_{\mathbf{L}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (\text{C.3})$$

Observemos que existe un número infinito de superficies que están limitadas por el contorno  $L$ , el Teorema de Stokes (C.3) es satisfecho por todas esas superficies.

# Apéndice D

## Masa total finita

Recordemos que la densidad  $\rho$ , es una magnitud escalar referida a la cantidad de masa  $m$ , en un determinado volumen  $V$  de una sustancia o un objeto sólido.

$$\rho = \frac{m}{V} . \quad (\text{D.1})$$

Se considera una  $\rho = \text{constante}$ , de la ecuación (D.1) se tiene

$$m = V\rho . \quad (\text{D.2})$$

Derivamos (D.2)

$$dm = d(V\rho) = Vd\rho + \rho dV . \quad (\text{D.3})$$

Como la derivada de una constante es cero, en este caso  $d\rho = 0$ , así que

$$dm = \rho dV . \quad (\text{D.4})$$

Ahora si consideramos una medida positiva de Borel  $\mu = m$  definida en  $\mathbf{R}^3$  con masa total finita, tenemos que

$$d\mu(\mathbf{y}) = \rho dV . \quad (\text{D.5})$$

# Apéndice E

## Conjunto compacto y abierto

**Conjunto compacto.** En la rama de topología de las matemáticas, un espacio compacto es un espacio que tiene propiedades similares a un conjunto finito, en cuanto a que las sucesiones contenidas en un conjunto finito siempre contienen una subsucesión convergente. La noción de compacidad es una versión más general de esta propiedad, debido a que alrededor de cada punto, localmente, el espacio tiene propiedades similares a las de un espacio compacto. La compacticidad es una propiedad que busca generalizar el concepto de un subconjunto cerrado y acotado en el espacio Euclidiano. La idea es que un espacio compacto no posee pinchazos o ausencia de puntos finales, o sea, incluye todos los valores límites de los puntos. Por ejemplo, el intervalo abierto  $(0, 1)$  no es compacto porque excluye los valores límites 0 y 1, mientras que el intervalo cerrado  $[0, 1]$  es compacto.

De manera similar, el espacio de los números racionales no es compacto, porque posee un número infinito de pinchazos o agujeros correspondientes a los números irracionales, y el espacio de los números reales tampoco es compacto, porque excluye a los dos valores límites  $+\infty$  y  $-\infty$ . Sin embargo, la línea de números reales extendida sería compacta, ya que contiene ambos infinitos.

**Conjunto abierto.** En topología y otras ramas de las matemáticas, es un conjunto en el que cada uno de sus elementos tiene un entorno que está incluido en el mismo conjunto; o, dicho de una manera más intuitiva, que ningún elemento de dicho conjunto pertenece también a la frontera de este.

Como ejemplo típico se puede evaluar el intervalo abierto  $(0, 1)$  en los números reales, que se corresponde con todos los números entre 0 y 1 pero sin incluir estos, es decir, todos los números reales  $x$  con  $0 < x < 1$ . Intuitivamente se dice que es un conjunto abierto porque, para cualquier número  $x$  que pertenezca al conjunto, por mucho que pretendamos acercarnos a la frontera del conjunto 0 y 1, siempre hay más elementos entre dicho número  $x$  y la frontera. Por ejemplo, si evaluamos el punto 0,9, entre este y el 1 está el 0,99, por ejemplo; al igual que entre 0,99 y 1 está el 0,999; y así sucesivamente. Siempre hay más números entre cualquier elemento del conjunto y la frontera, y es por tanto ‘abierto’. [16]

# Bibliografía

- [1] Willem M., “Functional Analysis. Fundamentals and Applications”, Springer Science & Business Media, (2013).
- [2] Álvarez-Nodarse, R., “Cálculo Infinitesimal: Sucesiones”, Universidad de Sevilla.
- [3] <http://www.ehu.es/juancarlos.gorostizaga/apoyo/sucesiones.htm>
- [4] Wangsness, Roald K., “Campos Electromagnéticos”, Ed. Limusa Wiley, México, 2001.
- [5] R. Resnick, D. Halliday, K. Krane, “Física, Volumen 2”, Grupo Editorial Patria, Cuarta edición, 2002.
- [6] Wermer J., “Potential theory”, Second edition, Lecture notes in mathematics, Vol 408, Springer Berlin Heidelberg, (1981).
- [7] Zahn, Markus, “Teoría Electromagnética”, Ed. McGraw-Hill, México, 1991.
- [8] Polya G., Szegö G., “Inequalities for the capacity of a condenser”, The Johns Hopkins University Press, American Journal of Mathematics, Vol. 67, No. 1, pp. 1-32 (1945).
- [9] Polya G., Szegö G., “Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics”, Annals of Mathematics Studies, no. 27, Princeton University Press, Princeton, N. J.,(1951).
- [10] Szegö G., “Über einige extremalaufgaben der potentialtheorie”, (1930).
- [11] Wikipedia, La enciclopedia libre, (2021, 13 de Mayo), Convexidad, <https://es.wikipedia.org/wiki/Convexidad>
- [12] Wikipedia, La enciclopedia libre, (2021, 11 de Agosto), Unidades gaussianas, [https://es.frwiki.wiki/wiki/Systeme\\_d%unités\\_Gaussiennes](https://es.frwiki.wiki/wiki/Systeme_d%unités_Gaussiennes)
- [13] Federer H., “Geometric measure theory”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Vol.153, (1969).
- [14] Kellogg D.O., “Foundations of potential theory”, Berlin, Springer, (1929).
- [15] “Apuntes de Teoría de la Medida, Volumen 2”, Badajoz, 22 de enero de 2018, pp. 1-17.
- [16] Ivorra, C., “Análisis matemático”, pp. 59, 60.