

# Una mirada a los productos simétricos

Gloria Andablo-Reyes\* y Enrique Castañeda-Alvarado\*\*

Recepción: 8 de mayo de 2008

Aceptación: 19 de enero de 2009

\* Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.

Correo electrónico: gloria\_andablo@yahoo.com.mx

\*\* Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, México.

Correo electrónico: eca@uaemex.mx

**Resumen.** La Teoría de Hiperespacios de Continuos es una línea de investigación en topología que apareció aproximadamente en la década de 1910 a 1920. En México se ha trabajado en esta área en los últimos 20 años. El hiperespacio conocido como el  $n$ -ésimo producto simétrico fue introducido por K. Borsuk y S. Ulam en 1931. En este artículo enfocamos nuestra atención a los modelos geométricos de dichos hiperespacios y algunas de sus propiedades más importantes.

**Palabras clave:** continuo, hiperespacio, producto simétrico, unicoherencia, encaje ordenado.

## A Look at Symmetric Products

**Abstract.** The Hyperspaces of Continua is a line of research in topology that appeared around 1910-1920. In Mexico there has been work in this area over the past 20 years. The hyperspace known as the  $n$ -th symmetric product was introduced by K. Borsuk and S. Ulam in 1931. In this paper we focus our attention on the geometric models of such hyperspace and some of its most important properties.

**Key words:** continuum, hyperspace, symmetric product, unicoherence, ordered embedding.

## Introducción

La Teoría de Hiperespacios de Continuos es una línea de investigación en topología que nació en la década 1910-1920 aproximadamente. En México se ha estado trabajando en esta área en los últimos 20 años.

Un *continuo*  $X$  es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado (con más de un punto). Un *subcontinuo*  $A$  de  $X$  es un subconjunto de  $X$  que a su vez es un continuo. Dado un continuo  $X$ , un *hiperespacio* de  $X$  es una colección de subconjuntos de  $X$  que satisfacen propiedades específicas. Los hiperespacios más estudiados de un continuo  $X$  son:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y cerrado}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

El conjunto  $2^X$  puede dotarse de una métrica que se define en términos de la métrica del continuo  $X$ , dicha métrica es conocida como métrica de Hausdorff, esto puede consultarse en los libros (Illanes, 2004b: 22, 24), (Illanes y Nadler, 1999: 11, 12). Intuitivamente, dos elementos de  $2^X$  están cercanos con esta métrica si están casi empalmados. Claramente  $F_n(X)$  y  $C(X)$  están contenidos en  $2^X$ . Así pues, podemos considerar cada uno de ellos con la métrica heredada por  $2^X$ .

El hiperespacio  $F_n(X)$ , conocido como el  $n$ -ésimo producto simétrico del continuo  $X$ , fue introducido por K. Borsuk y S. Ulam en 1931.

Una anécdota acerca de los productos simétricos la protagonizaron K. Borsuk y R. Bott, pues el primero afirmó en Borsuk (1949) que el tercer producto simétrico de una circunferencia es homeomorfo a  $S^1 \times S^2$  con la topología producto. Sin embargo, en (Bott, 1952) se muestra que no es así, sino que el tercer producto simétrico de una circunferencia es realmente homeomorfo a la esfera de dimensión 3,  $S^3$ .

## 1. Algunas propiedades básicas de los productos simétricos

En esta sección daremos algunas propiedades básicas de los productos simétricos. Iniciamos probando que si  $X$  es un continuo, entonces sus productos simétricos también son continuos, para ello necesitamos los siguientes resultados.

**Lema 1.** Sea  $X^n$  el producto topológico de  $n$  veces el continuo  $X$ . Entonces la métrica  $D: X^n \times X^n \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}$ , donde  $d$  es una métrica para  $X$ , induce la topología producto (García de la Rosa, 1995: 17).

Denotamos por  $H$  a la métrica de Hausdorff y definimos para cada  $A \in 2^X$ ,  $N(\varepsilon, A) = \{x \in X: \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}$ .

**Lema 2.** Sea  $X^n$  el producto topológico de  $n$  veces el continuo  $X$ . Entonces la función  $g: X^n \rightarrow F_n(X)$  definida por  $g(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$  es continua y suprayectiva.

*Demostración.* Por el Lema 1, podemos considerar a  $X^n$  dotado con la métrica:

$$D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}.$$

Vamos a probar no sólo que  $g$  es continua, sino que es uniformemente continua. Para ello elegimos  $\varepsilon > 0$  y tomamos  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$  tales que

$$D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_i, y_i), \dots, d(x_n, y_n)\} < \varepsilon.$$

Así,  $d(x_i, y_i) < \varepsilon$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo que:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset N(\varepsilon, \{y_1, \dots, y_n\}) \text{ y } \{y_1, \dots, y_n\} \subset N(\varepsilon, \{x_1, \dots, x_n\}).$$

De manera que  $H(g(x_1, \dots, x_n), g(y_1, \dots, y_n)) < \varepsilon$  (Illanes, 2004: 26). Por tanto  $g$  es uniformemente continua. Para verificar que  $g$  es suprayectiva es suficiente observar que todo elemento de  $F_n(X)$  se puede escribir de la forma  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , pues si tenemos un conjunto de menos de  $n$  elementos podemos repetir algunos y esto no altera al conjunto. ■

**Corolario 3.** Si  $X$  es un continuo, entonces el hiperespacio  $F_n(X)$  es un continuo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Por el Lema 2, el hiperespacio  $F_n(X)$  es la imagen del continuo  $X^n$  bajo una función continua. Luego,  $F_n(X)$  es continuo. ■

Antes de seguir enumerando propiedades de los productos simétricos necesitamos algunas definiciones.

**Definición 4.** Decimos que el espacio  $X$  es conexo por arcos si para cualesquiera  $x, y \in X$  existe una función continua  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x$  y  $\alpha(1) = y$ . La función  $\alpha$  es llamada arco que conecta a  $x$  con  $y$ .

**Definición 5.** Decimos que el continuo  $X$  es localmente conexo (o continuo de Peano) si para cada  $x \in X$  y cada abierto  $U$  de  $X$  que contiene a  $x$ , existe un abierto y conexo  $V$  de  $X$  contenido en  $U$  que contiene a  $x$ .

Existen varias propiedades que poseen los hiperespacios  $C(X)$  y  $2^X$  y que los productos simétricos no tienen. Por ejemplo, los hiperespacios  $C(X)$  y  $2^X$  son conexos por arcos para cualquier continuo  $X$ , mientras que para los productos simétricos se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 6.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $F_n(X)$  es conexo por arcos si y sólo si  $X$  lo es.

*Demostración.* Supongamos primero que  $X$  es conexo por arcos, probaremos que cada elemento  $\{x_1, \dots, x_k\} \in F_n(X)$  con  $k \leq n$  se puede conectar mediante un arco con cualquier elemento  $\{p\}$  de  $F_n(X)$ . Notemos que para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  existe una función continua  $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha_i(0) = p$  y  $\alpha_i(1) = x_i$ , entonces la función  $\alpha: [0, 1] \rightarrow F_n(X)$  dada por  $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \dots, \alpha_k(t)\}$  es un arco que une a  $\{p\}$  con  $\{x_1, \dots, x_k\}$  en  $F_n(X)$ . Para probar el recíproco procedemos de la siguiente manera. Sean  $p, q \in X$ , puesto que  $\{p\}, \{q\} \in F_n(X)$ , existe una función continua  $\beta: [0, 1] \rightarrow F_n(X)$  tal que  $\beta(0) = \{p\}$  y  $\beta(1) = \{q\}$ . Entonces, dado que  $\beta([0, 1])$  es la imagen continua del continuo localmente conexo  $[0, 1]$ , por el Corolario 8.17 de (Nadler, 1992),  $\beta([0, 1])$  es un subcontinuo localmente conexo de  $F_n(X)$ . Consideremos ahora el subconjunto  $B = \bigcup \beta([0, 1])$  de  $X$ . Puesto que la función unión es continua (Illanes y Nadler, 1999: 91), entonces  $B$  es la imagen continua del continuo localmente conexo  $\beta([0, 1])$ . Por lo que  $B$  es un subcontinuo localmente conexo de  $X$ . Finalmente, por el Teorema 8.23 de (Nadler, 1992) se tiene que  $B$  es un subcontinuo conexo por arcos que contiene tanto a  $p$  como a  $q$ . Lo que demuestra que  $X$  es un continuo conexo por arcos. ■

Otra propiedad que satisfacen los hiperespacios  $C(X)$  y  $2^X$  y que no necesariamente cumplen los productos simétricos es la unicoherencia. Decimos que un continuo  $X$  es unicoherente si dados dos subcontinuos cualesquiera cuya unión sea  $X$ , la intersección de ellos es conexas. A este respecto, cabe mencionar que en 1931 K. Borsuk y S. Ulam plantearon la siguiente pregunta:

**Pregunta 7.** Sea  $X$  un continuo localmente conexo y unicoherente y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces ¿es  $F_n(X)$  unicoherente?

Esta pregunta fue respondida afirmativamente en (Ganea, 1954) donde de hecho T. Ganea probó el siguiente resultado:

**Teorema 8.** Si  $X$  es un espacio de Hausdorff, conexo, localmente conexo y unicoherente, entonces  $F_n(X)$  es unicoherente para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Después, en 1985 A. Illanes generalizó este resultado demostrando lo siguiente:

**Teorema 9.** Si  $X$  es un espacio de Hausdorff, localmente conexo y conexo por arcos, entonces  $F_n(X)$  es unicoherente para toda  $n \geq 3$  (Illanes, 1985).

Poco tiempo después en (Macías, 1999) se generalizó aún más este resultado al demostrar:

**Teorema 10.** Si  $X$  es un continuo, entonces  $F_n(X)$  es unicoherente para toda  $n \geq 3$ .

Para el caso  $n = 2$  en (Castañeda, 1998) se da un ejemplo de un continuo unicoherente cuyo segundo producto simétrico no es unicoherente. De hecho el ejemplo es la unión de dos circunferencias concéntricas y una espiral enredándose en forma asintótica a las dos circunferencias, como se muestra en la Figura 1.

Como podemos darnos cuenta existen propiedades importantes que hacen que los productos simétricos posean una estructura topológica diferente a los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$ .

## 2. Modelos para productos simétricos

En esta sección nos dedicamos a construir algunos modelos geométricos para productos simétricos, iniciamos con el continuo más sencillo, el arco.

### 2.1 El segundo producto simétrico del arco

Un *arco* es cualquier espacio topológico homeomorfo a un intervalo. En esta sección trabajaremos con el intervalo  $[0, 1]$ . Vamos a denotar por  $\{x, y\}$  a un elemento cualquiera de  $F_2([0, 1])$ . Recordemos que podemos tener  $x = y$ , este es el caso de los conjuntos de un solo punto. Consideremos el conjunto  $\{x, y\}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $0 \leq x \leq y \leq 1$ , entonces definimos  $h(\{x, y\}) = (x, y)$ . Es claro que cada conjunto de la forma  $\{x, y\}$  queda completamente determinado por la pareja  $(x, y)$  y viceversa. Notemos que la imagen de  $h$  es la región del plano:

$$T = \{(x, y): 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

Se puede probar que  $h$  es un homeomorfismo.

Por lo que obtenemos un triángulo como modelo para el segundo producto simétrico de  $[0, 1]$ , véase la Figura 2.

### 2.2 El segundo producto simétrico de una curva cerrada simple

Continuando con la idea de construir modelos de acuerdo con el grado de dificultad de los continuos, toca el turno al segundo producto simétrico de una curva cerrada simple. Puesto que una curva cerrada simple es homeomorfa a la circunferencia unitaria  $S^1$ , vamos a

construir el modelo geométrico para  $F_2(S^1)$ . Tomamos  $A = \{a, b\}$  un conjunto de a lo más dos puntos (recordemos que también estamos considerando el caso  $a=b$ ) de  $S^1$ . Notemos que los dos puntos  $a$  y  $b$  determinan en la circunferencia dos arcos. Escojamos el arco de menor longitud y denotemos por  $m(A)$  y  $l(A)$  su punto medio y su longitud, respectivamente. De este modo, la asignación  $h(A) = (1 + l(A))m(A)$  sería perfecta si no fuera porque tenemos una dificultad para los conjuntos de puntos antípodos. Este par de puntos determinan dos arcos de la misma longitud (a saber,  $\pi$ ). Por lo que si de momento omitimos estos puntos la imagen de  $h$  es el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^2: 1 \leq \|x\| < 1 + \pi\}$ .

Notemos que si hiciéramos una asignación como la anterior a cada pareja de puntos antípodos de  $S^1$  le correspondería dos puntos, uno por cada arco que determina dicha pareja. Obsérvese que estos puntos también son antípodos en la circunferencia de radio  $1 + \pi$ , véase la Figura 3.

Por lo anterior tendríamos una extensión  $f$  de la función  $h$  cuya imagen es el anillo  $D = \{x \in \mathbb{R}^2: 1 \leq \|x\| < 1 + \pi\}$  hasta este momento todo estaría bien, salvo que a cada pareja de puntos antípodos de  $S^1$  le estamos asignando dos puntos.

Figura 1. Continuo cuyo segundo producto simétrico no es unicoherente.

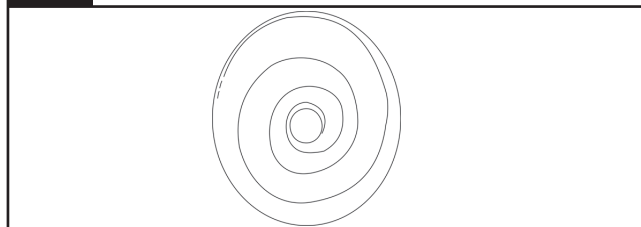


Figura 2. Modelo para:  $F_2([0,1])$ .

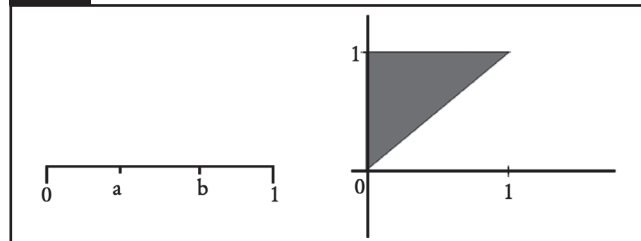
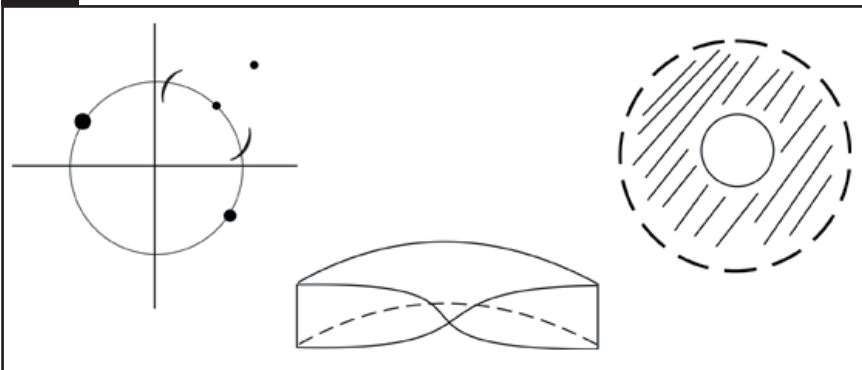


Figura 3. Modelo para  $F_2(S^1)$ .



Esto se soluciona si identificamos los puntos antípoda de la circunferencia de radio  $1 + \pi$  en el anillo  $D$ . Al hacer esta identificación lo que obtenemos es una banda de Möbius (véase la Figura 3). Finalmente hemos conseguido un modelo del segundo producto simétrico de una curva cerrada simple. Notemos que el conjunto de todos los elementos de  $F_2(S^1)$  que consisten de un solo punto de  $S^1$ , están representados en la frontera de la Banda de Möbius. Un conjunto de puntos interesante en el segundo producto simétrico de  $S^1$ , es el formado por aquellos conjuntos de la forma  $\{p, x\}$  donde  $p$  es un punto fijo en  $S^1$ , este conjunto está representado en la Figura 4.

Figura 4. Puntos de la forma  $\{p, x\}$  en  $F_2(S^1)$ .

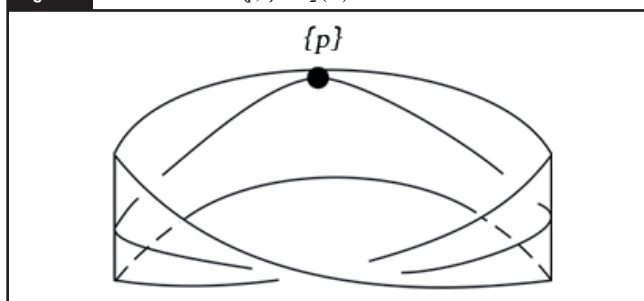


Figura 6. Continuo figura 8.

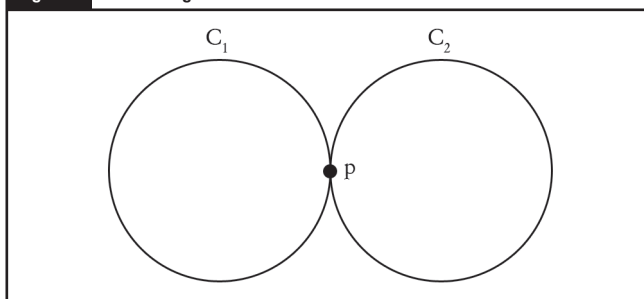
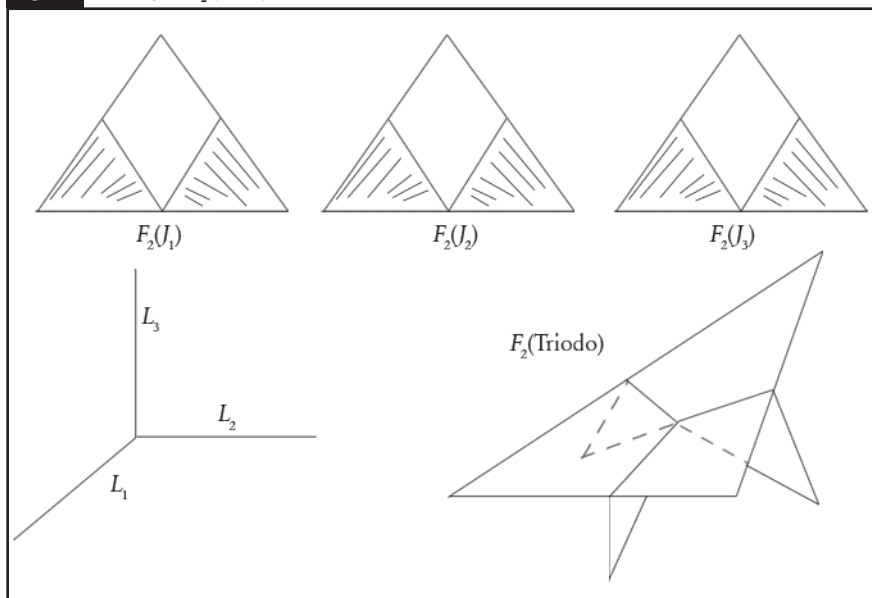


Figura 5. Modelo para  $F_2$  (Tríodo).



### 2.3 El segundo producto simétrico del tríodo simple

Consideremos ahora el tríodo simple  $T$ , es decir,  $T$  está formado por tres arcos  $L_1, L_2$  y  $L_3$  que tienen en común un punto  $p$  el cual es un punto extremo de cada uno de ellos. En general un  $n$ -odo simple  $T_n$  está formado por  $n$  arcos, digamos  $L_1, L_2, \dots, L_n$  que tienen en común un punto  $p$  el cual es un punto extremo de cada uno de ellos.

Consideremos los arcos  $J_1 = L_2 \cup L_3, J_2 = L_1 \cup L_3, J_3 = L_1 \cup L_2$ . Ya sabemos que para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $F_2(J_i)$  es un triángulo. Notemos que si  $a, b \in T$ , entonces  $a$  pertenece a algún  $L_j$  y  $b$  pertenece a algún  $L_k$  (podría suceder que  $j = k$ ). De modo que  $\{a, b\}$  pertenece a algún  $J_i$ . Esto muestra que  $F_2(T) = F_2(J_1) \cup F_2(J_2) \cup F_2(J_3)$ . Entonces, para obtener un modelo para el segundo producto simétrico del tríodo simple, lo único que necesitamos es saber cómo se pegan los triángulos  $F_2(J_1), F_2(J_2)$  y  $F_2(J_3)$ . Observemos que  $\{a, b\} \in F_2(J_1) \cap F_2(J_2)$  si y sólo si  $\{a, b\} \subset J_1$  y  $\{a, b\} \subset J_2$ , es decir  $\{a, b\} \subset J_1 \cap J_2 = L_3$ . Esto muestra que  $F_2(J_1) \cap F_2(J_2) = F_2(L_3)$ , que es un subtriángulo de  $F_2(J_1)$  y de  $F_2(J_2)$ . De manera que tenemos que pegar a  $F_2(J_1)$  con  $F_2(J_2)$  por ese subtriángulo. En la Figura 5, los subtriángulos sombreados que aparecen a la izquierda en los triángulos  $F_2(J_1), F_2(J_2)$  y  $F_2(J_3)$ , corresponden a los modelos de los hiperespacios  $F_2(L_1), F_2(L_2)$  y  $F_2(L_3)$ , respectivamente, mientras que los subtriángulos que aparecen a la derecha de los mismos triángulos corresponden a los modelos de los hiperespacios  $F_2(L_1), F_2(L_2)$  y  $F_2(L_3)$ , respectivamente. Además se muestra el modelo geométrico de  $F_2(T)$  después de haber realizado los pegados correspondientes. (Illanes, 2004b: 48).

### 2.4 El segundo producto simétrico del continuo figura 8

Ahora mostraremos el segundo producto simétrico del continuo figura 8, al cual denotamos por  $Z$ . Podemos ver a  $Z$  como la unión de dos circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  donde  $C_1 \cap C_2 = \{p\}$  como se muestra en la Figura 6.

Cada elemento  $A = \{x, y\} \in F_2(Z)$  satisface una de las siguientes tres posibilidades:

- a)  $A \subset C_1$ ,
- b)  $A \subset C_2$  o
- c)  $x \in C_1$  y  $y \in C_2$ .

Denotemos por  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  a los conjuntos formados por elementos de  $F_2(Z)$  que satisfacen (a) y (b) respectivamente. Por lo visto en la Sección 3.2, tanto  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{B}$  son homeomorfos a una banda de Möbius. Mientras que el conjunto  $\mathcal{C}$  de elementos de  $F_2(Z)$  que satisface (c), se puede probar que es homeomorfo al toro  $C_1 \times C_2$ . Entonces  $F_2(Z) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ . Ahora, si  $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ , entonces  $A = \{x, y\}$  satisface que  $x, y \in C_1$  y  $x \in C_1, y \in C_2$ . Por lo que  $y = p$ . De aquí,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{\{x, p\} \in F_2(Z) : x \in C_1\}.$$

Similarmente

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{\{x, p\} \in F_2(Z) : x \in C_2\}.$$

De nuevo, por lo visto en la Sección 3.2,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$  queda representado en la banda de Möbius como una circunferencia que toca a la frontera en un punto, mientras que en el toro  $C_1 \times C_2$ ,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$  puede ser representado por una circunferencia horizontal, como se muestra en la Figura 7. Obsérvese que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{p\}$ . No es difícil ver que la banda de Möbius  $\mathcal{B}$  puede ser encajada en la parte interior del toro  $C_1 \times C_2$  de tal forma que la circunferencia  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$  en  $\mathcal{B}$  y que en  $C_1 \times C_2$  corresponde a la circunferencia  $\{p\} \times C_2$  y que en la Figura 7 aparece en forma vertical en el toro, sean identificadas. La banda de Möbius  $\mathcal{A}$  puede ser encajada en la parte exterior del toro  $C_1 \times C_2$  de tal forma que la circunferencia  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$  en  $\mathcal{A}$  y que en  $C_1 \times C_2$  corresponde a la circunferencia  $C_1 \times \{p\}$  y que en la Figura 7 aparece en forma horizontal en el toro, sean identificadas. Por lo tanto para crear un modelo para  $F_2(Z)$  sólo tenemos que realizar los pegados que se muestran en la Figura 7.

### 3. Continuos para los que su segundo producto simétrico se puede encajar en $\mathbb{R}^3$

Se dice que un continuo es una *gráfica finita* si se puede expresar como la unión finita de arcos, los cuales, o bien son ajenos dos a dos o se intersectan sólo en uno o en ambos puntos extremos. Decimos que una gráfica finita *no es plana* o *no es aplanable* si no se puede encajar en el plano  $\mathbb{R}^2$ . Así, el arco, las curvas cerradas simples y los  $n$ -odos simples son ejemplos de gráficas finitas planas.

Figura 7. Modelo para  $F_2$  (Figura 8).

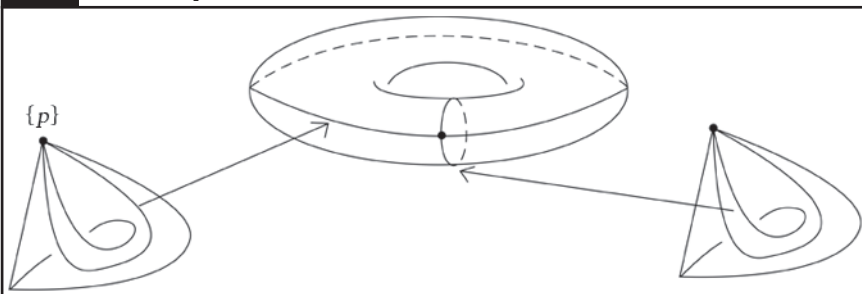
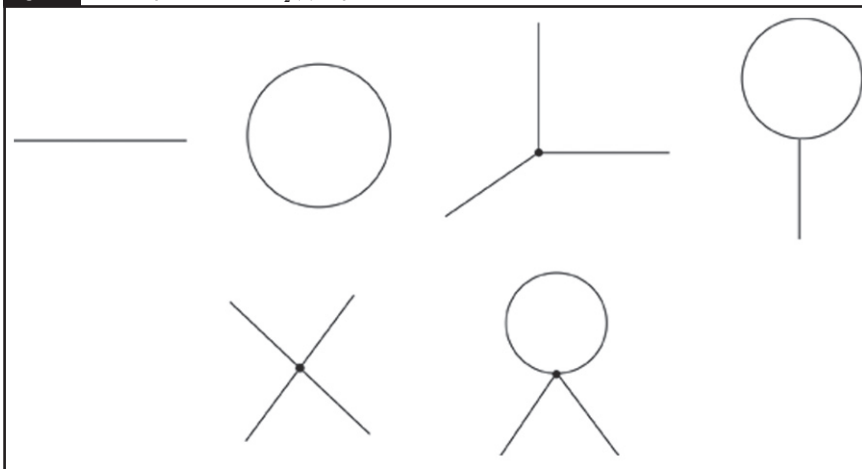


Figura 8. Gráficas para las cuales  $F_2(X)$  se puede visualizar.



Quizás se preguntarán por qué no construimos el modelo de un 4-odo simple, que es más sencillo de analizar que el continuo figura 8. La razón es que los únicos continuos localmente conexos, para los que podemos construir modelos de este hiperespacio que pueden visualizarse, es decir, que pueden encajarse en  $\mathbb{R}^3$ , son aquellos continuos que son subcontinuos del continuo figura 8. Lo anterior se resume en el siguiente:

**Teorema 11.** *Sea  $X$  un continuo localmente conexo. Entonces  $F_2(X)$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$  si y sólo si  $X$  es homeomorfo a alguno de los siguientes espacios: un arco, una circunferencia, un triódo simple, una paleta, un 4-odo simple, una medalla o el continuo figura 8, (ver Figuras 8 y 6). Una demostración rigurosa de este hecho se puede encontrar en el Teorema 3 de (Castañeda, 2002).*

Con respecto al Teorema 11, durante mucho tiempo se tuvo la siguiente pregunta:

**Pregunta 12.** *¿Podemos encajar en  $\mathbb{R}^4$  el segundo producto simétrico de cualquier gráfica finita?*

Recientemente, en el taller de investigación de Teoría de Continuos e Hiperespacios que se llevó a cabo en la ciudad de Puebla, México en julio de 2007, el segundo autor y los colegas A. Illanes, F. Capulín, F. Orozco, J. G. Anaya, J. Sánchez, T. Garduño y N. Ordóñez, resolvieron en forma

negativa esta pregunta, es decir, existen gráficas finitas para las cuales su segundo producto simétrico no se puede encajar en el espacio euclidiano 4-dimensional.

**Ejemplo 13.** Sea  $X = Y \cup W$  donde  $Y$  y  $W$  son gráficas finitas no planas tales que  $Y \cap W = \{p\}$ . Afirmamos que  $F_2(X)$  no se puede encajar en  $\mathbb{R}^4$ .

En efecto, pues si  $A$  es un elemento del segundo producto simétrico de  $X$ , entonces tenemos los siguientes casos:

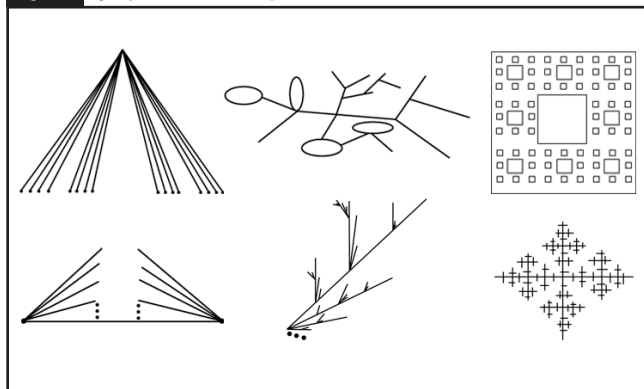
- a)  $A \subset Y$ ,
- b)  $A \subset W$ ,
- c) si  $A = \{y, z\}$ , con  $y \in Y$  y  $z \in W$ .

Del inciso c) tenemos que el segundo producto simétrico de  $X$  contiene una copia topológica de  $Y \times W$ , que no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^4$  y por tanto  $F_2(X)$  tampoco puede ser encajado en el espacio euclidiano 4-dimensional.

Antes de continuar, necesitamos dar algunos conceptos. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples. Un continuo tiene una propiedad hereditaria si cada uno de sus subcontinuos la tiene. Un *dendroide* es un continuo conexo por arcos y hereditariamente unicoherente.

El ejemplo anterior es una gráfica finita no aplanable. Para el caso de gráficas finitas planas y de hecho, para cualquier continuo plano como las dendritas, los dendroides o la misma carpeta de Sierpiński (cuya construcción se puede ver en (Andablo y Castañeda, 2008)) su segundo producto simétrico se puede encajar en  $\mathbb{R}^4$ . Esto se debe a que cualquiera de estos espacios se puede encajar en  $[0,1]^2$  y por el Teorema 1 de (Molski, 1957) tenemos que  $F_2([0,1]^2)$  es homeomorfo a  $[0,1]^4$ . En la Figura 9 se muestran los primeros pasos de las construcciones de algunos ejemplos de continuos planos.

Figura 9. Ejemplos de continuos planos.



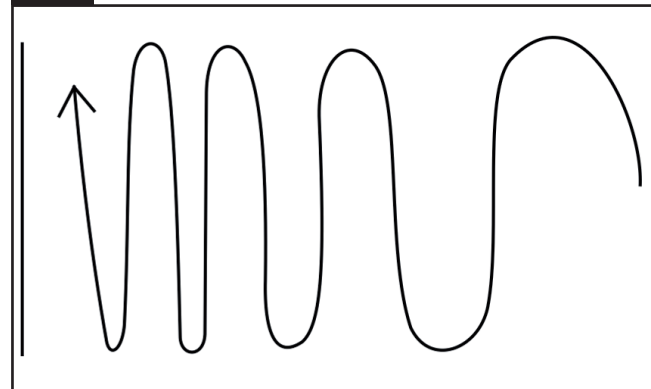
La pregunta natural ahora es: ¿qué pasa con los continuos que no son localmente conexos?, ¿existirá un continuo que no sea localmente conexo tal que su segundo producto simétrico tenga un modelo geométrico que pueda visualizarse? En el año 2005, A. Illanes construyó un modelo geométrico para el segundo producto simétrico de la curva sinoidal,  $X = \text{sen}(1/x)$  ( $X$  es la cerradura de la gráfica de la función  $\text{sen}(1/x)$  con dominio el intervalo  $(0,1]$ , ver Figura 10).

Este continuo no es localmente conexo y al construir el modelo geométrico de su segundo producto simétrico, A. Illanes mostró que dicho producto simétrico se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ . Lo que todavía no se sabe, es si éste es el único continuo no localmente conexo cuyo segundo producto simétrico se puede encajar en el espacio euclidiano 3-dimensional, con respecto a esta pregunta se tiene la siguiente.

**Conjetura 14.** El segundo producto simétrico de cualquier compactación del rayo  $[0, \infty)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ .

Cuando K. Borsuk y S. Ulam introducen los productos simétricos también prueban que para  $n \in \{1, 2, 3\}$ ,  $F_n([0,1])$  es homeomorfo a  $[0,1]^n$ , y que, para  $n > 4$ ,  $F_n([0,1])$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$ . Después R. Molski probó que  $F_2([0,1]^2)$  es homeomorfo a  $[0,1]^4$  y que para  $n \geq 3$  ninguno de los espacios  $F_n([0,1]^2)$  y  $F_2([0,1]^n)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2n}$ . Siguiendo esta línea de investigación, en (Castañeda, 2002) se prueba que el arco es el único continuo cuyo segundo y tercer producto simétrico puede ser encajado en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. También se obtiene que, para ningún continuo  $X$  y ninguna  $n \geq 4$ ,  $F_n(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $X$  es un continuo que contiene un 5-odo simple o una copia topológica de la letra H, entonces  $F_2(X)$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^3$ .

Figura 10. Curva sinoidal.



#### 4. Condiciones para existencia de encajes ordenados entre productos simétricos

Decimos que una función  $h$  es un *encaje* si es un homeomorfismo sobre su imagen. Dados dos continuos  $X$  y  $Y$  y dos hiperespacios  $H(X)$  y  $K(Y)$  de  $X$  y  $Y$ , respectivamente, decimos que  $H(X)$  puede *encajarse ordenadamente* en  $K(Y)$  siempre que exista un encaje  $h: H(X) \rightarrow K(Y)$  tal que, si  $A \subset B$ , entonces  $h(A) \subset h(B)$ . En este caso,  $h$  es llamado *encaje ordenado*.

Un continuo es *indescomponible* si no se puede escribir como unión de dos de sus subcontinuos propios. Decimos que un continuo es *descomponible* si no es indescomponible.

En (Andablo, 2002) se dan ejemplos y condiciones bajo las cuales  $C(X)$  puede ser encajado ordenadamente en  $C(Y)$ . En particular, se caracterizan los continuos  $X$  tales que  $C(X)$  puede ser encajado ordenadamente en  $C(Y)$ , cuando  $Y$  es un continuo hereditariamente indescomponible. También se demuestra que  $2^X$  puede encajarse ordenadamente en  $2^Y$  para cualesquiera dos continuos  $X$  y  $Y$ .

Si un continuo  $X$  puede encajarse en un continuo  $Y$  mediante un encaje  $h: X \rightarrow Y$ , existe un encaje ordenado natural  $2^h: 2^X \rightarrow 2^Y$  dado por  $2^h(A) = h(A)$  (la imagen de  $A$  bajo  $h$ ). La función  $2^h$  es llamada la función inducida véase Sección 77 de (Illanes y Nadler, 1999). Las restricciones  $2^h|_{C(X)}: C(X) \rightarrow C(Y)$  y  $2^h|_{F_n(X)}: F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  también son encajes ordenados. Sean  $n$  y  $m$  números naturales, dados continuos  $X$  y  $Y$ , una pregunta que surge de manera natural es: ¿bajo qué condiciones  $F_n(X)$  puede ser encajado ordenadamente en  $F_m(Y)$ ?

En esta sección presentamos un bosquejo de las demostraciones de las afirmaciones que responden la pregunta anterior. Las demostraciones completas de estos resultados pueden consultarse en (Andablo y Neumman, 2008).

Si  $A \in F_n(X)$ , denotamos por  $|A|$  al número de elementos de  $A$ .

**Teorema 15.** Sean  $X, Y$  continuos y  $n, m \in \mathbb{N}$ . Si  $F_n(X)$  puede encajarse ordenadamente en  $F_m(Y)$ , entonces  $n \leq m$ .

*Demostración.* Sean  $g: F_n(X) \rightarrow F_m(Y)$  un encaje ordenado y  $A \in F_n(X)$  tal que  $|A| = n$ . Supongamos que  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Puesto que  $g$  es un encaje ordenado y  $\{x_1, \dots, x_{i-1}\} \subsetneq \{x_1, \dots, x_i\}$  para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ , entonces  $g(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \subsetneq g(\{x_1, \dots, x_i\})$ , para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Así

$$|g(\{x_1, \dots, x_i\})| \geq |g(\{x_1, \dots, x_{i-1}\})| + 1.$$

Por tanto,

$$|g(\{x_1, \dots, x_n\})| \geq |g(\{x_1\})| + n - 1 \geq n.$$

Puesto que  $g(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \in F_m(X)$ , concluimos que  $m \geq n$ . ■

Dados un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $F_n^\circ(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ , para  $n \geq 2$ , y hacemos  $F_1^\circ(X) = F_1(X)$ . Notemos que  $F_n^\circ(X)$  es un subconjunto abierto de  $F_n(X)$ .

**Lema 16.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Sea  $\sigma: F_{m+1}(X) \rightarrow F_{n+2}(Y)$  un encaje ordenado, donde  $1 \leq m \leq n$ . Si para algún  $E \in F_m^\circ(X)$ ,  $\sigma(E) \in F_{n+1}(Y)$ , entonces  $X$  puede encajarse en  $Y$ .

Ahora estamos en condiciones de abordar el resultado más importante de esta sección.

**Teorema 17.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Si  $n \leq m < 2n$  y  $F_n(X)$  puede encajarse ordenadamente en  $F_m(Y)$ , entonces  $X$  puede encajarse en  $Y$ .

*Bosquejo de la demostración.* Vamos a demostrar la afirmación usando inducción sobre  $n$ . Sea  $n = 1$  y supongamos que  $F_1(X)$  puede encajarse ordenadamente en  $F_1(Y)$ . Puesto que  $X$  (respectivamente  $Y$ ) es homeomorfo a  $F_1(X)$  (respectivamente  $F_1(Y)$ ), concluimos que  $X$  puede encajarse en  $Y$ .

Supongamos ahora que el teorema es cierto para alguna  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos también que  $n + 1 \leq m < 2n + 2$  y  $\sigma: F_{n+1}(X) \rightarrow F_m(Y)$  es un encaje ordenado.

Consideremos primero el caso  $n + 1 = m$ . Entonces estamos suponiendo que  $\sigma: F_{n+1}(X) \rightarrow F_{n+1}(Y)$ . Afirmamos que  $\sigma(\{p\})$  es un conjunto con un solo elemento. En efecto, supongamos que existe  $p \in X$  tal que  $\sigma(\{p\})$  contiene más de un elemento. Podemos elegir elementos  $p_2, \dots, p_{n-1}$  en  $X$  tales que  $p, p_2, \dots, p_{n-1}$  son diferentes dos a dos. Puesto que es un encaje ordenado,  $\sigma(\{p, p_2\})$  contiene propiamente a  $\sigma(\{p\})$ , así que  $\sigma(\{p, p_2\})$  contiene al menos tres elementos. Repitiendo este argumento con los conjuntos  $\sigma(\{p, p_2, p_3\}), \dots, \sigma(\{p, p_2, p_{n-1}\})$ , obtenemos que  $\sigma(\{p, p_2, p_{n+1}\})$  contiene al menos  $n + 2$  elementos. Esto es una contradicción puesto que  $\sigma(\{p, p_2, \dots, p_{n+1}\}) \in F_{n+1}(Y)$ . Así, hemos probado que  $\sigma(\{p\})$  es un conjunto con un solo elemento. De manera que,  $\sigma|_{F_1(X)}$  es un encaje de  $F_1(X)$  en  $F_1(Y)$ . Por tanto,  $X$  puede encajarse en  $Y$ .

Supongamos ahora que  $n + 1 < m$ . Si para algún  $A \in F_n^\circ(X)$ ,  $\sigma(A) \in F_{m-1}(Y)$ , por el Lema 16, concluimos que  $X$  puede encajarse en  $Y$ . Si para algún  $A \in F_n^\circ(X)$ ,  $\sigma(A) \in F_m^\circ(Y)$ , entonces podemos elegir un elemento  $q \in X \setminus A$  y así obtenemos que  $\sigma(A \cup \{q\})$  contiene propiamente a  $\sigma(A)$ . Pero esto es imposible puesto que  $\sigma(A)$  contiene  $m$  elementos y  $\sigma(A \cup \{q\}) \in F_m(Y)$ . Por tanto, podemos suponer que  $\sigma(A) \in F_{m-2}^\circ(Y)$  para cada  $A \in F_n^\circ(X)$ . Puesto que  $\sigma$  es un encaje ordenado, obtenemos que  $\sigma|_{F_n(X)}: F_n(X) \rightarrow F_{m-2}(Y)$  también es un encaje ordenado. Entonces por el Teorema 15,  $n \leq m - 2$ . Puesto que  $n \leq m - 2$ , podemos aplicar la hipótesis de inducción a  $\sigma|_{F_n(X)}$  para concluir que  $X$  puede encajarse en  $Y$ . Esto demuestra el paso inductivo y concluye la idea de la demostración del teorema. ■

Sólo nos falta determinar qué pasa cuando  $m \geq 2n$ . El siguiente ejemplo muestra que el hecho de que  $F_n(X)$  pueda encajarse ordenadamente en  $F_m(Y)$  para  $m \geq 2n$ , no es suficiente para afirmar que  $X$  puede encajarse en  $Y$ .

**Ejemplo 18.** Sean  $X$  y  $Y$  los continuos que se muestran en la figura 11, entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n(X)$  puede encajarse ordenadamente en  $F_{2n}(Y)$  y  $X$  no puede encajarse en  $Y$ .

Claramente,  $X$  no puede encajarse en  $Y$  dado que si existiera un encaje de  $X$  a  $Y$ , los puntos  $B$  y  $D$  sólo podrían ser enviados por éste a los puntos  $I$  y  $G$ , por ejemplo  $B$  a  $I$  y  $D$  a  $G$ , pero en el continuo  $Y$  no existe una circunferencia que contenga al punto  $I$ , mientras que en el continuo  $X$  el punto  $B$  si está contenido en una circunferencia. Para definir un encaje de  $F_n(X)$  en  $F_{2n}(Y)$ , primero necesitamos definir un encaje de  $F_1(X)$  a  $F_2(Y)$ . Para ello consideremos los homeomorfismos  $f_i: S_i \rightarrow S'_i, i = 1, 2$ , dados por

$$f_1(x, y) = (x + 1, y + 1) \text{ y } f_2(x, y) = (x + 1, y - 1).$$

Donde  $S_1$  y  $S_2$  son las circunferencias con centros  $A$  y  $E$  respectivamente, mientras que  $S'_1$  y  $S'_2$  son las circunferencias con centros  $F$  y  $H$ , respectivamente. Observemos que  $f_1((-1, 0)) = f_2((-1, 0)) = (0, 1)$ . Denotemos por  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección en la primera coordenada y consideremos las aplicaciones  $p_i = p \circ f_i: S_i \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora, definimos  $g: F_1(X) \rightarrow F_2(Y)$  por

$$g(\{z\}) = \begin{cases} \{f_1(z), (\frac{1}{2}(p_1(z) - 1), -1)\}, & \text{si } z \in S_1, \\ \{f_2(z), (\frac{1}{2}(p_2(z) + 1), -1)\}, & \text{si } z \in S_2, \\ \{(0, -p(z)), (\frac{1}{2}p(z), p(z))\}, & \text{si } z \in I_1, \\ \{(0, p(z)), (\frac{1}{2}p(z), -p(z))\}, & \text{si } z \in I_2. \end{cases}$$

Se puede probar que la función  $g$  así definida es continua e inyectiva. De hecho  $g$  posee una propiedad más fuerte que ser inyectiva: dado  $z \in X$ , existe  $w \in g(\{z\})$  tal que  $w$  no pertenece a ninguno de los conjuntos de la forma  $g(\{v\})$ , con  $v \neq z$ .

Ahora definimos  $h: F_n(X) \rightarrow F_{2n}(Y)$  por  $h(A) = \bigcup_{x \in A} g(\{x\})$ .

Puesto que la función unión es continua,  $h$  es una función continua,

véase 1.48 de (Nadler, 2006). Además, por la forma en la que definimos la función  $h$ , no es difícil probar que si  $A \subset B$ , entonces  $h(A) \subset h(B)$ . Finalmente, por la propiedad de  $g$  se puede probar que  $h$  también es inyectiva. Por lo tanto,  $h$  es un encaje ordenado.

Con la presentación de este ejemplo hemos respondido completamente a la cuestión que originó a esta sección.

### 5. Relación entre productos simétricos y otras estructuras topológicas

Dado un continuo  $X$  se define su cono como el espacio

$$X \times [0, 1] / X \times \{1\}.$$

El problema de determinar los continuos para los cuales su hiperespacio  $C(X)$  es homeomorfo a su cono ha sido ampliamente estudiado. Una discusión detallada al respecto puede revisarse en las Secciones 7 y 80 de (Illanes y Nadler, 1999). El caso en que  $X$  es hereditariamente descomponible fue resuelto completamente por S. B. Nadler, Jr., cuando demostró que existen exactamente ocho de esos continuos, los cuales se ilustran en la figura 12.

Figura 11. Continuos del ejemplo 18.

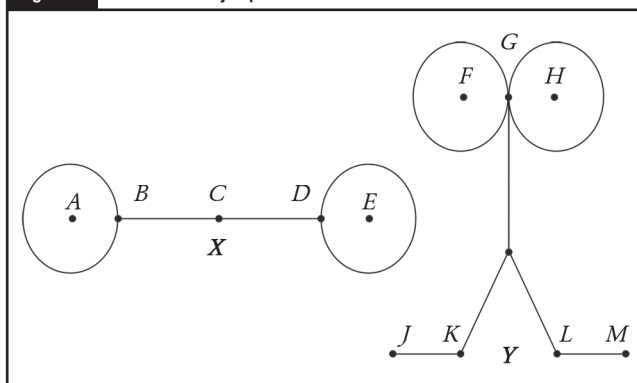
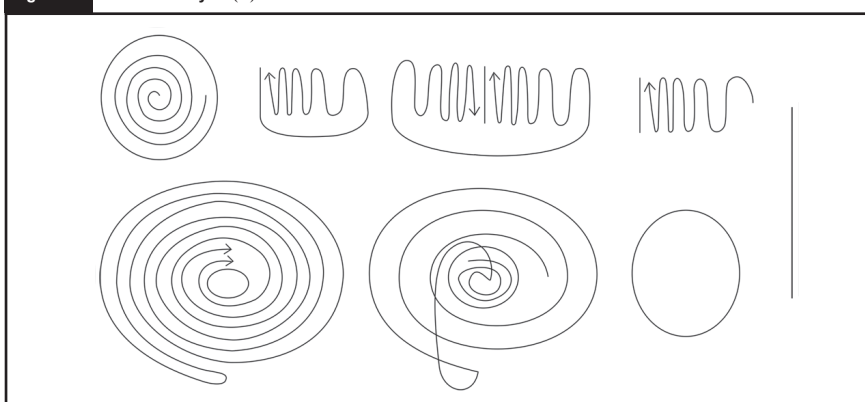


Figura 12. Continuos cuyo  $C(X)$  es un cono.





Los continuos para los que existe un continuo de dimensión finita  $Y$  tales que  $C(X)$  es homeomorfo al cono de  $Y$ , han sido descritos completamente en (Illanes, 1995). En (Illanes y López, 2002) se presenta una lista de tales continuos, cuando  $X$  es hereditariamente descomponible. El caso en que  $X$  no es hereditariamente descomponible fue completamente resuelto en (López, 2002).

Con respecto a productos topológicos, A. Illanes mostró que un continuo  $X$  tiene la propiedad de que  $C(X)$  es homeomorfo al producto de dos continuos no degenerados y de dimensión finita si y sólo si  $X$  es un arco o una curva cerrada simple, véase (Illanes, 1997).

Para finalizar comentamos la relación de los productos simétricos con las estructuras topológicas de conos topo-

lógicos y productos topológicos, al respecto se tienen los siguientes resultados que pueden ser consultados en (Castañeda, 2004):

**Teorema 19.** *Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $F_2(X)$  es homeomorfo al producto de dos continuos no degenerados si y sólo si  $X$  es un arco.*

**Teorema 20.** *Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $F_2(X)$  es homeomorfo al cono sobre un continuo  $Z$  si y sólo si  $X$  es un  $n$ -odo simple o un arco.*

Como podemos darnos cuenta los productos simétricos poseen muchas propiedades que los hacen muy atractivos y en los textos y artículos que incluimos en las referencias existen varias preguntas acerca de ellos que aún permanecen abiertas.

ergo

## Bibliografía

- Andablo, G.
- \_\_\_\_ (2002). "Ordered Embeddings of Hyperspaces", en Illanes, A.; S. Macías; W. Lewis (Ed.). *Continuum Theory* (Denton, TX, 1999), Lecture notes in Pure and Applied Mathematics, 230, Marcel Dekker, New York.
- \_\_\_\_ y Castañeda, E. (2008). "Un breve espacio para el mundo de los hiperespacios", *Ciencia ergo-sum*. Vol. 15, Núm. 3.
- \_\_\_\_ y Neumann, V. (2008). "Ordered Embeddings of Symmetric Products". *Houston J. Math.* Vol. 34, Núm. 1.
- Borsuk, K.
- \_\_\_\_ (1949). "On the Third Symmetric Potency of the Circumference". *Fund. Math.*
- \_\_\_\_ y Ulam, S. (1931). "On Symmetric Products of Topological Space", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37.
- Bott, R. (1952). "On the Third Symmetric Potency of  $S^1$ ". *Fund. Math.* 39.
- Castañeda, E.
- \_\_\_\_ (1998). "A Unicoheret Continuum Whose Second Symmetric Product is not Unicoherent", *Topology Proc.* Vol. 23.
- \_\_\_\_ (2002). "Embedding Symmetric Products in Euclidean Spaces", en A. Illanes; S. Macías; Lewis, W. (Ed.). *Continuum Theory* (Denton, TX, 1999). *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 230, Marcel Dekker, New York.
- \_\_\_\_ (2004). "Symmetric Products as Cones and Products", *Topology Proc.* Vol. 28, Núm. 1.
- García de la Rosa, R. (1995). "El hiperespacio de subconjuntos finitos de un continuo", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.
- Illanes, A.
- \_\_\_\_ (1985). "Multicoherence of Symmetric Products", *An. Inst. Mat. UNAM*, 25.
- \_\_\_\_ (1995). "Hyperspaces Homeomorphic to Cones", *Glasnik Mat.*, Vol. 30, Núm. 50.
- \_\_\_\_ (1997). "Hyperspaces Which are Products", *Topology Appl.* 79.
- \_\_\_\_ (2004a). "A Model for the Hyperspace  $C_2(S^1)$ ", *Questions and Answers General Topology*. Vol. 22, Núm. 2.
- \_\_\_\_ (2004b). *Hiperespacios de continuos*. Aportaciones Matemáticas: Textos, 28. Sociedad Matemática Mexicana, México.
- \_\_\_\_ y M. de J. López (2002). "Hyperspaces Homeomorphic to Cones II", *Topology Appl.* 126.
- \_\_\_\_ y Nadler Jr., S. B. (1999). *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Kuratowski K. (1966). *Topology*. Vol. I, Academic Press. New York.
- López, M. de J. (2002). "Hyperspaces Homeomorphic to cones", *Topology Appl.* 126.
- Macías, S.
- \_\_\_\_ (1999). "On Symmetric Products of Continua", *Topology and its Appl.* 92..
- \_\_\_\_ (2000). "Hiperespacios y productos simétricos". *Aportaciones Matemáticas. Comun.* 27.
- Nadler Jr., S. B.
- \_\_\_\_ (1978). *Hyperspaces of Sets*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y.
- \_\_\_\_ (1992). *Continuum Theory. An Introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York.
- \_\_\_\_ (2006). *Hyperspaces of Sets*. Aportaciones Matemáticas: Textos, 33. Sociedad Matemática Mexicana, México.
- Molski, R. (1957). "On Symmetric Products", *Fund. Math.* 44.