

2.3 PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

1. La probabilidad es positiva y menor o igual que 1.

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

2. La probabilidad del suceso seguro es 1.

$$p(E) = 1$$

3. Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \emptyset$ entonces:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Propiedades de la probabilidad

1 La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

2 Probabilidad del suceso imposible es cero.

$$p(\emptyset) = 0$$

3 La probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4 Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.

$$\text{Si } A \subset B, \text{ entonces } p(A) \leq p(B)$$

5 Si A_1, A_2, \dots, A_k son incompatibles dos a dos entonces:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_k)$$

6 Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ entonces:

$$p(S) = p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n)$$

Por ejemplo la probabilidad de sacar par, al tirar un dado, es:

$$P(\text{par}) = P(1) + P(2) + P(3)$$

Regla de Laplace

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplos

Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras.

Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}.

Casos favorables: 1.

$$P(2 \text{ caras}) = \frac{1}{4}$$

En una baraja de 40 cartas, hallar la $P(\text{as})$ y $P(\text{copas})$.

Casos posibles: 40.

Casos favorables de ases: 4.

$$P(\text{as}) = \frac{4}{40}$$

Casos favorables de copas: 10.

$$P(\text{copas}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

1 Un número par.

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Casos favorables: {2, 4, 6}.

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2 Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2 Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3 Mayor que 4.

Casos favorables: {5, 6}.

$$P(> 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de la unión de sucesos

Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

$$A \cap B = \emptyset$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Reglas de Probabilidades

Para cualquier evento A, le asignamos el número P(A) llamado la **probabilidad del evento A**.

- Le asignamos una probabilidad a cada resultado en el espacio muestral, entre 0 y 1, tal que la suma de estas probabilidades es igual a 1, y
- La probabilidad de cualquier evento es la suma de las probabilidades de los resultados que hacen aquel evento.

Si los resultados del espacio muestral son **equiprobables** (igualmente probables), la probabilidad de un evento A es simplemente la proporción de resultados de A en el espacio muestral.

$$\text{Ley de Laplace : } \frac{\text{número de resultados favorables a A}}{\text{número de resultados posibles}} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Esta ley es la definición de Probabilidad a priori o clásica

Asignando Probabilidades a eventos

Experimento = lanzar dos dados. Asuma que los 36 puntos en el espacio muestral son equiprobables. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

a) Evento A = " No sale seis"

$$S = \{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \}$$

P(A) =

b) Evento B = "Sale exactamente un seis" P(B) =

c) Evento C = "Salen exactamente dos seis" P(C) =

d) Evento D = "Sale al menos un seis" P(D) =

e) Compare 1 - P(A) con P(D)

f) Considere la suma de los valores de dos dados:

¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de 3?

¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de al menos 11?

¿Dado cargado?

Se sospecha que un dado está cargado en el sentido que tienden a salir número grandes. Queremos docimar la siguiente hipótesis:

H_0 : El dado no está cargado (todas las caras tienen la misma probabilidad).

H_1 : El dado está cargado hacia los números más grandes.

Suponga que usted obtiene los datos al lanzar dos veces el dado. Entonces el espacio muestral es:

$$S = \{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \}$$

Se sugiere la siguiente regla de decisión: rechazar H_0 si la suma de los dos dados es 11 o más extremo.

a) ¿Cuál es la dirección del extremo?

b) ¿Cuál es el valor- p si al tirar los dados suman 11?

c) ¿Es, ese resultado estadísticamente significativo al 5%? ¿Al 10%?

Reglas cuando asignamos probabilidades:

1. Cualquier probabilidad es siempre un valor numérico entre 0 y 1. La probabilidad es *cero* si el evento no puede ocurrir. La probabilidad es *uno* si el evento es seguro.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. Si sumamos las probabilidades de cada resultado individual en el espacio muestral, la probabilidad total tiene que ser uno.

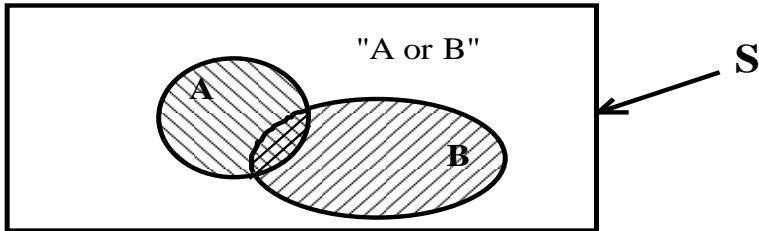
$$P(S) = 1$$

3. La probabilidad de que un evento A ocurra es uno menos la probabilidad de que el evento no ocurra.

$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

4. Regla de la suma: La probabilidad de que un evento A o un evento B ocurra es la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de la interacción.

$$P(A \cup B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Si los dos eventos A y B son **disjuntos**, es decir, no tienen elementos en común, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sexo y educación

Suponga que se registra información sobre sexo y nivel de educación de 200 adultos seleccionados al azar entre los residentes de la comuna de Talca

Sexo	Educación		
	Básica	Media	Universitaria
Hombre	38	28	22
Mujer	45	50	17

Considere los siguientes eventos:

A="adulto seleccionado tiene educación universitaria"

B="adulto seleccionado es mujer"

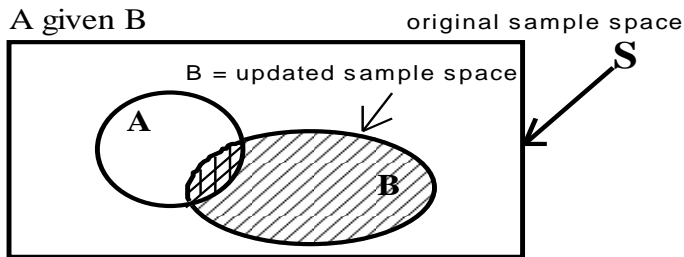
¿Cuál es la probabilidad de que un adulto seleccionado aleatoriamente tenga educación universitaria o sea mujer?

Una compañía de construcción local presentó sus proyectos en dos propuestas. La compañía cree que tiene una probabilidad de 0,5 de ganar la primera propuesta, de 0,4 la segunda y una probabilidad de 0,2 de ganar ambos contratos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía gane al menos un contrato, es decir, la probabilidad de ganar el primer contrato o el segundo o ambos?
- Dibuje un diagrama de Venn para mostrar los dos eventos
A= "gana el primer contrato" y B= "gana el segundo contrato"
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar el primer contrato pero no el segundo?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar el segundo contrato pero no el primero?
- ¿Cuál es la probabilidad de no ganar ningún contrato?

Probabilidad Condicional

En ocasiones, el conjunto de todos los "resultados posibles" puede constituir un subconjunto del espacio muestral original.



Definición:

La probabilidad condicional de que ocurra el evento A dado que el evento B ocurrió está dada por:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{donde } P(B) > 0$$

Nota: de esta relación se deduce que podemos escribir la intersección de otra manera usando la **regla de la multiplicación:**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$

El año 2004 la Universidad de Talca tenía 5453 estudiantes, en la tabla se muestra el detalle de la composición.

	Mujeres	Hombres	Total
Pregrado	2461	2848	5309
Postgrado	67	77	144
Total	2528	2925	5453

- ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea un estudiante de postgrado?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer elegida al azar sea estudiante de postgrado?
- Es este contexto, dé un ejemplo de eventos mutuamente excluyentes.

Probabilidades condicionales

Escenario I

Sea el experimento de lanzar un dado.

El espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un dos?
- Suponga que sabemos que el resultado es par; ¿cuál es ahora la probabilidad de obtener un dos?

Escenario II Sea el experimento de lanzar una moneda dos veces.
El espacio muestral es $S=\{CC, SC, CS, SS\}$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento dado que salió cara en el primer lanzamiento?

Compare los resultados en los dos escenarios

En el segundo caso, la información no cambió la probabilidad buscada, es decir saber que "salió cara en el primer lanzamiento" no cambió la probabilidad de "que salga cara en el segundo lanzamiento".

Esto es así porque los lanzamientos de la moneda son eventos independientes.

Definición:

Dos eventos A y B son **independientes** si

$$P(A|B) = P(A), \text{ o } P(B|A) = P(B).$$

Si saber que un evento ocurrió no cambia la probabilidad de ocurrencia del otro evento, entonces los eventos son independientes.

Si dos eventos A y B son **independientes**, entonces la regla de la multiplicación:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Considere el experimento de lanzar una moneda 6 veces.

1. ¿Cuál de las siguientes secuencias tiene mayor probabilidad?
- (a) SCSCCS (b) CCCSSS (c) CCCCCC
2. Si observamos SSSSSS, en el siguiente lanzamiento será más probable que salga una cara o un sello?

SERNAC realiza una encuesta acerca de la calidad del servicio de reparación de automóviles en 86 talleres:

Taller	Atención	
	Buen a	Regula r
Autorizado	18	6
No autorizado	34	28

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar dé una buena atención?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar sea no autorizado?

- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar sea no autorizado y dé una buena atención?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que los talleres no autorizados den una buena atención?
- e) ¿Son los eventos "no autorizado" y "buena atención" **disjuntos**?
- f) ¿Son los eventos "no autorizado" y "buena atención" **independientes**?
- g) Si fueran independientes, ¿cuántos talleres no autorizados que dan buena atención esperarías encontrar?

Reglas básicas de Probabilidad:

1. La probabilidad de que un evento A ocurra se denota por $P(A)$. Para cualquier evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. La suma de todas las probabilidades de los resultados en el espacio muestral tiene que ser igual a uno: $P(S) = 1$
3. **Regla del Complemento:** La probabilidad de que un evento ocurra es 1 menos la probabilidad que el evento no ocurra. $P(A) = 1 - P(A^c)$
4. **Regla de la Suma:** La probabilidad de que el evento A o el evento B ocurra es la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de la intersección:

$$P(A \cup B) = P(A \circ B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes (o disjuntos), entonces:

$$P(A \circ B) = P(A) + P(B).$$

5. La **probabilidad condicional** de que ocurra un evento A, dado que ocurrió el evento B está dada por:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{donde } P(B) > 0.$$

De aquí sale la **regla de la multiplicación**: $P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$

Si dos eventos no se influyen entre sí, es decir, saber que uno ocurrió no cambia la probabilidad de que el otro ocurra, los eventos son independientes.

Dos eventos A y B son **independientes** si $P(A | B) = P(A)$, o equivalentemente $P(B | A) = P(B)$, o equivalentemente $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.