Tratamiento de imágenes

Filtrado Espacial - Convolución

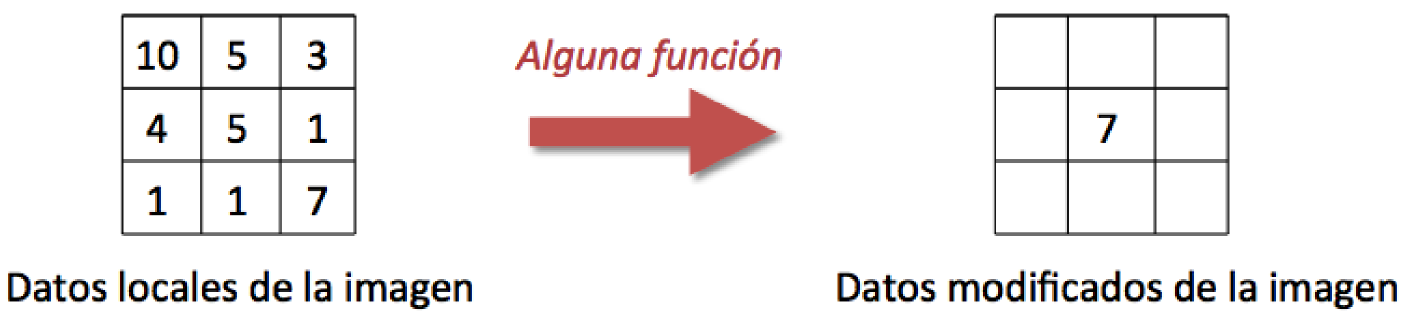
Héctor Alejandro Montes
h.a.montes@fi.uaemex.mx
http://fi.uaemex.mx/h.a.montes

Advertencia

No use estas diapositivas como referencia única de estudio durante este curso. La información contenida aquí es sólo una guía para las sesiones de clase y de estudio futuro. Para obtener información más completa, refiérase a la bibliografía dada durante la presentación del curso.

Filtrado en imágenes

- ***Objetivo***: modificar los pixeles de una imagen basándose en alguna función sobre el vecindario local de cada pixel



- A esta operación se le llama ***convolución***

Convolución

- La convolución es una operación lineal.
- La convolución es la operación más general que se puede aplicar a una imagen.
- A veces también nos referimos a la convolución como ***filtrado***.
- Filtrado espacial: Directamente aplicable mediante una *máscara.*
- Las *máscaras* de convolución, o *filtros*, no suelen ser grandes (3x3, 5x5) para ahorrar tiempo de cómputo

Convolución

- Definición general de *Convolución*

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(x-u)\,du$$

- Convolución para imágenes digitales

$$F(x,y)=f(x,y)*g(x,y)=\sum_{i}\sum_{j} f(i,j)\,g(x-i,y-j)$$

g es la *máscara* de convolución espacial

Filtrado Espacial

- Usando una máscara o filtro, la convolución se puede expresar como:

$$F(x,y)=\sum_i \sum_j f(x+i,y+j)h(i,j)$$

- Se multiplican los valores correspondientes de la máscara con los píxeles de la ventana considerada.

Filtrado Espacial

- Normalmente se suele expresar la máscara como una matriz:

$$\begin{bmatrix} h4 & h3 & h2 \\ h5 & h0 & h1 \\ h6 & h7 & h8 \end{bmatrix}$$

…y la convolución queda expresada como:

CONVOLV:[[Q0= $\sum_{k=0}^{8}$ Pk*hk]]

Convolución

- Existen varias notaciones posibles para indicar la convolución de dos señales para producir una señal de salida. Las más comunes son:

$$c = a \otimes b = a * b$$

- Utilizaremos la primera forma con las siguientes definiciones formales:
  - En un espacio *continuo* 2D

$$c(x,y) = a(x,y) \otimes b(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a(\chi,\zeta)\, b(x-\chi, y-\zeta)\, d\chi\, d\zeta$$

  - En un espacio *discreto* 2D

$$c[m,n] = a[m,n] \otimes b[m,n] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[j,k]\, b[m-j, n-k]$$

Propiedades

- Sean *a*,*b*,*c*, y *d* señales (imágenes) continuas o discretas
- La convolución es *conmutativa*

$$c = a \otimes b = b \otimes a$$

- La convolución es *asociativa*

$$c = a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c = a \otimes b \otimes c$$

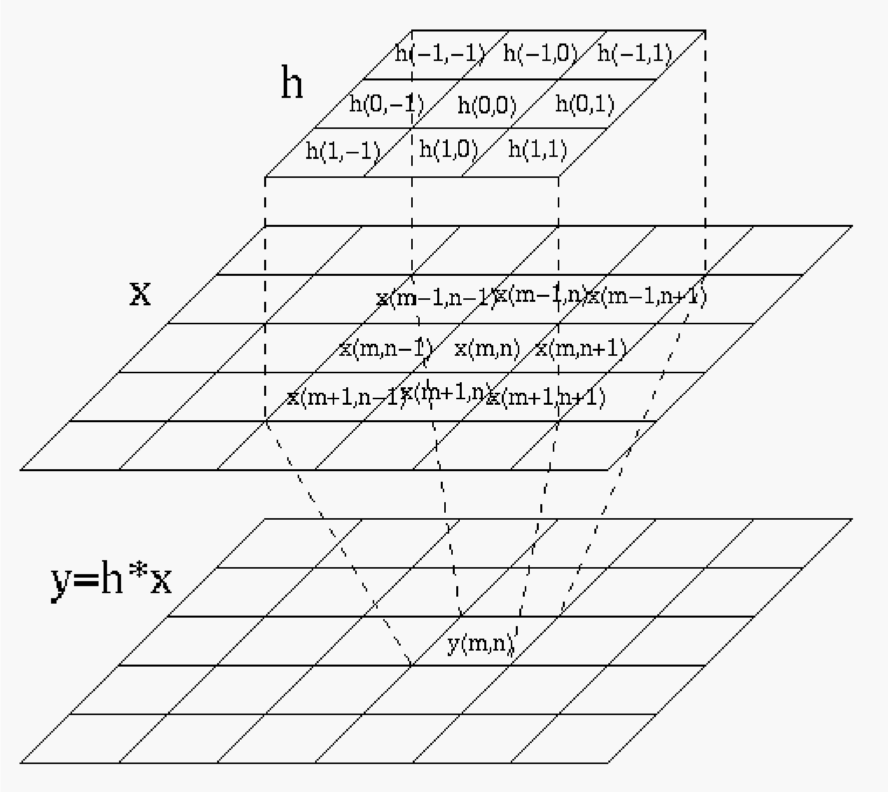
- La convolución es *distributiva*

$$c = a \otimes (b + d) = (a \otimes b) + (a \otimes d)$$

Convolución sobre imágenes

- Es una operación matemática simple, fundamental para muchos operadores de procesamiento de imágenes comúnes
- Provee una manera de multiplicar dos arreglos de números, generalmente de tamaños diferentes, pero de la misma dimensionalidad, para producir un tercer arreglo de números de la misma dimensionalidad
- Esto puede ser utilizado para implementar operadores cuyos valores de pixeles de salida sean simples combinaciones lineales de ciertos valores de pixeles de entrada

Convolución sobre imágenes



$$y[m,n] = \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-k}^{k} x[m+i,n+j]h[i,j]$$

Implementación

- Uno de los arreglos de entrada es usualmente una imágen en niveles de gris en 2D
- El segundo arreglo es usualmente mucho más pequeño y también es 2D (aunque puede ser de 1x1, i.e. un pixel)

I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	I_{17}	I_{18}	I_{19}
I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}	I_{27}	I_{28}	I_{29}
I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}	I_{37}	I_{38}	I_{39}
I_{41}	I_{42}	I_{43}	I_{44}	I_{45}	I_{46}	I_{47}	I_{48}	I_{49}
I_{51}	I_{52}	I_{53}	I_{54}	I_{55}	I_{56}	I_{57}	I_{58}	I_{59}
I_{61}	I_{62}	I_{63}	I_{64}	I_{65}	I_{66}	I_{67}	I_{68}	I_{69}

K_{11}	K_{12}	K_{13}
K_{21}	K_{22}	K_{23}

Máscara

- Es una matriz (usualmente) más pequeña
- Máscaras de diferentes tamaños conteniendo diferentes patrones de números dan resultados diferentes

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Set of coordinate points =

{ (-1, -1), (0, -1), (1, -1),

(-1, 0), (0, 0), (1, 0),

(-1, 1), (0, 1), (1, 1) }

Implementación

- Se hace *deslizando* la máscara sobre la imágen, generalmente comenzando de la esquina superior izquierda, y moviendolo a todas las posiciones donde quede completamente dentro de los límites de la imágen
- Si la imágen es de ***MxN*** y la máscara de ***mxn***, el tamaño de la imágen de salida será **(*M-m+1*)x(*N-n+1*)**
- Cada posición de la máscara corresponde a un solo pixel de salida, cuyo valor se calcula como sigue:

$$O(i,j) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} I(i+k-1, j+l-1) K(k,l)$$

donde $i = 1..M-m+1$, $j = 1..N-n+1$

Ejemplo

I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	I_{17}	I_{18}	I_{19}
I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}	I_{27}	I_{28}	I_{29}
I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}	I_{37}	I_{38}	I_{39}
I_{41}	I_{42}	I_{43}	I_{44}	I_{45}	I_{46}	I_{47}	I_{48}	I_{49}
I_{51}	I_{52}	I_{53}	I_{54}	I_{55}	I_{56}	I_{57}	I_{58}	I_{59}
I_{61}	I_{62}	I_{63}	I_{64}	I_{65}	I_{66}	I_{67}	I_{68}	I_{69}

K_{11}	K_{12}	K_{13}
K_{21}	K_{22}	K_{23}

$$O_{57} = I_{57}K_{11} + I_{58}K_{12} + I_{59}K_{13} + I_{67}K_{21} + I_{68}K_{22} + I_{69}K_{23}$$

- Note que las implementaciones difieren en lo que hacen con las orillas de las imágenes

Filtrado Espacial

- Diferentes filtros tienen diferente efecto sobre la imagen.
  - Reducción de ruido
  - Difuminado
  - Realce de la imagen (Enhancement)
  - etc.

Tipos de Filtrado

- Podemos encontrar filtros:
  - Suavizado, promedio o pasa bajos (*low-pass*)
  - Filtros de orden estadístico o no lineales
  - Realzado, o pasa altos (*high-pass*)

Low-pass filters

- Suavizado, promedio o pasa bajos
  - Suavizan la imagen y reducen el ruido
  - Colateralmente producen un difuminado de la imagen
  - Su aplicación puede dificultar la búsqueda de las orillas, ya que esta normalmente se basa en la detección de cambios bruscos en la intensidad de la imagen
  - Mean filtering (box filtering), Gausiano, etc.

Low-pass filters

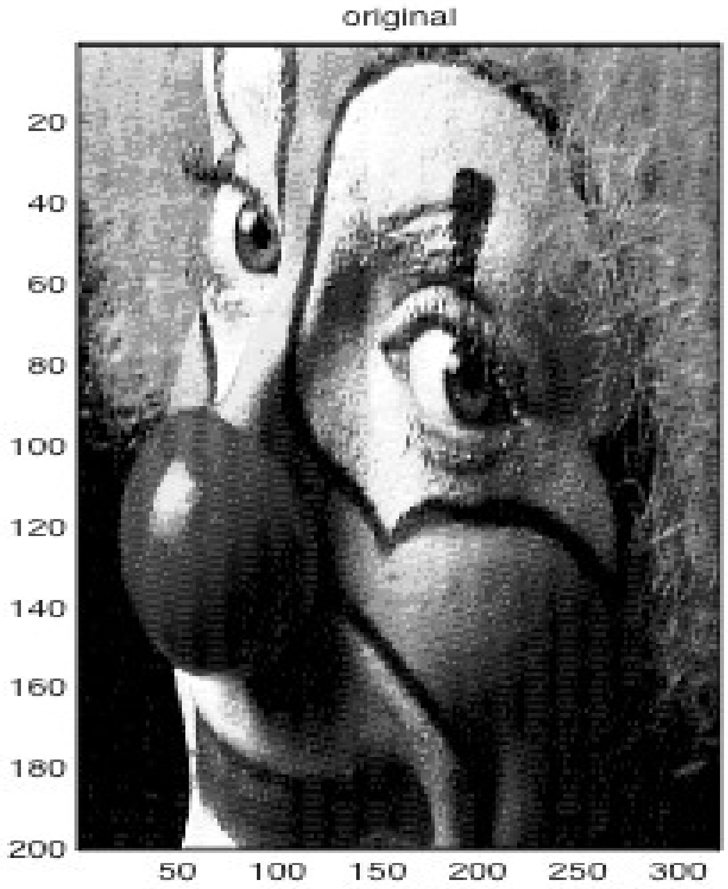
- De caja: Reducción de ruido por promedio de píxeles vecinos

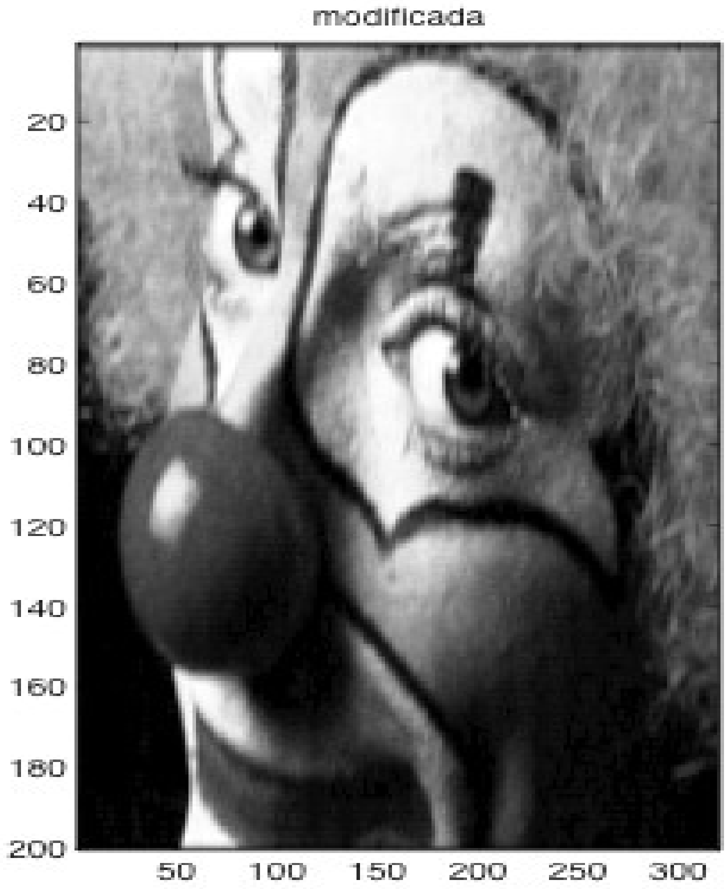
$$h_{Noise\,Removal} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta máscara no sólo elimina el ruido, sino que también difumina (blur) la imagen

1/9 para evitar la saturación (ya que multiplico 9 intensidades de píxeles); asegura que la intensidad media de la imagen permanece constante.

Low-pass filters: Mean



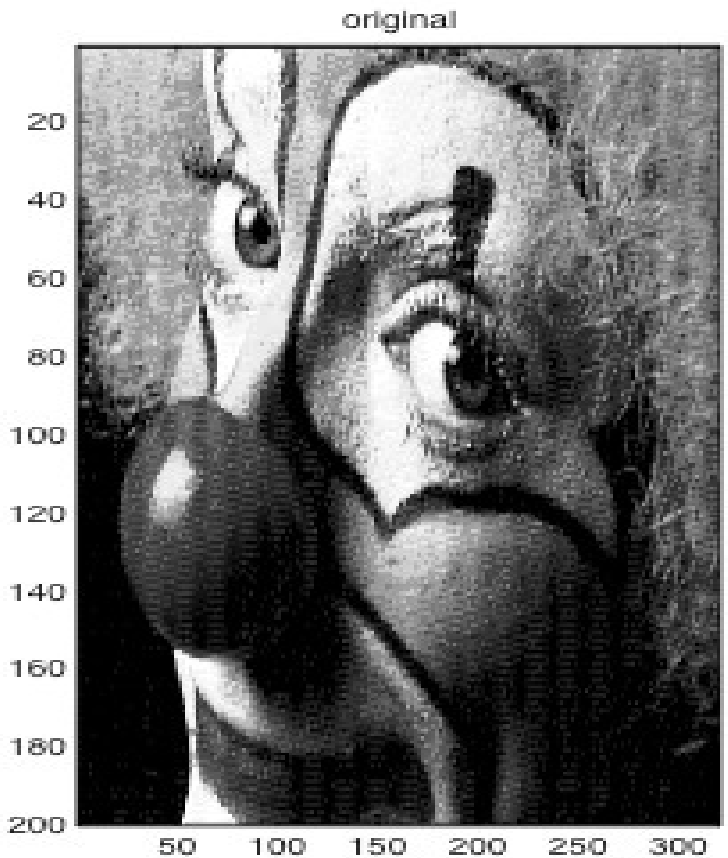


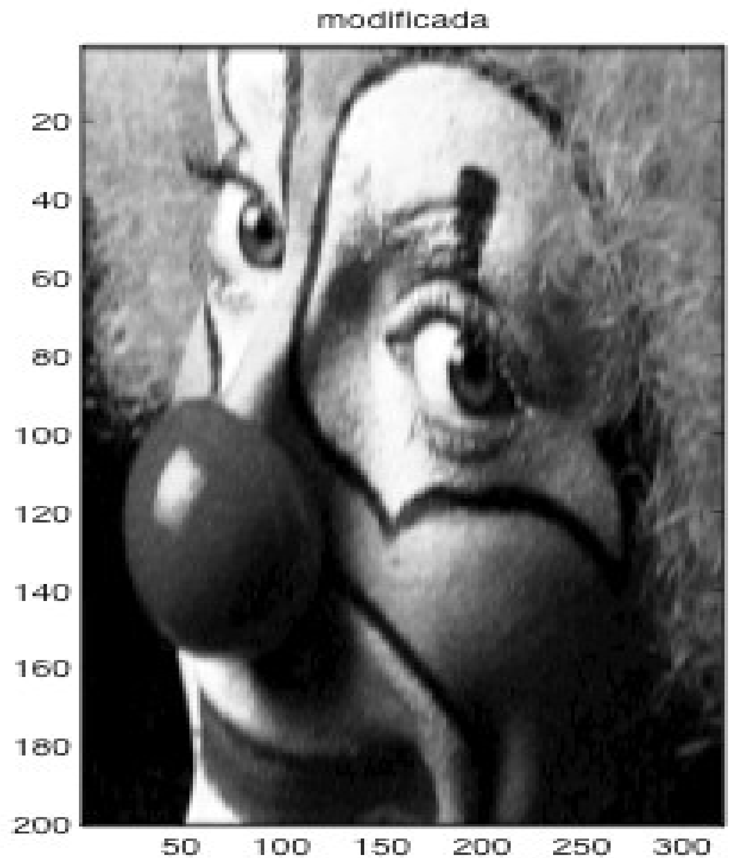
Low-pass filters

- Gaussiano: Reducción de ruido por suavizado Gaussiano

$$h_{Gauss} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Low pass filters: Gaussiano





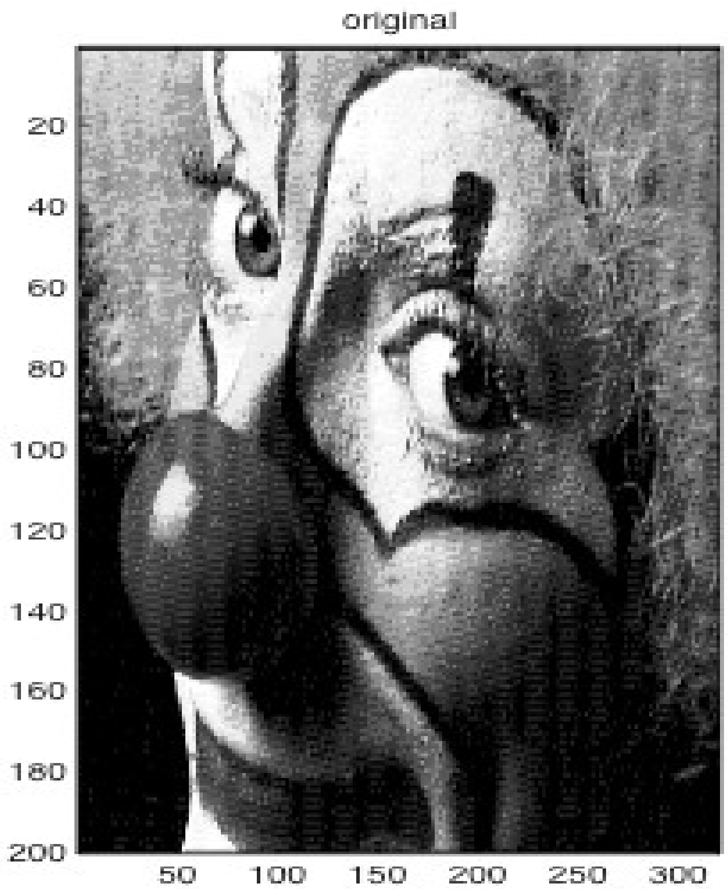
Filtros estadísticos o No-Lineales

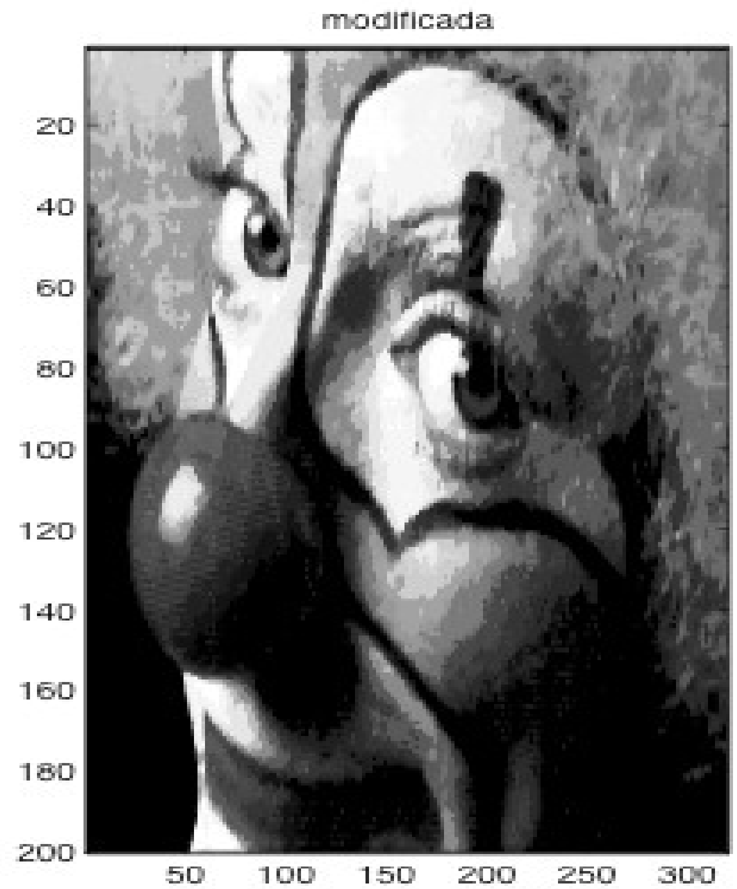
- De la Mediana: No lineal

filtroMediana:[[Q0 = mediana(Pk/k=0..8)]]

- La mediana es el valor que divide en dos partes iguales un conjunto de valores (ej: en una ventana 3x3 es el 5º valor más alto)
- Filtro altamente efectivo en la eliminación de ruido

Filtro de la Mediana





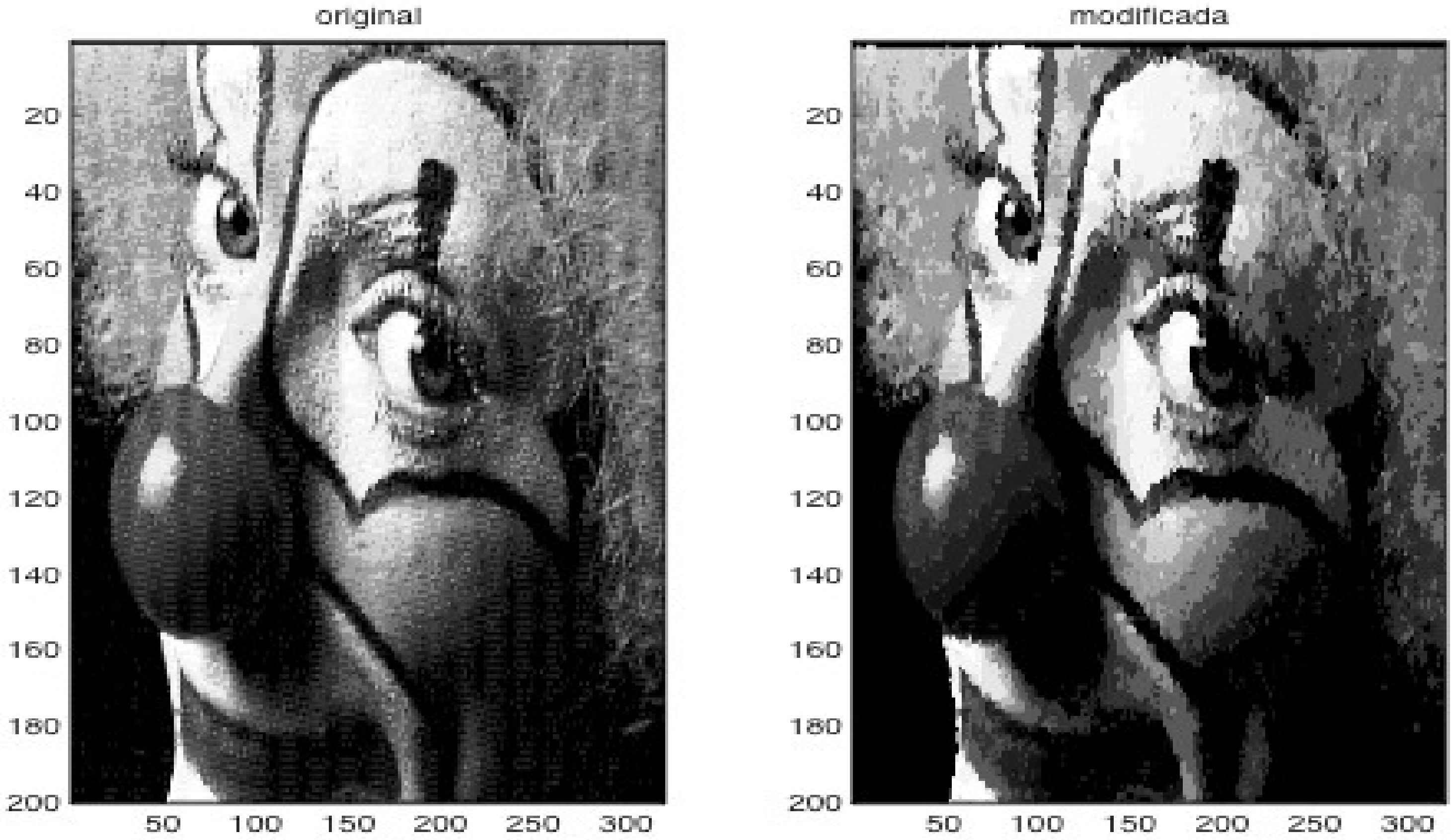
Filtros estadísticos o No-Lineales

- De la Moda: No lineal

filtroModa:[[Q0 = moda(Pk/k=0..8)]]

  - La moda es el valor que más se repite en una distribución
  - Sin embargo, hay distribuciones multimodales, con más de una moda.

Filtro de la Moda



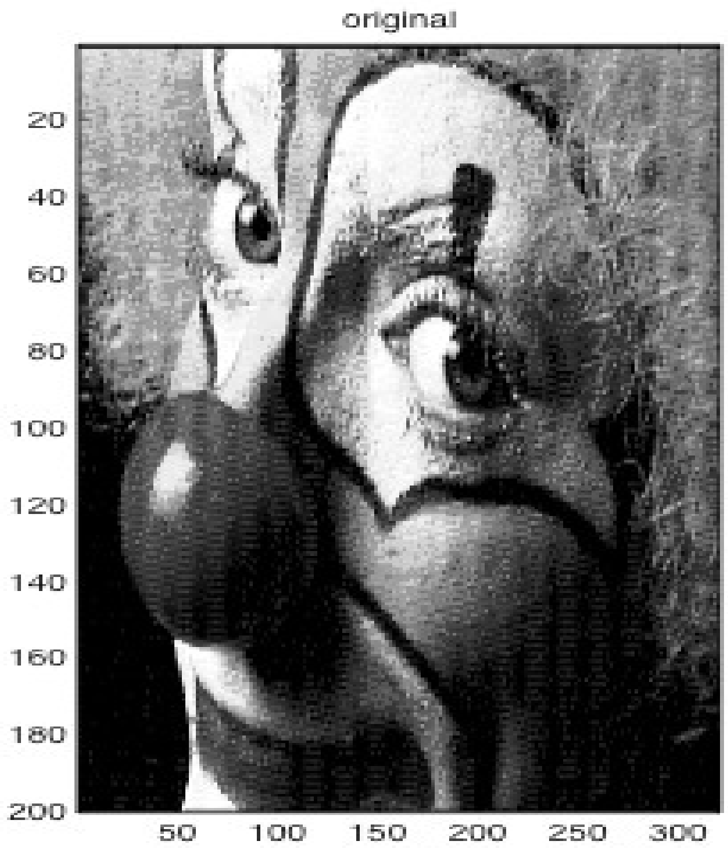
Filtros estadísticos o No-Lineales

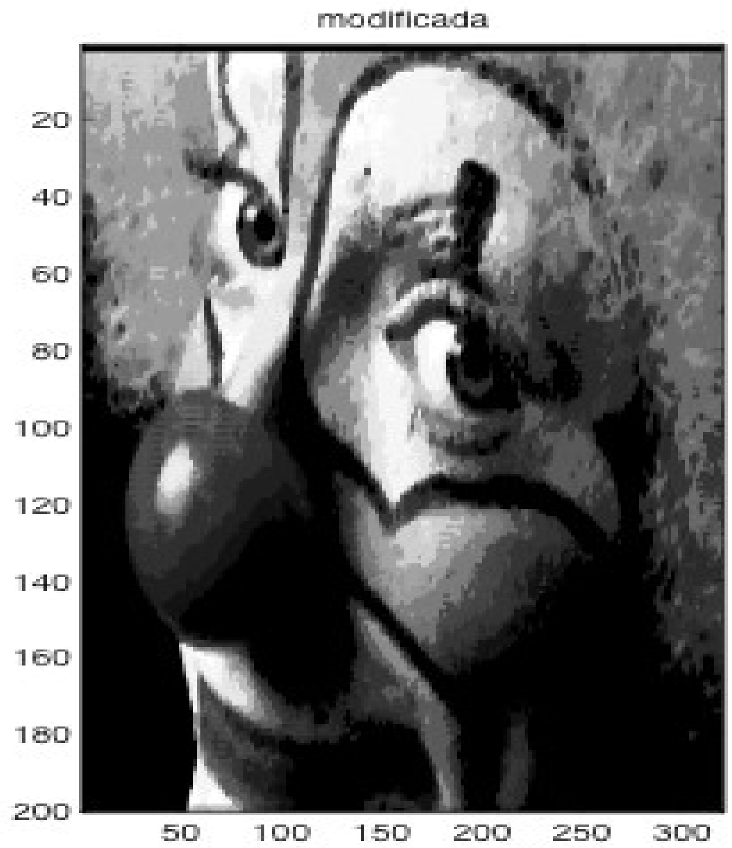
- De rango ordenado *n*: No lineal
  - Similar al de la mediana, pero en lugar de escoger la mediana, se escoge el n-esimo valor de la vecindad

filtroRangoN(N):[[Q0 = sort(Pk/k=0..8)[n]]]

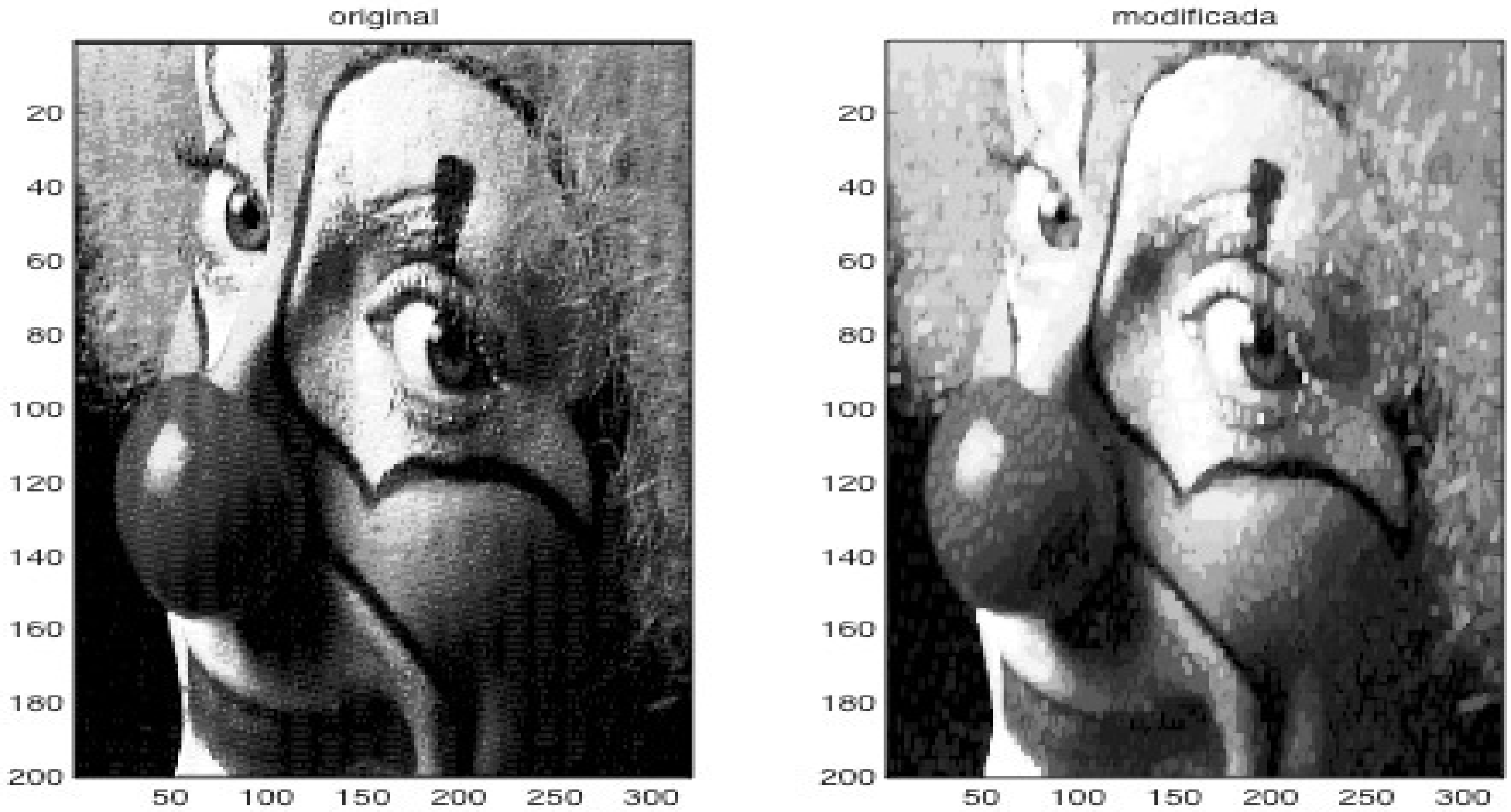
El filtro de la mediana es un caso particular de este.

Filtro de Rango Ordenado (n=3)





Filtro de Rango Ordenado (n=9)



Filtros Pasa altos

- Laplaciano: Realce del contraste de una imagen

$$h_{Laplace} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad h_{LaplaceVar\,1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4-vecinos 8-vecinos

La aplicación de un filtro Laplaciano resulta en la aparición de valores negativos en la imagen, que deben ser corregidos (escalado) para su correcta visualización