CÁLCULO DIFERENCIAL VECTORIAL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Espacios Euclidianos

José Guadalupe Anaya Ortega

Proposito General

Proposito General de la Unidad de Aprendizaje

Manejar los conceptos de derivadas parciales, gradientes, multiplicadores de Lagrange y aplicarlos en diversas áreas haciendo énfasis en aplicaciones físicas. Conocer el Teorema de Taylor, el Teorema de la Función Implícita y el Teorema de la Función Inversa y sus diversas aplicaciones.

Presentación

El presente material didáctico de solo visión proyectable, tiene como finalidad, repasar los conceptos básicos de los Espacios Euclidianos, los cuales serán de gran importancia para alcazar el objetivo del curso.

Presentación

El presente material didáctico de solo visión proyectable, tiene como finalidad, repasar los conceptos básicos de los Espacios Euclidianos, los cuales serán de gran importancia para alcazar el objetivo del curso.
Dentro del enfoque por competencias se pretende desarrollar en el estudiante la capacidad de análisis.

Especificaciones

La metodología que se sugiere para el mejor aprovechamiento del material respecto a cada tema, se describe a continuación, sin embargo a los jóvenes les resulta agradable el uso este tipo de recurso didáctico, específicamente las diapositivas considerándolas como notas de clase, para efectuar el repaso que fortalezca su aprendizaje.

Recursos que se utilizarán

1. Cañon,
2. Software: Cualquier visor de archivos pdf,
3. Computadora,
4. Pizarrón,
5. Material impreso.

Indicaciones de uso

El uso del presente material es de fácil acceso:

1. Abra el dispositivo de almacenamiento con doble clic.
2. Solo de clic para dejar pasar las diapositivas.
3. Con la tecla ESC se interrumpe la presentación.
4. Con las teclas de Redpág y Avpág puede avanzar y retroceder las diapositiva.

Competencias a desarrollar

1. De conocimientos
    1. Vectores en el espacio Tridimencional,
    2. Operaciones entre vectores,
    3. Producto Interno.
    4. rectas y planos
    5. Espacio de dimensión n.
2. De Habilidades
    1. Identificación de postulados, hipótesis y conclusiones. Intuición sobre la veracidad o falsedad de una afirmación.
3. De Actitudes y Valores
    1. Disciplina, orden, tenacidad, gusto por enfrentar nuevos retos, paciencia y rigor en el razonamiento.

Índice General

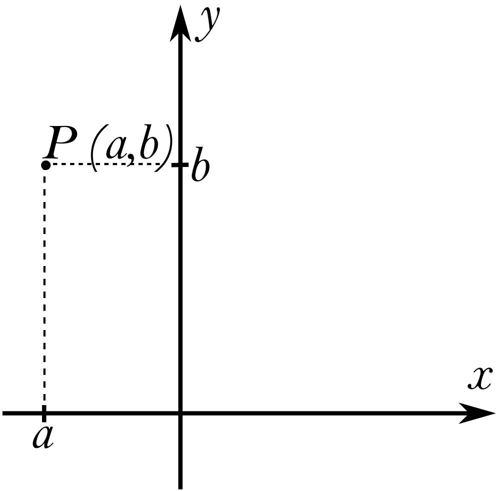
Vectores en el espacio Tridimensional

Recordaremos las operaciones básicas de los vectores en el espacio tridimensional: la suma vectorial, la multiplicación por un escalar y los productos punto y cruz. Posteriormente, generalizamos algunos de estos conceptos al $n-$espacio y revisamos las propiedades de las matrices que necesitaremos durante el curso.

Vectores en el espacio Tridimensional

Recordaremos las operaciones básicas de los vectores en el espacio tridimensional: la suma vectorial, la multiplicación por un escalar y los productos punto y cruz. Posteriormente, generalizamos algunos de estos conceptos al $n-$espacio y revisamos las propiedades de las matrices que necesitaremos durante el curso. Los puntos P en el plano se representan mediante pares ordenados de números reales (a, b); los números a y b se llaman coordenadas cartesianas de P.

Vectores en el espacio Tridimensional

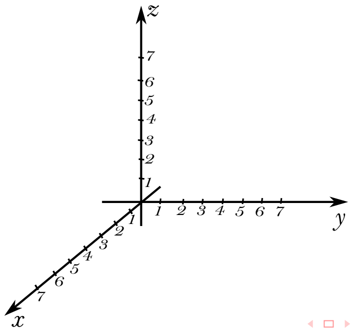


Vectores en el espacio Tridimensional

Podemos asignar a cada punto P en el espacio una terna (ordenada) única de números reales (a, b, c); y, reciprocamente, a cada terna podemos asignar un punto único en el espacio, tal y como lo hicimos para los puntos en el plano. Al origen del sistema de coordenadas le corresponde la terna $(0, 0, 0)$, y las flechas en los ejes indican las direcciones positivas.

Vectores en el espacio Tridimensional

Podemos asignar a cada punto P en el espacio una terna (ordenada) única de números reales (a, b, c); y, reciprocamente, a cada terna podemos asignar un punto único en el espacio, tal y como lo hicimos para los puntos en el plano. Al origen del sistema de coordenadas le corresponde la terna (0, 0, 0), y las flechas en los ejes indican las direcciones positivas.

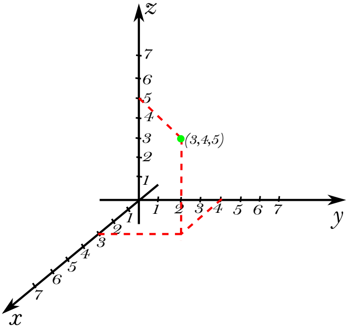


Vectores en el espacio Tridimensional

Así, por ejemplo, la terna $(3, 4, 5)$ representa un punto a 3 unidades del origen en dirección positiva a lo largo del eje x , a 4 unidades en dirección positiva a lo largo del eje y , y a 5 unidades en dirección positiva a lo largo del eje z.

Vectores en el espacio Tridimensional

Así, por ejemplo, la terna $(3,4,5)$ representa un punto a 3 unidades del origen en dirección positiva a lo largo del eje x , a 4 unidades en dirección positiva a lo largo del eje y , y a 5 unidades en dirección positiva a lo largo del eje z.



Vectores en el espacio Tridimensional

Notación

1. La recta real se denota por $\mathbb{R}^1$ (así, es lo mismo $\mathbb{R}$ que $\mathbb{R}^1$).

Vectores en el espacio Tridimensional

Notación

1. La recta real se denota por $\mathbb{R}^1$ (así, es lo mismo $\mathbb{R}$ que $\mathbb{R}^1$).
2. El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de números reales se denota por $\mathbb{R}^2$.

Vectores en el espacio Tridimensional

Notación

1. La recta real se denota por $\mathbb{R}^1$ (así, es lo mismo $\mathbb{R}$ que $\mathbb{R}^1$).
2. El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de números reales se denota por $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales se denota por $\mathbb{R}^3$.

Vectores en el espacio Tridimensional

Notación

1. La recta real se denota por $\mathbb{R}^1$ (así, es lo mismo $\mathbb{R}$ que $\mathbb{R}^1$).
2. El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de números reales se denota por $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales se denota por $\mathbb{R}^3$.
4. Cuando se habla en conjunto de $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se escribe $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$; o $\mathbb{R}^m$, $m \in \{1, 2, 3\}$.

Vectores en el espacio Tridimensional

Notación

1. Suma de vectores,

Vectores en el espacio Tridimensional

Notación

1. Suma de vectores,
$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'),$$
$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z').$$
Para cualesquiera $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ y $(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$.

Vectores en el espacio Tridimensional

Notación

1. Suma de vectores,
$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'),$$
$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z').$$
Para cualesquiera $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ y $(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$.
2. Producto de escalar por un vector,
$$\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y),$$
$$\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z).$$
Para cualesquiera $\alpha\in\mathbb{R}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Propiedades de las operaciones

1. Asociatividad

$$(\alpha\beta)(x, y, z) = \alpha[\beta(x, y, z)],$$

Propiedades de las operaciones

1. Asociatividad

$$(\alpha\beta)(x, y, z) = \alpha[\beta(x, y, z)],$$

2. Distributividad

$$(\alpha + \beta)(x, y, z) = \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z),$$
$$\alpha[(x, y, z) + (x', y', z')] = \alpha(x, y, z) + \alpha(x', y', z'),$$

Propiedades de las operaciones

1. Asociatividad

$$(\alpha\beta)(x, y, z) = \alpha[\beta(x, y, z)],$$

2. Distributividad

$$(\alpha + \beta)(x, y, z) = \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z),$$
$$\alpha[(x, y, z) + (x', y', z')] = \alpha(x, y, z) + \alpha(x', y', z'),$$

3. Propiedades del elemento cero

$$\alpha(0, 0, 0) = (0, 0, 0),$$
$$0(x, y, z) = (0, 0, 0),$$

Propiedades de las operaciones

1. Asociatividad

$$(\alpha\beta)(x,y,z) = \alpha[\beta(x,y,z)],$$

2. Distributividad

$$(\alpha+\beta)(x,y,z) = \alpha(x,y,z) + \beta(x,y,z),$$
$$\alpha[(x,y,z)+(x',y',z')] = \alpha(x,y,z) + \alpha(x',y',z'),$$

3. Propiedades del elemento cero

$$\alpha(0,0,0) = (0,0,0),$$
$$0(x,y,z) = (0,0,0),$$

4. Propiedad del elemento identidad

$$1(x,y,z) = (x,y,z),$$

Vectores en el espacio Tridimensional

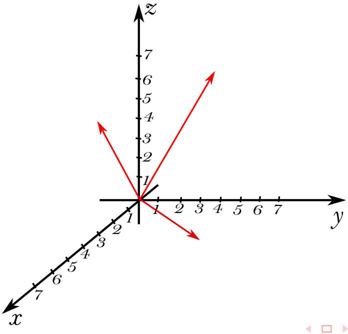
Definición 1

*Se define (geométricamente) un **vector** como un segmento de recta dirigido que comienza en el origen, esto es, un segmento de recta con magnitud y dirección especificados, con punto inicial en el origen.*

Vectores en el espacio Tridimensional

Definición 1

*Se define (geométricamente) un **vector** como un segmento de recta dirigido que comienza en el origen, esto es, un segmento de recta con magnitud y dirección especificados, con punto inicial en el origen.*



Vectores en el espacio Tridimensional

Denotemos por $\hat{i}$ al vector que termina en $(1,0,0)$, por $\hat{j}$ al vector que termina en $(0,1,0)$ y por $\hat{k}$ al vector que termina en $(0,0,1)$. Por la definición de suma vectorial y la multiplicación por un escalar, tenemos que si $v=(x,y,z)$, entonces

$$v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

Vectores en el espacio Tridimensional

Denotemos por $\hat{i}$ al vector que termina en $(1,0,0)$, por $\hat{j}$ al vector que termina en $(0,1,0)$ y por $\hat{k}$ al vector que termina en $(0,0,1)$. Por la definición de suma vectorial y la multiplicación por un escalar, tenemos que si $v=(x,y,z)$, entonces

$$v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

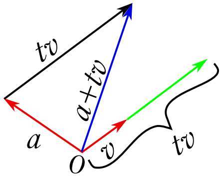
Por tanto podemos representar cualquier vector en el espacio tridimensional en términos de los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$. Es por esto que a los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ se les llama vectores de la base canónica para $\mathbb{R}^3$.

Vectores en el espacio Tridimensional

La ecuación de un a recta l que pase por el punto final o extrema el vector a, con la dirección de un vector v. Conforme t varia por todos los números reales, los puntos de la forma tv son todos los múltiplos escalares del vector v, y por lo tanto, agotan los puntos de la recta que pasa por el origen en la dirección de v. Como todo punto sobre l es el extrema de la diagonal de un paralelogramo con lados a y tv para algún valor real de t , vemos que todos los puntos sobre l son de la forma $a + tv$. Así, la recta l se puede expresar mediante la ecuación $l(t) = a + tv$, decimos que l esta expresada de manera paramétrica.

Vectores en el espacio Tridimensional

La ecuación de un a recta l que pase por el punto final o extrema el vector a, con la dirección de un vector v. Conforme t varia por todos los números reales, los puntos de la forma tv son todos los múltiplos escalares del vector v, y por lo tanto, agotan los puntos de la recta que pasa por el origen en la dirección de v. Como todo punto sobre l es el extrema de la diagonal de un paralelogramo con lados a y tv para algún valor real de t , vemos que todos los puntos sobre l son de la forma $a + tv$. Así, la recta l se puede expresar mediante la ecuación $l(t) = a + tv$, decimos que l esta expresada de manera paramétrica.



Integración en Términos Elementales

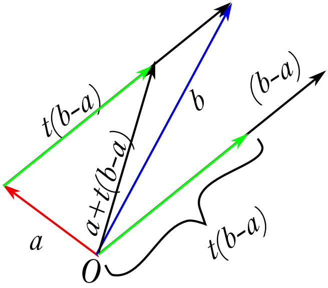
La ecuación de una recta que pasa par los puntos finales de dos vectores dados a y b es

$$l(t) = a + t(b - a);$$

Integración en Términos Elementales

La ecuación de una recta que pasa par los puntos finales de dos vectores dados a y b es

$$l(t) = a + t(b - a);$$



Producto interno

Definición 2

Definimos el producto interno de a *y* b, *que se escribe como* $a \cdot b$, *como el número real*

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Producto interno

Definición 2

Definimos el producto interno de a y b, que se escribe como $a \cdot b$, como el número real

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Noten que el producto interno de dos vectores es una cantidad escalar. En ocasiones se denota al producto interno por $\langle a, b \rangle$. Así, $\langle a, b \rangle$ y $a \cdot b$ significan exactamente lo mismo.

Propiedades del producto interno

1. $a \cdot a \geqslant 0$; $a \cdot a = 0$ si, y solo si, $a = 0$.

Propiedades del producto interno

1. $a \cdot a \geqslant 0$; $a \cdot a = 0$ si, y solo si, $a = 0$.
2. $\alpha a \cdot b = \alpha(a \cdot b)$ y $a \cdot \beta b = \beta(a \cdot b)$.

Propiedades del producto interno

1. $a \cdot a \geqslant 0$; $a \cdot a = 0$ si, y solo si, $a = 0$.
2. $\alpha a \cdot b = \alpha(a \cdot b)$ y $a \cdot \beta b = \beta(a \cdot b)$.
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + h \cdot c$.

Propiedades del producto interno

1. $a \cdot a \geqslant 0$; $a \cdot a = 0$ si, y solo si, $a = 0$.
2. $\alpha a \cdot b = \alpha(a \cdot b)$ y $a \cdot \beta b = \beta(a \cdot b)$.
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + h \cdot c$.
4. $a \cdot b = b \cdot a$.

Norma de un vector

Definición 3

Dado $a \in \mathbb{R}^n$, *donde* $n \in \{2, 3\}$, *definimos la* ***norma del vector*** a *como*

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$$

Norma de un vector

Definición 3

*Dado $a \in \mathbb{R}^n$, donde $n \in \{2, 3\}$, definimos la **norma del vector** a como*

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$$

Dado $a \in \mathbb{R}^n - \{\hat{0}\}$, donde $n \in \{2, 3\}$ al vector $\frac{1}{\|a\|}a$ se le conoce como vector normalizado.

Norma de un vector

Teorema 4

Sean a *y* b *dos vectores en* $\mathbb{R}^3$ *y sea* θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, *el ángulo entre ellos. Entonces*

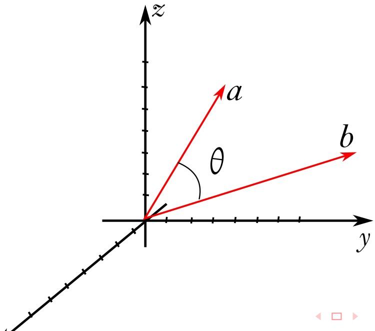
$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos(\theta).$$

Norma de un vector

Teorema 4

Sean a y b dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, el ángulo entre ellos. Entonces

$$a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos(\theta).$$



Producto punto

Corolario 5 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Para cualesquiera dos vectores a y b, tenemos

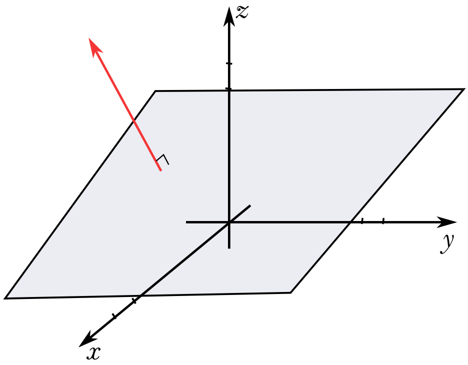
$$|a \cdot b| \leqslant \|a\|\|b\|.$$

Planos

El plano P que esta determinado por la ecuación $Ax+By+Cz+D=0$, tiene como vector normal a $A\hat{i}+B\hat{j}+C\hat{k}$.

Planos

El plano P que esta determinado por la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, tiene como vector normal a $A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$.

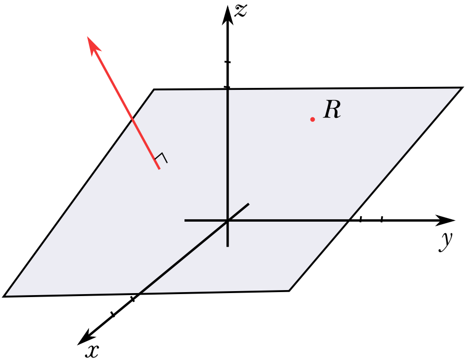


Planos

El plano P que tiene como vector normal a $A\hat{i} + B\hat{y} + C\hat{k}$ y pasa por el punto $R = (x_0, y_0, z_0)$ esta determinado por la ecuación $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$,

Planos

El plano P que tiene como vector normal a $A\hat{i} + B\hat{y} + C\hat{k}$ y pasa por el punto $R = (x_0, y_0, z_0)$ esta determinado por la ecuación $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$,



Planos

Dado un plano P, determinado por la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, y $E = (x_1, y_1, z_1)$ un punto en $\mathbb{R}^3$. La distancia de E a P, esta determinado por la ecuación,

$$\text{distancia} = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Dado un entero positivo n, el conjunto de todas las n- adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales se denota por $\mathbb{R}^n$.
De manera análoga tenemos,

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Dado un entero positivo n, el conjunto de todas las n- adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales se denota por $\mathbb{R}^n$.
De manera análoga tenemos,

1. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n)$.

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Dado un entero positivo n, el conjunto de todas las n- adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales se denota por $\mathbb{R}^n$.
De manera análoga tenemos,

1. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n)$.
2. $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

La base usual para $\mathbb{R}^n$ es $\{\hat{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \hat{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \hat{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$.

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Dado un entero positivo n, el conjunto de todas las n- adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales se denota por $\mathbb{R}^n$.
De manera análoga tenemos,

1. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n)$.
2. $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

La base usual para $\mathbb{R}^n$ es $\{\hat{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \hat{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \hat{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$. Así, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se puede escribir como $x = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + \cdots + x_n\hat{e}_n$.

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Definición 6

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Definición 6

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Teorema 7

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *y* α *y* β *números reales, tenemos*

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Definición 6

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Teorema 7

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *y* α *y* β *números reales, tenemos*

1. $x \cdot x \geqslant 0$; $x \cdot x = 0$ *si, y solo si,* $x = \hat{0}$.

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Definición 6

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .$$

Teorema 7

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *y* α *y* β *números reales, tenemos*

1. $x \cdot x \geqslant 0$; $x \cdot x = 0$ *si, y solo si,* $x = \hat{0}$.
2. $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha (x \cdot z) + \beta (y \cdot z)$.

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Definición 6

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Teorema 7

Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *y* α *y* β *números reales, tenemos*

1. $x \cdot x \geqslant 0$; $x \cdot x = 0$ *si, y solo si,* $x = \hat{0}$.
2. $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$.
3. $x \cdot y = x \cdot y$.

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Definición 8

Para $x \in \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Definición 8

Para $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Corolario 9 (Desiguladad de Cauchy-Schwarz)

Para cualesquiera dos vectores x y y en $\mathbb{R}^n$, tenemos

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

Espacio Euclidiano n-Dimensional

Definición 8

Para $x \in \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Corolario 9 (Desiguladad de Cauchy-Schwarz)

Para cualesquiera dos vectores x *y* y *en* $\mathbb{R}^n$*, tenemos*

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

Corolario 10

Para cualesquiera dos vectores x *y* y *en* $\mathbb{R}^n$*, tenemos*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Bibliografía

1 Courant, R. y John, F. *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I, Interscience Publishers, 1965.

2 Haaser, La Salle, Sullivan. *Análisis Matemático Curso de Introducción*, vol. I, Ed. Trillas, 1980.

3 Marsden, J. E. y Tromba, A. J. Cálculo Vectorial, Ed. Pearson Educación, España, 2004.

4 Apostol, T. *Calculus*, vol. II, Ed. Reverté, 1995.

5 Sagan, H. *Advanced Calculus*, Ed. Houghton Mifflin Company, 1974.