2.2 TIPOS DE EVENTOS, excluyentes y no excluyentes; complementarios, dependientes e independientes.

Experimento aleatorio. Espacio muestral asociado.

Concepto de experimento aleatorio.

Definición: Un **fenómeno** o experiencia se dice **aleatorio** cuando al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado.
Si por el contrario, se puede predecir el resultado de una experiencia aún antes de realizarla, se dice que el experimento es **determinista.**

Son fenómenos aleatorios:
- Extracción de una carta de la baraja.
- Lanzamiento de un dado.
- Respuestas a una encuesta.

Espacio muestral. Suceso elemental.

Definición: El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se llama **espacio muestral.**

Ejemplo: El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar una moneda al aire tres veces es:

$$E=\{(c,c,c),(c,c,x),(c,x,c),(x,c,c),(x,x,c),(x,c,x),(c,x,x),(x,x,x)\}$$

Cada elemento del espacio muestral E se llama **suceso elemental**.

Sucesos. Tipos de sucesos.

Definición: Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio. Se llama **suceso** a todo subconjunto del espacio muestral E.
Un suceso puede determinarse por extensión (enumerando los elementos) o dando una propiedad que se verifica por, y sólo por, los elementos de dicho subconjunto.
Diremos que un suceso A se verifica cuando al realizar el experimento se obtiene como resultado uno de los sucesos elementales de A.

El conjunto formado por todos los sucesos del espacio muestral se llama **espacio de sucesos (S)**. Es decir, el espacio de sucesos está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral.

Ejemplo: Si la experiencia aleatoria es lanzar una moneda:

$$E=\{c,x\} \text{ y } S=\{\phi,\{c\},\{x\},\{c,x\}\}$$

Los sucesos definidos por los conjuntos ϕ y E se llaman **suceso imposible** y **suceso seguro** respectivamente. El suceso imposible es aquel que nunca se realiza, y el suceso seguro es el que se realiza siempre.
Dado un suceso A, se llama **suceso contrario** o complementario de A, y se representa por $\overline{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza A y recíprocamente.
El suceso contrario de E es ϕ y recíprocamente.
Un suceso A se dice que está contenido o inducido en otro B si siempre que se verifica A se cumple también B. Se representa $A \subset B$.

Operaciones con sucesos.

Unión de sucesos. Dados dos sucesos A y B se llama unión de A y B, y se representa por $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B.

Intersección de sucesos. Dados dos sucesos A y B se llama intersección A y B y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo se realizan simultáneamente A y B.

Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman **sucesos incompatibles**. Obsérvese que un suceso y su contrario son siempre incompatibles.

Diferencia de sucesos. Dados dos sucesos A y B se llama suceso diferencia de A y B, y se representa por $A \setminus B$, al suceso $A \cap \overline{B}$. O sea $A \setminus B$ está formado por todos los sucesos elementales de A que no están en B.

<u>Propiedades de la unión e intersección de sucesos.</u>

1. **Asociativa**: Unión $\rightarrow (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   Intersección $\rightarrow (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2. **Conmutativa**: Unión $\rightarrow A \cup B = B \cup A$
   Intersección $\rightarrow A \cap B = B \cap A$

3. **Idempotente**: Unión $\rightarrow A \cup A = A$
   Intersección $\rightarrow A \cap A = A$

4. **Simplificativa**: $A \cup \left(B \cap A\right) = A$; $A \cap (B \cup A) = A$

5. **Distributiva**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6. $A \cup \overline{A} = E$; $A \cap \overline{A} = \phi$

Consecuencias:

a) A $\cup$ ϕ = A; A $\cap$ ϕ = ϕ
b) A $\cap$E = A ; A $\cup$E = E
c) Leyes de Morgan: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

Probabilidad

Definición de frecuencia

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso A al número de veces que se verifica A al realizar el experimento un número determinado de veces.

Se llama **frecuencia relativa** de un suceso A al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento.

$f_r(A)=\dfrac{f_a(A)}{n}$, siendo n el número de veces que se repite el experimento.

Propiedades:

1) $0\leq f_r(A)\leq 1$
2) $f_r\left(E\right)=1$
3) Si $A\cap B=\phi$ entonces $f_r(=\ f_r(A\cup B)=f_r(A)+f_r(B)$

Introducción al concepto de probabilidad como límite de frecuencias.

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse hacia un número a medida que el número de pruebas del experimento aleatorio crece indefinidamente.
Este número al que la frecuencia relativa se acerca a medida que es mayor el número de pruebas realizadas, lo llamaremos **probabilidad** del suceso.

Definición axiomática de probabilidad. Axiomática de Kolmogorov.

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio. Una **probabilidad** en E es cualquier función P que asigna a cada suceso A un número real P(A) que cumple las siguientes propiedades:

A1. $0\leq P(A)\leq 1$
A.2. $P(E)=1$

A.3. Si A y B son incompatibles ($A \cap B = \phi$), entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Estas tres condiciones reciben el nombre de **axiomática de Kolmogorov**.

Propiedades de la probabilidad.

1. P(ϕ) = 0
2. P(A) = 1- P($\overline{A}$)
3. Si A y B son sucesos tales que $A \subset B$ entonces P(A)$\leq$P(B)
4. P($A \cup B$) = P(A) + P(B) - P($A \cap B$)
5. P($A \setminus B$) = P(A)-P($A \cap B$)

Determinación de probabilidades.

Sea $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un espacio muestral, siendo $\{a_1\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}$ los sucesos elementales de E.
Una probabilidad sobre E queda totalmente determinada cuando se conocen las probabilidades de cada uno de los sucesos elementales de E, cumpliendo las dos condiciones siguientes:

- $0 \leq P(\{a_i\}) \leq 1$
- $P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + ... + P(\{a_n\}) = 1$

Así, de este modo, la probabilidad de un suceso $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ será:

$$P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + ... + P(\{a_k\})$$

Lo que nos dice que la probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman.

Ejemplo: Supongamos un dado cargado de tal modo que las probabilidades de los sucesos elementales del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ son $P(\{1\}) = 0{,}1$, $P(\{2\}) = 0{,}2$, $P(\{3\}) = 0{,}2$, $P(\{4\}) = 0{,}1$, $P(\{5\}) = 0{,}15$, $P(\{6\}) = 0{,}25$

Entonces la probabilidad del suceso A : “Obtener número par”=$\{2, 4, 6\}$ es:

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}55$$

Sucesos equiprobables. Regla de Laplace.

Un caso particular y simple de probabilidad en un espacio muestral finito es aquel en el que se puede suponer que cada suceso elemental tiene la misma probabilidad de ocurrir. Cuando esto ocurre se dice que los sucesos elementales son **equiprobables.**

En este caso, y sólo en este caso, podemos aplicar la llamada **regla de Laplace** para hallar la probabilidad de un suceso:
"Sea un suceso A compuesto por sucesos elementales del espacio muestral E, entonces la probabilidad de A viene dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } E} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo: Si se lanza un dado perfecto, la perfección del dado nos induce a suponer que la probabilidad de cada suceso elementales la misma. Como además la suma de estas probabilidades ha de ser 1, se asigna a cada suceso elemental 1/6 de probabilidad.

En este caso, la probabilidad del suceso A:" Obtener número par" es:

$$P(A) = P\left(\{2,4,6\}\right) = 3/6 = 0,5$$

Estas probabilidades que, como en este ejemplo, se asignan a los sucesos por consideraciones teóricas, se llaman probabilidades a priori, y siempre que no exista alguna razón para pensar que un suceso elemental puede aparecer más veces que otro, admitiremos que todos ellos tienen la misma probabilidad.