



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MÉXICO**



---

**FACULTAD DE ECONOMÍA**

**“CONSTRUCCIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN ÓPTIMOS  
UTILIZANDO LA TÉCNICA DE EFICIENCIA RE-MUESTREADA”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADO EN ACTUARÍA**

PRESENTA:

**DIEGO RODOLFO GOROSTIETA ORTEGA**

ASESOR:

**DR. EN I. RAÚL DE JESÚS GUTIÉRREZ**

REVISORES:

**M. EN C. VERÓNICA ANGELES MORALES**

**DR. EN ADM. OSWALDO GARCÍA SALGADO**

**TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO**

**SEPTIEMBRE 2025**

## Índice

<b>Introducción</b> .....	3
<b>Capítulo 1. Teoría de la administración de portafolios de inversión</b> .....	7
<b>1.1. Concepto de riesgo</b> .....	9
<b>1.2. Mercado de capitales</b> .....	13
<b>1.3. Asignación Eficiente de Capital en los Mercados Financieros</b> .....	15
<b>1.4. Diversificación de Activos Financieros</b> .....	17
<b>Capítulo 2. Teoría moderna del portafolio</b> .....	20
<b>2.1. Inversionistas racionales</b> .....	21
<b>2.2. Modelo de Media-Varianza</b> .....	23
<b>2.3. Frontera eficiente</b> .....	27
<b>2.4. Portafolios óptimos</b> .....	30
<b>Capítulo 3. Técnica de eficiencia re-muestreada</b> .....	39
<b>3.1. Descripción de los datos</b> .....	39
<b>3.2. Frontera eficiente re-muestreada</b> .....	48
<b>3.3. Optimización con eficiencia re-muestreada</b> .....	51
<b>Capítulo 4. Evidencia empírica de la técnica de eficiencia re-muestreada</b> .....	55
<b>4.1. Estadísticas descriptivas</b> .....	55
<b>4.2. Construcción del portafolio óptimo</b> .....	59
<b>4.3. Análisis de resultados</b> .....	67
<b>Conclusiones</b> .....	73
<b>Apéndice A. Código en Python del Algoritmo de optimización de la técnica de eficiencia re-muestreada para el diseño de portafolios óptimos.</b> .....	76
<b>Bibliografía</b> .....	81

## Introducción

Los inversionistas institucionales e individuales conciertan un rol importante en los sistemas financieros y en las economías a nivel global. La oferta de flujos de capital en los mercados financieros es provista por inversionistas no solo para el diseño de estrategias de inversión óptimas, sino también para el financiamiento de proyectos de inversión, tanto de consolidación como de expansión. De esta manera, las inversiones promueven el crecimiento de empresas y el desarrollo de economías en países industrializados y emergentes.

Bajo este contexto, la teoría moderna del portafolio ha sido reconocida por inversionistas y académicos como la piedra angular en la industria financiera desde hace cincuenta años. A grandes rasgos, esta teoría financiera se encuentra fundamentada en el modelo de media-varianza, el cual permite realizar asignaciones eficientes de capital entre una variedad de activos financieros riesgosos, teniendo como fin maximizar la utilidad de las inversiones en un horizonte de tiempo fijo a través de la relación directa entre riesgo y rendimiento (Markowitz, 1952). En otras palabras, el objetivo principal de los inversionistas racionales es minimizar la exposición al riesgo y maximizar los rendimientos en las inversiones de portafolio a través de los beneficios de la diversificación internacional.

De la misma forma, en la literatura es bien sabido que los inversionistas y administradores de portafolios seleccionan activos financieros con base en la asignación eficiente de capital para cada activo financiero riesgoso. En sintonía con lo anterior, la teoría moderna del portafolio ha permitido a los inversionistas construir portafolios de inversión eficientes de acuerdo con el modelo de media-varianza. Adicionalmente, la teoría de Markowitz (1952) ha demostrado que los inversionistas son adversos al riesgo, dado que siempre buscan conseguir portafolios de inversión que minimicen el nivel de riesgo, asumiendo un rendimiento dado. No obstante, es importante señalar que también existe la alternativa de diseñar portafolios de inversión de rendimiento máximo, pero a un nivel de riesgo mayor.

Mas aún, el modelo de media-varianza sobre el que se construye gran parte de la teoría de Markowitz permite la implementación de regímenes de inversión y restricciones, en donde el control del riesgo del portafolio se construye en torno al perfil del inversionista.

En términos generales, el problema de la optimización del modelo de media-varianza consiste en construir un conjunto de portafolios eficientes dado un nivel de riesgo y rendimiento esperado, los cuales forman un conjunto infinito de inversiones, también conocido como frontera eficiente. Así, los inversionistas deben invertir en los distintos portafolios que se encuentran en la frontera eficiente de acuerdo con sus preferencias de riesgo, que son determinadas por la desviación estándar (Bielecki et al., 2005).

Puntualmente, los portafolios eficientes de media-varianza se pueden obtener de distintas maneras según las restricciones asumidas en la optimización matemática. En primer lugar, si solo se incluyen restricciones de igualdad lineal, el uso de álgebra matricial resulta suficiente para la obtención analítica de la solución. Si, por el contrario, en las restricciones de optimización se incluyen desigualdades lineales, entonces el enfoque se traslada a resolver un problema a través de algoritmos computacionales. Sin embargo, en ambos casos los portafolios eficientes se obtienen al minimizar la función objetivo, la cual representa la varianza del portafolio de inversión y se encuentra sujeta al valor esperado del rendimiento del portafolio y a la suma de las ponderaciones o porcentajes de inversión. En efecto, el resultado del problema anterior deriva en el conjunto de ponderaciones óptimas que se asignan a cada activo financiero y que coadyuva a minimizar el riesgo del portafolio, tomando como punto de partida el rendimiento esperado (Markowitz, 1959).

Expuesto todo esto, es claro que la teoría moderna del portafolio proporciona un marco adecuado para el diseño de portafolios óptimos en el que se conocen con claridad tanto la media esperada como la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los activos financieros. No obstante, existen algunas áreas de mejora para la optimización de media-varianza tradicional, debido a que este proceso puede llegar a presentar resultados considerados poco prácticos por los inversionistas. Asimismo, aunque la optimización de los portafolios conformados por una gran variedad de activos financieros ha presentado problemas en cuanto a tiempos de ejecución computacional, o más aún, problemas de exactitud, el principal inconveniente deriva en que diversos algoritmos de optimización tienen problemas para el cálculo de soluciones globales y como resultado se generan soluciones poco viables (Michaud & Michaud, 2008).

En este tenor, las limitaciones de la optimización del modelo de media-varianza han sido reconocidas por los inversionistas durante varios años. El trabajo de Britten-Jones (1999) documenta que la principal dificultad de la optimización de media-varianza surge cuando se producen asignaciones extremas de activos como resultado de la sensibilidad de las ponderaciones de rendimientos en los portafolios y el error de estimación de la matriz de varianza-covarianza. Asimismo, DeMiguel et al. (2009) resalta que los errores de estimación de las medias y varianzas distorsionan las ganancias en los portafolios.

Adicional a las observaciones anteriores, sobresale el trabajo de Jobson y Korkie (1981), el cual describe que la implementación tradicional de la optimización del modelo de media-varianza es una estrategia categóricamente incorrecta debido a la falta de confiabilidad de los estimadores. Concretamente, en dicho trabajo se menciona que las estimaciones de las desviaciones estándar y el rendimiento están inevitablemente sujetas a errores de apreciación, y, por consiguiente, la optimización del modelo de media-varianza puede sobreponderar (infraponderar) significativamente los activos con rendimientos estimados grandes (pequeños), correlaciones negativas (positivas) y varianzas pequeñas (grandes) (Michaud, 1989).

Como resultado de las condiciones de la optimización del modelo de media-varianza, la técnica de eficiencia re-muestreada desarrollada y propuesta por Michaud y Michaud (2007) surge como alternativa de respuesta a las áreas de mejora ya enmarcadas del modelo de media-varianza, tanto en la significancia estadística, como en la viabilidad y cumplimiento de las restricciones del problema de optimización original del modelo de media-varianza.

Vislumbrado todo el contexto, el presente trabajo busca validar la hipótesis de investigación en la que se presume que la técnica de eficiencia re-muestreada permite construir portafolios de inversión óptimos para los participantes de los mercados de capitales a nivel global. Asimismo, el objetivo general es construir portafolios de inversión optimizados mediante la técnica de eficiencia re-muestreada. En la misma línea, se busca analizar la teoría moderna del portafolio, revisar las técnicas de inversión existentes y efectuar un análisis comparativo con los portafolios de inversión obtenidos con la técnica de eficiencia re-muestreada. Por consiguiente, para desarrollar lo descrito y alcanzar los

objetivos planteados, el documento se distribuye en cuatro apartados, cada uno de los cuales aborda puntos circunstanciales para el entendimiento del tema.

En el capítulo número uno se expone en que consiste la administración de portafolios de inversión, que aborda desde la definición de preferencias y objetivos del inversionista, hasta el análisis de riesgo y rendimiento de activos de inversión, adicionando la evaluación del desempeño del portafolio. Al mismo tiempo, se introduce y explica el concepto de riesgo, el cual es esencial para la toma de decisiones, ya que no todos los riesgos son iguales y por ende es necesario entender los tipos de riesgos a los que se enfrentan los inversionistas. Del mismo modo, en el capítulo uno se estudia el proceso para la correcta asignación de activos riesgosos, las características que estos activos deben tener de acuerdo con el perfil del inversionista, el balance con la minimización del riesgo y maximización de la utilidad, y la importancia de la diversificación en la construcción de portafolios de inversión.

Durante el segundo capítulo se desarrolla la teoría moderna del portafolio de Markowitz, sustentada en la teoría de utilidad económica y el modelo de media-varianza. El foco central contenido en esta sección es la regla de los rendimientos esperados - varianzas de los rendimientos. De la misma manera, en esta sección se describen matemáticamente las distintas formas en las que se puede alcanzar la optimización de un portafolio de inversión partiendo de la aplicación de la regla anterior.

Para el capítulo tres se lleva a cabo la descripción de la técnica de eficiencia re-muestreada, en particular, la explicación del proceso de construcción de fronteras eficientes simuladas y el cómo a partir de estas se obtiene la técnica de eficiencia re-muestreada. En el mismo sentido, se describe la lógica de la simulación Monte Carlo y la técnica bootstrapping para la construcción de portafolios de inversión óptimos.

En el capítulo cuatro se construyen distintos portafolios de inversión a partir de la selección de 20 activos riesgosos provenientes de diferentes mercados financieros internacionales con la finalidad de evaluar el desempeño de las técnicas de optimización descritas en los capítulos dos y tres. Finalmente, se analizan las diferencias en las ponderaciones y el nivel de riesgo obtenido en cada portafolio para la elaboración de las conclusiones.

## **Capítulo 1. Teoría de la administración de portafolios de inversión**

Sin duda alguna la administración de portafolios de inversión es una tarea fundamental dentro de la teoría financiera, en la que los objetivos de un inversionista se combinan con las expectativas financieras de los mercados con el propósito de desarrollar estrategias de inversión capaces de generar ganancias. Aunado a lo anterior, las opciones disponibles para los inversionistas se concentran en el análisis de un conjunto infinito de oportunidades de inversión determinadas por las preferencias de los inversionistas. Por consiguiente, la forma en la que se diseñan los portafolios de inversión determina el rendimiento y riesgo a los que se consigna el inversionista.

De acuerdo con Baker y Filbeck (2013), la administración de portafolios es un proceso que consta de un conjunto de tres pasos generales orientados a la consecución de los objetivos de cada inversionista. Estos pasos son mencionados a continuación:

### **1) Planeación**

Durante la planeación se esbozan las necesidades del cliente, así como la política de inversión, la cual debe ser consistente con la estrategia de inversión que se desarrollará. Una vez que la aversión al riesgo se encuentra determinada y el rendimiento objetivo es establecido, se concluye en gran parte la política de inversión. En general, con la política de inversión se tienen las circunstancias del inversionista, el propósito de la inversión, la actualización de las condiciones de inversión en el tiempo, la resolución de los posibles problemas futuros, la forma de evaluación del desempeño del portafolio de inversión y la colocación estratégica de activos financieros de principio a fin.

Las estrategias de inversión diseñadas durante esta fase toman en cuenta el pronóstico del comportamiento de los mercados financieros a largo plazo, haciendo énfasis en la volatilidad y el rendimiento de los activos riesgosos. Con lo anterior, la política de inversión asegura que mediante el suficiente esfuerzo se puedan alcanzar los objetivos planteados por el inversionista. Como resultado, la distribución del capital disponible para la conformación del portafolio de inversión se encuentra basada en el riesgo, rendimiento y correlación de los diferentes activos financieros.

## 2) Ejecución

Este paso se centra en analizar el riesgo y rendimiento de los activos financieros que conformarán la cartera de inversión partiendo del análisis de las condiciones de los mercados financieros y la selección de activos riesgosos atractivos para el portafolio. La esencia de este procedimiento es llevar a cabo lo establecido en el paso previo, considerando las características de cada activo riesgoso por separado y al mismo tiempo evaluando el efecto que tendrán al incorporarse a la cartera. Así pues, resulta crucial realizar investigaciones formidables de los activos financieros que cuentan con posibilidades de agregarse al portafolio de inversión.

Bajo la misma línea, este proceso es iniciado una vez que los activos financieros son adquiridos y finaliza con la liquidación del portafolio de inversión. No obstante, es importante mencionar que, en ocasiones, dadas las condiciones de los mercados financieros, la estrategia original de un inversionista puede tomar temporalmente un curso distinto al establecido en un principio. Sin embargo, este hecho solo se presenta en el corto plazo, dado que para el periodo de inversión completo los ajustes efectuados no exhiben diferencias significativas.

## 3) Retroalimentación

La última etapa del proceso contempla actividades durante y al final de la permanencia del plan de inversión. En este sentido, las necesidades del inversionista pueden cambiar en el tiempo, pero sobre todo las condiciones de mercado, por lo que el portafolio debe ser actualizado y reajustando con base a indicadores específicos que faciliten la obtención de los resultados planteados.

Con respecto a lo anterior, la evaluación del desempeño de la cartera de inversión se compone de tres puntos determinantes que se describen enseguida:

- i) Medida de desempeño: consiste en calcular la tasa de rendimiento del portafolio; sin embargo, dada la variedad de técnicas para cumplir con esta tarea, el gestor del portafolio debe seleccionar la más apropiada con base a las características del portafolio de inversión.

- ii) Atribución del desempeño: este punto implica comparar el desempeño del portafolio con un punto de referencia y determinar la diferencia de rendimientos.
- iii) Apreciación del desempeño: se refiere a la capacidad del administrador del portafolio para superar un índice de referencia específico de manera constante a lo largo del tiempo.

En resumen, el desempeño y la eficiencia de un portafolio de inversión en el largo plazo se puede atribuir a las decisiones tomadas durante la colocación estratégica de las diferentes clases de activos riesgosos y su supervisión. Adicionalmente, es importante resaltar que la sincronización con los distintos mercados financieros, propiamente relacionados con el portafolio de inversión, pueden llegar a tener un impacto de mediana proporción en el rendimiento de la cartera de inversión.

Recapitulando, hasta ahora se han descrito los pasos de la administración de portafolios; sin embargo, para mayor entendimiento de estos es necesario profundizar en los temas de riesgo de inversión, mercado de capitales, asignación de activos financieros y diversificación. Por esta razón en los siguientes subapartados, y en el orden marcado, se exponen dichos temas.

### **1.1. Concepto de riesgo**

El riesgo es un componente inherente a la vida cotidiana que se materializa cuando se toman decisiones de mediana y gran complejidad. En definitiva, este elemento puede llegar a repercutir en uno o hasta millones de individuos, según la magnitud de las decisiones tomadas. Etimológicamente, esta palabra se relaciona con el latín *risicum* y la palabra griega *rhiza*, cuyos términos hacen referencia a los peligros enfrentados por los marineros mercantes al navegar cerca de acantilados con el fin de reducir el tiempo de llegada a su destino.

Formalmente, en 1966 la *Commission on Insurance Terminology of the American Risk and Insurance Association* estandarizó el significado de esta palabra, definiéndola como la incertidumbre presente en un evento cuando existen dos o más posibles resultados (Outreville, 2014). Del mismo modo e independientemente del ámbito en el que se

presente, el riesgo siempre viene acompañado de un costo de pérdida, el cual es analizado en la mayoría de las ocasiones desde un aspecto económico.

Asimismo, el riesgo determina el curso de la toma de decisiones de los agentes económicos bajo incertidumbre, partiendo del análisis de la minimización de las pérdidas y maximización de los beneficios. Específicamente, bajo el contexto financiero, el riesgo se define como la posible variabilidad en los rendimientos a causa los cambios inesperados en los precios de activos riesgosos, tipos de cambios, materias primas y tasas de interés, lo cual puede conducir en todos los escenarios a posibles pérdidas.

De acuerdo con lo anterior, se puede deducir que una inversión libre de riesgo es aquella en la que se conoce con antelación el rendimiento que se obtendrá al vencimiento del periodo de inversión. Un claro ejemplo de las inversiones libres de riesgo son los bonos gubernamentales y los depósitos bancarios. Por el contrario, una inversión es riesgosa cuando no se conoce con certeza el rendimiento que se obtendrá y de forma agregada dicho rendimiento puede tener amplias variaciones, las cuales pueden incluso tornarse en pérdidas potenciales (Divya & Viswambharan, 2019).

Ante este paradigma, los agentes económicos mantienen constantemente un pensamiento en términos marginales, en el que por cada aumento o disminución que se realiza respecto a alguna actividad o cantidad de cualquier bien, se espera a cambio obtener un beneficio significativo que justifique la primera acción. En términos financieros, los inversionistas prefieren obtener rendimientos altos, no obstante, es bien sabido que a medida que aumentan los posibles rendimientos, aumenta también la posibilidad de sufrir pérdidas.

Por otro lado, para la comunidad académica y profesional, el riesgo financiero ha sido comúnmente adoptado como la desviación estándar de los rendimientos esperados. En este tenor, Chong (2004) expone el riesgo financiero como un concepto bien definido, en el que el punto central es afrontarlo de manera constructiva, a través de la mitigación de su severidad cuando se suscita. Bajo la misma línea, el autor indica que existen cuatro escuelas que estudian el riesgo de inversión desde diferentes perspectivas y por ende son abordadas en las siguientes sentencias.

La primera escuela es conocida como la filosofía empresarial fatalista, la cual dictamina que eventualmente cualquier agente económico sufrirá daños a causa de un evento riesgoso, razón por la que es recomendable estar cubierto ante tales riesgos. La segunda doctrina es la tecnológica, la cual tiene por directriz el desarrollo matemático y técnico. Por añadidura, esta teoría parte del entendimiento científico del riesgo para la reducción e incluso anulación de pérdidas. En tercer lugar, se encuentra la escuela del observador, en ella, las acciones de las personas y empresas son el principal factor determinante del riesgo, por lo que la complejidad numérica pasa a segundo plano. Finalmente, se tiene la escuela de gestión de riesgos, en donde se involucran aspectos de diferente índole para tratar el riesgo de inversión, por lo que está determinada por el panorama de integración tecnológica e intervención humana para el tratamiento del riesgo.

Concretizando lo anterior, desde cualquier perspectiva que se estudie el riesgo financiero, este se encuentra directamente asociado con la probabilidad de pérdidas monetarias, ya sean parciales o totales. Por ello, en toda inversión es importante identificar las diversas fuentes del riesgo financiero. Derivado de lo anterior, Christoffersen (2003) establece que los inversionistas y las instituciones financieras están expuestos a diferentes tipos de riesgos, aunque los principales son:

- a) Riesgo de mercado: se define como la posibilidad de pérdidas a la que se exponen los agentes financieros como resultado de los cambios inesperados en los precios de los títulos de capital, tasas de interés, tipos de cambio, índices bursátiles y precios de las materias primas. Dicho de otro modo, las variaciones en el valor de los activos financieros, derivadas de rendimientos negativos o rendimientos inferiores a los esperados, son parte del riesgo de mercado. Asimismo, este tipo de riesgo está implícito en prácticamente todas las operaciones financieras.
- b) Riesgo de liquidez: el origen de este tipo de riesgo recae en que no siempre el cumplimiento de las cláusulas de un contrato financiero está respaldado por los pasivos o flujos de caja suficientes para hacer frente a las obligaciones contraídas. Por consecuencia, este tipo de riesgo se encuentra latente en la realización de las transacciones financieras, aunque mayormente dentro de las que se realizan en mercados de bajo volumen operacional, lo cual puede ocasionar caídas en los

precios de los activos, o bien, retención de los activos por un plazo mayor al establecido de manera inicial en el acuerdo pactado (Cortés, 2018).

- c) Riesgo operacional: dentro de esta categoría se encuentran las posibles pérdidas ocasionadas por fallas técnicas, errores humanos, fallas administrativas o eventos externos no previstos. Dada la diversidad del origen y las dificultades de estimación de la severidad de este tipo de riesgo, su cálculo es bastante complejo y en algunos casos incuantificable.
- d) Riesgo de crédito: es definido como el riesgo al que se exponen los agentes económicos cuando la contraparte con la que se ha celebrado algún contrato incumple parcial o totalmente en la obediencia de sus obligaciones como deudor.
- e) Riesgo país: en este tipo de riesgo se encuentran las pérdidas contingentes a las que se enfrentan los inversionistas cuando el país donde se llevan a cabo las operaciones financieras enfrenta o realiza modificaciones tanto macroeconómicas como políticas que influyen negativamente en las posiciones colocadas.

En resumen, resulta evidente que los diferentes tipos de riesgos, tanto en frecuencia como en severidad, deben ser medidos y tratados con distintas habilidades y desde diferentes enfoques. De este modo, pese a la diversidad de riesgos a los que se exponen los agentes financieros para la gestión de carteras de inversión, el riesgo de mercado es el elemento principal por analizar, ya que las variaciones en los precios de las acciones determinan por completo la exposición a posibles pérdidas, o bien, el nivel de rentabilidad del portafolio. En la misma línea, Bouchaud y Potters (2000) señalan que el riesgo financiero, y de manera puntual el riesgo de mercado puede asociarse estadísticamente con las fluctuaciones de una variable aleatoria financiera, como lo es el rendimiento de un activo riesgoso.

Matemáticamente, cuando los rendimientos de los activos financieros presentan cambios y dichos cambios se repiten en distintas ocasiones, se genera un conjunto de datos que se dispersa dentro de un espacio con un ancho determinado en el que se concentran los valores típicos de los rendimientos. A su vez, este nivel de dispersión, conocido financieramente como volatilidad, puede ser medido mediante la raíz cuadrada media o más comúnmente llamada desviación estándar, la cual es denotada por  $\sigma$ .

Descrito esto, es importante introducir la idea de Knight (2006), en la que señala que a pesar de que un riesgo es deliberadamente incierto, esta situación puede transformarse de manera providencial si se considera un número suficiente de casos, tal que, bajo las leyes del azar, el error en la estimación sea mínimo y la combinación de los casos reduzcan la incertidumbre. De esta manera, al combinar esta última idea con la que se describe en el párrafo anterior se obtiene un argumento sólido para la medición del riesgo dentro de la administración de portafolios de inversión. Además, si se considera la idea de Outreville (2014), en donde menciona que la diversificación es un principio básico para la minimización del riesgo debido a que diferentes eventos riesgosos no producirán los mismos resultados y adicionalmente no suelen producirse al mismo tiempo. Así, con este argumento declarado se obtiene un marco totalmente racional, a partir del cual los inversionistas pueden sustentar sus decisiones en beneficio de la gestión de las carteras de inversión.

Teniendo esclarecida la idea de riesgo, es posible continuar con el apartado de mercado de capitales, ya que es el mecanismo donde se concentran los diferentes activos financieros que conforman las estrategias de inversión. Sin embargo, es importante mencionar que cada activo financiero del mercado de capitales tiene características distintas, por lo que el rendimiento y riesgo que se adquiere con cada uno de ellos tendrá un efecto significativo en la construcción de un portafolio de inversión.

## **1.2. Mercado de capitales**

Los mercados financieros en conjunción con el dinero, los instrumentos financieros y las instituciones regulatorias conforman los sistemas financieros alrededor del mundo. En los mercados financieros se encuentran los ofertantes de recursos y los demandantes de financiamiento con el objeto de llevar a cabo la negociación de instrumentos financieros (Cecchetti & Schoenholtz, 2019). De esta manera, es importante mencionar que los mercados financieros no solo se limitan al financiamiento, sino que también se encargan de gestionar el riesgo en beneficio de la minimización de las pérdidas y el aumento de la rentabilidad (Banque de France, 2021).

De acuerdo con Levinson (2018), los mercados financieros según la forma en la que operan, el nivel de riesgo que gestionan, el tipo de transacciones que realizan y los activos

financieros que comercializan, se pueden clasificar en mercado de dinero, mercado de divisas, mercado de derivados y mercado de capitales. Específicamente, en el mercado de capitales se negocian títulos de capital o acciones, los cuales representan una parte alícuota de la propiedad de una empresa. Además, la función de los mercados de capitales se centra en la captación de recursos, cuya principal distinción respecto a las diferentes formas de financiamiento se basa en que los inversionistas se convierten en propietarios proporcionales de la empresa, asumiendo de este modo un riesgo total del capital aportado.

Por otra parte, el precio de una acción representa el valor presente proporcional de las ganancias futuras de la compañía. No obstante, existen otros elementos que influyen en el precio de una acción, tales como factores propios del mercado, cambios en el desarrollo económico, el crecimiento de la empresa, la compra o fusión con otras compañías, las tasas de interés y las noticias económicas respecto a la inflación, el desempleo, el consumo y otras variables de gran impacto (Levinson, 2018). Como resultado, el rendimiento que se puede obtener mediante la adquisición de acciones está dado por el diferencial entre el precio de los títulos al momento de venta y el precio de los títulos al momento de compra, así como por el pago de dividendos<sup>1</sup>.

Aunado a lo anterior, la forma en la que se emiten las acciones toma lugar cuando las empresas, constituidas de manera inicial por un grupo pequeño de socios inversionistas, crecen a tal grado que el capital requerido para el financiamiento de sus operaciones resulta insuficiente, razón por la que buscan captar recursos mediante un proceso de venta, conocido como oferta pública inicial. En ese tenor, para la negociación de acciones surgen las figuras de las bolsas de valores y las casas de bolsa.

En primer lugar, las bolsas de valores tienen el propósito de desarrollar las transacciones y promover la expansión y competitividad. Dentro de sus actividades se encuentran el establecimiento de instalaciones y mecanismos para la promoción de la oferta y demanda

---

<sup>1</sup> Se denomina dividendos a los beneficios generados durante un periodo por una empresa, los cuales son repartidos de manera proporcional entre los accionistas, tal que cada accionista recibirá un monto acorde al número de acciones que posee (Santander, 2025).

de valores (Grupo BMV, 2024). Por su parte, las casas de bolsa son instituciones que sirven de intermediarios en el mercado de capitales y llevan a cabo la negociación de las acciones mediante las órdenes de compra y venta.

Del mismo modo, los mercados de capitales se encuentran en constante evolución; en el siglo pasado los inversionistas que buscaban participar en el mercado de capitales recurrían a una casa de bolsa para comprar acciones a través de corredores. Hoy en día, cualquier persona puede adquirir títulos de capital desde sus dispositivos electrónicos. Bajo el mismo curso, los mercados financieros pasaron de estar ubicados en cafeterías y bares durante sus inicios, a establecerse en oficinas especializadas en la compra y venta de valores, en donde, dado el gran volumen de ordenamientos efectuados actualmente, su gestión es llevada a cabo de manera electrónica (Cecchetti & Schoenholtz, 2019).

Sin importar la ubicación de los mercados de capitales y la forma en la que son operados, la volatilidad ha sido un elemento inherente presente a lo largo de la historia. En términos generales, la volatilidad de los rendimientos de los mercados de capitales surge como respuesta de los agentes financieros a los cambios inesperados en la información, de modo que, si el impacto de la información es leve, entonces la magnitud de la volatilidad será baja. Contrariamente, si el impacto de la información es percibido alto, entonces el nivel de volatilidad será de gran relevancia. Empero, es interesante mencionar que el efecto que tiene la información positiva, sin importar que tan beneficiosa parezca, no es equivalente al efecto que tendrá información negativa del mismo nivel, ya que esta última tendrá un impacto notablemente mayor en el mercado (Hussain et al., 2019).

### **1.3. Asignación Eficiente de Capital en los Mercados Financieros**

El diseño de portafolios de inversión con rendimientos atractivos está estrechamente relacionado con la asignación de capital en cada uno de los activos financieros de la cartera de inversión de acuerdo con el riesgo asumido. La relación rendimiento y riesgo es el factor más importante que todos los inversionistas consideran al momento de tomar posiciones en los mercados financieros. Por esta razón, entender el riesgo en los mercados financieros otorga ventajas a los administradores de portafolios que les permite

implementar estrategias de inversión y desarrollar metodologías para un mejor control del riesgo.

En este sentido, la diversificación resulta ser una práctica de gran valía en la distribución de riesgos dentro del diseño y gestión de portafolios de inversión óptimos. Para reducir la probabilidad de sufrir una gran pérdida, es decir, minimizar la varianza del portafolio, es preferible la constitución de un portafolio conformado por un vasto número de activos financieros respecto a un portafolio diseñado a partir de un grupo pequeño de activos riesgosos.

De igual modo, Kinlaw (2017) señala que dada la gran variedad de activos financieros a los que se puede acceder al momento de construir portafolios de inversión, el primer paso que deben realizar los inversionistas consiste en identificar apropiadamente todas las opciones de inversión con las que cuentan para la toma de decisiones eficientes. Por consiguiente, el autor define una clase de activo como un conjunto de activos internamente homogéneos, pero externamente heterogéneos.

Así, a partir de lo anterior, se describen las siguientes consideraciones claves para la asignación de activos riesgosos dentro de los portafolios de inversión:

1. Agregación estable: los activos riesgosos dentro de las clases de activos se ponderan en base a los precios de estos, tal que para los activos riesgosos que tienen un precio de compra alto la capitalización se ve influenciada por este hecho y no solo por el factor del tiempo o la cantidad de títulos adquiridos. Debido a esto, es recomendable no considerar activos riesgosos con precios altos. No obstante, cabe mencionar que hoy en día algunas plataformas de inversión ofrecen la posibilidad de comprar solo una fracción de ciertas acciones, lo cual facilita el cumplimiento de este punto.
2. Homogeneidad interna: los activos financieros de una misma clase deben guardar la mayor similitud alcanzable para mantenerse en sintonía con las ponderaciones de la clase de activo a la que pertenecen.

3. Heterogeneidad externa: cada una de las clases de activos financieros en un portafolio de inversión deben ser lo mayormente distintas posible para evitar análisis redundantes en la gestión del portafolio de inversión.
4. Eficiencia de utilidad: el rendimiento esperado de un portafolio de inversión debe incrementar cuando se añade un activo a una clase de activos financieros sin importar cual habilidoso sea el inversionista.
5. Costos de transacción: la incorporación de una clase de activos financieros a un portafolio de inversión no debe representar costos de transacción excesivos, ni tampoco repercutir en gran medida en la liquidez, a fin de no afectar las ponderaciones en el resto de la cartera de inversión.

Cabe señalar que prácticamente todas las acciones nacionales y extranjeras de mercados desarrollados y emergentes tienen la posibilidad de cumplir con estas condiciones siempre y cuando el inversionista cuente con el suficiente criterio de racionalidad. Por último, Berns (2020) señala que el proceso de colocación de activos financieros tiene como eje central minimizar el riesgo y maximizar la utilidad del inversionista. Por consiguiente, los elementos necesarios para la minimización del riesgo deben buscar balance entre los objetivos del inversionista y la maximización del rendimiento. Para el cumplimiento de este planteamiento la solución para los inversionistas adversos al riesgo se enfoca en optimizar la función de utilidad al construir portafolios óptimos de mínima varianza.

#### **1.4. Diversificación de Activos Financieros**

En lo que concierne al estudio de la asignación de activos riesgosos y la conformación óptima de portafolios en el mercado de capitales, la diversificación internacional establece el principio básico de cualquier decisión de inversión basado en la aversión al riesgo. Al mismo tiempo, los inversionistas buscan constantemente la maximización de la utilidad, asumiendo en todo momento el menor riesgo posible. Para conseguir lo anterior se debe analizar un conjunto vasto de inversiones, cada uno con composiciones de clases de activos financieros diversificadas.

Bajo esta perspectiva, los inversionistas deben participar en una amplia gama de mercados de capitales a fin de tratar de identificar activos riesgosos con varianzas mínimas y correlaciones débiles. Como resultado, a partir de la experiencia, los

inversionistas se vuelven cada vez más conscientes de la importancia de la diversificación y de las ventajas ganadas al invertir estratégicamente a nivel internacional. Estas ventajas se pueden resumir en niveles de correlación menores, dada la composición de portafolios con activos riesgosos de diferentes mercados internacionales. Como punto de comparación, para los portafolios de inversión conformados por activos financieros provenientes de un mismo mercado doméstico, existe una mayor probabilidad de obtener altos niveles de correlación entre los activos financieros y, por lo tanto, aumentar la posibilidad de pérdidas agregadas (Vo, 2019; Vo & Chou, 2019).

En concordancia con lo expuesto, diversos estudios han dejado en claro que las estrategias de diversificación en los mercados de capitales permiten a los inversionistas reducir el nivel de pérdidas potenciales y mejorar el rendimiento esperado en las inversiones de portafolios. Más aún, la diversificación logra contrarrestar las fluctuaciones de precios provocadas por la ocurrencia de eventos inesperados en los mercados (Bhuiyan et al., 2023). Sin embargo, la estrategia de la diversificación del portafolio se ha tornado difícil de alcanzar en los últimos años debido a que los mercados financieros internacionales están cada vez más integrados. En este contexto, factores como la eliminación gradual de las regulaciones financieras, así como de las barreras de los flujos de inversión, han sido cruciales en la reducción de los beneficios de la diversificación durante las últimas tres décadas.

Como resultado, la efectividad de las estrategias de diversificación del portafolio depende en gran medida del grado de integración entre los mercados financieros internacionales, es decir, si dos o más mercados financieros internacionales están altamente ligados o perfectamente correlacionados. Es claro que cuando los mercados tienen una alta correspondencia, los beneficios de la diversificación, la reducción del riesgo en los portafolios de inversión y la mejora del rendimiento esperado se ven limitados en un horizonte de tiempo determinado. Al respecto, algunos análisis han demostrado que las repercusiones de la integración financiera son un fenómeno latente, el cual se torna más perceptible durante periodos de crisis financieras o crisis sanitarias debido a la presencia del contagio financiero (Menon et al., 2009). En consecuencia, los inversionistas enfrentan

dificultades para el diseño de estrategias de inversión óptimas como resultado del incremento de la integración financiera y la correlación alta entre los activos financieros.

Como ejemplo de los estudios señalados en el párrafo previo se encuentra el de Christoffersen et al. (2012), en donde mencionan que el fenómeno del contagio financiero es más perceptible en periodos de extrema volatilidad, particularmente en los mercados de capitales de la región de Europa. También, De Roon et al. (2001) encontraron evidencia sólida sobre los beneficios de la diversificación, particularmente cuando se invierte en mercados financieros emergentes internacionales. Por su parte, Li et al. (2003) señalan que los beneficios de la diversificación internacional son cruciales para los inversionistas estadounidenses. Finalmente, Lewis (2006) proporciona evidencia de que los beneficios de la diversificación se pueden conseguir al invertir directamente en acciones extranjeras.

## Capítulo 2. Teoría moderna del portafolio

La teoría moderna del portafolio fue desarrollada en gran medida por Markowitz en 1952, y aunque han pasado más de 50 años desde su concepción, esta teoría continúa siendo la aportación más relevante en la administración de carteras de inversión. Por medio del estudio de Markowitz se logran determinar portafolios eficientes y óptimos de acuerdo con las preferencias de los inversionistas adversos al riesgo (Fabozzi et al., 2002). Bajo este foco, los inversionistas siempre buscan maximizar su función de utilidad, asumiendo el menor riesgo posible. Como consecuencia, los administradores de portafolios tienen que analizar un conjunto infinito de alternativas bajo el criterio de racionalidad con el objeto de desarrollar una asignación eficiente de los recursos financieros dentro de la amplia gama de mercados de capital a nivel internacional.

De acuerdo con la teoría de Markowitz, el proceso de la selección del portafolio consiste en dos etapas. En la primera etapa, la capacidad de observación y experiencia son el punto de partida de todo inversionista para la identificación de oportunidades de inversión. La segunda etapa hace referencia a las estrategias o técnicas implementadas para evaluar el desempeño de los activos riesgosos en periodos de calma y turbulencia financiera, lo que permite a los inversionistas llevar a cabo una eficiente distribución de los activos financieros que componen un portafolio de inversión. En particular, la teoría moderna del portafolio de Markowitz se enfoca en la segunda etapa, en donde la racionalidad de los inversionistas direcciona la toma de decisiones de inversión (Markowitz, 1952).

Resumiendo lo puntualizado, durante el capítulo uno se expusieron las bases necesarias para comprender de mejor manera la segunda etapa del proceso de selección de portafolios. Sobra mencionar que, de igual forma, durante el primer capítulo se abordaron implícitamente algunos elementos de la primera etapa. Ahora bien, antes de comenzar el estudio de la teoría de Markowitz es necesario entender el criterio de racionalidad de los inversionistas, el cual es explicado en el siguiente subapartado.

## 2.1. Inversionistas racionales

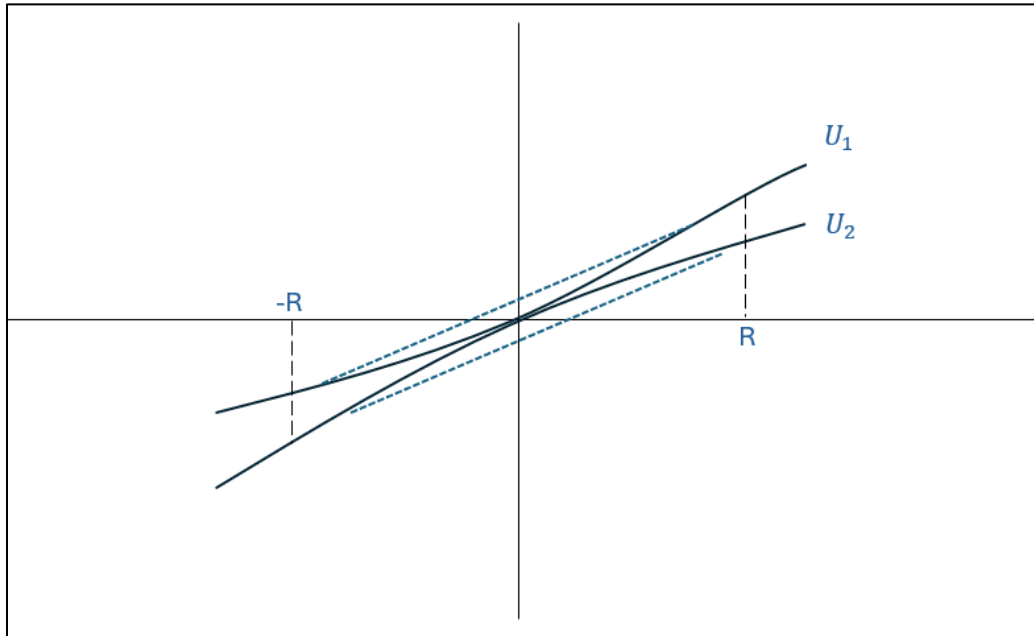
De acuerdo la teoría financiera, los inversionistas son racionales por naturaleza, puesto que sus decisiones de inversión están restringidas a un presupuesto. De esta manera, el principal desafío que enfrentan los inversionistas racionales es la aversión al riesgo. Bajo esta línea y en conformidad con el concepto de riesgo, los inversionistas racionales y adversos al riesgo prefieren rendimientos esperados altos, pero con desviación estándar mínima para un periodo de tiempo determinado. Consecuentemente, los inversionistas en los mercados de capitales adoptan un comportamiento racional y en sinergia con la teoría económica de selección, esto es, los inversionistas buscan identificar todas las alternativas de inversión disponibles para la colocación eficiente del capital restringido y posteriormente realizan la selección del conjunto de oportunidades de inversión con base en la maximización de la utilidad del inversionista, la cual a su vez es determinada por la relación rendimiento-riesgo.

En el trabajo de Markowitz y Blay (2013) se acepta la regla de la utilidad esperada como marco de referencia para la toma de decisiones racionales de mercado en inversionistas. Así, los inversionistas toman decisiones de inversión que evitan el riesgo tal que ante un activo financiero con rendimiento certero de  $R\%$  y otro activo financiero con rendimiento probable de  $R\%$ , el primer activo maximiza en todo momento el valor esperado de la utilidad del inversionista.

Paralelamente, los inversionistas asumen funciones de utilidad con distintas formas según su tolerancia al riesgo. Para entender la idea anterior es necesario considerar lo siguiente:

- i) Un plano bidimensional en donde el rendimiento es presentado por las abscisas y la utilidad por las ordenadas tal como se observa en la Figura 1.
- ii) Si un portafolio tiene la misma probabilidad de generar un rendimiento  $R$  o de generar una pérdida  $R$ , entonces el rendimiento esperado será cero.

- iii) Un escenario en el que dos inversionistas tienen el mismo portafolio, con la diferencia de que el primer inversionista tiene una función de utilidad con forma cóncava<sup>2</sup> y el segundo tiene una función de utilidad con forma convexa<sup>3</sup>.



**Figura1.** Utilidades en inversionistas.

Fuente: elaboración propia a partir de Markowitz y Blay (2013).

En base a lo descrito por Markowitz y Blay (2013), el nivel de utilidad que se obtiene en la curva convexa ( $U_1$ ) siempre es creciente conforme aumenta el probable nivel de rendimiento, pese a que es sabido que el rendimiento esperado es cero. Contrariamente, para la función de utilidad con forma cóncava ( $U_2$ ) el nivel de utilidad no sigue una tendencia creciente debido a que contempla la posibilidad de no tener rendimientos. En conclusión, este resultado demuestra que el inversionista con función de utilidad convexa es indiferente al riesgo, mientras que el inversionista adverso es representado mediante una función de utilidad cóncava.

---

<sup>2</sup> Una curva es cóncava si para cualquier línea que une dos puntos cualesquiera de la curva, la línea se encuentra en la curva o por debajo de la curva.

<sup>3</sup> Una curva es convexa si para cualquier línea que une dos puntos cualesquiera de la curva, la línea se encuentra en la curva o por encima de la curva.

Conforme a lo anterior, en la teoría moderna del portafolio de Markowitz (1952) la maximización de los rendimientos esperados se plantea inicialmente como hipótesis referencial del comportamiento de los inversionistas racionales. No obstante, esta hipótesis enseguida es cuestionada, no porque sea errónea, sino porque dada la complejidad del portafolio se deben considerar factores adicionales. En efecto, los inversionistas racionales no solo deben considerar los rendimientos esperados como algo deseable, sino también las varianzas de estos como algo indeseable. Derivado de lo anterior los inversionistas adoptan un razonamiento sensato, conocido en la teoría financiera como la regla de los rendimientos esperados – varianza de los rendimientos en la inversión, la cual se explica con mayor profundidad en la siguiente sección.

## 2.2. Modelo de Media-Varianza

Los resultados de la teoría moderna del portafolio presentados a lo largo de este capítulo no son más que la interpretación de Markowitz (1952) del modelo de media-varianza, en donde los supuestos financieros y matemáticos necesarios para el modelo de Markowitz son la optimización para un único horizonte de tiempo, la maximización de los rendimientos y la minimización del riesgo. Analíticamente, se parte de: un total de  $n$  activos, en donde  $r_{it}$  es el rendimiento anticipado al tiempo  $t$  del  $i$  – ésimo activo riesgoso, una tasa de descuento en el tiempo  $t$  para el rendimiento de cada activo riesgoso, denotada como  $d_{it}$ , y, el monto invertido en el  $i$  – ésimo activo representado por  $X_i$ . A partir de esto, el rendimiento anticipado descontado del portafolio se expresa como:

$$R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n d_{it} r_{it} X_i = \sum_{i=1}^n X_i \left( \sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \right). \quad (1)$$

Si se denota  $R_i = \sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it}$  como el rendimiento descontado, entonces

$$R = \sum_{i=1}^n X_i R_i. \quad (2)$$

Dado que  $\sum_{i=1}^n X_i = 1$ , entonces el rendimiento  $R$  del portafolio se obtiene como un promedio ponderado de los  $R_i$  rendimientos de cada activo riesgoso. Adicionalmente, es conveniente considerar un modelo estático en el que los rendimientos de los activos

riesgosos pasan de ser considerados como series de tiempo  $(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{it}, \dots)$ , a ser tomados como flujos de rendimiento  $r_i$ . Por consiguiente, el rendimiento total del portafolio es definido por:

$$R = \sum_{i=1}^n X_i r_i. \quad (3)$$

Bajo el contexto en el que el inversionista racional busca maximizar el rendimiento esperado, la diversificación debe ser tomada como un elemento fundamental en el proceso de la selección del portafolio de inversión. En otras palabras, el inversionista debe diversificar su capital de inversión entre todos aquellos activos financieros que minimicen el riesgo y maximicen el rendimiento esperado. Ahora bien, el portafolio con el máximo rendimiento esperado no necesariamente es el portafolio de mínima varianza. En este sentido, el inversionista se encuentra frente al dilema de tomar el máximo rendimiento esperado o tomar un rendimiento distinto y reducir la varianza de los rendimientos del portafolio.

Para el análisis del modelo de media-varianza es necesario retomar algunos conceptos estadísticos tales como el valor esperado o media y la varianza. De acuerdo con Mood et al. (1974) el valor esperado es el centro de gravedad o centroide de una variable aleatoria (en este caso denotada como  $Y$ ) que indica de manera medible donde se centran los valores de dicha variable. Matemáticamente, el valor esperado del portafolio se define como:

$$E[Y] = \sum y_i f_Y(y_i) = E. \quad (4)$$

De la misma forma, la varianza es definida como una medida de la dispersión de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria y se expresa como sigue:

$$var[Y] = \sum (y_i - E)^2 f_Y(y_i) = V. \quad (5)$$

Sin embargo, es importante señalar que la varianza representa el segundo momento de la distribución de la variable aleatoria y se expresa en unidades cuadradas. Por tal motivo, resulta necesario expresar la varianza en las mismas unidades que la variable aleatoria y

la media. Para lograr esto se puede obtener la raíz cuadrada de la varianza, también conocida como desviación estándar, la cual se define a continuación:

$$\sigma_Y = +\sqrt{\text{var}[Y]} = \sigma. \quad (6)$$

Definidos estos conceptos, considere un número  $n$  de variables aleatorias  $R_1, R_2, \dots, R_n$  tal que  $R$  es una combinación lineal de las variables aleatorias anteriores:

$$R = a_1R_1 + a_2R_2 + \dots + a_nR_n. \quad (7)$$

Entonces,  $R$  es una variable aleatoria con media:

$$E[R] = E[a_1R_1 + a_2R_2 + \dots + a_nR_n] = a_1E[R_1] + a_2E[R_2] + \dots + a_nE[R_n]. \quad (8)$$

Para determinar la varianza de  $R$ , es necesario definir antes las covarianzas entre las variables aleatorias, las cuales se expresan matemáticamente como:

$$\text{cov}[R_i, R_j] = E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])] = \sigma_{ij}. \quad (9)$$

Como resultado, la varianza está determinada por:

$$\text{var}[R] = \sum_{i=1}^n a_i^2 V[R_i] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>1}^n a_i a_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \sigma_{ij}. \quad (10)$$

De este modo, si  $R_i$  es la variable aleatoria del rendimiento del  $i$  –ésimo activo riesgoso de un portafolio,  $\mu_i$  el valor esperado del rendimiento para ese activo,  $\sigma_{ii}$  la varianza del rendimiento de ese activo,  $\sigma_{ij}$  la covarianza de los rendimientos del  $i$  –ésimo y  $j$  –ésimo activo y finalmente  $X_i$  el porcentaje del capital destinado a invertir en  $i$  –ésimo activo, entonces el rendimiento total del portafolio es:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i X_i \quad (11)$$

Es importante hacer énfasis en que la suma de las ponderaciones de los activos riesgosos es igual a uno, es decir,  $\sum X_i = 1$  y de forma adicional para el análisis inicial  $X_i \geq 0$ , lo cual

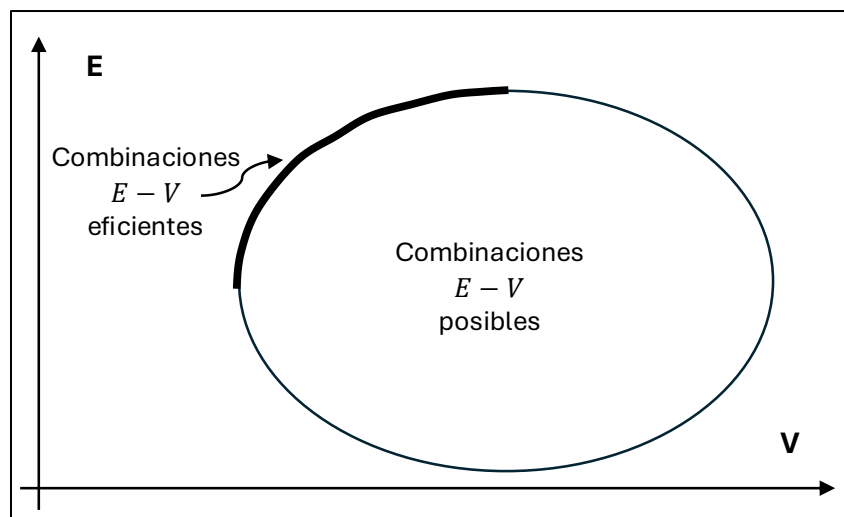
implica que en el portafolio no existen ventas en corto<sup>4</sup>. Por consiguiente, el rendimiento esperado y la varianza del rendimiento del portafolio se definen, respectivamente como:

$$E = \sum_{i=1}^n X_i \mu_i. \quad (12)$$

y

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} X_i X_j. \quad (13)$$

Para el inversionista racional y adverso al riesgo, en la construcción del portafolio de inversión se debe tomar en cuenta las distintas combinaciones de rendimiento y varianza ( $E - V$ ) acorde a las ponderaciones  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de los diferentes activos riesgosos. Notablemente, la regla de media-varianza señala que los inversionistas deben tener preferencia por aquellos portafolios que tienen una varianza mínima para un rendimiento, o bien, un rendimiento máximo para una varianza dada.



**Figura 2.** Combinaciones  $E - V$ .

Fuente: elaboración propia a partir de Markowitz (1952).

<sup>4</sup> Una venta en corto ocurre cuando se pide prestada una acción a un tercero y el vendedor se compromete a regresarla a cambio de una prima. El propósito de esta operación es generar ganancias cuando se cree que el valor de la acción disminuirá en el corto plazo, de modo que el rendimiento sucede cuando se vende la acción a un precio mayor y se compra posteriormente a uno menor (Ghon, 2003).

La Figura 2 muestra gráficamente las combinaciones eficientes de media-varianza dentro del portafolio de inversión de acuerdo con las preferencias del inversionista. No obstante, en el siguiente apartado se describirá analíticamente el cálculo de combinaciones eficientes de los portafolios de media-varianza, conjunto conocido en la teoría financiera como frontera eficiente, en donde, para fines de una revisión más técnica, se iniciará con el caso de un portafolio de inversión compuesto por tres activos riesgosos, bajo el entendimiento de que el proceso solo es ilustrativo y la extensión a más activos riesgosos es posible siguiendo el mismo procedimiento.

### 2.3. Frontera eficiente

Para el cálculo de la frontera eficiente al menos se tienen que satisfacer dos condiciones; la primera es que el inversionista debe tener presente en todo momento la regla de media-varianza como eje central de su comportamiento, mientras que la segunda condición señala que en el proceso se deben alcanzar valores razonables de  $\mu_i$  y  $\sigma_{ij}$ . Dicho esto, se procede a desarrollar el planteamiento del modelo para el caso de tres activos como sigue.

Considerando:

$$i) E = \sum_{i=1}^3 X_i \mu_i. \quad (14)$$

$$ii) V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} X_i X_j. \quad (15)$$

$$iii) \sum_{i=1}^3 X_i = 1. \quad (16)$$

$$iv) X_i \geq 0 \text{ para } i = 1,2,3. \quad (17)$$

Además, la simplificación del modelo de media-varianza se puede llevar a cabo si  $X_3$  se expresa en términos de  $X_1$  y  $X_2$ , tal que  $X_3 = 1 - X_1 - X_2$ . De esta manera, el conjunto de portafolios de inversión posibles está formado por todos los portafolios de inversión que cumplen con las siguientes condiciones:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \text{ y } 1 - X_1 - X_2 \geq 0 \quad (18)$$

Con este cambio es posible trabajar en dos dimensiones, tal que todo el conjunto de portafolios posibles se encuentra en el triángulo  $abc$  de la Figura 4 y cumplen en todo momento con las condiciones de la ecuación (18). Asimismo, en el planteamiento del

problema se considera una curva en donde los puntos que la conforman representan los portafolios de inversión posibles con el mismo nivel de rendimiento esperado, la cual es denominada como isomedia. Análogamente, la curva que representa a los portafolios de inversión posibles con la misma varianza es conocida como isovarianza.

Por otro lado, partiendo de la ecuación (14) se puede identificar que la forma de  $E$  es una línea recta definida como:

$$E = X_1\mu_1 + X_2\mu_2 + X_3\mu_3 = X_1\mu_1 + X_2\mu_2 + (1 - X_1 - X_2)\mu_3. \quad (19)$$

Despejando a  $X_2$  de (19) se tiene:

$$X_2 = \frac{E - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} - \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} X_1. \quad (20)$$

De la misma manera, desde la ecuación (15) se puede identificar que  $V$  es una elipse, la cual está expresada de la siguiente manera:

$$V = X_1^2\sigma_{11} + X_2^2\sigma_{22} + X_3^2\sigma_{33} + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_2X_3\sigma_{23}. \quad (21)$$

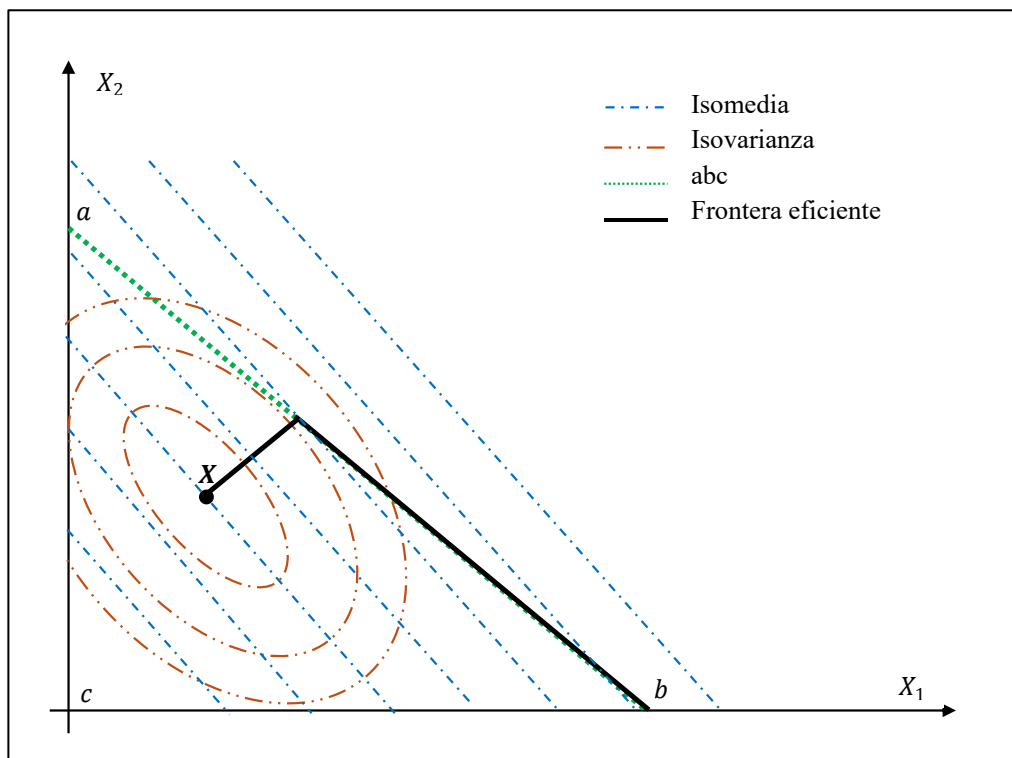
Despejando la ecuación anterior se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} &(\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{13})X_1^2 + (\sigma_{22} + \sigma_{33} - 2\sigma_{23})X_2^2 + (2\sigma_{12} + 2\sigma_{33} - 2\sigma_{13} - 2\sigma_{23})X_1X_2 \\ &+ (2\sigma_{13} - 2\sigma_{33})X_1 + (2\sigma_{23} - 2\sigma_{33})X_2 + \sigma_{33} + V = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Como resultado, el centro del conjunto de isovarianzas es el portafolio de inversión con varianza mínima, el cual está representado en la Figura 3 por  $X$ . Gráficamente, no es difícil determinar que cuanto más lejos de  $X$  se encuentren los diferentes portafolios de inversión mayor será la varianza. Por ende, en el conjunto infinito de alternativas de inversión no existe otro portafolio con varianza más pequeña que  $X$  con el mismo o mayor rendimiento esperado. Además, para cada isomedia con rendimiento dado, el portafolio de inversión con varianza mínima es aquel en el que la isomedia es tangente a una isovarianza.

De este modo, es claro que conforme aumenta el rendimiento esperado, la varianza de los portafolios de inversión incrementa. En este sentido, los portafolios de inversión óptimos, dentro del conjunto infinito de alternativas, se encuentran en la línea recta de color negro de la Figura 3, sin embargo, es importante señalar que conforme se acercan los portafolios

de inversión al punto  $b$ , estos dejan de ser considerados prácticos dada su baja diversificación.



**Figura 3.** Frontera eficiente para un portafolio de tres activos.

Fuente: elaboración propia a partir de Markowitz (1952).

En esencia, la regla del modelo de media-varianza es una guía para la eficiente asignación de recursos en los mercados de capital, debido a que incorpora el concepto de diversificación para un vasto conjunto de combinaciones de media y varianza de rendimientos. Asimismo, es importante señalar que una cartera diversificada es aquella en la que todos los activos riesgosos pertenecen a distintos sectores o industrias. Por consiguiente, se debe evitar invertir en clases de activos con covarianzas altas entre sí.

Finalmente, Markowitz (1952) concluye su obra externando que, para inversionistas que consideran el rendimiento como algo deseable y el riesgo y las apuestas como algo no deseable, entonces la eficiencia de media-varianza resulta ser un modelo de inversión adecuado. Es preciso resaltar que esta teoría financiera no solo se puede emplear en análisis teóricos de la selección de portafolios, sino también en la construcción de

portafolios de inversión en la práctica financiera debido a que la teoría de Markowitz permite vislumbrar los distintos efectos que se producen cuando se realizan cambios tanto en las ponderaciones de los activos riesgosos, como en los enfoques de inversión.

No obstante, para el uso adecuado del modelo de media-varianza es importante contar con procedimientos apropiados para el cálculo de los rendimientos esperados y la varianza de los rendimientos. Estos procedimientos deben fundamentarse en técnicas estadísticas y de juicios racionales. La principal sugerencia para el cálculo de combinaciones eficientes de media-varianza es partir de un conjunto de observaciones históricas para cada activo riesgoso y posteriormente obtener los estimadores  $\mu_i$  y  $\sigma_{ii}$ . En cuanto al cálculo de combinaciones eficientes, existen distintas metodologías que pueden resultar útiles, según el criterio y enfoque de cada inversionista.

## 2.4. Portafolios óptimos

En términos generales, los inversionistas adversos al riesgo construyen portafolios óptimos basados en su tolerancia al nivel de riesgo. La frontera eficiente decreta el conjunto de portafolios con el rendimiento esperado máximo para cada nivel de riesgo dado, o lo que es equivalente, el riesgo mínimo para cada nivel de rendimiento dado. Además, la determinación de portafolios de inversión óptimos se puede llevar a cabo bajo distintas consideraciones, tales como la posibilidad o restricción de ventas en corto y la comparativa con un rendimiento libre de riesgo. En este contexto, la programación cuadrática<sup>5</sup> es generalmente el algoritmo utilizado para la obtención de portafolios de inversión óptimos con rendimiento esperado máximo y varianza mínima. A continuación, se presentan los casos de optimización matemática descritos por Elton et al. (2014). De esta manera, el proceso se describe para un portafolio compuesto por tres activos riesgosos y se hace una extensión del procedimiento en forma matricial para un portafolio de inversión compuesto por  $n$  activos financieros.

---

<sup>5</sup> La programación cuadrática es un procedimiento de análisis numérico, el cual consiste en minimizar o maximizar una función objetivo expresada en términos cuadráticos y sujeta a restricciones de desigualdad, igualdad lineal y límites (MATLAB, 2024).

Caso 1. Existencia de ventas en corto y tasa libre de riesgo.

La existencia de un activo financiero que paga una tasa libre de riesgo en el portafolio de inversión conduce a la existencia de un único portafolio de inversión óptimo, el cual es preferible al resto de portafolios que conforman la frontera eficiente. En un plano cartesiano en el que se asume que:

- a) El eje de las abscisas está determinado por la desviación estándar o riesgo del portafolio de inversión y el rendimiento esperado por el eje de las ordenadas.
- b) Existe un punto que determina la tasa libre de riesgo en el eje de las ordenadas  $(0, R_F)$ .
- c) Existe otro punto que pertenece al conjunto de la frontera eficiente  $(\sigma, \mu)$ , el cual establece que el portafolio de inversión con rendimiento esperado máximo y varianza mínima es  $(\sigma^*, \mu^*)$ .

Entonces, el punto tangente a la frontera eficiente que está representado por la línea recta entre los dos puntos anteriores es considerado el punto en el que se encuentra el portafolio de inversión óptimo. En base a esto, el portafolio de inversión óptimo se obtiene al resolver el siguiente problema matemático:

$$\max \theta = \frac{R_P - R_F}{\sigma_P}. \quad (23)$$

Sujeta a  $\sum_{i=1}^n X_i = 1$ .

La solución a este problema matemático se puede dar mediante el método de multiplicadores de Lagrange. De esta manera, la solución óptima para un portafolio de inversión compuesto por tres activos riesgosos está definida por:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^3 X_i (\mu_i - R_F)}{(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_i X_j \sigma_{ij})^{1/2}}. \quad (24)$$

Un hecho a destacar es que  $R_F = \sum_{i=1}^3 X_i R_F$ .

Continuando, la ecuación (24) se deriva con respecto a las ponderaciones de cada uno de los activos riesgosos,  $X_k$ , es decir,

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dX_k} &= \frac{d}{dX_k} \left( \sum_{i=1}^3 X_i (\mu_i - R_F) \right) \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_i X_j \sigma_{ij} \right)^{-1/2} \\ &= - \frac{\sum_{i=1}^3 X_i (\mu_i - R_F)}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_i X_j \sigma_{ij}} \left( X_k \sigma_{kk} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^3 X_i \sigma_{ki} \right) + (\mu_k - R_F). \quad (25)\end{aligned}$$

Si  $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^3 X_i (\mu_i - R_F)}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_i X_j \sigma_{ij}}$ , que es igual a la constante  $\frac{R_P - R_F}{\sigma_P}$  y se iguala la derivada a cero, entonces:

$$\frac{d\theta}{dX_k} = -\lambda \left( X_k \sigma_{kk} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^3 X_i \sigma_{ki} \right) + (\mu_k - R_F) = 0. \quad (26)$$

Por lo tanto, la expresión anterior se puede definir como un sistema de ecuaciones:

$$\lambda X_1 \sigma_{11} + \lambda X_2 \sigma_{12} + \lambda X_3 \sigma_{13} = \mu_1 - R_F$$

$$\lambda X_2 \sigma_{22} + \lambda X_1 \sigma_{12} + \lambda X_3 \sigma_{23} = \mu_2 - R_F$$

$$\lambda X_3 \sigma_{33} + \lambda X_1 \sigma_{13} + \lambda X_2 \sigma_{23} = \mu_3 - R_F$$

Adicionalmente, si definimos a  $Z_k = \lambda X_k$ , y la sustituimos en el sistema de ecuaciones anterior, se tiene que  $Z_k$  determina la proporción de la parte invertida en el activo riesgoso  $X_k$ , esto es,  $X_k = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^3 Z_i}$ . Consecuentemente, el sistema de ecuaciones se reescribe de la siguiente forma:

$$Z_1 \sigma_{11} + Z_2 \sigma_{12} + Z_3 \sigma_{13} = \mu_1 - R_F$$

$$Z_1 \sigma_{12} + Z_2 \sigma_{22} + Z_3 \sigma_{23} = \mu_2 - R_F$$

$$Z_1 \sigma_{13} + Z_2 \sigma_{32} + Z_3 \sigma_{33} = \mu_3 - R_F$$

Se puede inferir que la solución al sistema de ecuaciones anterior se puede obtener mediante distintas técnicas y que una vez obtenida la solución de las  $Z_k$  se procede a determinar el valor de las distintas  $X_k$  o ponderaciones óptimas que minimizan la varianza del portafolio de inversión.

Por otro lado, este problema matemático se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\max \theta = \frac{X' \mu - X' \mathbf{1} R_F}{X' \Sigma X}. \quad (27)$$

Sujeta a  $X' \mathbf{1} = 1$

donde:

$X$  es el vector de ponderaciones.

$\mu$  es el vector de rendimientos de los activos riesgosos.

$R_F$  es la tasa libre de riesgo.

$\Sigma$  es la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos de los activos riesgosos.

Ahora bien, si se toma la primera derivada de  $\theta$  con respecto a  $X$  e igualando a cero se tiene que

$$\frac{d\theta}{dX} = (X' \mu - X' \mathbf{1} R_F) \left( -\frac{1}{2} \right) (X' \Sigma X)^{-\frac{3}{2}} (2 \Sigma X) + (X' \Sigma X)^{-\frac{1}{2}} (\mu - \mathbf{1} R_F) = 0. \quad (28)$$

De esta manera, la ecuación (28) se puede expresar como

$$-(X' \mu - X' \mathbf{1} R_F) (X' \Sigma X)^{-1} (\Sigma X) + (\mu - \mathbf{1} R_F) = 0. \quad (29)$$

Donde  $(X' \mu - X' \mathbf{1} R_F) (X' \Sigma X)^{-1}$  es la constante  $\frac{R_P - R_F}{\sigma_P}$ , la cual es definida como  $\lambda$  y se sustituye en la ecuación (29) de la siguiente manera:

$$\lambda \Sigma X = \Sigma Z = \mu - \mathbf{1} R_F. \quad (30)$$

De manera similar, si suponemos que  $Z = \lambda X$  se tiene que

$$Z = \Sigma^{-1} b. \quad (31)$$

Donde  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_F$ , y al igual que en el caso del portafolio de inversión con tres activos financieros, la parte proporcional invertida en cada uno de los activos riesgosos,  $X_k$ , se puede obtener de la siguiente manera:

$$X_k = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^N Z_i}$$

Caso 2. Existencia de activo financiero libre de riesgo y no existencia de ventas en corto.

El planteamiento del problema de optimización es definido con una restricción de desigualdad para las proporciones de cada activo financiero, esto es,  $X_k > 0$ , de modo que:

$$\max \theta = \frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\mu} - R_F}{\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X}}. \quad (32)$$

Sujeta a:

$$\mathbf{X}'\mathbf{1} = 1$$

$$X_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, N$$

La solución al problema de optimización con la nueva restricción se obtiene mediante programación cuadrática. En este contexto, la literatura ha utilizado diferentes softwares computacionales que determinan la solución del problema de optimización, tales como Python o R Studio.

Caso 3. Existencia de ventas en corto en las proporciones óptimas y minimización del riesgo del portafolio de inversión.

En este caso, el objetivo del planteamiento del problema matemático consiste en reducir la varianza del portafolio de inversión, pero manteniendo el mismo rendimiento esperado, el cual es denotado como  $R_p$ . El planteamiento del problema de optimización para un portafolio de inversión de tres activos riesgosos está definido de la siguiente manera:

$$\min X_1^2\sigma_{11} + X_2^2\sigma_{22} + X_3^2\sigma_{33} + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_2X_3\sigma_{23}. \quad (33)$$

Sujeto a:

$$X_1\mu_1 + X_2\mu_2 + X_3\mu_3 = R_p$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

En consecuencia, la función del multiplicador de Lagrange se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2) &= X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_2 X_3 \sigma_{23} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} \\ &+ \lambda_1 (X_1 \mu_1 + X_2 \mu_2 + X_3 \mu_3 - R_p) + \lambda_2 (X_1 + X_2 + X_3 - 1). \end{aligned} \quad (34)$$

De manera similar, si se deriva la función del multiplicador de Lagrange con respecto a las proporciones de inversión de cada activo financiero y los parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se tiene el siguiente sistema:

$$\frac{d\mathcal{L}(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{dX_1} = 2X_1 \sigma_{11} + 2X_2 \sigma_{12} + 2X_3 \sigma_{13} + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 = 0. \quad (35)$$

$$\frac{d\mathcal{L}(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{dX_2} = 2X_2 \sigma_{22} + 2X_1 \sigma_{12} + 2X_3 \sigma_{23} + \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 = 0. \quad (36)$$

$$\frac{d\mathcal{L}(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{dX_3} = 2X_3 \sigma_{33} + 2X_2 \sigma_{23} + 2X_1 \sigma_{13} + \lambda_1 \mu_3 + \lambda_2 = 0. \quad (37)$$

$$\frac{d\mathcal{L}(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_1} = X_1 \mu_1 + X_2 \mu_2 + X_3 \mu_3 - R_p = 0. \quad (38)$$

$$\frac{d\mathcal{L}(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_2} = X_1 + X_2 + X_3 - 1 = 0. \quad (39)$$

Por lo que el conjunto de ecuaciones a resolver es:

$$2X_1 \sigma_{11} + 2X_2 \sigma_{12} + 2X_3 \sigma_{13} + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 = 0$$

$$2X_2 \sigma_{22} + 2X_1 \sigma_{12} + 2X_3 \sigma_{23} + \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 = 0$$

$$2X_3 \sigma_{33} + 2X_2 \sigma_{23} + 2X_1 \sigma_{13} + \lambda_1 \mu_3 + \lambda_2 = 0$$

$$X_1 \mu_1 + X_2 \mu_2 + X_3 \mu_3 - R_p = 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 - 1 = 0$$

En consecuencia, si el problema de optimización planteado se define en forma matricial, entonces su solución se obtiene al calcular la matriz inversa de la matriz que es multiplicada por el vector de proporciones de inversión y los parámetros  $\lambda_i$ , es decir:

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{23} & \mu_2 & 1 \\ 2\sigma_{13} & 2\sigma_{23} & 2\sigma_{33} & \mu_3 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{23} & \mu_2 & 1 \\ 2\sigma_{13} & 2\sigma_{23} & 2\sigma_{33} & \mu_3 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, en la medida que los inversionistas construyen portafolios de inversión con un mayor número de activos riesgosos la dimensión de la matriz inversa se incrementa, lo que puede complicar su cálculo.

Para disminuir esta dificultad, el problema de optimización planteado se puede reformular en su forma matricial de la siguiente manera:

$$\min \mathbf{X}'\Sigma\mathbf{X} . \tag{40}$$

Sujeto a:

$$\mathbf{X}'\boldsymbol{\mu} = R_p$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{1} = 1$$

Adicionalmente, para facilitar el planteamiento del problema matemático se definen las siguientes matrices para las dos restricciones del problema:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ E[R_1] & E[R_2] & \dots & E[R_N] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ E[R_N] \end{bmatrix}$$

donde  $\boldsymbol{\beta}$  es una matriz de dimensión  $2 \times N$  y  $\mathbf{b}$  es un vector de dimensión  $2 \times 1$ .

En el mismo sentido, las restricciones expresadas en forma matricial están definidas de la siguiente manera:

$$\beta X = b$$

De esta manera, la función de multiplicadores de Lagrange resulta:

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = X' \Sigma X + \lambda(\beta X - b).$$

Posteriormente, derivando  $\mathcal{L}(X, \lambda)$  respecto a cada argumento, tenemos:

$$\frac{d\mathcal{L}(X, \lambda)}{dX} = 2\Sigma X + \lambda\beta = 0. \quad (41)$$

$$\frac{d\mathcal{L}(X, \lambda)}{d\lambda} = \beta X - b = 0. \quad (42)$$

Si  $X = -\frac{1}{2}\lambda\beta\Sigma^{-1}$ ,  $\lambda^* = -2\Sigma X\beta^{-1}$  y  $\beta X = b$ , entonces<sup>6</sup> la solución del problema de optimización se obtiene al sustituir el valor óptimo del vector de los parámetros  $\lambda^*$  y el vector  $b$  en  $X$ , es decir,

$$\beta\left(-\frac{1}{2}-2\Sigma X\beta^{-1}\beta\Sigma^{-1}\right) = b. \quad (43)$$

$$\beta(\Sigma X\beta^{-1}\beta\Sigma^{-1}) = b. \quad (44)$$

De esta manera, la solución óptima de las proporciones de inversión es

$$X = \Sigma^{-1}\beta'(\beta\Sigma^{-1}\beta')^{-1}b. \quad (45)$$

Caso 4. No existencia de ventas en corto en la solución óptima de las proporciones de inversión y minimización del riesgo del portafolio de inversión.

El planteamiento del problema de optimización se define de la siguiente manera:

$$\min X' \Sigma X. \quad (46)$$

---

<sup>6</sup> Para el despeje se supone cierta la matriz inversa de  $\beta$ , pese a que no es una matriz cuadrada. No obstante, este despeje puede sustentarse en la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose (Alves y Hussein, 2012).

Sujeto a:

$$\mathbf{X}'\boldsymbol{\mu} = R_p$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{1} = 1$$

$$X_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, N$$

La solución al modelo anterior, al igual que en el Caso 2, se desarrolla mediante el uso de programación cuadrática.

## Capítulo 3. Técnica de eficiencia re-muestreada

### 3.1. Descripción de los datos

Para la construcción de portafolios eficientes mediante la aplicación de la técnica de eficiencia re-muestreada se ha construido un portafolio compuesto por 20 activos riesgosos de distintos mercados de capitales. En términos generales, el portafolio se encuentra distribuido en cuatro distintos índices accionarios internacionales con el propósito de atender el problema de la creciente integración financiera, así como de obtener beneficios de la diversificación internacional. Los índices accionarios seleccionados para el diseño del portafolio de inversión son el IPC de México, DAX de Alemania, NYSE de Estados Unidos y Nikkei de Japón. A su vez, los sectores que se eligieron fueron los siguientes: industrial, energético, consumo frecuente, farmacéutico, aeroespacial, transporte, servicios financieros y comercial integrado. En la Tabla 1 se describen los activos financieros seleccionados para la construcción del portafolio de inversión.

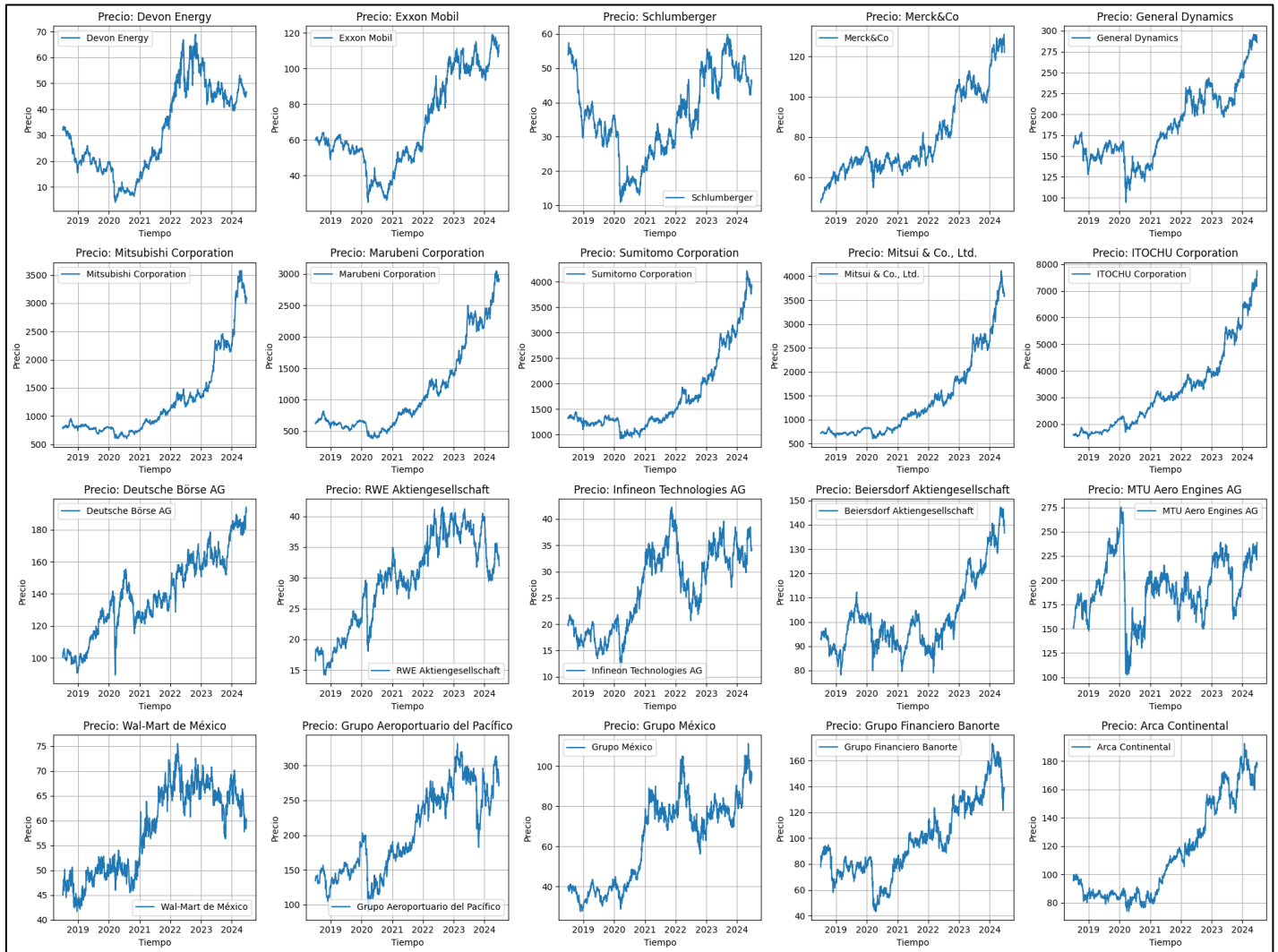
Para el análisis preliminar se utilizan los precios de cierre diario de los activos financieros que comprende el periodo del 1 de julio de 2018 al 1 de julio de 2024, es decir, un total de 1,560 observaciones para cada activo financiero. Las series financieras de datos históricos para cada activo financiero fueron obtenidas de la plataforma Yahoo Finance. La Figura 4 muestra el comportamiento de los precios de los activos riesgosos a través del tiempo. La mayoría de los precios de los activos financieros presentan una tendencia alcista durante el periodo de análisis.

Por otro lado, es importante señalar que los precios de los activos financieros presentan una caída significativa, la cual corresponde a la crisis sanitaria de Covid19 en el primer trimestre de 2020. De acuerdo con cifras reportadas en distintos noticieros, los efectos del coronavirus provocaron que los mercados a nivel mundial presentaran caídas de aproximadamente el 10% durante los primeros meses de 2020. En este sentido, la pandemia provoco pérdidas de magnitud comparable con la crisis financiera del 2008, particularmente en el caso de México, la Bolsa Mexicana de Valores tuvo una pérdida de 692 mil millones de pesos en el primer trimestre de 2020 (Santiago, 2020).

**Tabla 1.** Descripción de los activos financieros que componen al portafolio.

<b>Activo Financiero</b>	<b>Ticker</b>	<b>Sector</b>	<b>Índice</b>
Devon Energy	DVN	Energético	NYSE
Exxon Mobil	XOM	Energético	NYSE
Schlumberger	SLB	Energético	NYSE
Merck&Co	MRK	Farmacéutico	NYSE
General Dynamics	GD	Aeroespacial	NYSE
Mitsubishi Corporation	8058.T	Comercial integrada	Nikkei
Marubeni Corporation	8002.T	Comercial integrada	Nikkei
Sumitomo Corporation	8053.T	Comercial integrada	Nikkei
Mitsui & Co., Ltd.	8031.T	Comercial integrada	Nikkei
ITOCHU Corporation	8001.T	Comercial integrada	Nikkei
Deutsche Börse AG	DB1.DE	Servicios financieros	DAX
RWE Aktiengesellschaft	RWE.DE	Energético	DAX
Infineon Technologies AG	IFX.DE	Industrial	DAX
Beiersdorf Aktiengesellschaft	BEI.DE	Consumo frecuente	DAX
MTU Aero Engines AG	MTX.DE	Aeroespacial	DAX
Wal-Mart de México	WALMEX.MX	Consumo frecuente	IPC
Grupo Aeroportuario del Pacífico	GAPB.MX	Transporte	IPC
Grupo México	GMEXICOB.MX	Industrial	IPC
Grupo Financiero Banorte	GFNORTEO.MX	Servicios financieros	IPC
Arca Continental	AC.MX	Consumo frecuente	IPC

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 4.** Comportamiento de los precios de los activos riesgosos del portafolio.

Fuente: Elaboración propia con información de la plataforma de Yahoo Finance.

En recapitulación, los portafolios óptimos de media-varianza son un marco estandarizado para la administración de activos financieros. Como se ha mostrado a lo largo del trabajo, bajo este enfoque se efectúan objetivos y restricciones de inversión, permitiendo que los inversionistas desarrollen su filosofía, estrategia de inversión y expectativas del mercado. Dadas todas estas bondades, la teoría de Markowitz ha fungido como base para el progreso de otras teorías económicas financieras, tal como el modelo de valoración de activos de capital (CAPM, por sus siglas en inglés), desarrollado por Sharpe (1964).

Si bien el modelo de Markowitz es bastante efectivo, existen algunas áreas de oportunidad que se pueden desarrollar en beneficio de los inversionistas. En particular, durante la práctica, algunas limitaciones de la optimización de media-varianza son la inestabilidad y ambigüedad que se pueden presentar en las ponderaciones de los activos riesgosos como resultado de los cambios en la estimación de los rendimientos esperados de los activos riesgosos, así como de la varianza de los rendimientos (Michaud & Michaud, 2008).

Bajo este contexto, las soluciones analíticas descritas en el capítulo previo pueden conducir a conclusiones una tanto imprecisas. No obstante, la incorporación de un enfoque estadístico a la optimización de media-varianza evita generar portafolios con error de optimización. Por esta razón, Jobson y Korkie (1981) desarrollaron un estudio en donde expusieron que los sesgos producidos por las soluciones analíticas de optimización de media-varianza de portafolios de inversión pueden llegar a ser muy grandes cuando la información es incierta.

De manera puntual, para un conjunto de 20 activos financieros, los autores contaban con los valores de medias y varianzas de los rendimientos, los cuales se determinaron a lo largo de más de 313 meses y eran considerados como valores reales o poblacionales. A la par, la estimación de las medias y varianzas de los rendimientos de los activos financieros se lleva a cabo mediante una observación muestral compuesta por 60 meses. Posteriormente, tanto para los valores reales, como para los estimados de forma muestral se construyeron portafolios óptimos de media-varianza y se calcularon sus respectivos índices de Sharpe<sup>7</sup>. El resultado para el portafolio optimizado con los valores de medias y varianzas reales fue un índice de Sharpe de 0.34, mientras que para el portafolio optimizado con los valores de medias y varianzas estimados el índice de Sharpe fue de aproximadamente 0.08. Adicionalmente, los autores decidieron optimizar otro portafolio con los mismos activos financieros, pero con medias y varianzas estimadas a partir de un

---

<sup>7</sup> El índice de Sharpe es una razón que parte de la teoría de Markowitz, en donde se asume que la media y varianza de los rendimientos son elementos suficientes para evaluar las perspectivas de inversión de un portafolio. Matemáticamente se expresa como el exceso de rendimiento del portafolio respecto a una tasa libre de riesgo, dividido por la desviación estándar del portafolio (Anelli, 2023).

periodo de observación muestral de 100 meses, el cual dio como resultado un índice de Sharpe con un valor muy próximo a 0.16.

Con estos resultados, Jobson y Korkie (1981) determinaron que para obtener estimaciones razonablemente insesgadas es necesario contar con al menos 200 meses de observaciones históricas de los rendimientos de cada activo, empero, la optimización de Markowitz resulta altamente eficiente para periodos convencionales de entre cuatro y siete años, por lo que aumentar los tamaños de muestra hasta los 200 meses de observación resultaría ineficiente dadas las condiciones cambiantes en los mercados financieros.

Retomando lo anterior se puede inferir que en la optimización de portafolios de inversión no se conoce el rendimiento futuro de los activos, y en su lugar, se utiliza el valor esperado de los rendimientos, los cuales se obtienen a partir de muestras de la información histórica. Sin embargo, esta estimación del rendimiento implica incertidumbre y riesgo, ya que como su nombre lo indica solo es una aproximación a un valor desconocido (RiskAMP, 2024). No obstante, es posible obtener un rango de valores probables para el rendimiento de cada activo partiendo de la media y la desviación estándar.

Documentado este hallazgo en el estudio de Jobson y Korkie (1981), los autores asumen que los rendimientos de los activos riesgosos siguen una distribución de probabilidad (en específico la distribución normal), cada una con sus propios parámetros según el comportamiento de cada activo riesgoso. A partir de estos supuestos distribucionales proceden a generar valores aleatorios de los rendimientos según la distribución de probabilidad de los activos riesgosos con el objeto de conformar muestras y estimar entonces las medias y varianzas de los rendimientos. Concluido este paso, los autores continúan con el cálculo del portafolio óptimo de media-varianza partiendo de las estimaciones de medias y varianzas de cada activo riesgoso.

Al finalizar el paso anterior, los autores registran los resultados y repiten el proceso una y otra vez hasta alcanzar un número de iteraciones suficientes, de modo que el cúmulo de resultados (basado en valores aleatorios) sirve como base para describir la distribución de probabilidad de la media y varianza del portafolio óptimo. Por último, Jobson y Korkie determinan el promedio de los índices de Sharpe de los portafolios óptimos de cada

iteración y lo comparan con el índice de Sharpe real, destacando que, pese a que el índice es variable en cada iteración, entre el promedio y el índice real la diferencia es no significativa.

En conclusión, estos resultados dejan claro que la optimización de media-varianza de portafolios de inversión desarrollada mediante soluciones analíticas puede conducir a resultados inexactos. De forma adicional, en algunas ocasiones en la práctica los inversionistas no toman en cuenta que sus estimaciones son solo una representación de los valores reales, por lo que al emplearse simulaciones se utilizan conjuntos de datos que no se utilizaron para el desarrollo del modelo y, por consecuencia, se pone a prueba la efectividad de la optimización de los portafolios de inversión.

Bajo este contexto, la optimización eficiente de portafolios de inversión debe considerar la incertidumbre de la información con la que se realiza el análisis en cada portafolio de inversión, debido a que cuando no se considera la naturaleza estadística de los activos riesgosos en los mercados financieros se pueden producir prácticas de inversión subóptimas. Por esta razón, el reconocimiento del factor estadístico en la optimización de media-varianza de portafolios de inversión puede conducir a procedimientos que permiten mejorar de manera significativa el rendimiento y la gestión de activos riesgosos (Michaud & Michaud, 2008).

En adición a la incertidumbre de la información, otra dificultad en la optimización de media-varianza es la agregación de restricciones de inversión. Generalmente, la principal razón por la que se añaden restricciones en el portafolio de inversión se basa en la mejora de la eficiencia en la relación riesgo-rendimiento del portafolio de inversión. Esto se atribuye a que cuando se optimiza un portafolio sin restricciones se sobre ponderan (infra ponderan) significativamente los activos riesgosos que tienen rendimientos estimados grandes (pequeños), correlaciones negativas (positivas) y por supuesto varianzas de rendimientos pequeñas (grandes). Este hecho produce asignaciones optimizadas poco intuitivas como efecto del uso excesivo de los datos de insumo para la inversión (Michaud & Michaud, 2008).

Una vez que se ha expuesto la problemática de estimación que tiene el modelo de optimización original de media-varianza es posible continuar con el análisis de la técnica de eficiencia re-muestreada. Sin embargo, antes de proseguir con esta técnica es conveniente describir en que consiste la simulación Monte Carlo y la simulación bootstrapping, ya que como se muestra en la siguiente sección la eficiencia re-muestreada hace uso de dichas técnicas.

En primer lugar, la simulación Monte Carlo es un método utilizado para la resolución de problemas matemáticos que se basa en el hecho de que un evento es el resultado de un universo de eventos posibles y su ocurrencia se encuentra ligada a un valor de probabilidad. De este modo, por la ley de los grandes números si se toma un gran número de muestras aleatorias pertenecientes a un universo de posibles resultados, entonces estos resultados convergerán al valor correcto a medida que aumenta el tamaño de la muestra (Metropolis & Ulam, 1949).

Para ejemplificar de manera simple en que consiste la simulación Monte Carlo considere el ejemplo presentado por Glasserman (2003) en el que se plantea el problema de estimar el valor de la integral de una función  $f$  en el intervalo  $[0,1]$  como sigue:

$$a = \int_0^1 f(x)dx. \quad (47)$$

Asimismo, se supone que se cuenta con un mecanismo que sirve para obtener  $n$  puntos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  independiente y uniformemente distribuidos en el intervalo  $[0,1]$ , los cuales son posteriormente evaluados en la función  $f$ . Como resultado, cuando se promedian los valores obtenidos de la función evaluada en cada muestra aleatoria se consigue el estimador Monte Carlo, es decir:

$$\hat{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i). \quad (48)$$

Es evidente que debido a la ley de los grandes números a medida que  $n$  tiende a infinito,  $\hat{a}$  se aproxima cada vez más al valor de  $a$ . Asimismo, el error de estimación se calcula

$$\text{como } s_f = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(U_1) - \hat{a}_n)^2}.$$

Tomando como punto de partida el caso anterior, la simulación Monte Carlo se puede extender a problemas de mayor complejidad siguiendo la misma lógica, claro ejemplo de ello es el cálculo del valor presente de opciones financieras. Particularmente, para el caso de portafolios de inversión se considera que los rendimientos de cada activo riesgoso siguen una distribución de probabilidad normal con media  $\mu_i$  y varianza  $\sigma_i^2$ , y que a su vez se tiene un método para obtener valores aleatorios de dichas probabilidades. Basado en estos supuestos, cuando se extraen distintas muestras aleatorias para cada activo riesgoso y se alcanza un número suficiente de observaciones se pueden calcular los estimadores del promedio y la varianza de las muestras de cada activo riesgoso, tal que estos estimadores de media y varianza servirán de insumos para el cálculo del portafolio óptimo.

Matemáticamente considere  $n$  muestras  $(N_1, N_2, \dots, N_n)$  de los rendimientos del  $i$  – ésimo activo riesgoso con distribución normal  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$  generadas aleatoriamente; entonces el estimador del rendimiento esperado del activo es:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i. \quad (49)$$

mientras que el estimador de la varianza es:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (N_i - \hat{\mu}_i)^2. \quad (50)$$

Por otro lado, la técnica bootstrapping es una técnica de simulación que sirve para la obtención de estimadores estadísticos a partir de un primer conjunto de datos. En resumen, la idea detrás del método de bootstrapping es bastante simple; en primer lugar, se extraen muestras con reemplazo de un primer conjunto de observaciones, cada una

con la misma probabilidad de ser seleccionada, para posteriormente calcular los estimadores (Efron & Tibshirani, 1994).

Matemáticamente y ajustando la técnica de bootstrapping a la optimización de portafolios de inversión considere que se cuenta con el conjunto de observaciones de los rendimientos de los activos riesgosos del portafolio, cada una de tamaño  $K$ , esto es:

$$M_i = (x_1, x_2, \dots, x_K). \quad (51)$$

donde  $x_1$  es el primer rendimiento del  $i$  –ésimo activo riesgoso del conjunto original de observaciones. Seguidamente, a partir de este conjunto de datos se extraen muestras aleatorias con remplazo de tamaño  $k$ :

$$m_i = (y_1, y_2, \dots, y_k). \quad (52)$$

en donde  $y_1, y_2, \dots, y_k$  pueden ser igual a cualquier elemento de  $M_i$  y dado que es un muestreo con remplazo los elementos dentro de la muestra pueden llegar a repetirse. Dicho esto, se estiman el rendimiento esperado del  $i$  –ésimo activo riesgoso y la varianza de estos como en (49) y (50), es decir, la estimación del rendimiento esperado es:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i. \quad (53)$$

y la estimación de la varianza es:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{\mu}_i)^2. \quad (54)$$

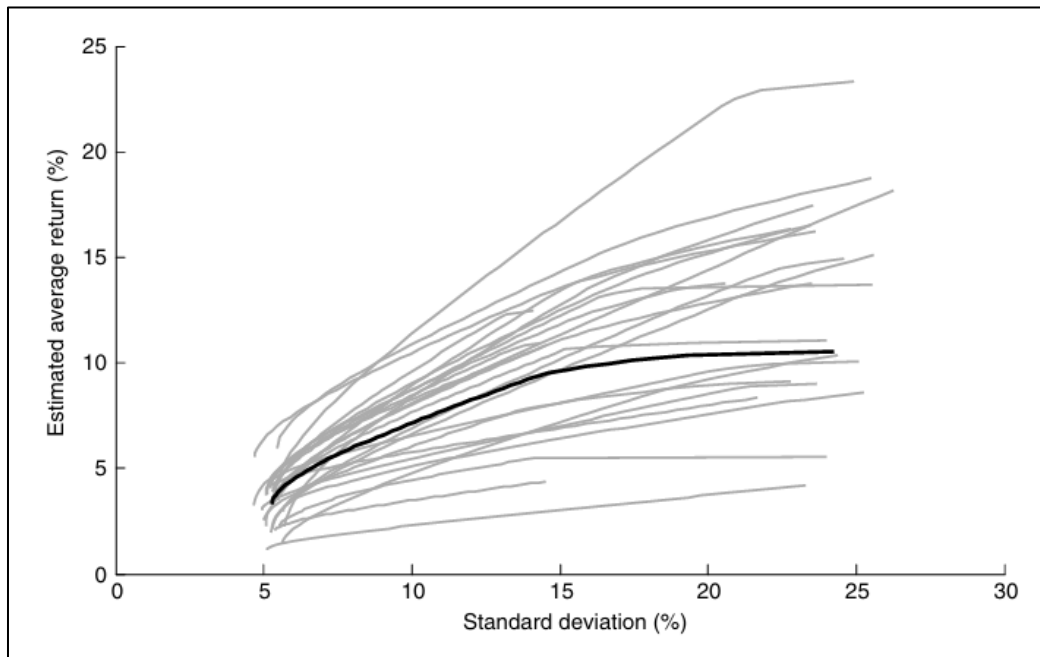
En conclusión, la diferencia entre la simulación Monte Carlo y la técnica bootstrapping se basa en que para la primera técnica se hace uso de distribuciones de probabilidad, mientras que para la segunda no se hace uso de procesos paramétricos y la inferencia parte del conjunto de datos originales o reales. Una vez que se han expuesto ambos conceptos es posible continuar con el análisis de la técnica de eficiencia re-muestreada.

### 3.2. Frontera eficiente re-muestreada

Dado que la frontera eficiente se deriva de parámetros estimados y además se cuenta con distintas estimaciones, las cuales pueden ser estadísticamente equivalentes, es decir, lo suficientemente similares para fines prácticos, resulta coherente asumir que el conjunto de portafolios de la frontera eficiente por sí mismo tengan varianza. En general, este argumento parte de suponer que se tiene un conjunto de fronteras eficientes estadísticamente equivalentes, las cuales fueron calculadas mediante simulación Monte Carlo a partir del re-muestreo de los insumos de optimización del portafolio de inversión. Como consecuencia, dada la variabilidad de los insumos, se genera variabilidad en las fronteras eficientes simuladas, produciendo de esta forma un amplio rango de escenarios y resultados.

Michaud y Michaud (2008) explican y ejemplifican el argumento anterior mediante la simulación Monte Carlo para un portafolio compuesto por 18 clases de activos. En su caso de estudio, los autores re-muestran los insumos de optimización reales 25 veces y proceden a realizar la optimización de media-varianza. Gráficamente, la representación de las respectivas fronteras eficientes simuladas se expone en la Figura 5 mediante las curvas grises, en donde además se comparan con la frontera eficiente real representada por la curva negra en la misma figura.

Las conclusiones principales del ejercicio y resaltadas por los autores fueron las diferencias en el riesgo y rendimiento como efecto de la variabilidad en la estimación de los insumos, ya que mientras que la frontera real abarca un rendimiento de entre 3% y 11%, el rendimiento de las fronteras simuladas va desde 0% hasta 35%. En otras palabras, es notoria la aleatoriedad e incertidumbre que trae consigo el proceso de optimización de portafolios de inversión con insumos simulados.



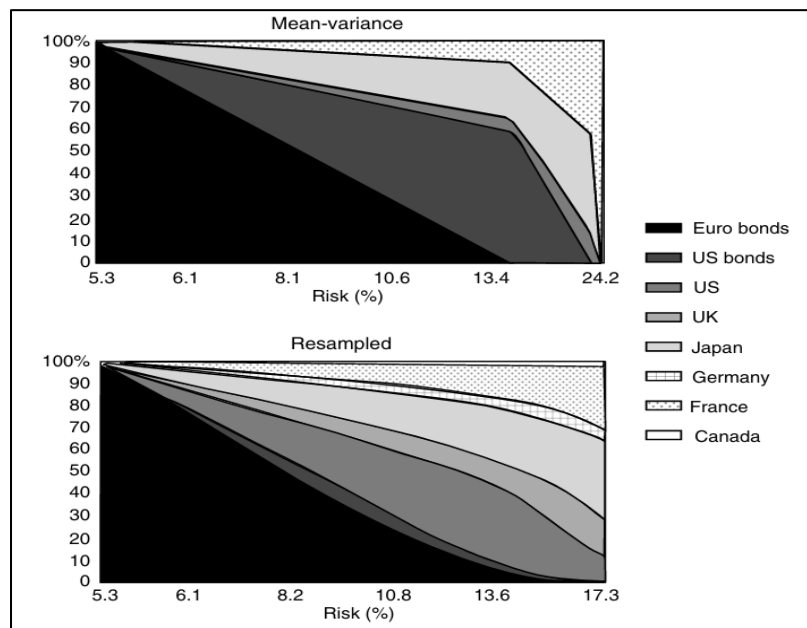
**Figura 5.** Comparativas fronteras eficiente real y re-muestreadas.

Fuente: Michaud y Michaud (2008).

Asimismo, si al obtener la cartera óptima de cada frontera eficiente simulada se seleccionan solo aquellas que se encuentran cercanas a la frontera eficiente real, entonces se determina el conjunto de carteras estadísticamente equivalentes. De este modo, se demuestra la variabilidad implícita en la estimación de carteras de fronteras eficientes de media-varianza, especialmente se debe notar que los portafolios de varianza mínima se agrupan circundantemente al portafolio eficiente de varianza mínima real.

En este sentido, la frontera eficiente re-muestreada es la generalización de la optimización de media-varianza de Markowitz que incluyen un nivel de incertidumbre propio de la información en el proceso de optimización. Bajo la misma línea, se puede expresar que la eficiencia re-muestreada evita el uso literal de la información de inversión, lo que permite mejorar el rendimiento promedio del portafolio y propicia mayores niveles de diversificación y gestión de riesgos. También, es importante señalar que el proceso de re-muestreo permite la personalización de los estándares, objetivos y estrategias de inversión (Michaud & Michaud, 2008).

Por otro lado, dado que todos los portafolios eficientes simulados son igualmente probables de ser obtenidos, la eficiencia re-muestreada define el portafolio óptimo de varianza mínima como el promedio de las ponderaciones de todos los portafolios de mínima varianza simulados. Análogamente, para inversionistas indiferentes al riesgo la eficiencia re-muestreada define el portafolio óptimo de máximo rendimiento como el promedio de las ponderaciones de todos los portafolios de máximo rendimiento simulados (Michaud & Michaud, 2008).



**Figura 6.** Comparación de las ponderaciones con eficiencia clásica y re-muestreada.  
Fuente: Michaud y Michaud (2008).

Continuando con el ejemplo de las fronteras eficientes simuladas por Michaud y Michaud (2008), se muestra la comparación entre las fronteras eficientes compuestas por ocho activos, las cuales se obtienen a partir del procedimiento original de Markowitz y eficiencia re-muestreada. Los resultados, como se puede apreciar en la Figura 6, son bastante similares, por ejemplo, en la parte izquierda se concentran los portafolios con mayor rendimiento, mientras que en la parte derecha se encuentran los portafolios con mayor riesgo. Sin embargo, es importante resaltar un resultado imprescindible en el proceso, el cual señala que en la optimización analítica de Markowitz solo se incluyen cinco de las ocho clases de activos originales del portafolio de inversión (el porcentaje de las clases de

Canadá y Alemania es nulo en todas las combinaciones), mientras que en proceso de la eficiencia re-muestreada es notoria la inclusión de la totalidad de activos, incluso con una ponderación mínima.

A partir de lo anterior es importante resaltar otra de las ventajas más importantes de la optimización basada en la técnica de eficiencia re-muestreada, en donde se indica que en la práctica los portafolios deben ser coherentes con la intuición de los inversionistas y, por consiguiente, deben ser incluidos razonablemente en el portafolio de inversión. Asimismo, con este ejemplo se demuestra el mayor grado de diversificación al que conducen las carteras optimas de eficiencia re-muestreada (Michaud & Michaud, 2008).

En resumen, la frontera eficiente re-muestreada resulta de gran utilidad cuando las estimaciones de rendimiento y varianza de cada activo riesgoso que se predispone a integrar en una cartera de inversión presentan incertidumbre. Por consiguiente, siempre que el administrador del portafolio este totalmente seguro de los insumos de optimización, el proceso clásico de media-varianza es totalmente eficiente para la construcción de un portafolio optimo. Sin embargo, un escenario en el que las estimaciones de media y varianza de los rendimientos de los activos riesgosos es totalmente cierta puede ser prácticamente irrealista.

### **3.3. Optimización con eficiencia re-muestreada**

Analizados los elementos de la eficiencia re-muestreada es posible establecer el procedimiento detallado para el cálculo de portafolios de inversión óptimos con el fin de hacer uso de la técnica de eficiencia re-muestreada. Inicialmente, Michaud y Michaud (2007) describen en que consiste el proceso para el cálculo de portafolios optimizados mediante la técnica de eficiencia re-muestreada en la siguiente cita: "...la técnica de eficiencia re-muestreada introduce métodos de simulación Monte Carlo o re-muestreo bootstrapping para reflejar de manera más realista la incertidumbre de la información, en donde se incluyen también reglas y pruebas de negociación y monitoreo de carteras de inversión estadísticamente rigurosas para activos riesgosos".

De manera ordenada, los pasos a seguir para optimizar un portafolio de inversión con esta técnica son:

Paso 1. Se re-muestra el vector de medias y la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos, ambos centrados en las estimaciones puntuales originales.

Paso 2. Se calcula la frontera eficiente de media-varianza a partir de las estimaciones de rendimiento y riesgo re-muestreadas.

Paso 3. Se repiten los pasos 1 y 2, en ese orden, hasta alcanzar un número de ejecuciones suficientes para la convergencia en el siguiente paso.

Paso 4. Se promedian los pesos de las carteras de inversión del paso 2 para formar la cartera óptima de eficiencia re-muestreada.

Dicho de otro modo, una vez que se ha calculado el portafolio óptimo partiendo de los estimadores de (49) y (50) a través del método de simulación Monte Carlo o (53) y (54) si se prefiere la técnica bootstrapping, se registran los resultados y se repite el proceso  $s$  veces. En este caso, para cada repetición se generan los estimadores según la técnica elegida, cada una con diferentes muestras aleatorias, hasta obtener un número suficiente de iteraciones. A partir de las  $s$  simulaciones, el estimador de las ponderaciones de cada activo riesgoso dentro del portafolio de inversión se calcula como:

$$\widehat{X}_i = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s P_j. \quad (55)$$

donde  $P_j$  es la ponderación del  $i$  –ésimo activo riesgoso para el  $j$  –ésimo portafolio óptimo simulado.

De manera similar, se calculan las estimaciones del rendimiento esperado y la varianza del portafolio óptimo, tal que el rendimiento esperado estimado es:

$$\widehat{R}_p = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s r_j. \quad (56)$$

donde  $r_j$  es el rendimiento esperado para el  $j$  –ésimo portafolio óptimo, y la varianza del portafolio está definida por:

$$\widehat{V}_P = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S v_j. \quad (57)$$

donde  $v_j$  representa la varianza del  $j$  –ésimo portafolio óptimo.

Bajo este contexto, las simulaciones demuestran que cuando se promedian los resultados de cada repetición se produce un mejor desempeño, que a su vez contempla la incertidumbre propia de la información. De igual modo, es importante señalar que a medida que aumenta el número de observaciones de la muestra original, las cuales parten de las simulaciones y estimaciones del riesgo y rendimiento, los resultados bajo la técnica de eficiencia re-muestreada se acercan en mayor medida a la frontera eficiente de valores correctos. Consecuentemente, el número de simulaciones a realizar dependerá de la certeza que se tenga de las estimaciones originales de rendimientos, aunque comúnmente es sugerido realizar mínimo 1,000 ejercicios.

Derivado de lo anterior, Michaud y Michaud (2008) ponen en manifiesto que la técnica de eficiencia re-muestreada no es más que la generalización del modelo original de media-varianza de Markowitz, ya que los inversionistas pueden controlar el nivel de confianza de su información respecto a los activos seleccionados para la conformación del portafolio. De manera encadenada, a medida que aumenta el nivel de certeza obtenido, la técnica de eficiencia re-muestreada tiende a la validación del modelo de media-varianza clásico con los valores reales. En adición, la técnica de eficiencia re-muestreada otorga flexibilidad a las perspectivas de mercado de los inversionistas, de modo que la información disponible y la percepción que cada inversionista tiene del mercado se refleja de forma adecuada en la optimización en comparación con la rigidez de la optimización original.

Por otro lado, la técnica de eficiencia re-muestreada conduce a carteras óptimas diversificadas, derivado del uso integral de la información de todos los activos financieros. En la eficiencia de media-varianza original dada la inexistencia de incertidumbre en las estimaciones de riesgo y rendimiento se producen resultados en los que el incremento de riesgo siempre se encuentra justificado por un incremento en el rendimiento. De esta manera, los activos financieros que no cumplen por completo con esta premisa pueden ser descartados o infraponderados. Sin embargo, es importante resaltar que a fin de que

la técnica de eficiencia re-muestreada produzca resultados eficientes, los activos financieros seleccionados para la conformación del portafolio de inversión deben ser invertibles, esto es, los activos riesgosos deben ser atractivos en rendimiento y, por ende, tener un nivel de riesgo proporcional o menor al nivel de rendimiento conferido. De otro modo, incluir activos financieros no invertibles en la técnica de eficiencia re-muestreada inducirá a una suboptimización del portafolio de inversión.

Por último, Michaud y Michaud (2008) en su análisis mencionan los puntos más importantes con respecto a la técnica de eficiencia re-muestreada: el primero indica que la frontera eficiente re-muestreada se encuentra por debajo de la relación riesgo-rendimiento como consecuencia de la incertidumbre de la información en comparación con la frontera eficiente clásica. En otras palabras, la técnica de eficiencia re-muestreada adopta una postura más conservadora respecto a la optimización clásica de Markowitz. El segundo, dicta que la técnica de eficiencia re-muestreada resulta ser una gran aproximación para generar resultados eficientes cuando la información no es parte de la muestra original del análisis.

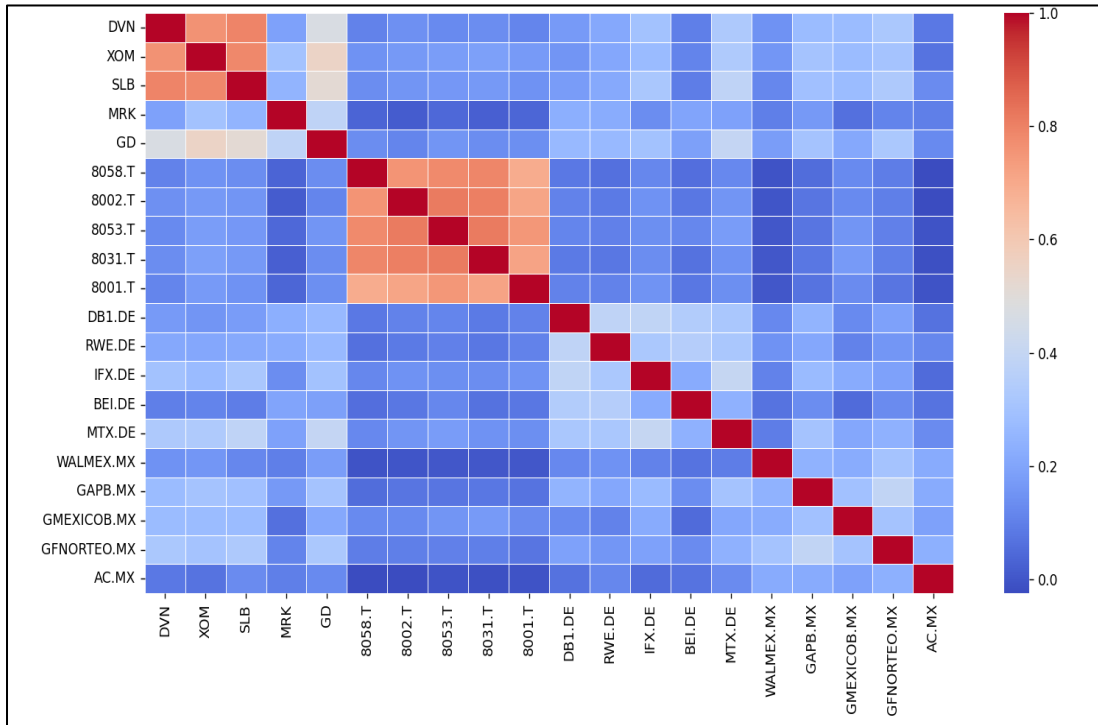
## Capítulo 4. Evidencia empírica de la técnica de eficiencia re-muestreada

### 4.1. Estadísticas descriptivas

Para el análisis preliminar es necesario transformar los precios de los activos financieros a series financieras estacionarias, esto es, calculando los rendimientos logarítmicos utilizando el precio actual  $P_t$  y el precio anterior  $P_{t-1}$ , es decir,  $R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ . Por otra parte, los precios de los activos financieros que no cotizaron en los días festivos fueron estimados por interpolación lineal a fin de estandarizar las series financieras del portafolio de inversión para los respectivos índices accionarios.

La Figura 7 muestra la relación que existe entre los rendimientos de los precios de los activos del portafolio de inversión utilizando el coeficiente de correlación lineal de Pearson. De acuerdo con el mapa de calor, es importante destacar la relación directa entre rendimientos de los activos financieros pertenecientes al índice accionario japonés. Los niveles de correlación de Pearson entre este grupo de rendimientos de activos financieros alcanzan niveles de 0.8 aproximadamente. La razón de este hecho se atribuye a que dentro de la cartera de inversión el conjunto de los activos financieros japoneses conforma una clase de activos en el que las empresas emisoras comparten el mismo giro.

En el mismo tenor, los activos riesgosos del sector energético del índice NYSE se encuentra notablemente relacionados, lo cual es bastante lógico dada la naturaleza de estos instrumentos financieros. En cuanto al resto de activos riesgosos se tiene un comportamiento en el que no se perciben correlaciones significativas, y por consecuencia, el portafolio de inversión construido se encuentra bien diversificado entre los diferentes mercados financieros del mundo, así como de los distintos sectores empresariales.



**Figura 7.** Correlación de los activos financieros del portafolio de inversión.

Fuente: Elaboración propia con información de la plataforma de Yahoo Finance.

En la Tabla 2 se presentan los rendimientos promedio de los activos financieros del portafolio, donde sobresale el promedio ligeramente negativo del activo Schlumberger. Sin embargo, este activo financiero se vio afectado en gran medida durante el año 2018 como resultado de la tensión económica entre Estados Unidos y China, así como preocupaciones por una desaceleración económica global (lo que produjo una reducción en la demanda de energía), y en gran medida a la sobreproducción de crudo en el mundo (Oxford Institute for Energy Studies, 2025). Empero desde inicios de 2020 y hasta la actualidad el precio de Schlumberger ha tenido una tendencia alcista. A la par, la razón por la que se decidió incluir este activo financiero en el portafolio de inversión es el rendimiento promedio de 0.0221% alcanzado en el periodo 2020-2024.

De igual manera, en la Tabla 2 se dispone del nivel de riesgo de cada activo financiero (desviación estándar). Por un lado, se puede destacar que los activos financieros del índice accionario Nekkei mantienen una desviación estándar muy semejante. Asimismo, el activo financiero con mayor desviación estándar es Devon Energy (3.5051%), mientras

que el activo financiero con menor riesgo es Beiersdorf Aktiengesellschaft (1.2351%). Por último, es importante mencionar que el promedio de nivel de riesgo de la cartera de inversión es de 1.912%.

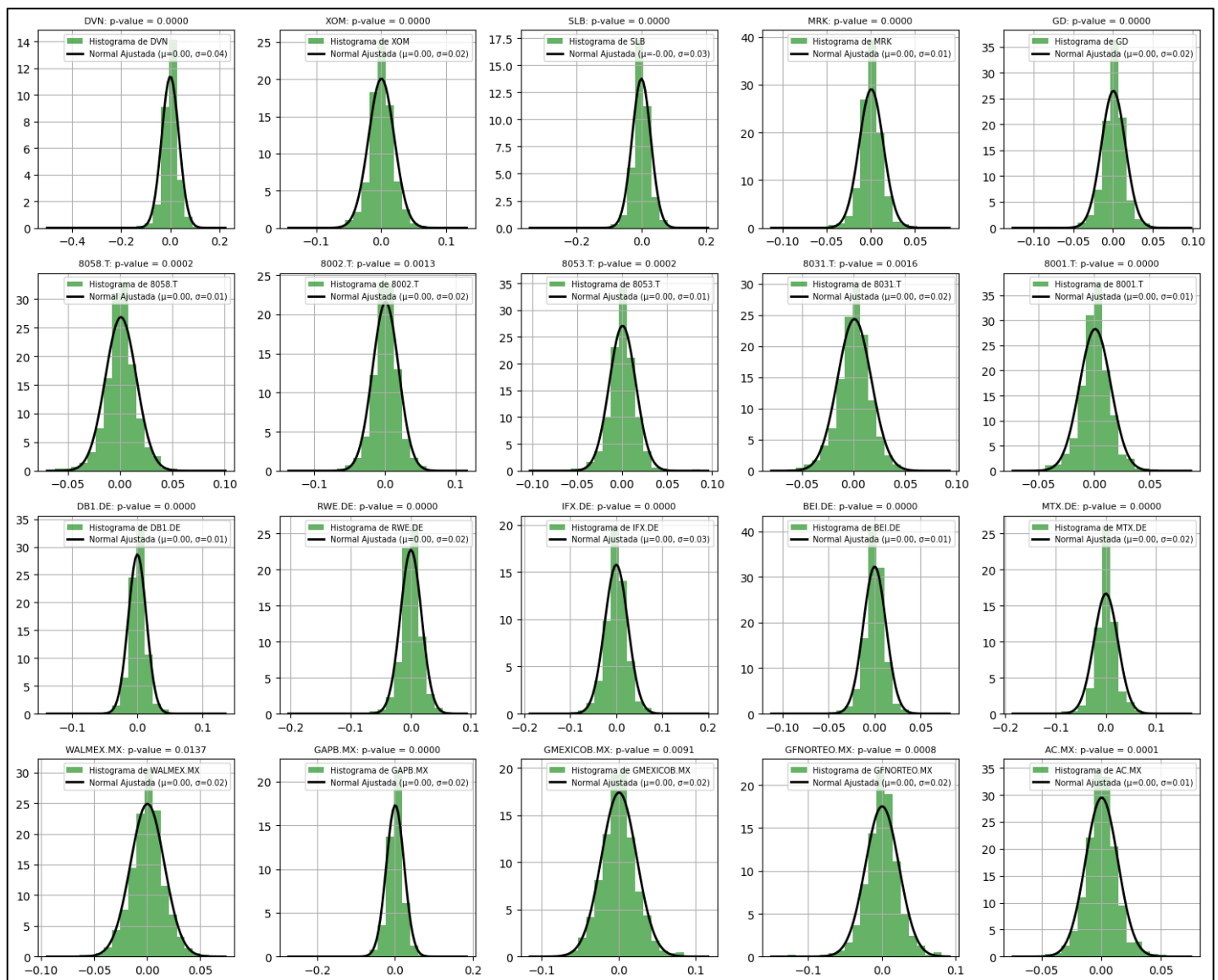
**Tabla 2.** Estadísticas descriptivas de los rendimientos de los activos financieros.

Activo	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo	Sesgo	Curtosis
DVN	0.0242%	3.5051%	-46.84%	19.12%	-1.4559	23.7929
XOM	0.0408%	1.9854%	-13.04%	11.94%	-0.1728	5.7272
SLB	-0.0098%	2.8969%	-32.05%	18.16%	-0.8542	13.7068
MRK	0.0604%	1.3730%	-10.38%	8.04%	-0.2979	7.3567
GD	0.0372%	1.5065%	-11.57%	8.75%	-0.5087	7.5991
8058.T	0.0876%	1.4856%	-6.21%	9.30%	0.0991	2.8351
8002.T	0.0987%	1.8603%	-12.54%	10.46%	-0.1953	3.7861
8053.T	0.0702%	1.5416%	-13.37%	12.05%	-0.1687	8.9822
8031.T	0.1036%	1.6544%	-7.19%	8.56%	-0.0822	2.1523
8001.T	0.1008%	1.4190%	-6.61%	8.01%	0.1462	3.1639
DB1.DE	0.0412%	1.3929%	-12.60%	12.31%	-0.3466	11.5684
RWE.DE	0.0425%	1.7539%	-18.99%	7.98%	-1.0172	11.1513
IFX.DE	0.0344%	2.5279%	-17.03%	18.26%	-0.1736	5.9132
BEI.DE	0.0246%	1.2351%	-10.33%	7.29%	-0.5909	7.4049
MTX.DE	0.0292%	2.3931%	-16.94%	15.38%	-0.2542	9.5325
WALMEX.MX	0.0185%	1.6021%	-8.69%	6.60%	-0.1128	1.6375
GAPB.MX	0.0462%	2.3042%	-25.43%	16.40%	-0.9675	14.5416
GMEXICOB.MX	0.0576%	2.2939%	-10.48%	10.59%	0.1818	1.4477
GFNORTEO.MX	0.0372%	2.2744%	-13.87%	8.07%	-0.5467	3.4812
AC.MX	0.0392%	1.3523%	-6.74%	6.84%	0.3076	2.5892

Fuente: Elaboración propia con información de la plataforma de Yahoo.

Asimismo, otro resultado importante es que la mayoría de las series financieras presentan un nivel de asimetría negativo y exceso de curtosis, lo que implica la mayor presencia de rendimientos extremos negativos que rendimientos positivos. Este hecho también confirma que las colas de las distribuciones de rendimientos son más anchas que las colas de la distribución normal. Este resultado es sustentado por el valor-p de la prueba estadística de Kolmogorov-Simrnov, los cuales tienen un valor próximo a cero en la mayoría de las series financieras de los rendimientos. De esta manera, los resultados confirman el rechazo de la hipótesis nula de que los rendimientos financieros siguen una distribución normal (Berger & Zhou, 2014). El argumento anterior es mejor apreciado en la

Figura 8 donde se puede observar que la distribución de rendimientos de los activos financieros presenta una forma más picuda que la distribución normal. En consecuencia, los resultados del análisis preliminar dejan en claro que el supuesto de normalidad de los rendimientos de los activos riesgosos en la teoría de Markowitz es difícil de alcanzar en la práctica. A partir de estos resultados en la siguiente sección se desarrolla por completo la construcción del portafolio de inversión optimizado bajo la técnica de eficiencia re-muestreada, en donde, además se compara con otros portafolios de inversión óptimos.



**Figura 8.** Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov a los rendimientos.

Fuente: Elaboración propia con información de la plataforma de Yahoo.

## 4.2. Construcción del portafolio óptimo

En esta misma línea, a partir de las estimaciones iniciales es posible continuar con la optimización del portafolio de inversión. En primer lugar, se optimiza el portafolio de inversión haciendo uso del modelo original de Markowitz. Posteriormente, se desarrolla el modelo de eficiencia re-muestreada. Cabe señalar que se exponen dos soluciones de la técnica de eficiencia re-muestreada, la primera utilizando el método de simulación Monte Carlo, en la cual se utilizan como parámetros de las distribuciones normales respectivas los valores de la Tabla 2, a pesar de que no se cumplió el supuesto de normalidad. En la segunda, se hará uso de la técnica de bootstrapping, puesto que el re-muestreo partirá de las observaciones originales.

Además, a manera de una comparación simple se expondrá otro portafolio de inversión en el que se hace uso de la estrategia de diversificación Naive. En síntesis, la regla de diversificación Naive es aquella en la que una fracción de  $1/N$  del capital inicial de inversión es destinada a cada una de los  $N$  activos que conforman el portafolio de inversión. El supuesto principal de este método se centra en el hecho de utilizar en gran medida el sentido común y dejar de lado modelos matemáticos complejos, los cuales pueden estar desarrollados a partir de información sesgada (Brown et al., 2013).

Retomando la optimización clásica de Markowitz, se optimiza en primera instancia el portafolio de inversión donde se tiene posibilidad de ventas en corto y el objetivo es minimizar el riesgo. Además, se supone que el rendimiento dado es el rendimiento promedio de los activos financieros, el cual es aproximadamente 0.049203%. Partiendo de la ecuación (45) y los insumos estimados en la Tabla 2, la ponderación óptima se presenta en la Tabla 3. Como era de esperarse, el rendimiento esperado del portafolio anterior es 0.049203%, mientras que el nivel de riesgo de este es de 0.6725791%. En comparación con el portafolio de inversión diversificado bajo una estrategia Naive, el rendimiento esperado es el mismo que en el caso anterior, sin embargo, la desviación estándar del portafolio Naive es de 0.9993%. En efecto, el primer portafolio optimizado reduce en más de 30% el riesgo del portafolio Naive. No obstante, para llegar a ese nivel de riesgo se apalancaron 8 activos, lo cual puede tornarse poco viable.

**Tabla 3.** Ponderaciones óptimas, minimizando la varianza y con ventas en corto.

Activo	Ponderaciones
DVN	-2.5811%
XOM	7.2591%
SLB	-2.6059%
MRK	11.9710%
GD	5.1974%
8058.T	11.7188%
8002.T	-5.4665%
8053.T	5.8171%
8031.T	-0.6489%
8001.T	10.5171%
DB1.DE	10.6994%
RWE.DE	0.3274%
IFX.DE	-0.5077%
BEI.DE	19.5541%
MTX.DE	-1.8957%
WALMEX.MX	11.2518%
GAPB.MX	-1.1435%
GMEXICOB.MX	1.7805%
GFNORTEO.MX	-0.9465%
AC.MX	19.7021%

Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, se decide optimizar otro portafolio mediante programación cuadrática, partiendo esta vez de (46), es decir, del escenario donde no se permiten ventas en corto. Cabe mencionar que para el cálculo de este portafolio se hizo uso de la librería *scipy.optimize* (Scipy, 2025) de Python y en particular se empleó el método de región de confianza o “*trust-constr*” debido a que este algoritmo ajusta de manera dinámica la búsqueda de soluciones utilizando un enfoque de región de confianza (lo que es de gran utilidad cuando las restricciones de un problema de optimización son desigualdades lineales). Las ponderaciones óptimas obtenidas se presentan en la Tabla 4. En los resultados se puede observar claramente que el rendimiento es el mismo que en los dos casos previos. Sin embargo, el nivel de riesgo de este portafolio es 0.692198%. Consecuentemente, se puede expresar que este último portafolio tiene un mejor comportamiento, aunque el rendimiento es el mismo y la desviación estándar es

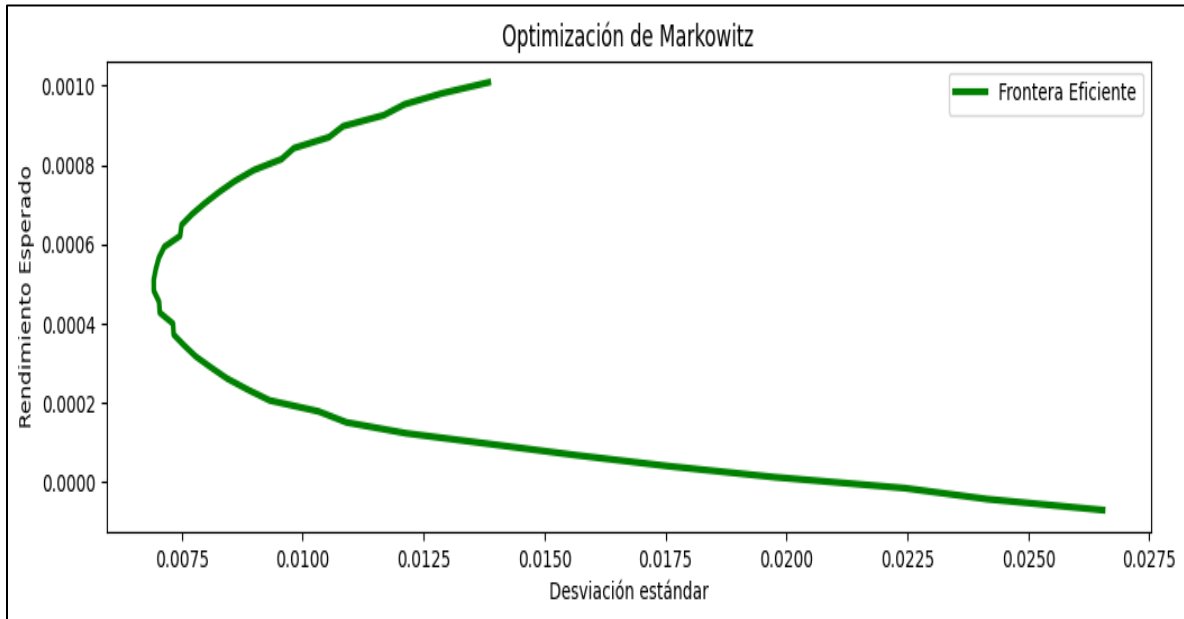
ligeramente mayor, respecto al primer portafolio óptimo, es preferible mantener ese aumento, dado que bajo este último portafolio no se tienen ventas en corto.

**Tabla 4.** Ponderaciones óptimas, minimizando la varianza y sin ventas en corto.

<b>Activo</b>	<b>Ponderaciones</b>
DVN	0.1877%
XOM	0.8854%
SLB	0.2293%
MRK	13.2062%
GD	2.4195%
8058.T	8.0106%
8002.T	0.7244%
8053.T	2.4952%
8031.T	1.7677%
8001.T	9.0594%
DB1.DE	8.2804%
RWE.DE	0.9707%
IFX.DE	0.4043%
BEI.DE	19.1058%
MTX.DE	0.3260%
WALMEX.MX	10.8891%
GAPB.MX	0.4395%
GMEXICOB.MX	1.1323%
GFNORTEO.MX	0.4550%
AC.MX	19.0115%

Fuente: elaboración propia.

Asimismo, se realiza el ejercicio de optimizar 40 portafolios siguiendo el método del portafolio optimizado anterior con el objeto de obtener la frontera eficiente. Para ello se distribuye uniformemente un vector de tamaño 40 en el que el valor inicial es el rendimiento del activo financiero con mínimo rendimiento (SLB), y los valores subsecuentes van incrementando hasta llegar a la posición final cuyo valor es el rendimiento del activo financiero con mayor rendimiento (8031.T). De este modo, a partir de las 40 combinaciones de rendimiento-riesgo óptimas es posible construir la frontera eficiente, la cual se muestra en la Figura 9.



**Figura 9.** Frontera eficiente.

Fuente: elaboración propia.

A partir del análisis de los resultados del ejercicio anterior, se pueden extraer dos portafolios de inversión interesantes. El primero, es el portafolio con el menor nivel de riesgo, el cual tiene una desviación estándar de 0.69211% y un rendimiento esperado de 0.05105%. El segundo, es el portafolio en la que la relación rendimiento-riesgo es mayor, dando como resultado un nivel de riesgo de 0.82737% y un rendimiento esperado de 0.07317%. Adicionalmente, las ponderaciones óptimas de estos dos portafolios inversión son presentadas en la Tabla 5.

**Tabla 5.** Portafolios con menor riesgo y mejor relación rendimiento-riesgo.

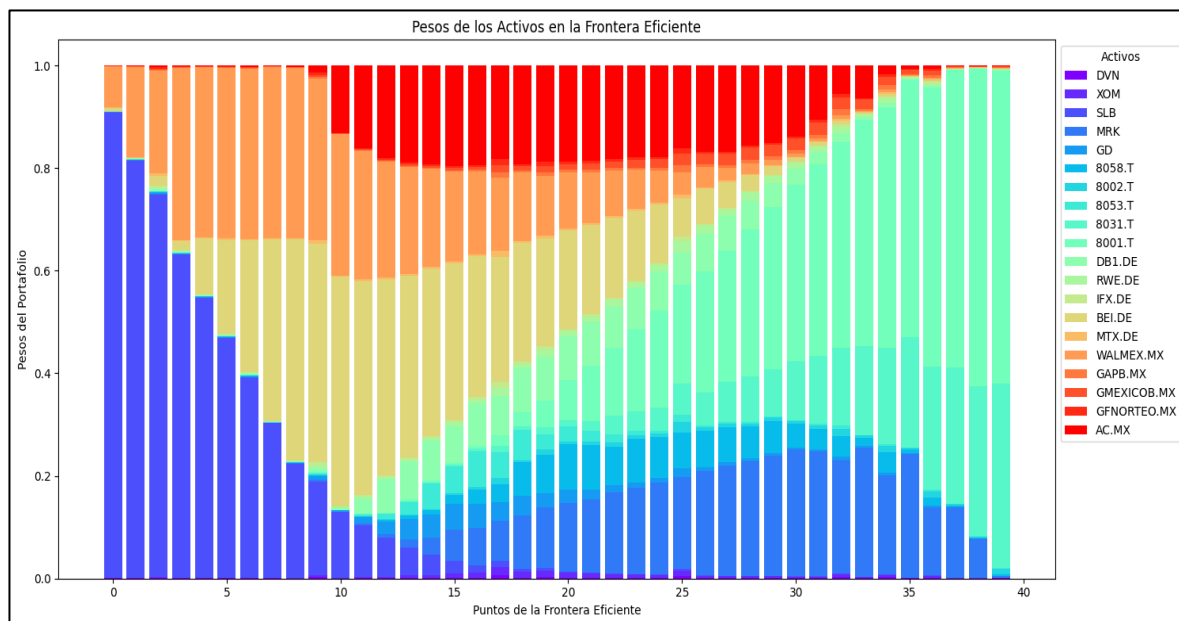
<b>Activo</b>	<b>Menor riesgo</b>	<b>Mayor relación rendimiento-riesgo</b>
DVN	0.1854%	0.1068%
XOM	0.7758%	0.2805%
SLB	0.2019%	0.0675%
MRK	14.3275%	23.5106%
GD	1.7998%	0.4412%
8058.T	8.6532%	6.3613%
8002.T	0.7250%	0.5771%
8053.T	2.1300%	0.2590%
8031.T	1.8618%	9.1818%
8001.T	10.8915%	31.6657%
DB1.DE	8.4894%	4.6365%
RWE.DE	1.0276%	1.4080%
IFX.DE	0.4077%	0.2319%
BEI.DE	17.4658%	1.6576%
MTX.DE	0.3237%	0.1762%
WALMEX.MX	9.9499%	1.0415%
GAPB.MX	0.4735%	0.6484%
GMEXICOB.MX	1.2276%	2.3080%
GFNORTEO.MX	0.4737%	0.4207%
AC.MX	18.6090%	15.0197%

Fuente: elaboración propia.

Como se puede observar en la Tabla 5, la mayor diferencia en las ponderaciones óptimas se encuentra en el activo financiero 8001.T, con un incremento de aproximadamente 20% de un portafolio de inversión a otro. El activo financiero 8001.T tiene el segundo mejor rendimiento esperado del portafolio de inversión, por lo que es claro que cuando se produce un aumento significativo en la ponderación óptima de este, se puede obtener un mejor rendimiento esperado para el portafolio de inversión. En cuanto al resto de activos financieros, estos presentan una ligera disminución de un portafolio de inversión a otro, lo cual compensa el aumento del activo financiero 8001.T.

Retomando los 40 portafolios óptimos, en la Figura 10 se muestran gráficamente las ponderaciones óptimas que son asignadas a los 20 activos financieros en cada uno de los

portafolios de inversión. De lado izquierdo se muestran los portafolios de inversión con el menor rendimiento esperado, mientras que del lado derecho los portafolios con mayor rendimiento esperado. Es evidente que los portafolios más equilibrados se encuentran en la parte media de la Figura 10, es decir, son aquellos portafolios que se encuentran localizados entre las posiciones 22 y 30.



**Figura 10.** Ponderaciones de la frontera eficiente.

Fuente: Elaboración propia.

Llegado a este punto, es posible continuar con el proceso de la técnica de eficiencia re-muestreada. Para ello, se optimiza un portafolio en el que se tiene como objetivo alcanzar un rendimiento esperado igual o mayormente cercano al valor de 0.07317% con un riesgo mínimo. En primer lugar, se generan 1000 simulaciones, en donde para cada uno de los 20 activos financieros se generan 1000 muestras aleatorias de la distribución normal, tomando como base los resultados de los parámetros de la Tabla 2. A partir de estas simulaciones, se promedian las ponderaciones resultantes, el rendimiento esperado y la desviación estándar del portafolio de inversión simulado. Como resultado para este portafolio optimizado con simulación Monte Carlo se tiene un rendimiento esperado de 0.07486% y un nivel de riesgo de 0.44995%. De la misma manera, las ponderaciones óptimas se muestran en la Tabla 6. Cabe señalar que el código del algoritmo desarrollado

en Python para el cálculo de las ponderaciones óptimas de estos portafolios de inversión y los subsecuentes se muestra en el Anexo 1.

**Tabla 6.** Portafolios óptimos.

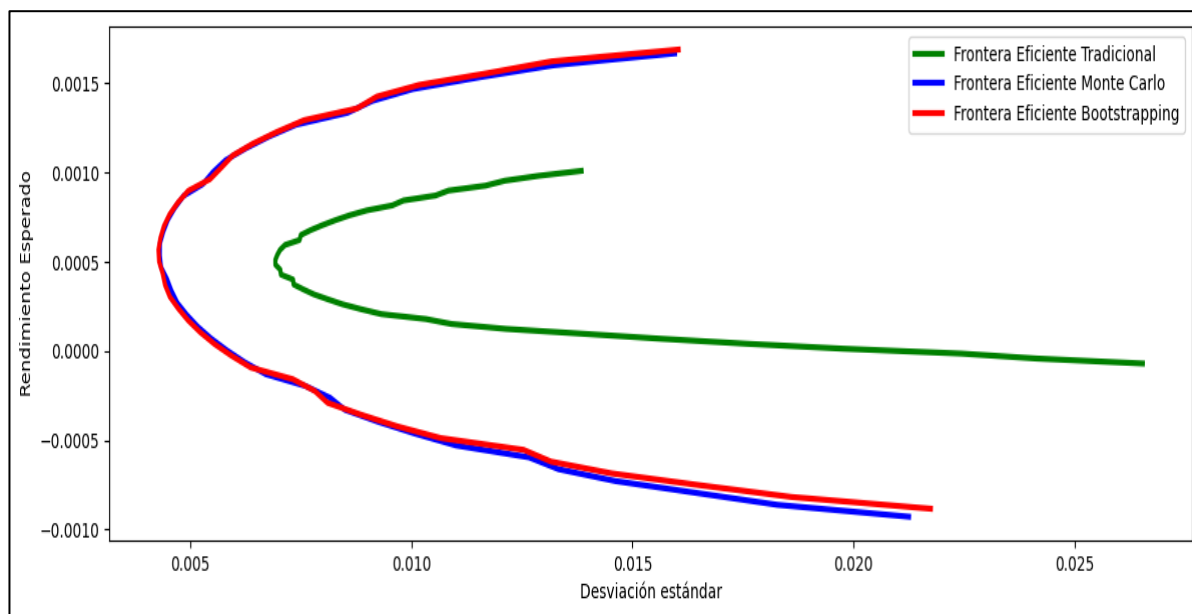
<b>Activo</b>	<b>Optimización tradicional</b>	<b>Simulación Monte Carlo</b>	<b>Bootstrapping</b>
DVN	0.1068%	2.1566%	2.2442%
XOM	0.2805%	3.8234%	3.7239%
SLB	0.0675%	2.0747%	2.1598%
MRK	23.5106%	7.1861%	7.0810%
GD	0.4412%	5.3180%	5.3517%
8058.T	6.3613%	7.7112%	7.7635%
8002.T	0.5771%	6.0805%	5.9343%
8053.T	0.2590%	6.3641%	6.6884%
8031.T	9.1818%	7.3469%	7.5502%
8001.T	31.6657%	9.1650%	9.2254%
DB1.DE	4.6365%	6.0275%	5.9878%
RWE.DE	1.4080%	4.2486%	4.4273%
IFX.DE	0.2319%	2.6260%	2.7024%
BEI.DE	1.6576%	6.5530%	6.1348%
MTX.DE	0.1762%	2.8146%	2.8919%
WALMEX.MX	1.0415%	4.3396%	4.0327%
GAPB.MX	0.6484%	3.4025%	3.2102%
GMEXICOB.MX	2.3080%	3.4550%	3.6322%
GFNORTEO.MX	0.4207%	3.1310%	3.0443%
AC.MX	15.0197%	6.1758%	6.2142%

Fuente: Elaboración propia.

En el segundo caso, se generan de igual manera 1000 simulaciones, en donde para cada uno de los activos financieros se realizan muestras con remplazo de tamaño 1000 partiendo de las 1,560 observaciones iniciales y posteriormente se promedian las simulaciones para obtener los resultados finales de este portafolio óptimo mediante la técnica bootstrapping. El rendimiento esperado en este caso es de 0.07762%, el cual está acompañado de un nivel de riesgo de 0.45743%. Del mismo modo, las ponderaciones óptimas se muestran en la Tabla 6, donde también se añaden las ponderaciones óptimas obtenidas mediante el enfoque clásico de la teoría moderna del portafolio, con la finalidad

de realizar una comparación directa. A partir de los resultados mostrados en la Tabla 6 se deja en claro que mediante la técnica de eficiencia re-muestreada se obtienen resultados más equilibrados y con mayor sentido, debido a que en la optimización clásica la mitad de las ponderaciones óptimas son menores a 1%, lo cual es una asignación insignificante, a menos que el presupuesto total sea una gran suma. En cambio, para los portafolios optimizados bajo la técnica de eficiencia re-muestreada la ponderación mínima es del 2% aproximadamente, mientras que la máxima no supera el 10%. De esta manera, Los resultados de la relación rendimiento-riesgo son más notorios cuando utilizamos la técnica de eficiencia re-muestreada a diferencia de la técnica clásica de Markowitz.

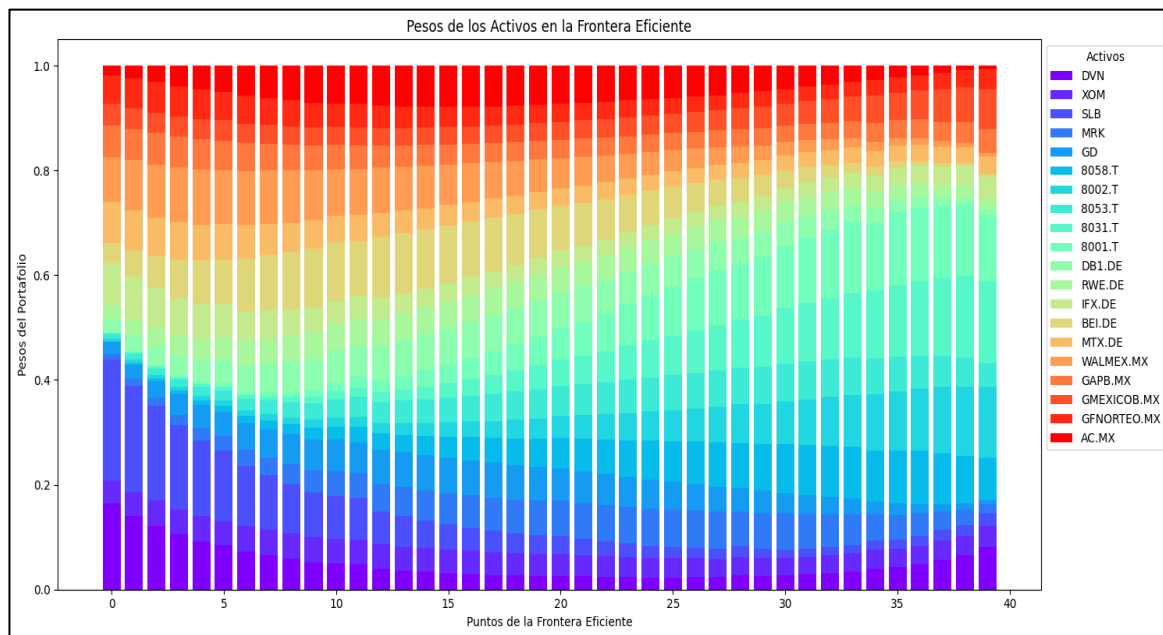
Por otro lado, en la Figura 11 se muestran las fronteras eficientes de la optimización clásica de Markowitz y las dos resultantes de la optimización de la técnica de eficiente re-muestreada. En primera instancia, se puede confirmar que en el caso de la técnica de eficiencia re-muestreada no existen diferencias materiales entre el método de simulación Monte Carlo y la técnica Bootstrapping.



**Figura 11.** Comparativa de fronteras eficientes.

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la composición de las fronteras eficientes, en la Figura 12 se muestra la distribución de las ponderaciones de la frontera eficiente obtenida mediante la técnica de eficiencia re-muestreada basado en la técnica bootstrapping (la cual es prácticamente idéntica a la distribución de ponderaciones de la frontera eficiente obtenida mediante el método de simulación Monte Carlo). Asimismo, no resulta difícil distinguir que las ponderaciones de los distintos puntos de la frontera eficiente de la técnica de eficiencia re-muestreada son más estables que las ponderaciones de la frontera eficiente clásica (ver Figura 10). En particular, a medida que aumenta el rendimiento de cada portafolio de inversión, de izquierda a derecha, las ponderaciones de los activos financieros se distribuyen de manera más equilibrada, de modo que para alcanzar mejores rendimientos no es necesario recurrir a ponderaciones óptimas extremas.



**Figura 12.** Ponderaciones de la frontera eficiente re-muestreada.

Fuente: Elaboración propia.

### 4.3. Análisis de resultados

Es evidente que las ponderaciones que se obtienen bajo la técnica de eficiencia re-muestreada presentan resultados de ponderación más equilibrados y que dada esta razón pueden ser juzgados como mejores. No obstante, una forma de evaluar el desempeño de los portafolios construidos es suponer que se lleva a cabo la inversión. Dicho de otro modo,

se parte de suponer la adquisición de los activos financieros a un determinado precio de compra y eventualmente, transcurrido un periodo de tiempo considerable, la venta los activos financieros a un precio mayor. Explícitamente, para desarrollar lo planteado, en la Tabla 7 se muestran los últimos precios de cierre conocidos al inicio de la elaboración de este trabajo, que son tomados como precios de compra y corresponden a la fecha del 1 de julio de 2024, mientras que para los precios venta se tomaran los últimos precios de cierre conocidos al término de este y que corresponden a la fecha del 1 de abril de 2025. Es importante recordar que los portafolios de inversión se diseñan bajo un horizonte de tiempo de mediano plazo, sin embargo, se decidió realizar este ejercicio para evidenciar de la manera más clara posible el desempeño de la técnica de eficiencia re-muestreada.

**Tabla 7.** Precios de compra y precios de venta de los activos del portafolio.

<b>Activo</b>	<b>Precio de compra</b>	<b>Precio de venta</b>	<b>Variación</b>
DVN	46.58	37.92	-18.59%
XOM	113.27	118.67	4.77%
SLB	46.26	42.19	-8.80%
MRK	122.00	86.60	-29.02%
GD	285.79	276.04	-3.41%
8058.T	3,096.55	2,615.00	-15.55%
8002.T	2,920.36	2,373.00	-18.74%
8053.T	3,938.92	3,380.00	-14.19%
8031.T	3,594.64	2,788.00	-22.44%
8001.T	7,755.54	6,854.00	-11.62%
DB1.DE	191.10	276.70	44.79%
RWE.DE	31.95	33.76	5.67%
IFX.DE	34.31	30.60	-10.81%
BEI.DE	136.55	120.35	-11.86%
MTX.DE	238.80	323.70	35.55%
WALMEX.MX	60.07	57.89	-3.63%
GAPB.MX	275.67	388.67	40.99%
GMEXICOB.MX	96.34	106.12	10.15%
GFNORTEO.MX	138.78	145.01	4.49%
AC.MX	177.35	214.06	20.70%

Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, tomando como referencia los resultados de la Tabla 7 no resulta difícil reconocer que más de la mitad de los activos riesgosos han tenido caídas en los precios durante los últimos meses. La Figura 12 confirma el argumento anterior, puntualmente, se puede observar que solo los precios de los activos financieros de DB1.DE, MTX.DE, GAPB.MX y AC.MX incrementaron en más del 20%, mientras que el resto de los activos financieros mantuvo una tendencia a la baja durante el periodo de análisis. Al mismo tiempo, es importante destacar el comportamiento tan similar entre los activos riesgosos que corresponden a la bolsa de valores de Japón, si bien, esto era de esperarse dado el nivel de correlación observado en la Figura 7, sorprende la notable caída en los precios de estos activos riesgosos, puesto que eran los que mayor rendimiento esperado reportaron.



**Figura 13.** Evolución del precio de los activos riesgosos entre julio 2024 y abril 2025.

Fuente: Elaboración propia.

En este sentido, la explicación ante este fenómeno se remonta a agosto de 2024, cuando el índice Nikkei presento la peor caída en su historia, incluso mayor que la ocurrida en octubre de 1987. Las principales razones detrás de esta caída se relacionan con las expectativas desfavorables de la economía estadounidense, las cuales apuntaban a una posible recesión, lo que provocó que las bolsas de valores de Taiwán, Seúl, Tokio, Hong Kong y Shanghái registraran caídas al mismo tiempo (El Mundo, 2024). Del mismo modo, los activos financieros estadounidenses tuvieron caídas en sus precios a partir de diciembre de 2024 (al igual que muchos mercados a nivel mundial), cuando la Reserva Federal de Estados Unidos anuncio recortes a las tasas de interés (Infobae, 2024). Aunado a lo anterior, desde la llegada de Donald Trump a la presidencia, los mercados financieros en todo el mundo han experimentado periodos de gran inestabilidad, derivado del anuncio de los grandes cambios políticos y macroeconómicos, los cuales a su vez incrementan la probabilidad de una recesión a nivel mundial (BBC, 2025).

Mencionado todos estos antecedentes, es viable proceder con el análisis planteado en la página anterior. Para ello, en la Tabla 8 se muestra en primera instancia el precio de adquisición del portafolio y el precio de venta de este, según las ponderaciones obtenidas por cada técnica de optimización, bajo el supuesto de que se pueden comprar y vender fracciones de los activos riesgosos. Sin embargo, es importante hacer énfasis en que en este análisis no se consideran los efectos cambiarios de las distintas divisas, de modo que los resultados estarán basados únicamente en variaciones porcentuales.

**Tabla 8.** Comparación de las técnicas de optimización.

	<b>Optimización tradicional</b>	<b>Eficiencia re-muestreada simulación Monte Carlo</b>	<b>Eficiencia re-muestreada Bootstrapping</b>	<b>Optimización Naive</b>
<b>Valor de compra</b>	3,084	1,732	1,753	1,165
<b>Valor de venta</b>	2,691	1,494	1,512	1,013
<b>Variación</b>	-12.74%	-13.74%	-13.77%	-13.01%

Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, el porcentaje de pérdidas es bastante similar para los diferentes portafolios de inversión, con un valor mínimo de -13.77% obtenido por la técnica de eficiencia re-muestreada basada en re-muestreo bootstrapping y un valor máximo de -12.74% alcanzado por la optimización tradicional de Markowitz. Cabe resaltar que la estrategia Naive fue la segunda técnica que menor nivel de pérdidas porcentuales registro.

En conclusión, las variaciones del nivel de pérdidas entre las diferentes técnicas pueden ser tomadas como no materiales. Aunque el portafolio optimizado tradicionalmente fue el que menor nivel de pérdidas obtuvo, es importante mencionar que de acuerdo con la Tabla 6 el 48% de este portafolio óptimo se invirtió en los activos financieros de la bolsa de valores de Japón, los cuales tuvieron pérdidas de más del 11%. Sin embargo, la inversión realizada en los activos financieros de DB1.DE y AC.MX fue la que logro contrarrestar dichas pérdidas, ya que en estos activos financieros se invirtió cerca del 20% del portafolio de inversión y el promedio de los rendimientos de ambos fue de más de 30%.

Seguidamente, para los portafolios optimizados bajo la técnica de eficiencia re-muestreada la proporción de inversión destinada a los activos financieros japoneses es aproximadamente de 37%. Asimismo, es importante señalar que la distribución de este 37% se da de manera equilibrada entre los 5 activos financieros, mientras que en el portafolio óptimo tradicional un solo activo financiero (8001.T) aporta más del 30%. Por esta razón, pese al alto nivel de correlación que tienen los activos riesgosos de la bolsa de valores de Japón, se puede concluir que en los portafolios de inversión basados en la técnica de eficiencia re-muestreada se tiene una mejor distribución, pero, sobre todo, se tiene un mejor ajuste, dado que el alto rendimiento esperado de los activos financieros japoneses no proporciona resultados sobreponderados.

Por otra parte, es importante destacar que, aunque el activo financiero SLB tenía un rendimiento esperado ligeramente negativo, el capital designado a dicho activo financiero no fue tan castigado en el portafolio óptimo de la técnica de eficiencia re-muestreada, como si lo fue en el portafolio óptimo tradicional. Dicho de otro modo, es evidente que el portafolio óptimo tradicional proporciona resultados infraponderados con respecto a aquellos activos financieros con rendimientos esperados no tan favorables, lo cual es bastante lógico e incluso intuitivo. No obstante, resulta interesante cuestionarse qué es

preferible hacer con aquellos activos riesgosos que no han tenido un desempeño financiero tan próspero. Por un lado, los inversionistas pueden tener expectativas de crecimiento con respecto a esos activos financieros, mismas que incitaron a la inclusión de los activos financieros al portafolio de inversión. Por otro lado, el argumento matemático dicta totalmente que se debe asumir el menor riesgo posible, sin tomar en cuenta que durante los últimos meses el activo financiero presento un desempeño financiero positivo y que prácticamente la caída en el precio fue al principio.

En resumen, los portafolios optimizados mediante la técnica de eficiencia re-muestreada resultaron en ponderaciones más equilibradas partiendo del comportamiento histórico de los activos riesgosos. Desde una perspectiva personal, la diferencia de uno por ciento de rendimiento entre el portafolio de optimización clásica y los portafolios óptimos de eficiencia re-muestreada no es un argumento suficiente para considerar la superioridad en desempeño entre una técnica y otra. Por el contrario, resulta más enriquecedor tener resultados más prácticos y sustentados en un análisis más riguroso, ya que los resultados pueden proporcionar información relevante a los inversionistas, a nivel institucional, nacional e internacional para la construcción de portafolios óptimos.

## Conclusiones

La administración de portafolios de inversión es un proceso que requiere de rigurosas habilidades centradas en la racionalidad y aversión al riesgo. Sin lugar a duda la teoría moderna del portafolio de Markowitz ha sido y seguirá siendo el principal marco de referencia en las inversiones dentro de los mercados de capitales. De forma sobresaliente, el avance de las técnicas computacionales ha permitido mejorar significativamente el desarrollo de esta teoría y potenciarla, como claro ejemplo de ello se tiene la técnica de eficiencia re-muestreada desarrollada por Michaud y Michaud (2007). Sin embargo, los inversionistas deben estar al pendiente de los diferentes tipos de riesgos financieros existentes en los mercados financieros en beneficio del buen desempeño de los portafolios de inversión.

En este contexto, la relación entre rendimiento y riesgo es la principal regla que todo inversionista adverso al riesgo debe priorizar en la construcción y seguimiento de sus portafolios de inversión. Además, una eficiente estrategia de diversificación del portafolio de inversión es un factor que debe ser considerado en la asignación eficiente de capital en los mercados financieros, ya que como se demostró empíricamente con la construcción del portafolio desarrollado en este documento, los altos niveles de integración financiera han limitado los beneficios de esta práctica.

Los resultados de la técnica de eficiencia re-muestreada confirman que la incorporación de incertidumbre y aleatoriedad en la construcción de portafolios óptimos de media-varianza produce prácticas de inversión que conducen a una gestión más eficiente de los portafolios de inversión de activos financieros y que sobre todo están sustentadas en un análisis estadístico. Sumado a esto, la técnica de eficiencia re-muestreada resulta de gran utilidad cuando se incorporan distintas restricciones establecidas en la política de inversión, tales como la limitación de ventas en corto y el presupuesto racional de inversión.

Por otro lado, la optimización de portafolios de inversión basada en la técnica de eficiencia re-mostrada cumple con el objetivo principal de este trabajo, el cual consiste en construir portafolios de inversión óptimos, así como con los objetivos particulares, que se resumen en la comparación de los resultados de la teoría moderna del portafolio clásica y la técnica

propuesta. Asimismo, la hipótesis de investigación planteada ha sido validada debido al equilibrio obtenido en las ponderaciones de los activos riesgosos y la comparación de sus buenos resultados respecto al desempeño financiero del portafolio óptimo de media-varianza tradicional.

Equivalentemente, los resultados de la técnica propuesta confirman que las ponderaciones de estos portafolios óptimos son más viables que las ponderaciones de la técnica de optimización tradicional y, en consecuencia, resultan más eficientes para los inversionistas en la práctica. De igual forma, el ejercicio de comparación de desempeño entre los dos portafolios desarrollados mediante eficiencia re-muestreada y el portafolio óptimo tradicional mostro diferencias no son significativas entre ambas técnicas, en donde la menor pérdida, en términos porcentuales, fue registrada por la optimización tradicional. Desde una perspectiva personal es preferible obtener ese desempeño ligeramente menor con la eficiencia re-muestreada a cambio de una distribución de ponderaciones más equilibrada, ya que, bajo un escenario en el que los activos AC.MX y DB1.DE no contrarresten el mal momento por el que atraviesan las empresas japonesas, entonces el resultado del portafolio óptimo tradicional hubiera sido peor. Como consecuencia, a partir de este punto se puede concluir que los portafolios de eficiencia re-muestreada son más conservadores que los portafolios óptimos clásicos y, por lo tanto, son totalmente eficientes para inversionistas adversos al riesgo.

Ahora bien, sobra recordar que los portafolios de inversión son desarrollados con mira a un periodo de tiempo de cinco años en promedio, por lo que sería totalmente interesante analizar el comportamiento entre ambas técnicas dentro de algunos años. No obstante, esto sería prácticamente un argumento adicional, dado que las principales fortalezas de la eficiencia re-muestreada fueron mencionadas con anterioridad.

Complementariamente, la eficiencia re-muestreada resulto ser una técnica eficiente para la optimización de portafolios de inversión construidos con activos riesgosos de los mercados de capitales internacionales. El aprovechamiento del avance computacional y la inclusión de un enfoque estadístico en el que se contempla la incertidumbre de los mercados convierten a esta técnica en una estrategia poderosa con un nivel de complejidad promedio que muchos inversionistas a nivel mundial podrían probar.

Asimismo, es importante resaltar que para aquellas personas que no cuenten con conocimientos medianamente complejos en el estudio de la conformación de portafolios de inversión, la estrategia Naive puede ser una gran opción, pues como lo muestran los resultados del análisis de comparación descrito en el capítulo cuatro, las variaciones son no significativas y los resultados pueden conducir a beneficios eficientes.

Finalmente, en este texto se puede ultimar que la técnica de eficiencia re-muestreada se basa principalmente en análisis de riesgo y rendimiento de los activos financieros heredado de la optimización tradicional de media-varianza, pero que, al mismo tiempo, dada la incorporación de incertidumbre, equilibra la ponderación de los activos en beneficio de no sobreponderar o infraponderar aquellos activos riesgosos que, o puedan sorprender con una prominente caída, o bien puedan sorprender con un buen crecimiento, contrario a lo pronosticado en el desarrollo inicial.

## Apéndice A. Código en Python del Algoritmo de optimización de la técnica de eficiencia re-muestreada para el diseño de portafolios óptimos.

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize
from scipy.stats import multivariate_normal
import cvxopt

#-----
ACTIVOS = pd.read_excel("C:/Users/Diego/Documents/Tesis/Activos/ACTIVOS.xlsx", sheet_name="rendimientos")
# Calcular media, desviación estándar y correlación de las observaciones originales
var_name = ACTIVOS.columns
mu = ACTIVOS.mean().values
sd = ACTIVOS.std().values
corr = ACTIVOS.corr().values
cov= np.diag(sd) @ corr @ np.diag(sd)
nvar = len(mu)

#-----
# Optimización tradicional
#-----
n_frontera = 40
n_mu = np.linspace(np.min(mu), np.max(mu), n_frontera + 2)[1:-1]
vector_sd = np.zeros(n_frontera)
vector_mu=np.zeros(n_frontera)
vector_ponderaciones = np.zeros((n_frontera, nvar))
for i in range(n_frontera):
    def objective(weights):
        return 0.5 * np.dot(weights.T, np.dot(cov, weights))
    constraints = (
        {'type': 'eq', 'fun': lambda weights: np.sum(weights) - 1},
        {'type': 'eq', 'fun': lambda weights: np.dot(weights, mu) - n_mu[i]}
    )
    bounds = [(0, 1)] * nvar
    initial_guess = np.zeros(nvar)
    result = minimize(objective, initial_guess, method='trust-constr', bounds=bounds, constraints=constraints)
    weights = result.x
    vector_sd[i] = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov, weights)))
    vector_ponderaciones[i, :] = weights
    vector_mu[i]=n_mu[i]
```

```

#-----
# Graficas Optimizacion tradicional
#-----
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.scatter(np.sqrt(np.diag(cov)), mu, color='red', s=100, label="Activos")
for i, label in enumerate(var_name):
    plt.text(np.sqrt(cov[i, i]), mu[i], label, fontsize=10)
plt.plot(vector_sd, vector_mu, color='green', lw=3, label='Frontera Eficiente')
plt.xlabel('Desviación estándar')
plt.ylabel('Rendimiento Esperado')
plt.title('Optimización de Markowitz')
plt.legend()

plt.figure(figsize=(15, 7))
for i in range(0, nvar):
    plt.bar(np.arange(n_frontera), vector_ponderaciones[:, i], bottom=np.sum(vector_ponderaciones[:, :i], axis=1),
           color=plt.cm.rainbow(np.linspace(0, 1, nvar))[i], label=var_name[i])
plt.legend(loc='upper left', bbox_to_anchor=(1, 1), title="Activos")
plt.xlabel('Puntos de la Frontera Eficiente')
plt.ylabel('Pesos del Portafolio')
plt.title('Pesos de los Activos en la Frontera Eficiente')
plt.tight_layout()
plt.show()

#-----
# Simulacion Monte Carlo
#-----
np.random.seed(42)
simulaciones = 1000
vector_sd_re = np.zeros(n_frontera)
vector_mu_re = np.zeros(n_frontera)
vector_ponderaciones_re = np.zeros((n_frontera, nvar))

for rr in range(simulaciones):
    sim = np.random.normal(loc=mu, scale=sd, size=(1000, 20))
    mu_sim = np.mean(sim, axis=0)
    cov_sim = np.cov(sim, rowvar=False)
    vector_sim_sd = np.zeros(n_frontera)
    vector_sim_mu = np.zeros(n_frontera)
    vector_sim_ponderaciones = np.zeros((n_frontera, nvar))
    n_mu_sim = np.linspace(np.min(mu_sim), np.max(mu_sim), n_frontera + 2)[1:-1]
    for i in range(n_frontera):
        def objective(weights):
            return 0.5 * np.dot(weights.T, np.dot(cov_sim, weights))
        constraints = (
            {'type': 'eq', 'fun': lambda weights: np.sum(weights) - 1},
            {'type': 'eq', 'fun': lambda weights: np.dot(weights, mu_sim) - n_mu_sim[i]}
        )
        bounds = [(0, 1)] * nvar
        initial_guess = np.zeros(nvar)
        result_sim = minimize(objective, initial_guess, method='trust-constr', bounds=bounds, constraints=constraints)
        weights_sim = result_sim.x
        vector_sim_sd[i] = np.sqrt(np.dot(weights_sim.T, np.dot(cov_sim, weights_sim)))
        vector_sim_mu[i] = np.dot(weights_sim.T, mu_sim)
        vector_sim_ponderaciones[i, :] = weights_sim
    vector_mu_re += vector_sim_mu
    vector_ponderaciones_re += vector_sim_ponderaciones
    vector_sd_re += vector_sim_sd
vector_ponderaciones_re /= simulaciones
vector_mu_re /= simulaciones
vector_sd_re /= simulaciones

```

```

#-----
# Bootstrapping
#-----
np.random.seed(42)
simulaciones = 1000
vector_sd_re_b = np.zeros(n_frontera)
vector_mu_re_b = np.zeros(n_frontera)
vector_ponderaciones_re_b = np.zeros((n_frontera, nvar))

for rr in range(simulaciones):
    sim=pd.DataFrame()
    for col in ACTIVOS.columns:
        sim[col]=ACTIVOS[col].sample(n=1000, replace=True).reset_index(drop=True)
    mu_sim = np.mean(sim, axis=0)
    cov_sim = np.cov(sim, rowvar=False)
    n_mu_sim = np.linspace(np.min(mu_sim), np.max(mu_sim), n_frontera + 2)[1:-1]
    vector_sim_sd = np.zeros(n_frontera)
    vector_sim_mu = np.zeros(n_frontera)
    vector_sim_ponderaciones = np.zeros((n_frontera, nvar))
    for i in range(n_frontera):
        def objective(weights):
            return 0.5 * np.dot(weights.T, np.dot(cov_sim, weights))
        constraints = (
            {'type': 'eq', 'fun': lambda weights: np.sum(weights) - 1},
            {'type': 'eq', 'fun': lambda weights: np.dot(weights, mu_sim) - n_mu_sim[i]}
        )
        bounds = [(0, 1)] * nvar
        initial_guess = np.zeros(nvar)
        result_sim = minimize(objective, initial_guess, method='trust-constr', bounds=bounds, constraints=constraints)
        weights_sim = result_sim.x
        vector_sim_sd[i] = np.sqrt(np.dot(weights_sim.T, np.dot(cov_sim, weights_sim)))
        vector_sim_mu[i]=np.dot(weights_sim.T,mu_sim)
        vector_sim_ponderaciones[i, :] = weights_sim
    vector_mu_re_b += vector_sim_mu
    vector_ponderaciones_re_b += vector_sim_ponderaciones
    vector_sd_re_b +=vector_sim_sd
vector_ponderaciones_re_b /= simulaciones
vector_mu_re_b /= simulaciones
vector_sd_re_b /=simulaciones

```

```

#-----
# Gráficas
#-----
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.scatter(np.sqrt(np.diag(cov)), mu, color='red', s=100, label="Activos")
for i, label in enumerate(var_name):
    plt.text(np.sqrt(cov[i, i]), mu[i], label, fontsize=12)

plt.plot(vector_sd, vector_mu, color='green', lw=3, label='Frontera Eficiente Tradicional')
plt.plot(vector_sd_re, vector_mu_re, color='blue', lw=3, label='Frontera Eficiente Monte Carlo')
plt.plot(vector_sd_re_b, vector_mu_re_b, color='red', lw=3, label='Frontera Eficiente Bootstrapping')
plt.xlabel('Desviación estándar')
plt.ylabel('Rendimiento Esperado')
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()

plt.figure(figsize=(15, 7))
for i in range(0, nvar):
    plt.bar(np.arange(n_frontera), vector_ponderaciones_re_b[:, i], bottom=np.sum(vector_ponderaciones_re_b[:, :i], axis=1),
           color=plt.cm.rainbow(np.linspace(0, 1, nvar))[i], label=var_name[i])
plt.legend(loc='upper left', bbox_to_anchor=(1, 1), title="Activos")
plt.xlabel('Puntos de la Frontera Eficiente')
plt.ylabel('Pesos del Portafolio')
plt.title('Pesos de los Activos en la Frontera Eficiente')

plt.tight_layout()
plt.show()

#-----
# Gráfica de los precios de los activos para estimacion de los insumos
#-----
ACTIVOS = pd.read_excel("C:/Users/Diego/Documents/Tesis/Activos/ACTIVOS.xlsx", sheet_name="ds_final")

var_name = ACTIVOS.columns
mu = ACTIVOS.mean().values
nvar = len(mu)

fig, axes = plt.subplots(4, 5, figsize=(20, 15))
axes = axes.flatten()
for i, ax in enumerate(axes):
    if i < nvar:
        ax.plot(ACTIVOS.index, ACTIVOS[var_name[i]], label=var_name[i])
        ax.set_title(f'Precio del activo: {var_name[i]}')
        ax.set_xlabel('Tiempo')
        ax.set_ylabel('Precio')
        ax.legend(loc='best')
        ax.grid(True)
    else:
        ax.axis('off')

plt.tight_layout()
plt.show()

```

```

#-----
# Gráfica de los precios de los activos para analisis de la inversión
#-----
ACTIVOS_F = pd.read_excel("C:/Users/Diego/Documents/Tesis/Activos/ACTIVOS.xlsx", sheet_name="activos final")
var_name = ACTIVOS_F.columns
mu = ACTIVOS_F.mean().values
nvar = len(mu)

fig, axes = plt.subplots(4, 5, figsize=(20, 15))

axes = axes.flatten()
for i, ax in enumerate(axes):
    if i < nvar:
        ax.plot(ACTIVOS_F.index, ACTIVOS_F[var_name[i]], label=var_name[i])
        ax.set_title(f'Precio del activo: {var_name[i]}')
        ax.set_xlabel('Tiempo')
        ax.set_ylabel('Precio')
        ax.legend(loc='best')
        ax.grid(True)
    else:
        ax.axis('off')
plt.tight_layout()

plt.show()

```

## Bibliografía

- Alves, J. & Saleh, M. (2012). The Moore-Penrose pseudoinverse: A tutorial review of the theory. *Brazilian Journal of Physics*, 42(1-2), 146-165.
- Anelli, M. (2023). Reinterpreting the Sharpe Ratio as a Measure of Investment Return from Alpha. *Modern Economy*, 14(2), 35-40. <https://doi.org/10.4236/me.2023.142003>
- Baker, H. K., & Filbeck, G. (2013). *Portfolio Theory and Management*. Oxford University Press.
- Banque de France. (2021). *Payments and market infrastructures in the digital era*. <https://publications.banque-france.fr/en/economic-and-financial-publications/book-payments-and-market-infrastructures-digital-era>
- BBC. (2025, abril 3). Ha sido una jornada brutal: la bolsa de Wall Street sufre fuertes caídas por los temores a una recesión en Estados Unidos. BBC News Mundo. <https://www.bbc.com/mundo/articles/clydkvq9pz5o>
- Berger, V. W., & Zhou, Y. (2014). Kolmogorov–Smirnov test: Overview. Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. <https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat06558>
- Berns, D. M. (2020). *Modern Asset Allocation for Wealth Management*. John Wiley & Sons.
- Bhuiyan, R.A., Husain, A. y Zhang, C. (2023). Diversification evidence of bitcoin and gold from wavelet analysis. *Financial Innovation*, 9(100), 1-36.
- Bielecki, T.R., Jin, H., Pliska, S.R. y Zhou, X.Y. (2005). Continuous-time mean-variance portfolio selection with bankruptcy prohibition. *Mathematical Finance*, 15(2), 213–244.
- Bouchaud, J., & Potters, M. (2000). *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*.
- Britten-Jones, M. (1999). The sampling error in estimates of Mean-Variance efficient portfolio weights. *The Journal of Finance*, 54(2), 655-671.

- Brown, S. J., Hwang, I., & In, F. H. (2013). Why Optimal Diversification Cannot Outperform Naive Diversification: Evidence from Tail Risk Exposure. SSRN Electronic Journal. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2242694>
- Cecchetti, S., & Schoenholtz, K. (2019). *ISE Money, Banking and Financial Markets*.
- Chong, Y. (2004). Investment Risk Management. John Wiley & Sons.
- Christoffersen, P. F. (2003). Elements of Financial Risk Management.
- Christoffersen, P., Errunza, V., Jacobs, K. y Langlois, H. (2012). Is the Potential for International Diversification Disappearing? A Dynamic Copula Approach. Oxford University Press on behalf of The Society for Financial Studies, 25(12),3711-3751.
- Cortés, J. G. (2018). Clasificación de los riesgos financieros. Revista Científica General José María Córdova, 16(27), 115–132. <https://www.redalyc.org/journal/5718/571864088006/html/>
- De Roon, F.A., Nijman, T.E. y Werker, B.J.M. (2001). Testing for mean-variance spanning with short sales constraints and transaction costs: The case of emerging markets. The Journal of Finance, 56(2), 721–742.
- DeMiguel, V., Garlappi, L. y Uppal, R. (2009). Optimal versus Naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? The Society for Financial Studies, 22, 1915-1953.
- Divya, T. & Viswambharan, A. (2019). Investment Risk Management. International Journal of Commerce, 7, 36-41.
- Efron, B., & Tibshirani, R. (1994). An Introduction to the Bootstrap. En *Chapman and Hall/CRC*. <https://doi.org/10.1201/9780429246593>
- El Mundo. (2024, agosto 5). El Nikkei sufre una caída histórica del 12,4% en su peor jornada desde el 'crash' de 1987. ELMUNDO. <https://www.elmundo.es/economia/2024/08/05/66b089dae85ece20368b457a.html>
- Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., & Goetzmann, W. N. (2014). Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. John Wiley & Sons.

- Fabozzi, F. J., Gupta, F., & Markowitz, H. M. (2002). The Legacy of Modern Portfolio Theory. *The Journal of Investing*, 11(3), 7-22.
- Ghon, S. (2003). Short-Sale constraints: Good or Ban news for the stock market? Fifth OECD Round Table on Capital Market Reform in Asia to be held in Tokyo, Japan. *International Finance and Banking*.
- Glasserman, P. (2003). Monte Carlo Methods in Financial Engineering. En *Applications of mathematics*. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21617-1>
- Grupo BMV. (2024). Acerca de. (s. f.). <https://www.bmv.com.mx/es/grupo-bmv/acerca-de>
- Hudson, R. S., & Gregoriou, A. (2014). Calculating and comparing security returns is harder than you think: A comparison between logarithmic and simple returns. *International Review Of Financial Analysis*, 38, 151-162. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2014.10.008>
- Hussain, S., Bhanu, K., & Kumar, A. (2019). Stock Market Volatility: A Review of the Empirical Literature. *IUJ Journal Of Management*, 7(1).
- Infobae. (2024, diciembre 2018). Tras la decisión de la Reserva Federal sobre la tasa de interés, Wall Street tuvo el segundo peor día de 2024. Infobae. <https://www.infobae.com/estados-unidos/2024/12/18/tras-la-decision-de-la-reserva-federal-wall-street-cerro-con-fuertes-caidas/>
- Jobson, J. D., & Korkie, B. M. (1981). Performance Hypothesis Testing with the Sharpe and Treynor Measures. *The Journal of Finance*, 36(4), 889–908. <https://doi.org/10.2307/2327554>
- Kinlaw, W., Kritzman, M. P., & Turkington, D. (2017). *A Practitioner's Guide to Asset Allocation*. John Wiley & Sons.
- Knight, F. H. (2006). *Risk, Uncertainty and Profit*. Courier Corporation.
- Levinson, M. (2018). *Guide to Financial Markets: Why They Exist and how They Work*. Economist Books.

- Lewis, K.K. (2006). Is the international diversification potential diminishing? Foreign equity inside and outside the US. Wharton School. Working paper 12697, University of Pennsylvania.
- Li, K., Sarkar, A. y Wang, Z. (2003). Diversification benefits of emerging markets subject to portfolio constraints. *Journal of Empirical Finance*, 10(1), 57–80.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*. 7, 77-91.
- Markowitz, H. (1959). Portfolio selection. Efficient Diversification of Investment. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University. New Have.
- Markowitz, H. M., & Blay, K. (2013). Risk-Return Analysis: The Theory and Practice of Rational Investing. <https://ci.nii.ac.jp/ncid/BB13697251>
- MATLAB. (2024). What is quadratic programming? MathWorks. <https://www.mathworks.com/discovery/quadratic-programming.html>
- Menon, N.R., Subha, M.V. y Sagarán, S. (2009). Cointegration of Indian stock markets with other leading stock markets. *Studies in Economics and Finance*, 26(2), 87–94.
- Metropolis, N., & Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247), 335–341. <https://doi.org/10.2307/2280232>
- Michaud, R. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is 'Optimized' Optimal? *Financial Analysts Journal*, 45, 31-42.
- Michaud, R. y Michaud, R. (2007). Estimation Error and Portfolio Optimization a Resampling Solution, *New Frontier Advisor*. University of Waterloo.
- Michaud, R. y Michaud, R. (2008). *Efficient Asset Management*. Oxford University Press. New York.
- Mood, A. M., Graybill, F. A., & Boes, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill Publishing Company.

- Outreville, J. (2014). The Meaning of Risk? Insights from “The Geneva Risk and Insurance Review.” *The Geneva Papers on Risk and Insurance. Issues and Practice*, 39(4), 768–781. <http://www.jstor.org/stable/24736688>
- Oxford Institute for Energy Studies. (2025). Home | Oxford Institute for Energy Studies. Oxford Institute for Energy Studies. <https://www.oxfordenergy.org/wpcms/wp-content/uploads/2018/09/Crude-Oil-Market-in-2018-and-2019-How-Did-We-Get-Here-and-What-Next.pdf>
- RiskAMP. (2024). The RiskAMP Monte Carlo Add-in for Excel. <https://www.riskamp.com/>
- Santander. (2025). ¿Qué son los dividendos y cómo funcionan? Banco Santander. <https://www.bancosantander.es/glosario/dividendos>
- Santiago, J. (2020, 1 de julio). Covid-19 y contracción económica tiran a la Bolsa mexicana en el primer semestre de 2020. *El Economista*. <https://www.eleconomista.com.mx/mercados/Covid-19-y-contraccion-economica-tiran-a-la-Bolsa-mexicana-en-el-primer-semestre-de-2020-20200630-0109.html>
- SciPy (2025). <https://docs.scipy.org/doc/scipy/index.html>
- Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425–442. <https://doi.org/10.2307/2977928>
- Vo, X.V. (2019). Do foreign investors promote stock price efficiency in emerging markets? *International Review of Finance*, 19(1), 223–235.
- Vo, X.V. y Chou, T.K.H. (2019). Do foreign shareholders improve corporate earnings quality in emerging markets? Evidence from Vietnam. *Cogent Economics & Finance*, 7(1), 1698940.