



Recepción: 28 de enero de 2008

Aceptación: 28 de mayo de 2008

\* Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,  
Universidad Michoacana de San Nicolás  
de Hidalgo.

Correo electrónico: gloria@fismat.umich.mx,  
gloria\_andablo@yahoo.com.mx

\*\* Facultad de Ciencias, Universidad  
Autónoma del Estado de México.

Correo electrónico: eca@uaemex.mx,  
eca1972@gmail.com

Los autores agradecen a Javier Sánchez  
Martínez su apoyo en la elaboración de  
las figuras. Así como a los árbitros por las  
observaciones y sugerencias que hicieron  
a este trabajo.

# Un breve espacio para el mundo de los hiperespacios

Gloria Andablo-Reyes\* y Enrique Castañeda-Alvarado\*\*

**Resumen.** La Teoría de Hiperespacios de Continuos es una línea de investigación en topología que apareció en la década comprendida entre 1910 y 1920 aproximadamente. En México se ha estado trabajando en esta área en los últimos 20 años. Este artículo presenta una breve introducción a la Teoría de Hiperespacios de Continuos, haciendo énfasis en sus modelos geométricos.

**Palabras clave:** continuo, hiperespacio, topología, métrica de Hausdorff.

## A Brief Space for the World of Hyperspaces

**Abstract.** Hyperspaces of Continuum is a line of research in topology that appeared in the decade of, approximately, 1910-1920. In Mexico, this area has been active for the last 20 years. This article gives a brief introduction to this theory, emphasizing its geometric models.

**Key words:** continuum, hyperspace, topology, Hausdorff metric.

## Introducción

La Teoría de los Hiperespacios tiene sus inicios con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris. Dado un espacio topológico  $X$ , el hiperespacio  $2^X$  de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de  $X$ , fue introducido por L. Vietoris en 1922. El hiperespacio de todos los subconjuntos no vacíos, cerrados y conexos de  $X$  es denotado por  $C(X)$  y considerado como subespacio de  $2^X$ . Vietoris probó hechos básicos acerca de  $2^X$ , por ejemplo: la compacidad de  $X$  implica la de  $2^X$  y viceversa (si  $X$  es un espacio  $T_1$ );  $2^X$  es conexo si y sólo si  $X$  lo es. Cuando  $X$  es un espacio métrico, a  $2^X$  se le puede dotar de la métrica de Hausdorff (definida por F. Hausdorff en 1914). Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Los primeros resultados acerca de hiperespacios de continuos localmente conexos se deben a L. Vietoris y T. Wazewski, quienes probaron en 1923 que la conexidad local de  $X$  es equivalente a la de  $2^X$  y a la de  $C(X)$ . De particular importancia para la estructura de los hiperespa-

cios de continuos son los resultados probados por K. Borsuk y S. Mazurkiewicz en 1931, donde mostraron que para un continuo  $X$ , los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$  son conexos por arcos. La tesis doctoral de J. L. Kelley en 1942, es una de las obras más importantes en la Teoría de los Hiperespacios, pues Kelley le dio una estructura sistemática a los resultados ya existentes hasta ese momento. Además, introdujo una variedad de tópicos y nuevos resultados en esta teoría, así como herramientas para el desarrollo de esta área.

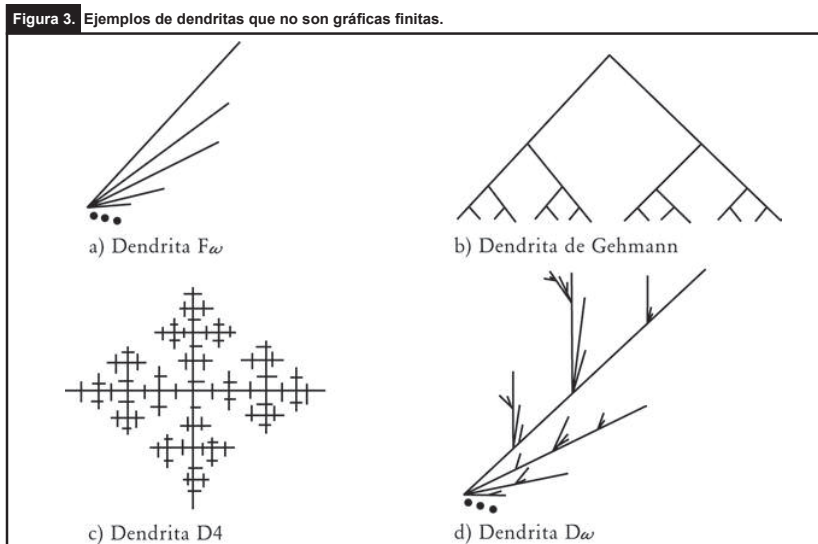
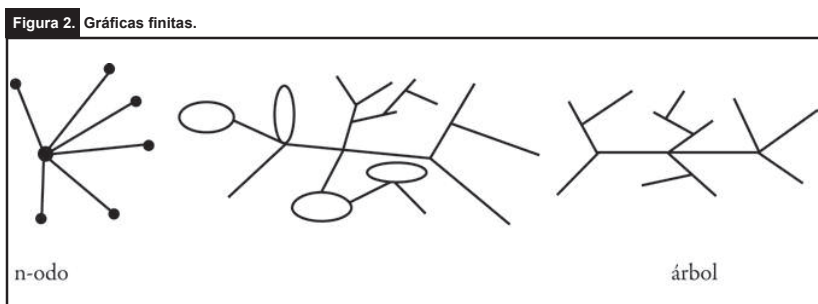
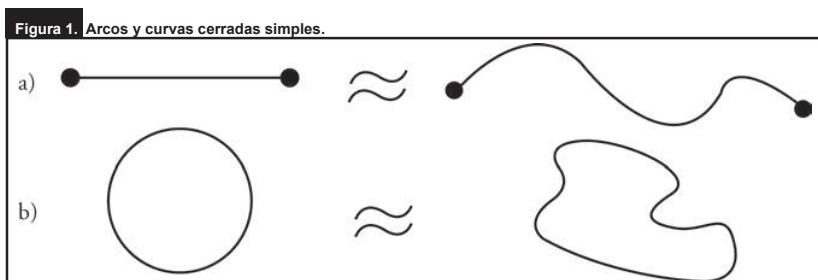
Como se puede observar, los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$  han sido ampliamente estudiados desde los inicios de la topología. Una excelente referencia donde se incluye casi todo lo que se conocía de hiperespacios hasta 1978 es el libro de Nadler, *Hyperspaces of sets* (1978), véase también (Nadler, 2006). En 1999, A. Illanes y S. B. Nadler Jr. escribieron una actualización de tal libro (Illanes y Nadler, 1999).

Existen otros hiperespacios, por ejemplo para cada número natural  $n$  denotemos por  $F_n(X)$  al hiperespacio formado por los subconjuntos de a lo más  $n$  puntos. A este hiperespacio se le llama el  $n$ -ésimo

producto simétrico de  $X$ . Y denotemos por  $C_n(X)$  al hiperespacio formado por los subconjuntos que tienen a lo más  $n$  componentes. Los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$  tienen propiedades que los hacen más agradables y más regulares que los productos simétricos, por ejemplo como ya mencionamos siempre son conexos por arcos, no tienen agujeros de ninguna clase, etc. Por esta razón su estudio ha sido más amplio. En este artículo, damos una breve introducción a la Teoría de Hiperespacios de Continuos, haciendo énfasis en sus modelos geométricos.

### 1. Un poco de continuos

Los espacios topológicos con los que trabajaremos serán los continuos. Enseguida presentamos ejemplos y algunas de sus propiedades.



El ejemplo más sencillo es el *arco*, el cual es homeomorfo al intervalo  $[0,1]$ . El siguiente ejemplo es una *curva cerrada simple*, la cual es homeomorfa a una circunferencia. Estos dos ejemplos se muestran en la Figura 1.

También podemos construir nuevos continuos uniendo algunos ya conocidos. Por ejemplo, consideremos  $n$  arcos que se intersectan en un único punto, el resultado es también un continuo al que llamaremos *n-odo simple*. Siguiendo esta idea podemos considerar la unión de una cantidad finita de arcos tales que, sean ajenos dos a dos o si se intersectan lo hagan en uno o en ambos puntos extremos. A este nuevo continuo lo llamaremos *gráfica finita*. Cuando una gráfica finita no contiene curvas cerradas simples es llamada *árbol*, véase la Figura 2.

Una generalización de los árboles son las *dendritas*, continuos localmente conexos y sin curvas cerradas simples. A primera vista podríamos pensar que las dendritas son muy simples, sin embargo no es así, algunos ejemplos de dendritas se muestran en la Figura 3.

En la Figura 3a) tenemos la dendrita que se obtiene al unir una cantidad numerable (tantos como números naturales) de arcos cuya longitud va disminuyendo y por lo tanto no es un árbol. A esta dendrita se le denota por  $F_\omega$ .

Otro continuo importante es la dendrita de Gehmann, la cual se muestra en la Figura 3b). Esta dendrita se construye empezando en la parte superior de la que salen dos segmentos, en cuyos extremos inferiores se colocan otros dos segmentos más pequeños. Este proceso se repite una infinidad de veces y al final del proceso se toma la cerradura de la unión de todos estos segmentos. Nótese que el conjunto de puntos que se añaden al tomar la cerradura constituye un conjunto de Cantor.

En la Figura 3c) presentamos la dendrita  $D_4$ , la cual se construye empezando con una cruz, luego usando cada uno de los segmentos de la cruz se construye otra cruz más pequeña. Debemos ser cuidadosos en los pasos para realizar este proceso, pues en cada uno nos debemos fijar en todos los segmentos que unen a dos puntos de ramificación del dibujo del paso anterior y con él se construye una cruz más pequeña. Al final, al igual que en la dendrita de Gehmann, se toma la cerradura de la unión de todas las cruces así construidas.

Dejamos al final la dendrita universal  $D_\omega$ , la cual se construye de forma análoga a  $D_4$ , pero ahora empezamos con  $F_\omega$  y a la mitad

de cada uno de los segmentos de esta dendrita se coloca una copia de  $F_\omega$ . En el siguiente paso se coloca otra copia de  $F_\omega$  en el punto medio de cada uno de los segmentos que quedaron en el paso anterior. Continuamos este proceso una cantidad numerable de veces y al final se toma nuevamente la cerradura de la unión de todos los segmentos. Los primeros pasos de esta construcción se muestran en la Figura 3d).

Otra clase importante de continuos son los llamados *dendroides*, continuos conexos por arcos que son hereditariamente unicoherentes. Se dice que un continuo es *unicoherente* si cada vez que lo podemos ver como la unión de dos subcontinuos propios la intersección de éstos es conexa. Decimos que un continuo es *hereditariamente unicoherente* si cada subcontinuo de él es unicoherente. En la Figura 4 se muestran algunos ejemplos de dendroides que no son dendritas.

Quizás en este momento estén pensando que todos los continuos que se pueden imaginar se obtienen como unión de arcos o circunferencias, pero no es así, existe una técnica para poder construir continuos que de hecho ni siquiera podemos visualizar, esta técnica se presenta en el siguiente:

**Teorema 1.** Si  $X$  es un continuo y  $A_1, A_2, \dots$  son subcontinuos anidados, es decir  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  entonces  $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots$  es un subcontinuo de  $X$ .

La prueba de este teorema no la incluimos porque no es la finalidad de este trabajo, pero puede consultarse en (Nadler, 1992: 6,7). Enseguida mostraremos cómo se utiliza en la construcción de nuevos continuos.

El continuo llamado Carpeta de Sierpiński es uno de ellos y se construye de la siguiente forma: comenzamos con  $C = [0, 1]^2$ , luego dividimos el cuadrado  $C$  en 9 cuadrados de lado  $1/3$  y quitamos el interior del cuadrado central. Llamamos  $A_1$  a la parte de  $C$  que nos quedó. Ahora realizamos la misma operación en cada uno de los 8 cuadrados restantes, es decir, dividimos cada uno de ellos en 9 cuadrados iguales y quitamos el interior del central. Al resultado le llamamos  $A_2$ . Hacemos lo mismo en cada uno de los cuadraditos restantes y continuamos este proceso una cantidad numerable de pasos.

Por el teorema anterior  $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  es un continuo y lo llamaremos Carpeta de Sierpiński. En la Figura 5 se muestra el

tercer paso de esta construcción. Este continuo tiene muchas propiedades muy interesantes, posiblemente la más importante es que todo continuo que esté en el plano y que tenga interior vacío se puede encajar en la Carpeta de Sierpiński.

Otros continuos que se pueden construir con esta técnica son los que se muestran en la Figura 6.

Aquí mostramos los primeros pasos del Triángulo de Sierpiński, un pariente muy cercano de la Carpeta de Sierpiński; la Curva de Menger, el hermano mayor de la Carpeta de Sierpiński y el Solenoide Diádico.

Figura 4. Ejemplos de dendroides que no son dendritas.

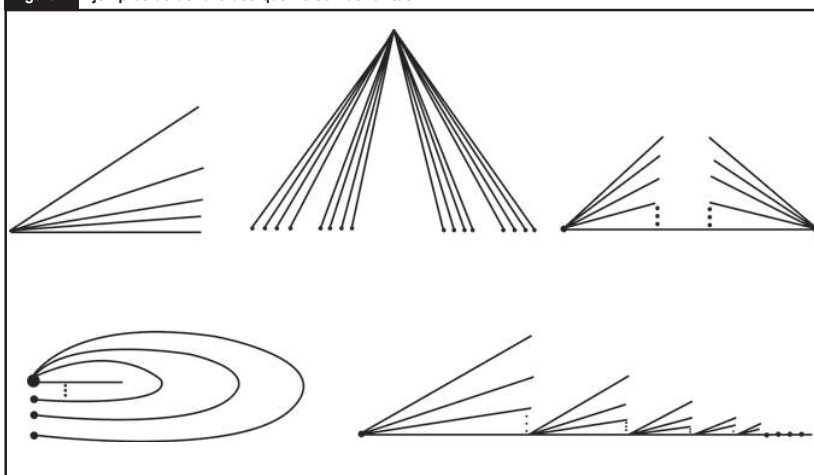


Figura 5. Carpeta de Sierpiński.

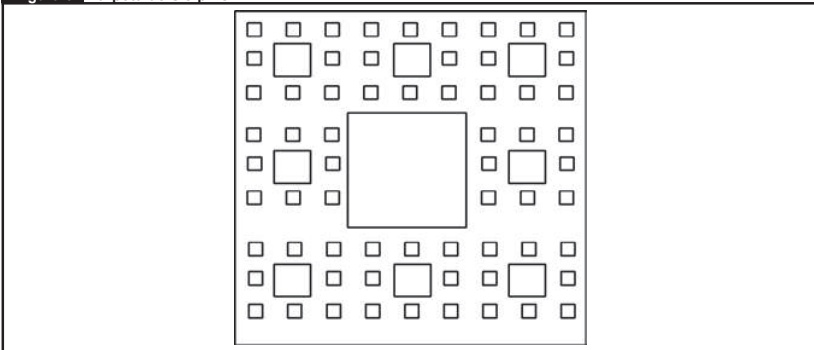
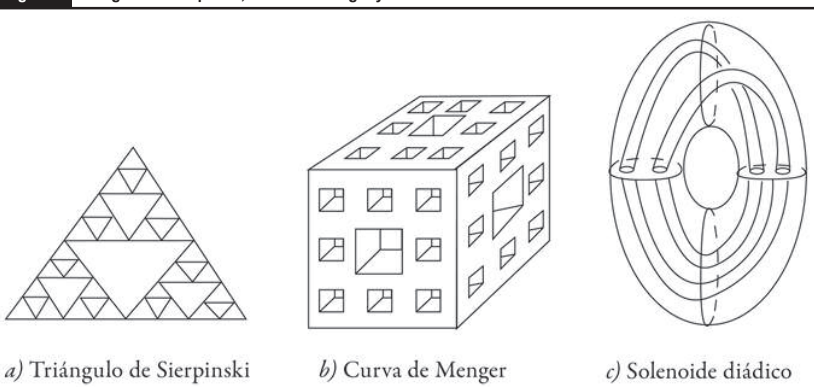


Figura 6. Triángulo de Sierpiński, Curva de Menger y Solenoide Diádico.



Este último se construye comenzando con un toro sólido (objeto en forma de dona), lo siguiente es considerar un toro sólido contenido en el primero y que además le dé dos vueltas a éste. Posteriormente consideramos otro toro sólido que esté metido en el segundo y le dé dos vueltas a éste. Continuando con este proceso podemos construir una cadena anidada de toros sólidos  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  cuya intersección es un continuo, como nos asegura el teorema anterior. Una propiedad importante de este continuo es que no puede expresarse como la unión de dos subcontinuos propios. Los continuos que tienen esta propiedad se llaman *continuos indescomponibles*. Otro continuo indescomponible es el que se conoce como el arco iris de Knaster. Mostramos los primeros pasos de la construcción de este continuo en la Figura 7.

Recordemos que  $X$  se puede encajar en  $Y$  si existe una función continua e inyectiva  $h$  de  $X$  en  $Y$  tal que  $X$  es homeomorfo a  $h(X)$ . Como ya pudieron darse cuenta todos los continuos de los que hemos hablado se pueden encajar en  $\mathbb{R}^n$ , para algún natural  $n$ . Entonces resulta natural preguntarnos si todos los continuos se pueden encajar en algún  $\mathbb{R}^n$ . La respuesta es no. Consideremos el cubo de Hilbert que se define como el producto topológico de una cantidad numerable de copias del intervalo  $[0, 1]$ , es decir  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots$  con la topología producto. Entonces  $Q$  es un continuo que no se puede encajar en  $\mathbb{R}^n$  para toda  $n$ , pero sí tiene la propiedad de que cualquier continuo que se puedan imaginar está contenido en él, como se demuestra en (Kuratowski, 1966: 241, 242). Para terminar esta sección vale la pena mencionar que una excelente referencia para un estudio muy completo de continuos es la obra de Nadler (1992).

## 2. Introducción a los hiperespacios

Sea  $X$  un continuo con métrica  $d$ . Los hiperespacios son ciertas colecciones de subconjuntos de  $X$  con alguna característica particular. Los hiperespacios más estudiados son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y cerrado}\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \\ F(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es un subconjunto finito de } X\} = \bigcup_{n=1} F_n(X), \end{aligned}$$

$$C_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene un número finito de componentes}\}.$$

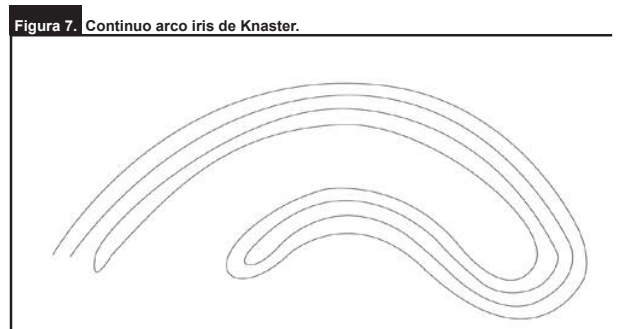


Figura 7. Continuo arco iris de Knaster.

Como pueden observar cada una de estas colecciones es un subconjunto de  $2^X$ , además  $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$  y  $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como todas estas colecciones están contenidas en  $2^X$ , es suficiente dotar a  $2^X$  de una métrica. Para definir esta métrica necesitamos mencionar primero algunos conceptos.

Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in X$  y  $A \in 2^X$ , la bola de radio  $\varepsilon$  centrada en  $p$  es:

$$B(\varepsilon, p) = \{x \in X : d(p, x) < \varepsilon\}.$$

y la nube de radio  $\varepsilon$  centrada en  $A$  es:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Obsérvese que  $B(\varepsilon, p) = N(\varepsilon, \{p\})$  y que  $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$ .

Ahora estamos listos para dotar  $2^X$  de una métrica a la que llamaremos métrica de Hausdorff. Dados  $A, B \in 2^X$ , se define

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

La idea intuitiva de esta métrica es que dos conjuntos están cercanos si casi están empalmados. La función  $H$  así definida es en efecto una métrica para el hiperespacio  $2^X$ , su demostración puede verse en los libros (Illanes, 2004: 22, 24) y (Illanes y Nadler, 1999: 11, 12). Esto quiere decir que  $2^X$  es un espacio métrico y por tanto también lo son sus subespacios. Así pues, todos los hiperespacios que definimos son espacios métricos con la métrica de Hausdorff y en consecuencia también espacios topológicos. De hecho, todos los hiperespacios que definimos resultan ser continuos como veremos más adelante. Más aún, aunque el continuo  $X$  no contenga arcos,  $2^X$ ,  $C(X)$  (Nadler, 1978: 63, 66) y los espacios  $C_n(X)$  (Macías, 2001), son también conexos por arcos.

Cabe mencionar que existe otra manera de dotar de una topología a  $2^X$ , la cual es conocida como la Topología de Vietoris (Illanes y Nadler, 1999: 3, 4). Se puede verificar que la topología de Vietoris es equivalente a la topología que induce la métrica de Hausdorff.

## 3. Modelos de $C(X)$

Un modelo geométrico para un hiperespacio  $\mathbb{H}$  (donde  $\mathbb{H}$  puede ser  $2^X$ ,  $C(X)$ ,  $F_n(X)$ ,  $C_n(X)$ ,  $F(X)$ ,  $C_\infty(X)$ ) de un continuo  $X$  es un espacio "conocido" que es homeomorfo a  $\mathbb{H}$  y cuyos elementos son puntos (en lugar de subconjuntos del continuo  $X$ ).

### 3.1. El arco

Comencemos con el modelo del continuo más sencillo, el arco. Concretamente mostraremos que el hiperespacio  $C([0, 1])$  es una *2-celda*, esto es, homeomorfo a  $[0, 1]^2$ . Los subcontinuos de  $[0, 1]$  son los subintervalos de la forma  $[a, b]$ , donde  $0 \leq a \leq b \leq 1$ . Observen que el intervalo  $[a, b]$  queda determinado por su punto medio y por su longitud, de manera que podemos definir la función  $h: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mediante:

$$h([a,b]) = \left(\frac{a+b}{2}, b-a\right).$$

La imagen de  $C([0,1])$  bajo  $h$  es la región triangular  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  que se muestra en la Figura 8, cuyos vértices son los puntos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $(1/2,1)$ .

No es difícil probar que  $h$  es inyectiva y que  $h(C([0,1]))=T$ . Además se puede probar que  $h$  es una función continua y dado que  $C(X)$  es compacto (véase el Teorema 9) tenemos que  $h$  es un homeomorfismo sobre su imagen. Con esto hemos probado que  $C([0,1])$  es una 2-celda. Notemos que los subcontinuos de  $[0,1]$  que contienen al 0 quedan representados en el triángulo por el segmento que une a los puntos  $(0,0)$  y  $(1/2,1)$ . Los subcontinuos de  $[0,1]$  que contienen al 1 quedan representados en el triángulo por el segmento que une a los puntos  $(1,0)$  y  $(1/2,1)$ . Además los subcontinuos que constan de un único punto quedan representados en la base del triángulo.

### 3.2. La curva cerrada simple

Construiremos ahora un modelo geométrico para  $C(X)$  cuando  $X$  es una curva cerrada simple. Podemos suponer que  $X$  es la circunferencia de radio 1:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Mostraremos que  $C(S^1)$  es una 2-celda cuya frontera corresponde a los subcontinuos que constan de un único punto.

Definiremos un homeomorfismo  $h$  de  $C(S^1)$  en el disco unitario

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Comencemos definiendo  $h(A)$  cuando  $A$  es cualquier arco de  $S^1$ . Nuevamente  $A$  queda determinado por su longitud  $l(A)$  y por su punto medio  $m(A)$ . Designemos por  $h(A)$  al punto que está en el segmento de línea recta que une al origen del plano con el punto medio  $m(A)$  y que está a una distancia  $\frac{l(A)}{2\pi}$  de  $m(A)$  (véase la Figura 9).

En otras palabras, si consideramos a  $m(A)$  como un vector, entonces

$$h(A) = \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right)m(A)$$

Ahora lo único que nos hace falta es definir  $h$  para los subcontinuos de  $S^1$  que no son arcos, es decir, para los subcontinuos que constan de un único punto y para la circunferencia misma. Entonces para completar la definición de  $h$  hagamos  $h(\{x\})=x$  y  $h(S^1)=(0,0)$ . Así tenemos

definida  $h(A)$  para toda  $A \in C(S^1)$ . Se puede demostrar que  $h$  es un homeomorfismo de  $C(S^1)$  sobre el disco  $D$ , y claramente los subcontinuos que constan de un sólo punto están representados en la frontera de  $D$ .

### 3.3. El tríodo simple

Un tríodo simple  $T$  es un continuo que es la unión de tres segmentos unidos por un punto, el cual es punto extremo de cada uno de los segmentos. Podemos considerar que  $T$  es el espacio que se obtiene al unir los segmentos  $\theta e_1, \theta e_2, \theta e_3$ , donde  $\theta$  es el origen de  $\mathbb{R}^3$ ,  $e_1=(1,0,0)$ ,  $e_2=(0,1,0)$ ,  $e_3=(0,0,1)$ . Un elemento de  $C(T)$  que contiene a  $\theta$  es de la forma  $A=\theta(ae_1) \cup \theta(be_2) \cup \theta(ce_3)$  donde  $a,b,c \in [0,1]$ . Observemos que la función que a cada subcontinuo  $A=\theta(ae_1) \cup \theta(be_2) \cup \theta(ce_3)$  de  $C(T)$  le asocia una terna  $(a,b,c) \in [0,1]^3$  es una función continua e inyectiva. Así,  $C(T)$  contiene una copia topológica de  $[0,1]^3$  a la que hay que unirle tres triángulos que corresponden a los subcontinuos del tríodo simple que están contenidos en alguno de sus segmentos. El modelo geométrico completo de  $C(T)$  se muestra en la Figura 10.

También si  $X$  es un  $n$ -odo simple, se puede probar que  $C(X)$  contiene un hipercubo de la forma  $[0,1]^n$ . Con esto nos podemos

Figura 8. Modelo para  $C([0,1])$ .

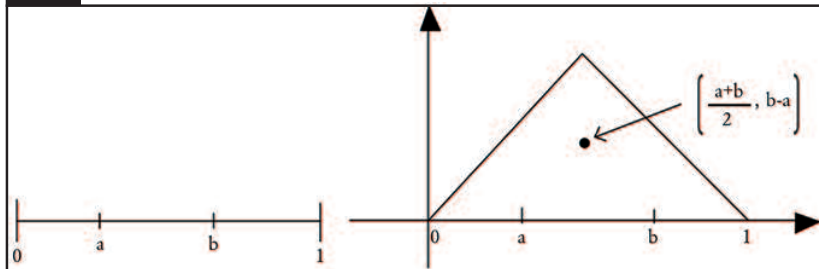


Figura 9. Modelo para  $C(S^1)$ .

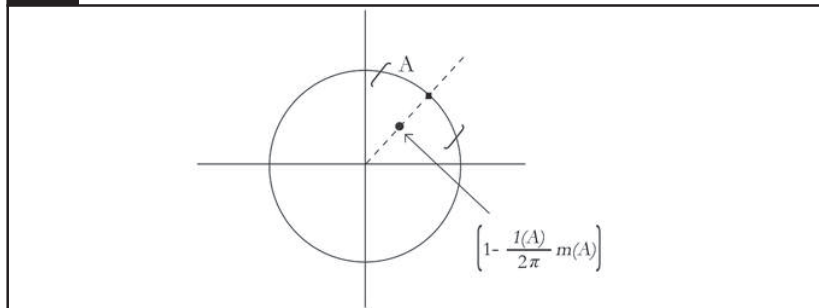
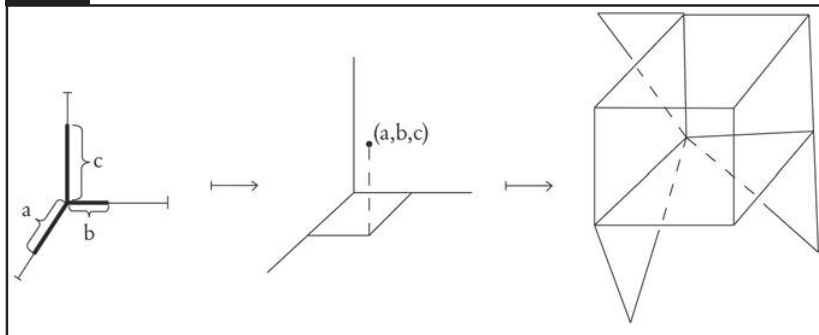


Figura 10. Modelo para  $C(T)$ .



convencer de que existen pocos continuos  $X$  para los cuales su hiperespacio  $C(X)$  tiene un modelo geométrico que se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ . De hecho, dado que una 2-celda contiene  $n$ -odos para toda  $n$ , se concluye que si  $X=[0,1]^2$ , entonces  $C(X)$  contiene celdas de cualquier dimensión. Más aún, en 1977 Curtis y Schori probaron que  $C(X)$  es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Se sabe también que si  $X$  es una gráfica finita y  $C(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $X$  no contiene 4-odos ni subcontinuos que tengan la forma de la letra H. Por tal razón, las únicas gráficas para las cuales su hiperespacio  $C(X)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$  se muestran en la Figura 11.

Dejamos que el lector se convenza de que el hiperespacio de la gráfica llamada paleta es homeomorfo al modelo que se muestra en la Figura 12.

Existen más continuos para los cuales se puede construir un modelo geométrico para su hiperespacio  $C(X)$ , pero son más sofisticados. Por ejemplo, se sabe que para el arco iris de Knaster (Figura 7) su hiperespacio  $C(X)$  es homeomorfo a su cono. Todos estos modelos que hemos presentado se pueden visualizar, pero también existen otros muy precisos que no. Por ejemplo se sabe que  $C([0,1]^2)$  es homeomorfo al cubo de Hilbert. Más aún si  $X$  es un continuo localmente conexo en el que todos sus arcos tienen interior vacío, entonces  $C(X)$  es homeomorfo al cubo de Hilbert véase (Illanes y Nadler, 1999: 75, 96).

Es posible que se pregunten por qué no hacemos modelos geométricos para los hiperespacios  $2^X$ , la respuesta es que para ningún continuo se tiene un modelo que podamos visualizar, pues si  $X$  es un continuo localmente conexo, entonces  $2^X$  es un cubo de Hilbert. De hecho para cualquier continuo  $X$  se tiene que  $2^X$  contiene cubos de Hilbert véase (Illanes y Nadler, 1999: 75, 96).

#### 4. Propiedades básicas de los hiperespacios

En esta sección vamos a probar que los hiperespacios poseen propiedades topológicas tales como conexidad y compacidad, lo que los convierte a su vez en continuos, como ya lo habíamos mencionado.

Vamos a probar primero que  $2^X$  es conexo. Para ello necesitamos algunos resultados previos que demostramos a continuación.

**Lema 2.** El hiperespacio  $F(X)$  es denso en  $2^X$ .

**Demostración.** Recordemos que  $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ . Deseamos probar que toda bola alrededor de cualquier elemento de  $2^X$  interseca a  $F(X)$ . Elijamos cualquier elemento  $A \in 2^X$  y tomemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $A$  es un subconjunto cerrado del compacto  $X$ ,  $A$  es compacto. Puesto que la familia  $\{B(\varepsilon, a) : a \in A\}$  es una cubierta abierta de  $A$ , existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$  tales que  $A \subset B(\varepsilon, a_1) \cup \dots \cup B(\varepsilon, a_n) = N(\varepsilon, \{a_1, \dots, a_n\})$ .

Además es claro que  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A \subset N(\varepsilon, A)$ . Por lo tanto,  $H(A, \{a_1, \dots, a_n\}) < \varepsilon$ . Así,  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset B(\varepsilon, A) \cap F(X)$ . Por lo que  $F(X)$  es denso en  $2^X$ . ■

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en (García de la Rosa, 1995: 17), el caso particular  $X = \mathbb{R}$  se demuestra en (Munkres, 1975: 121).

**Lema 3.** Sea  $X^n$  el producto topológico de  $n$  copias del continuo  $X$ . Entonces la métrica  $D: X^n \times X^n \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}$ , donde  $d$  es una métrica para  $X$ , induce la topología producto.

**Lema 4.** Sea  $X^n$  el producto topológico de  $n$  copias del continuo  $X$ . Entonces la función  $g: X^n \rightarrow F_n(X)$  definida por  $g(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$  es continua y suprayectiva.

**Demostración.** Por el lema 3, podemos considerar a  $X^n$  dotado con la métrica:

$$D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}$$

Figura 11. Continuos localmente conexos para los cuales se puede visualizar  $C(X)$ .

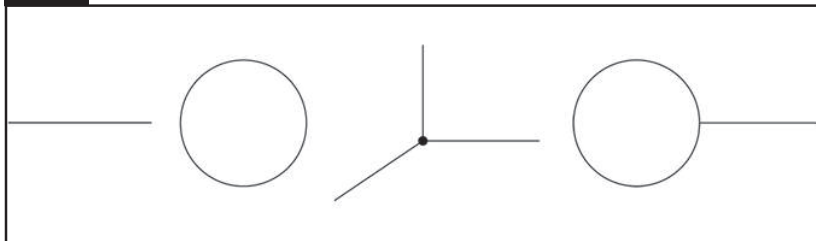
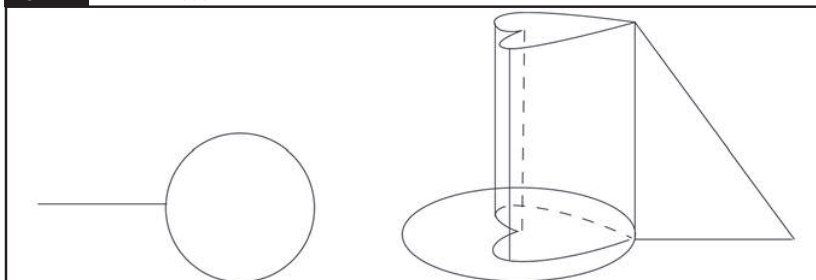


Figura 12. Modelo de  $C(X)$  para la Paleta.



Vamos a probar no sólo que  $g$  es continua, sino que es uniformemente continua. Para ello elegimos  $\varepsilon > 0$  y tomamos  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$  tales que:

$$D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\} < \varepsilon$$

Así,  $d(x_i, y_i) < \varepsilon$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo que:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset N(\varepsilon, \{y_1, \dots, y_n\}) \text{ y } \{y_1, \dots, y_n\} \subset N(\varepsilon, \{x_1, \dots, x_n\}).$$

De manera que  $H(g(x_1, \dots, x_n), g(y_1, \dots, y_n)) < \varepsilon$ . Por tanto  $g$  es uniformemente continua. Para verificar que  $g$  es suprayectiva es suficiente observar que todo elemento de  $F_n(X)$  se

puede escribir de la forma  $(x_1, \dots, x_n)$ , pues si tenemos un conjunto de menos de  $n$  elementos podemos repetir algunos y esto no altera al conjunto. ■

**Corolario 5.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el hiperespacio  $F_n(X)$  es conexo.

**Demostración.** Por el Lema 4, el hiperespacio  $F_n(X)$  es la imagen del espacio conexo  $X^n$  bajo una función continua. Luego, es conexo. ■

Otro resultado que se obtiene del Lema 4 de manera análoga a como se obtuvo el Corolario 5.

**Corolario 6.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el hiperespacio  $F_n(X)$  es compacto.

Ahora estamos en condiciones de probar que  $2^X$  es conexo.

**Teorema 7.** El hiperespacio  $2^X$  es conexo.

**Demostración.** Puesto que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_1(X) \subset F_n(X)$  y el hiperespacio  $F_n(X)$  es conexo, tenemos que el hiperespacio  $F(X) = \bigcup \{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$  es la unión de conjuntos conexos cuya intersección es  $F_1(X)$ . Por tanto  $F(X)$  es conexo. Luego, por el Lema 2, la cerradura de  $F(X)$  es  $2^X$ , de manera que  $2^X$  también es conexo. ■

Existen varias demostraciones del siguiente resultado

**Teorema 8.** El hiperespacio  $2^X$  es compacto.

Sin embargo, casi todas estas demostraciones resultan muy técnicas (Nadler, 2006: 5, 7), (Illanes y Nadler, 1999: 18, 19). Una demostración que utiliza herramienta menos sofisticada puede encontrarse en (Illanes, 2004: 66, 69). Como consecuencia de los teoremas 7 y 8 se tiene que el hiperespacio  $2^X$  es un continuo.

A continuación vamos a demostrar que  $C(X)$  también es un continuo. Para ello probaremos primero que es compacto.

**Teorema 9.** El hiperespacio  $C(X)$  es compacto.

**Demostración.** Como ya probamos que  $2^X$  es compacto, es suficiente probar que  $C(X)$  es cerrado en  $2^X$ . Tomemos una sucesión convergente  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $C(X)$  y supongamos que  $\lim A_n = A$ , con  $A \in 2^X$ . Vamos a demostrar que  $A \in C(X)$ . Para esto necesitamos probar que  $A$  es un subconjunto conexo de  $X$ . Supongamos que  $A$  no es conexo, entonces existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos  $G$  y  $K$  de  $X$  tales que  $A = G \cup K$ . Sea  $\varepsilon = \inf \{d(p, q) : p \in G \text{ y } q \in K\}$ . Como  $G$  y  $K$  son compactos y ajenos, tenemos que  $\varepsilon > 0$ . Puesto que  $\lim A_n = A$ , para el número  $\varepsilon/2$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$H(A_n, A) < \varepsilon/2. \text{ Así,}$$

$$A \subset N(\varepsilon/2, A_n) \text{ y } A_n \subset N(\varepsilon/2, A) = N(\varepsilon/2, G) \cup N(\varepsilon/2, K).$$

Por la elección del número  $\varepsilon$ , los conjuntos  $N(\varepsilon/2, G)$  y  $N(\varepsilon/2, K)$  son ajenos y abiertos. Puesto que  $A_n$  es conexo, debe estar contenido en sólo uno de estos conjuntos. Supongamos, por ejemplo, que  $A_n \subset N(\varepsilon/2, G)$ . De este modo,

$$K \subset A \subset N(\varepsilon/2, A_n) \subset N(\varepsilon, G).$$

Pero, por la elección del número  $\varepsilon$ , los conjuntos  $K$  y  $N(\varepsilon, G)$  son ajenos, por lo que  $K$  debe ser vacío. Esto contradice la elección de  $K$ . De modo que  $A$  es conexo. Por tanto  $C(X)$  es cerrado en  $2^X$  y así es compacto. ■

La conexidad de  $C(X)$  se deriva del hecho de que éste es conexo por arcos véase (Nadler, 2006: 51). Por tanto, el hiperespacio  $C(X)$  también es un continuo.

Finalmente, como consecuencia de los resultados anteriores tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 10.** El hiperespacio  $C_n(X)$  es un continuo.

**Demostración.** Puesto que  $C(X)$  es un continuo, se puede demostrar que la función  $G: (C(X))^n \rightarrow C_n(X)$  dada por  $G(A_1, \dots, A_n) = \{A_1, \dots, A_n\}$  es continua y suprayectiva (la demostración es análoga a la del lema 4). Por tanto,  $C_n(X)$  es conexo y compacto. Luego, es un continuo. ■

Como prometimos en un principio, el objetivo principal de este trabajo es introducirlos al mundo de los hiperespacios mediante la presentación de sus modelos geométricos. Además de las propiedades que aquí mostramos existen muchas otras muy interesantes que se pueden consultar en los libros que se sugieren en las referencias.

Por otra parte, algunas propiedades de los hiperespacios  $C_n(X)$  y  $C_{\infty}(X)$  pueden consultarse en el libro (Illanes, 2004) y en los artículos (Illanes, 2004), (Macías, 2000a), (Macías, 2000b), (Macías, 2001) y (Orozco, 2006). Finalmente, algunos resultados importantes sobre productos simétricos ( $F_n(X)$ ) se encuentran en (Andablo, 2002), (Andablo y Neumann, 2008), (Castañeda, 2002), (Castañeda, 2004), (Macías, 1999) y (Macías, 2000). Por último queremos comentar que existe una amplia literatura respecto a los hiperespacios, en las referencias sólo incluimos algunos artículos recientes sobre todo de autores mexicanos.

obta

## Bibliografía

Andablo, G. (2002). "Ordered Embeddings of Hyperspaces". Illanes, A.; S. Macías y W. Lewis (Eds.). *Continuum Theory* (Denton,

*TX*, 1999), *Lecture notes in Pure and Applied Mathematics*. 230, Marcel Dekker, New York, pp. 51-65.

Andablo, G. y Neumann, V. (2008). "Ordered Embeddings of Symmetric Products", *Houston J. Math.*, Vol. 34, Núm. 1, pp. 115-122.

- Castañeda, E. (2002). "Embedding Symmetric Products in Euclidean Spaces". Illanes, A.; S. Macías y W. Lewis (Eds.). *Continuum Theory (Denton, TX, 1999), Lecture notes in Pure and Applied Mathematics*. 230, Marcel Dekker, New York, pp. 137-142.
- Castañeda, E. (2004). "Symmetric Products as Cones and Products", *Topology Proc.* Vol. 28, Núm. 1, pp. 55-67.
- García de la Rosa, R. (1995). "El hiperespacio de subconjuntos finitos de un continuo", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.
- Illanes, A.  
 \_\_\_\_\_ (2004). "A Model for the Hyperspace  $C_2(S^1)$ ". *Questions and Answers General Topology*. Vol. 22, Núm. 2, pp. 117-130.  
 \_\_\_\_\_ (2004). *Hiperespacios de continuos*. Aportaciones Matemáticas: Textos, 28. Sociedad Matemática Mexicana, México.
- \_\_\_\_\_ y Nadler Jr. S. B. (1999). *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Kuratowski K. (1966). *Topology*. Vol. I, Academic Press. New York.
- Macías, S.  
 \_\_\_\_\_ (1999). "On Symmetric Products of Continua", *Topology and its Appl.* 92, pp. 173-182.  
 \_\_\_\_\_ (2000a). "On the hyperspaces  $C_n(X)$  of a continuum X II", *Topology Proc.* 25, pp. 255-276.  
 \_\_\_\_\_ (2000b). "Hiperespacios y productos simétricos", *Aportaciones Matemáticas, Comun.* 27, pp. 211-223.  
 \_\_\_\_\_ (2001). "On the Hyperspaces  $C_n(X)$  of a Continuum X", *Topology and its Appl.* 109, pp. 237-256.
- \_\_\_\_\_ (2006). "Correction to the Paper: On the Hyperspaces  $C_n(X)$  of a Continuum X II", *Topology Proc.* 30, No. 1, pp. 335-340.
- Munkres J. (1975). *Topology, a First Course*. Prentice-Hall.
- Nadler Jr., S. B.  
 \_\_\_\_\_ (1978). *Hyperspaces of Sets*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York.  
 \_\_\_\_\_ (1992). *Continuum Theory, An Introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York.  
 \_\_\_\_\_ (2006). *Hyperspaces of Sets*. Aportaciones Matemáticas: Textos, 33. Sociedad Matemática Mexicana, México.
- Orozco, F. (2006). "Conexidad en pequeño y conexidad local en  $C_\infty(X)$ ", *Ciencia ergo sum*, Vol. 13, Núm. 1, pp. 75-80.

POBLACIÓN

## Centro de Investigación y Estudios Avanzados de la Población UAEM

**Migración laboral internacional como estrategia de estabilización económica en hogares de México y América Central**

Germán A. Zárate-Hoyos

¿Son las remesas una fuente de ahorro o inversión en México? Un análisis regional del comportamiento de los hogares

Jorge Eduardo Mendoza y Elisoa Díaz González

**Hogares y remesas en los estados de Guerrero, Hidalgo y Nayarit**

Germán Vega Briones, Liliana Huerta Rodríguez, María del Carmen Juárez y Alejandro Díaz Garay

**Determinantes de la migración en Brasil: polarización regional y trampas de pobreza**

André Braz Golgher, Carlos Henrique Rosa y Ari Francisco de Araújo Junior

**Urbanización y migración entre ciudades, 1995-2000. Un análisis multinivel**

Enrique Pérez Campuzano y Clemencia Santos Cerquera

**Chiapas: territorio de inmigración, emigración y tránsito migratorio**

María Eugenia Anguiano Téllez

**Mortalidad por causas externas en Medellín y Tijuana**

Doris Cardona Arango, David F. Fuentes Romero e Irma A. González Hernández

**Nueva Época Año 14 No. 56**

**abril-junio de 2008**