Universidad Autónoma del Estado de México
Unidad Académica Profesional Nezahualcóyotl

Licenciatura en Ingeniería en Sistemas Inteligentes

Unidad de aprendizaje:
Lógica Difusa

Relaciones Difusas

Dra. Dora María Calderón Nepamuceno

La unidad de aprendizaje (UA) de **Lógica Difusa** tiene como área curricular **Herramientas para los sistemas inteligentes** y forma parte del núcleo **integral** esta UA es parte del cierre de los sistemas basados en conocimiento.

Objetivo

El presente material tiene como objetivo cubrir la segunda unidad del programa por competencia.

El alumno será capaz de realizar operaciones sobre relaciones difusas

Estructura de la Unidad de Aprendizaje

Introducción	• Sistemas Basados en Conocimiento • Representación del Conocimiento
Conjuntos Difusos	• Conjuntos Clásicos • Conjuntos Difusos • Propiedades de los Conjuntos Difusos • Operaciones con conjuntos difusos
Relaciones Difusas	• Relaciones Clásicas • Relaciones Difusas • Operaciones sobre relaciones difusas
Razonamiento Aproximado Introducción	• Variables Lingüística • Proposiciones Difusas • Reglas si-entonces • Inferencia
Representación de Reglas	• Fuzzificación • Base de conocimiento • Inferencia • Defuzzificación

Contenido

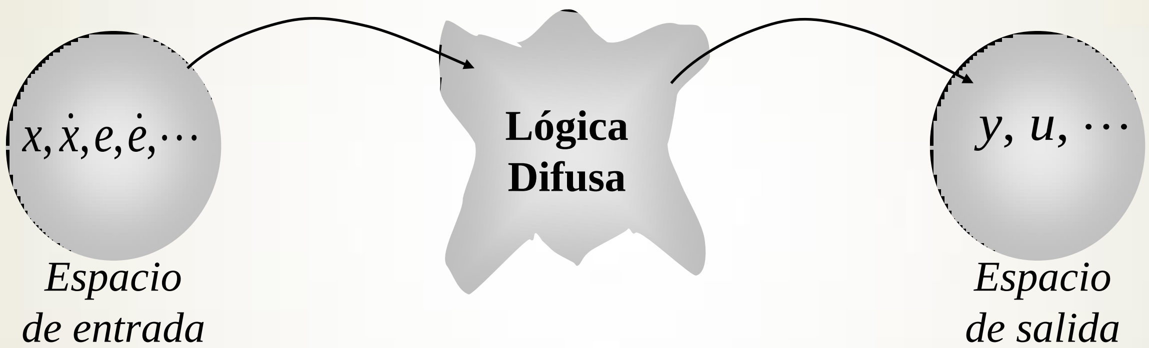
Relaciones Difusas

- Relaciones Clásicas
- Relaciones Difusas
- Operaciones sobre relaciones difusas

Relaciones difusas

El concepto de relación difusa es similar al de la matemática clásica. La diferencia radica en el grado de pertenencia

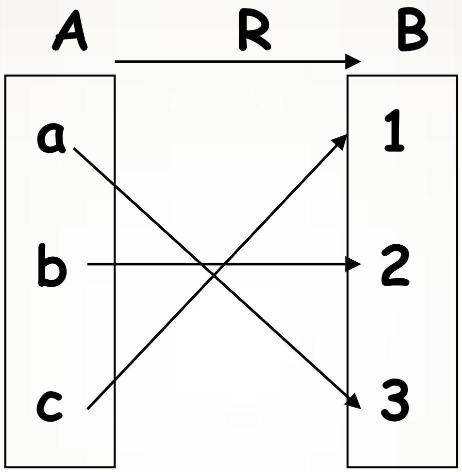
La relación difusa es una transformación que ***mapea*** de un espacio de entrada no difuso (llamado universo de discurso) a un espacio de salida llamado conjunto difuso



$$\mathbf{F} : In \rightarrow F\,(\,In_i\,)$$

Relación Clásica

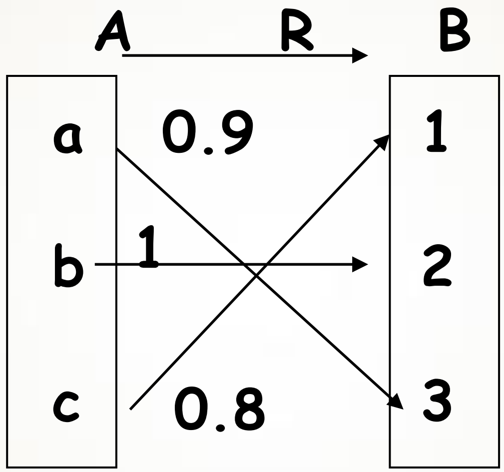
Asociado a cada elemento de la relación.



$$R = \{(a,3),(b,2),(c,1)\}$$

Relación Difusa

Asociado a cada elemento de la relación.



$$R = \{0.9/(a,3), 1/(b,2), 0.8/(c,1)\}$$

Sean dos conjuntos universales $U \ y \ W$. Una relación $R(U, W)$ es un conjunto difuso definido en el producto cartesiano UxW.

Una relación R es caracterizada por su función de pertenencia $\mu_R \ (u, w)$ donde $u \in U \ y \ w \in W$

$$R(U, W) \ = \ \{ \ ((u, w), \mu R(u, w)),/ \ u \in U \ y \ \ w \in W\}$$

con $\mu_R \ (u, w) \in [0,1]$

Ejemplo

La relación difusa sobre dos conjuntos, A y B, es un subconjunto difuso sobre su producto cartesiano – a cada miembro del conjunto producto se le asigna un grado de membresía

B \ A	0	1	2
0	0.1	0.7	0.9
1	0	0.6	0.5

Transformación difusa

Considere una transformación en un universo X a un universo Y. El universo Xes el dominio y el universo Y es el rango de $\boldsymbol{f}$, donde $\boldsymbol{f}$ puede considerarse una regla que asignan algún elemento y en Y para cada elemento x en X. Si X y Y son reales, la transformación $\boldsymbol{f}$ es una función.

Si A es un subconjunto de X, la imagen de A a través de f, denotada por

$f(A) = \{y | y = f(x), x \in A\}$ es un subconjunto de Y.

Donde $f(A) = B$

Transformación difusa

La función de membresía para el conjunto difuso B en Y, el cual se induce a través de la transformación $f: X \rightarrow Y$, está dada por:

$$\mu_{f(A)}(y) = \mu_A(x)$$

Si $B \subset Y$, la imagen inversa de B para $\{x \mid f(x) = y, y \subset B\}$ es un subconjunto de X. Por lo tanto, la **transformación inversa** $\boldsymbol{f^{-1}}$ induce un conjunto difuso A en X con su función de membresía definida como

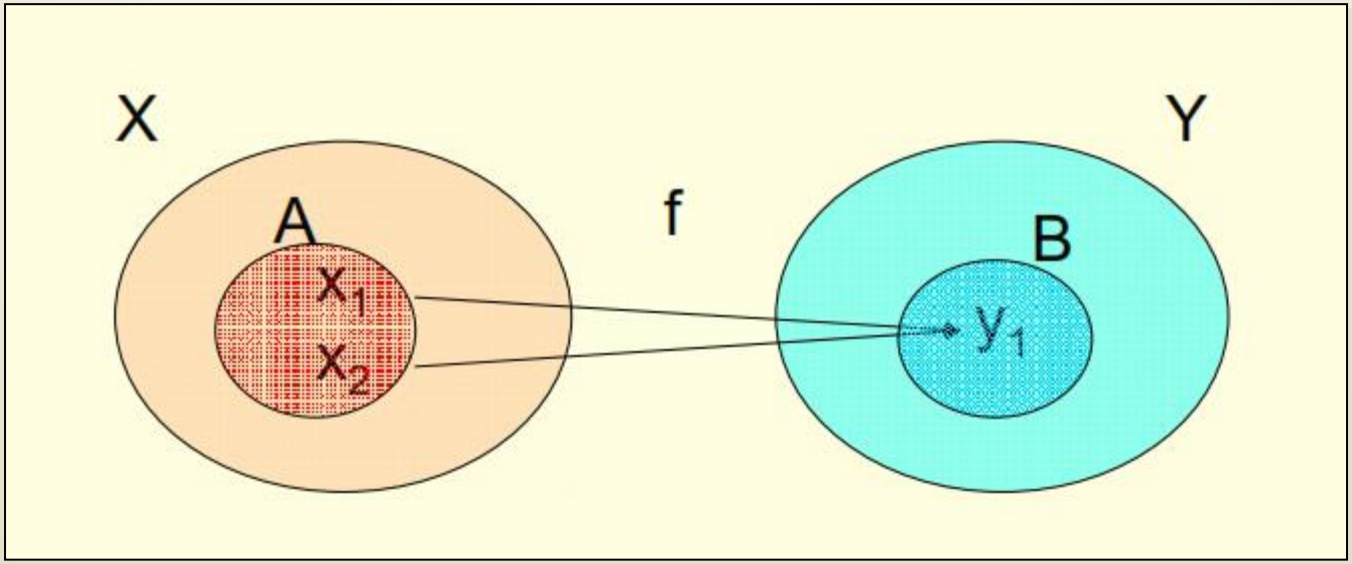
$$\mu_A(x) = \mu_B(f(x))$$

Para toda $y \subset Y$.

Supremum

Cuando dos elementos o más del universo X apuntan a un mismo elemento en el universo Y, Zadeh propuso:

$\mu_B(\mathrm{y}) = \mathrm{supremum}\mu_A(\mathrm{x})$ para toda $x \in f^{-1}(y)$



Principio de extensión de una transformación difusa

Dada una función *fue transforme puntos del universo* X *a* puntos en el universo Y, y cualquier conjunto difuso A en X, donde

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\}$$

El **principio de extensión establece que:** $\boldsymbol{f(A)}$ =

$$f\left(\left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\}\right) = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{f(x_1)} + \frac{\mu_A(x_2)}{f(x_2)} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{f(x_n)} \right\}$$

Ejercicio

Se tiene un conjunto difuso A en el universo X, realice una transformación difusa utilizando el principio de extensión.

A = Alrededor de 4

$$A = \left\{ \frac{0.5}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.5}{5} \right\}$$

$$y_i = 3x_i + 2$$

Aplicando el principio de extensión:

$$f(A) = ?$$

Ejercicio

Realice una transformación difusa del conjunto difuso A definido en el universo X aplicando el principio de extensión.

$$A = \left\{ \frac{0.3}{-2} + \frac{0.5}{-1} + \frac{0.8}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.4}{2} \right\} \qquad f(x) = x^2$$

Aplicando el principio de extensión

$$f(A) = ?$$

Producto cartesiano difuso

Es una relación entre dos o más conjuntos difusos. Sea A un conjunto difuso en el universo X y B un conjunto difuso en el universo Y, entonces, el producto cartesiano entre los conjuntos difusos A y B resulta en una relación difusa R, contenida dentro del espacio de producto cartesiano:

$$A \times B = R \subset X \times Y$$

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \times B}(x, y) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right)$$

Ejercicio

Realizar el producto cartesiano de los siguientes conjuntos difusos:

$$A = \left\{ \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right\} \qquad B = \left\{ \frac{0.3}{y_1} + \frac{0.9}{y_2} \right\}$$

$$A \times B = R = ?$$

Proyección difusa

Suponiendo dos universos de discurso $(X\ y\ Y)$, donde y . Sea R una relación difusa:

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \text{ y } Y = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$$

sobre el producto cartesiano $X \times Y$.

La proyección de R sobre X es un conjunto definido por:

$$\Pr oj[R : X] = \sum_{i=1}^{n} \max_{y_j \in Y} \frac{\{\mu_R(x_i, y_j)\}}{x_i}$$

La proyección de R sobre Y es un conjunto definido por:

$$\Pr oj[R : Y] = \sum_{j=1}^{m} \max_{x_i \in X} \frac{\{\mu_R(x_i, y_j)\}}{y_j}$$

Ejercicio

Sea

$$R = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \end{array}$$

Obtener la proyección de R en X y de R en Y

Extensión cilíndrica

Sea A un conjunto difuso sobre el universo X. La extensión cilíndrica C(A) de A sobre $X \times Y$ puede definirse por la siguiente matriz difusa:

$$C(A) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_A(x_1) & \mu_A(x_1) & \cdots & \mu_A(x_1) \\ \mu_A(x_2) & \mu_A(x_2) & \cdots & \mu_A(x_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_A(x_n) & \mu_A(x_n) & \cdots & \mu_A(x_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

Extensión cilíndrica

Sea B un conjunto difuso definido en el universo Y. La extensión cilíndrica C(B) de B sobre $X \times Y$ puede definirse por la siguiente matriz difusa:

$$C(B) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_B(y_1) & \mu_B(y_2) & \cdots & \mu_B(y_m) \\ \mu_B(y_1) & \mu_B(y_2) & \cdots & \mu_B(y_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_B(y_1) & \mu_B(y_2) & \cdots & \mu_B(y_m) \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejercicio

Realice la extensión cilíndrica $C(A)$ del conjunto difuso A definido en el universo X y la extensión cilíndrica $C(B)$ del conjunto difuso B definido en el universo Y al espacio de producto cartesiano $X \times Y$.

$$A = \left\{ \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right\} \qquad B = \left\{ \frac{0.3}{y_1} + \frac{0.9}{y_2} \right\}$$

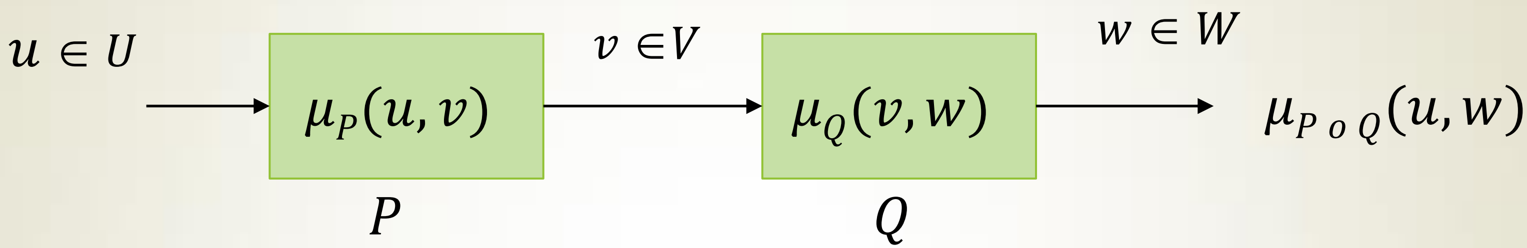
Composición difusa

Sea A un conjunto difuso definido sobre el universo X y R u na relación difusa definida sobre $X \times Y$. La composición de A y R resulta en un conjunto difuso B definido sobre Y y est á dado por:

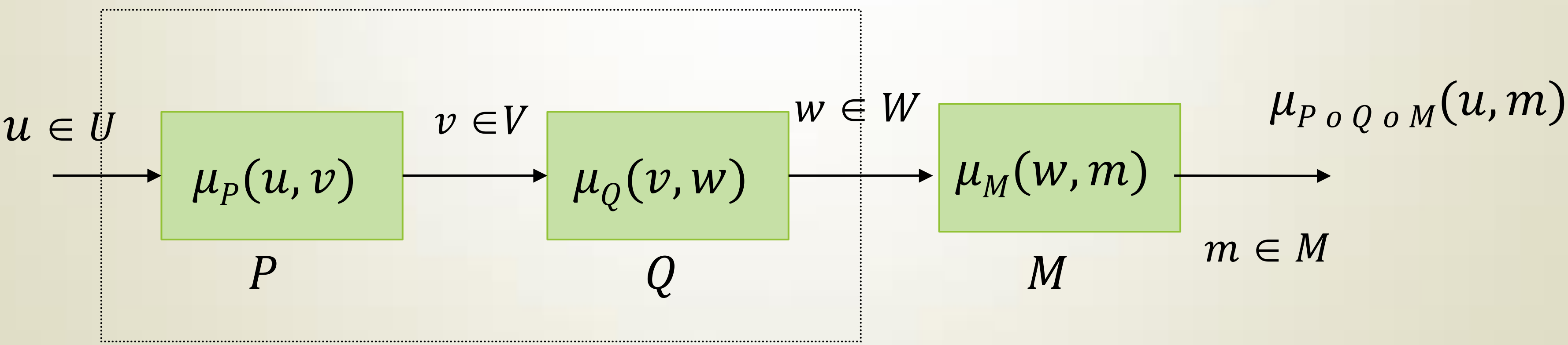
$$B = A \circ R = \Pr oj\left(C(A) \cap R\right) \text{ sobre } \mathbf{Y.}$$

También pueden existir composiciones difusas de relaciones difusas existentes en espacios de producto cartesiano, siempr e y cuando exista al menos una variable compartida.

Operación de composición de forma gráfica



Cuando son tres relaciones:



Tipos de composición

- Composición **max-min.**

Si la intersección se realiza con la operación **min** y la proyección con la operación **max**, se tiene:

$$A \circ R = \max \min\left(\mu_A(x), \mu_R(x, y)\right)$$

- Composición **max-producto.**

Si la intersección se realiza con el producto punto y la proyección con la operación **max**, se tiene:

$$A \circ R = \max\left(\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\right)$$

También se conoce como **composición max-punto.**

Ejemplo de Composición

- Relación a-b:

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	0.1	0.2	0	1	0.7
a2	0.3	0.5	0	0.2	1
a3	0.8	0	1	0.4	0.3

- Relación b-c:

	c1	c2	c3	c4
b1	0.9	0	0.3	0.4
b2	0.2	1	0.8	0
b3	0.8	0	0.7	1
b4	0.4	0.2	0.3	0
b5	0	1	0	0.8

Ejercicio

Para cada término – se toma el mínimo de cada valor del renglón de la primera matriz con la columna de la segunda, y el máximo de éstos. Por ejemplo:

R(1,1) = MAX [min(0.1,0.9), min(0.2,0.2), min(0,0.8), min(1,0.4), min(0.7,0)] = 0.4

Resultado - relación a-c:

	c1	c2	c3	c4
a1	0.4	0.7	0.3	0.7
a2	0.3	1	0.5	0.8
a3	0.8	0.3	0.7	1

Ejercicio

Realice la composición max-min y max producto del conjunto difuso A y la relación R:

$$A = \left\{ \frac{0.4}{a} + \frac{0.6}{b} + \frac{0.2}{c} \right\}$$

$$R = A \times S = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 \\ 1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Realice la composición max-min y max-producto de las siguientes relaciones:

$$R_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$R_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composición sup-star

Composición sup-star de dos relaciones difusas $P(U,V)$ y $Q(V,W)$ es definida por la función de pertenencia $\mu_P \; o \; Q(u,w) \in [0,1]$ dada por:

$$\mu_P o \; Q(u,w) \; = \{ (u,w), SUPv \, [\mu_P(u,v) \; * \mu_Q(v,w) \,]$$

donde $u \in U, \;\; v \in V \;, w \in W \;, \mu_P(u,v) \in [0,1] \; y \; \mu_Q(v,w) \in [0,1]$

Donde **SUP** es el operador "**max**" y "*" es una **T-norm**, generalmente se usa el "**min**" o el "**producto**".

Caso especial

Cuando la relación de partida es un conjunto difuso o sea que $\mu_P(u,v)$ tiene la forma $\mu_P(u)$, el resultado de la composición con una relación $\mu_Q(u,w)$ será:

$$SUP_u\,[\mu_P(u) * \mu_Q(u,w)] = \mu_{PoQ}(w)$$

Observe en este caso que $U = V$. El resultado es un conjunto definido en W

Conclusión

En el presente material el alumno tendrá la información necesaria para establecer y determinar que relación difusa es la más conveniente para relacionar conjuntos difusos.

Bibliografía

- J. Galindo, “Tratamiento de la Imprecisión en Bases de Datos Relacionales: Extensión del Modelo y Adaptación de los SGBD Actuales”. Ph. Doctoral Thesis, University of Granada (Spain), March 1999 (www.lcc.uma.es).
- J.M. Medina, “Bases de Datos Relacionales Difusas. Modelo Teórico y Aspectos de su Implementación”. PhD. Thesis, Univ. of Granada (Spain), 1994 (www.decsai.ugr.es).
- J.M. Medina, O. Pons, M.A. Vila, “FIRST. A Fuzzy Interface for Relational SysTems”. VI International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA’1995). Sao Paulo (Brasil), 1995.
- A. Urruita, “Modelo Conceptual para una Base de Datos Difusa”, Ph. Doctoral Thesis, University of Castilla-La Mancha (Spain), July 2003 (www.ganimides.ucm.cl).
- L.A. Zadeh, “A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages”. Computer Mathematics with Applications, 9, pp. 149-183, 1983.

“La razón por la cual el lenguaje natural se expresa en términos difusos

no es porque el pensamiento humano sea difuso,
sino por que el mundo es difuso”.

John F. Sowa, matemático norteamericano (1940-).