UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: “RECTA EN EL PLANO”

ELABORÓ: M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: SEPTIEMBRE DE 2016

UNIDAD DE APRENDIZAJE
"GEOMETRIA ANALITICA"

UNIDAD DE COMPETENCIA II:
"GEOMETRIA ANALITICA EN EL PLANO"

2.1.- Recta en el plano.
2.1.1.- Ecuaciones vectorial y cartesiana.
2.1.2.- Puntos en una recta.
2.2.- Intersección de rectas.
2.3.- Distancias desde un punto hasta una recta y distancia entre dos rectas.
2.4.-Familias de rectas.

OBJETIVO

1. Obtener las ecuaciones cartesianas de una recta. Obtener las ecuaciones vectorial y cartesiana de una recta, generar puntos de una recta, determinar la pertenencia de puntos a rectas, obtener la intersección entre dos rectas, obtener la distancia de un punto a una recta y la distancia entre dos rectas, y subdividir un segmento.

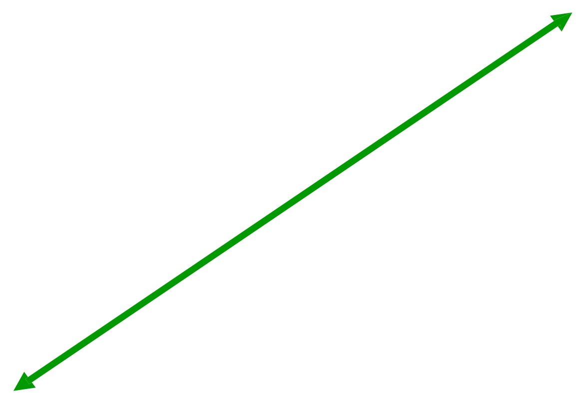
DEFINICION

Geométricamente podemos decir que una línea recta es una sucesión continua e infinita de puntos alineados en una misma dirección; analíticamente, una recta en el plano está representada por una ecuación de primer grado con dos variables, x e y.

También se define como el lugar geométrico de todos los puntos que tomados de dos en dos, poseen la misma pendiente.

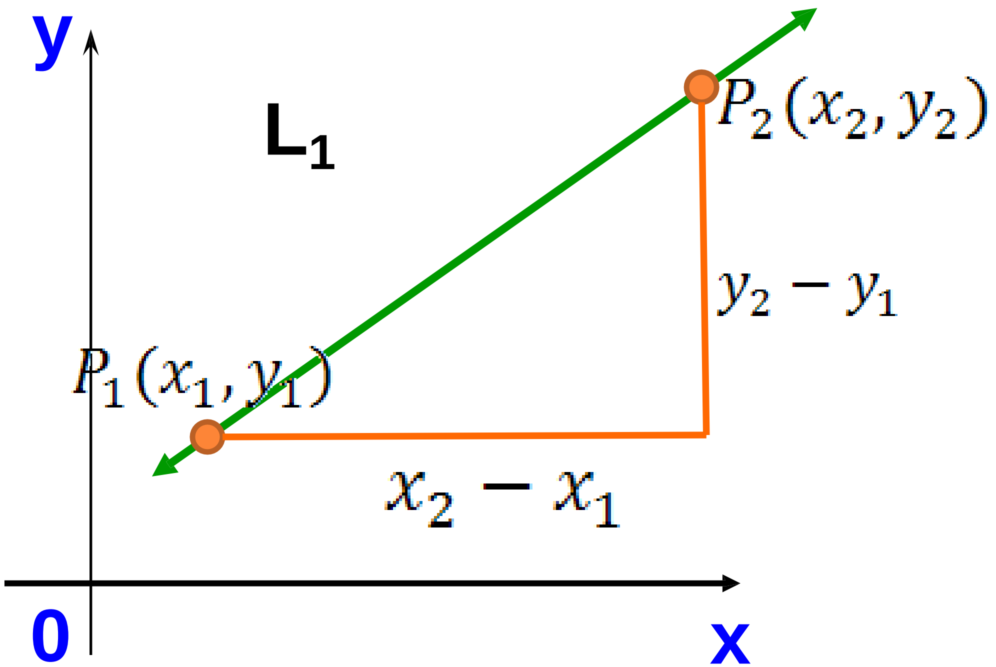
Ejemplos

- $5x + 6y + 8 = 0$
- $y = 4x + 7$
- $6x + 4y = 7$



REPRESENTACIÓN GRAFICA DE LA RECTA

Pendiente de la recta L



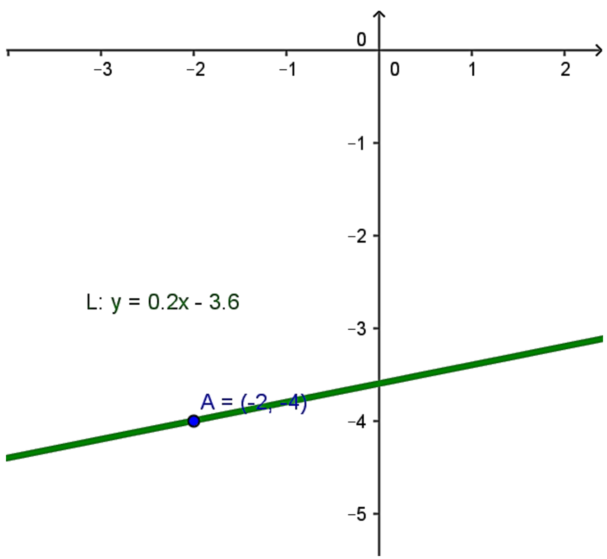
$$m = \frac{elevación}{recorrido} = \frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ECUACIÓN EN SU FORMA PUNTO-PENDIENTE

La recta que pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene por pendiente dado m, tiene por ecuación.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo1: Sea *m=1/5 y A(-2, -4), la pendiente y* un punto respectivamente de una recta. Verifique que su ecuación en su forma punto pendiente es: *5y-x+18=0*

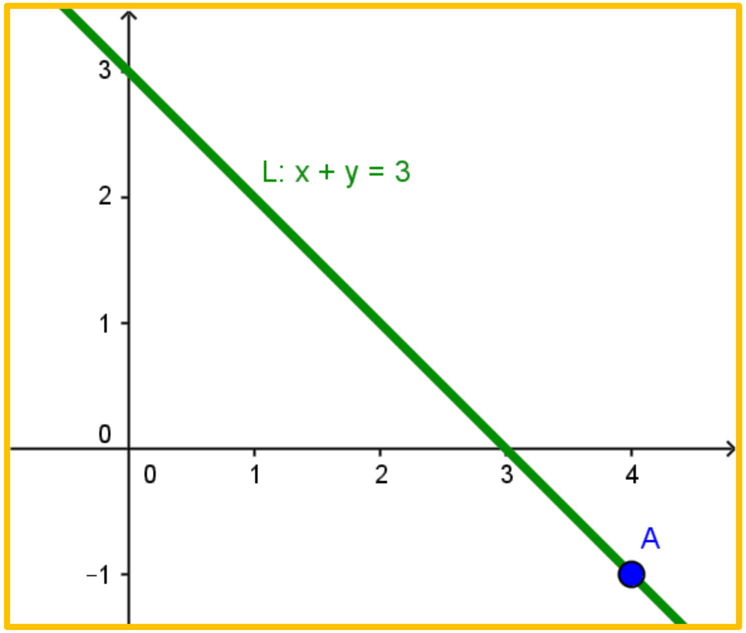


ECUACIÓN EN SU FORMA PUNTO-PENDIENTE

La recta que pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene por pendiente dado m, tiene por ecuación.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

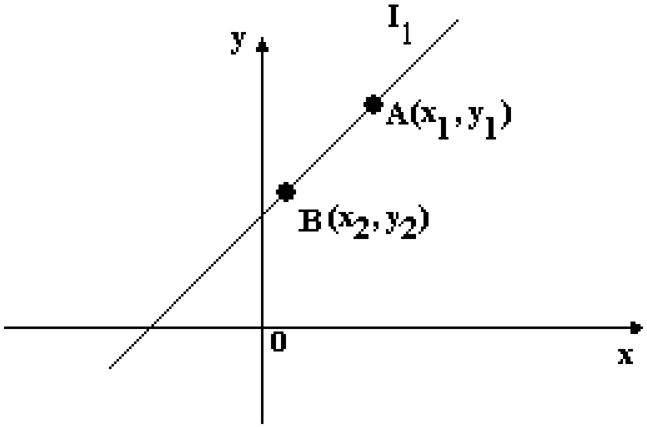
Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, -1) y tiene pendiente de -1.



ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

A partir de la pendiente *m y de la ecuación de la* recta en forma de punto pendiente.

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

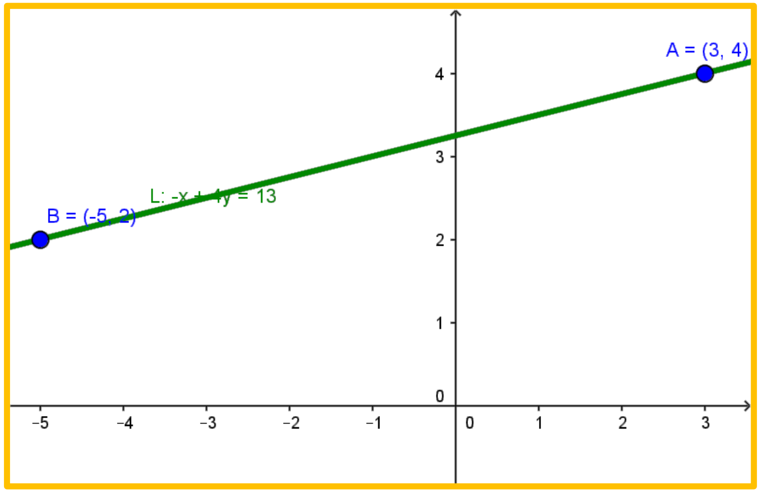


Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por (3, 4) y (-5, 2).

$$y - 4 = \frac{(2-4)}{(-5-3)}(x - 3)$$

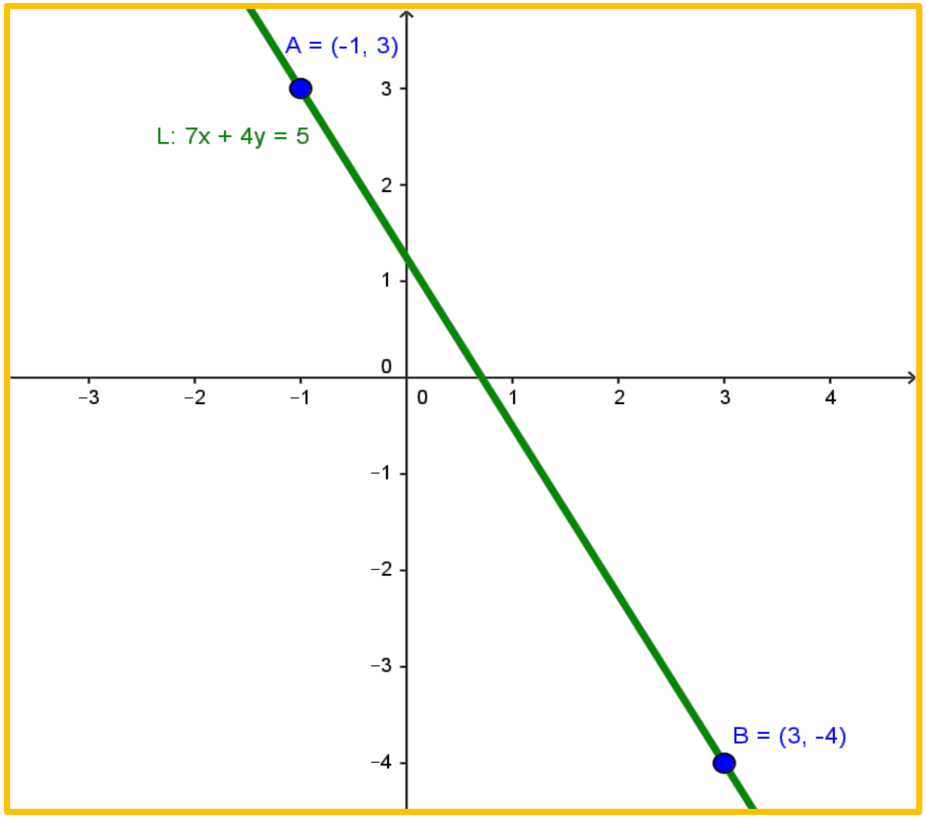
$$4y - 16 = x - 3$$

$$x - 4y + 13 = 0$$



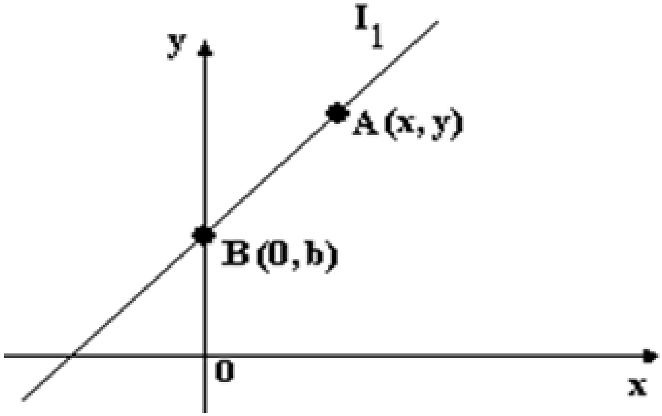
ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Ejemplo: Sean A(-1, 3) y B(3, -4), dos puntos que pertenecen a una misma recta. Verifique que la ecuación de ésta es 4y+7x-5=0



ECUACIÓN PENDIENTE DADA Y ORDENADA AL ORIGEN.

Considera un recta que pasa por los puntos A(x, y) y B(0,b), como se muestra en la figura.



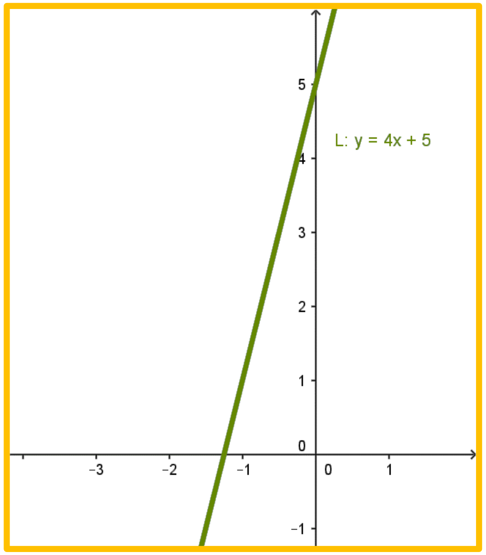
Pendiente $m = \frac{(b-y)}{(0-x)}$

Despejando y ordenando

$y = mx + b$

Ejemplo: Hallar y graficar la ecuación de la recta que tiene pendiente $\mathrm{m} = 4$ y $b = 5$

Solución: $y = 4x + 5$

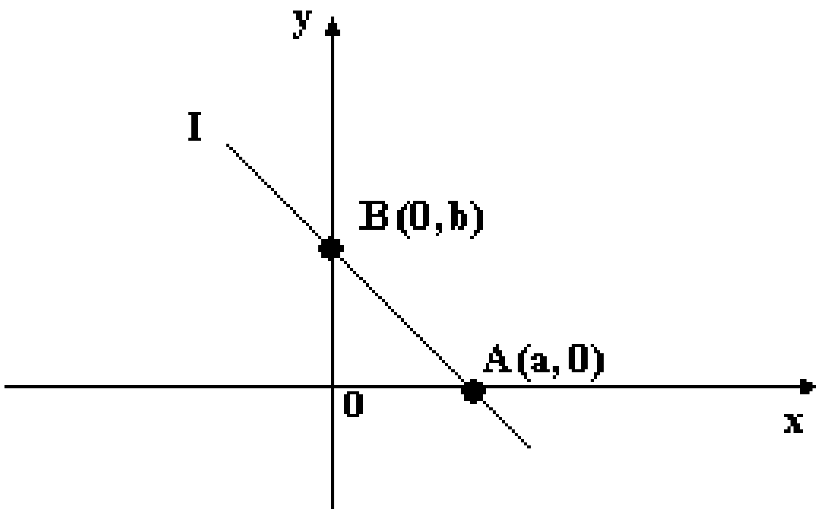


Ejercicio: Sean $\mathrm{m} = -\frac{2}{5}$ y $b = -10$

Hallar la ecuación de la recta

ECUACIÓN DE LA RECTA EN FORMA SIMÉTRICA

La siguiente figura ilustra una recta que pasa por los puntos A(a,0) y B(0,b).



Donde $m = \frac{(b-0)}{(0-a)}$; $m = \frac{-b}{a}$

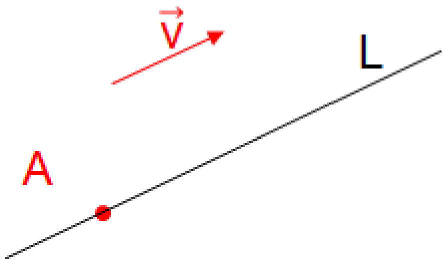
Al sustituir m en la ecuación de la recta en su forma ordenada al origen $y = mx + b$, tenemos:

$y = \frac{-b}{a}x + b$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Esta es la **ecuación simétrica de la recta.**

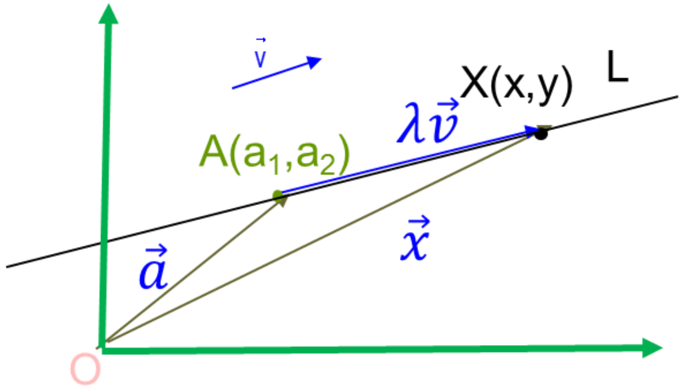
ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA.

Para determinar la ecuación de una recta L que pasa por el punto A y tiene por dirección **v** (vector director de la recta)



Entonces, sea A el punto de coordenadas $A(a_1,a_2)$ y **v** un vector de componentes (v_1,v_2). Utilizamos la ecuación siguiente:

$$(x,y) = (a_1,a_2) + \lambda(v_1,v_2)$$

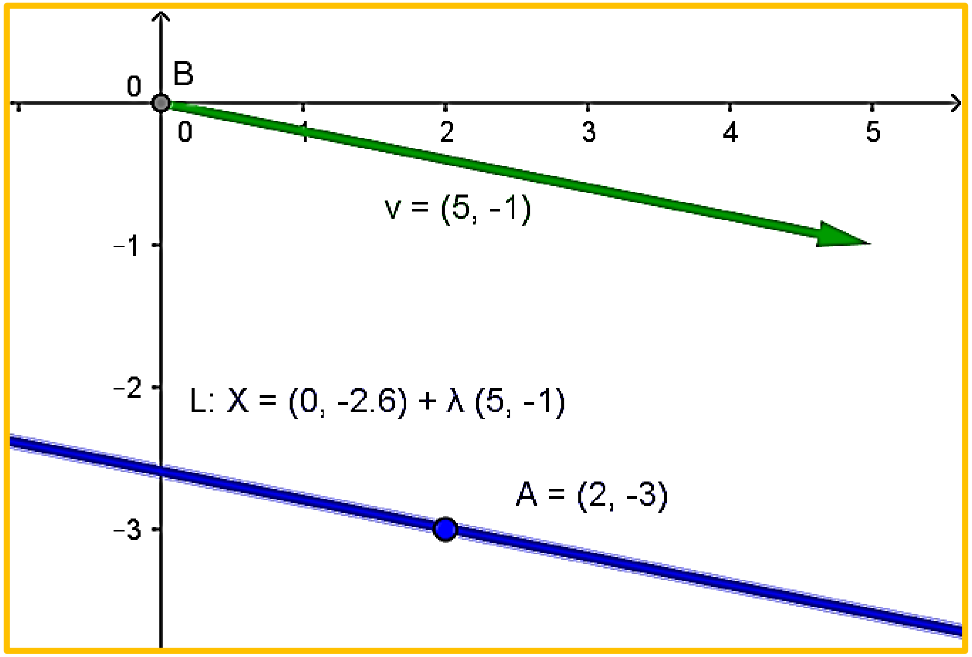


ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA.

Ejemplo: Pasa por el punto A(2, -3) y cuyo vector es v = (5, -1)

Dado que $(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2)$

Entonces: $(x, y) = (2, -3) + \lambda(5, -1)$



ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA.

Se llama ecuación paramétrica de la recta, a la ecuación que resulta de igualar coordenada a coordenada:

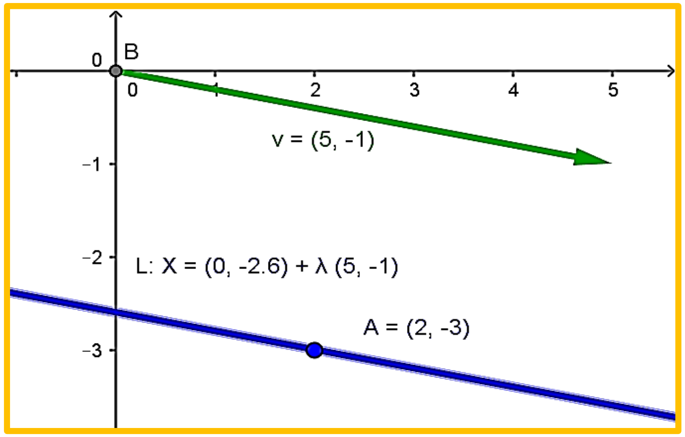
$$(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2)$$

$$\boldsymbol{x = a_1 + \lambda v_1}$$
$$\mathbf{y} = \boldsymbol{a_2 + \lambda v_2}$$

Ejemplo: Pasa por el punto A(2,-3) y cuyo vector es v=(5,-1)

$$(x, y) = (2, -3) + \lambda(5, -1)$$

$$x = 2 + 5\lambda$$
$$\mathrm{y} = -3 - 3\lambda$$



FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

La **forma general** de la ecuación de la recta viene dada por la expresión $Ax + By + C = 0$, donde A o B deben ser distintos de cero y C puede o no ser cero. Donde:

$$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$$

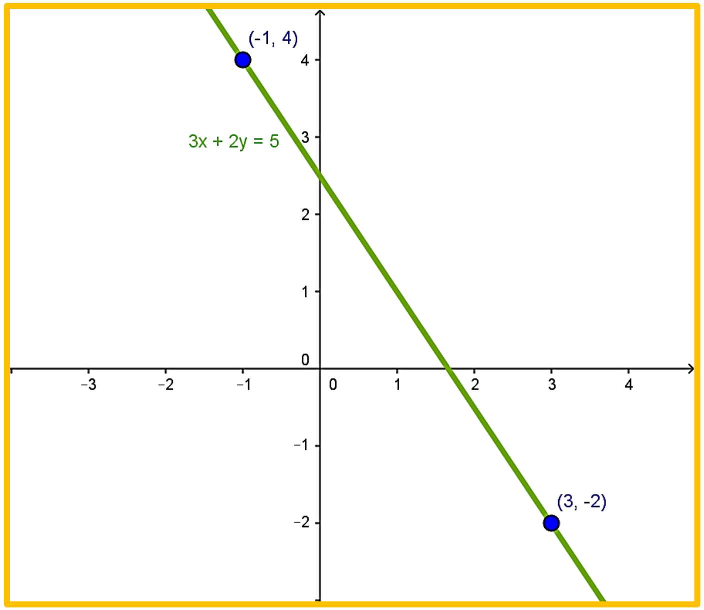
Ejemplo: Hallar la ecuación general de una recta que pasa por los puntos (-1, 4) y (3, -2)

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1);$$

$$y - 4 = \frac{(4+2)}{(-1-3)}(x + 1)$$

$$y - 4 = \frac{6}{-4}(x + 1);$$

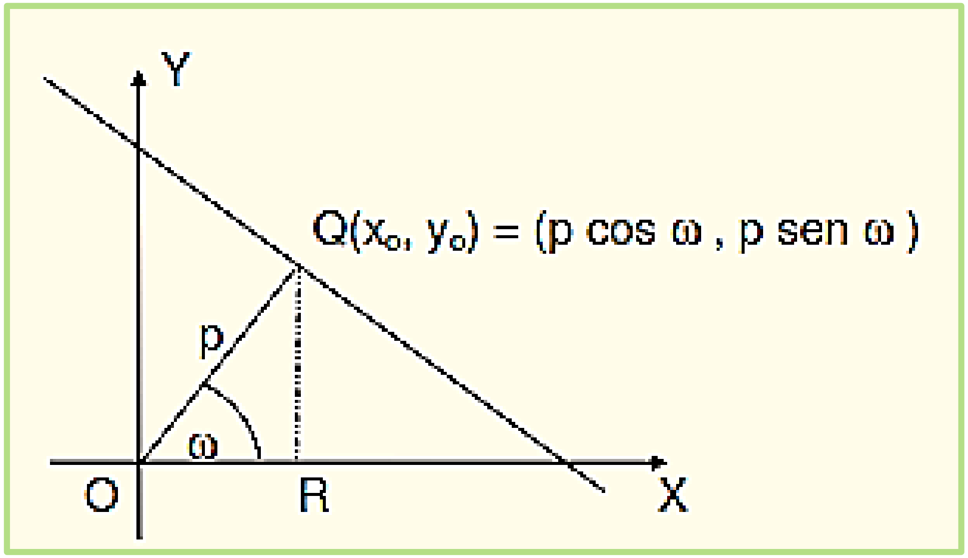
$$6x + 4y - 10 = 0$$



ECUACIÓN NORMAL DE UNA RECTA.

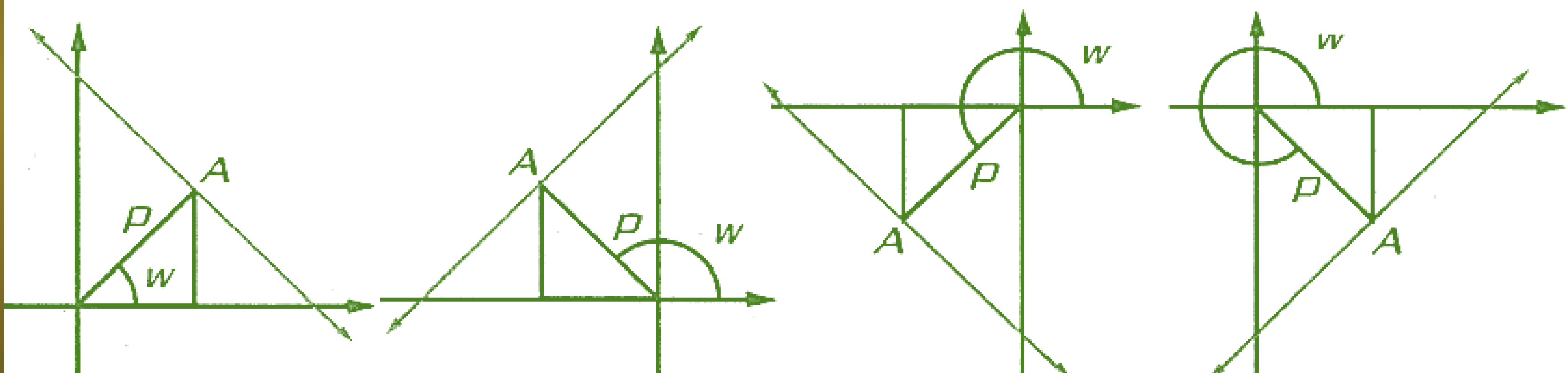
Dada la expresión $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{C} = \mathbf{0}$, puede reducirse a la forma normal $\boldsymbol{x \cos w + y\, sen\, w - p = 0}$ dividiendo cada término de la ecuación general por $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$; siendo ***p*** perpendicular a la recta, con longitud desde el origen a la recta; y ***w*** es el ángulo positivo < 360° medidos a partir de la parte positiva del eje x a la normal. Donde el signo es:

a) Contrario a C si C ≠ 0, b) Mismo que B si C = 0 y c) Mismo que A si C=B=0



ECUACIÓN NORMAL DE UNA RECTA.

Relación en la que w y p son las constantes arbitrarias o parámetros, y el valor de sen w y cos w puede ser positivo o negativo, de acuerdo con el cuadrante en que este el lado terminal del ángulo w.



1er. cuadrante
sen positivo
cos positivo

2o. cuadrante
sen positivo
cos negativo

3er. cuadrante
sen negativo
cos negativo

4o. cuadrante
sen negativo
cos positivo

ECUACIÓN NORMAL DE UNA RECTA.

Ejemplo. Determine la forma normal de la recta $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$; así como los valores de p y w y trazar la grafica.

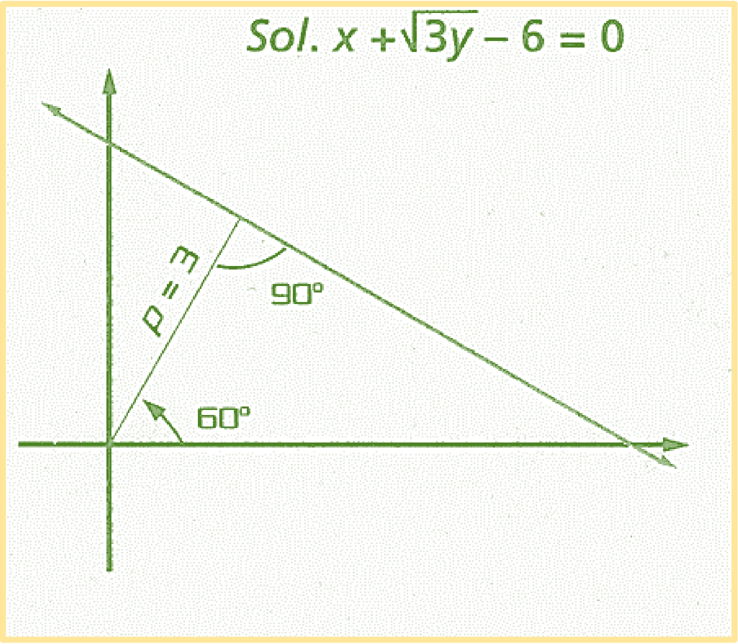
Sustituyendo en

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1^2+3}} + \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{1^2+3}} - \frac{6}{\sqrt{1^2+3}} = 0;$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} - \frac{6}{2} = 0;$$

$\cos w = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen} w = \frac{\sqrt{3}}{2}$; y $p = 3$



$$x \cos 60° + y\, sen\, 60° - 3 = 0$$

ECUACIÓN NORMAL DE UNA RECTA.

Determina la forma normal de la recta 12x -5y -52 = 0 así como los valores de p, W, y traza la gráfica.

Sustituyendo en

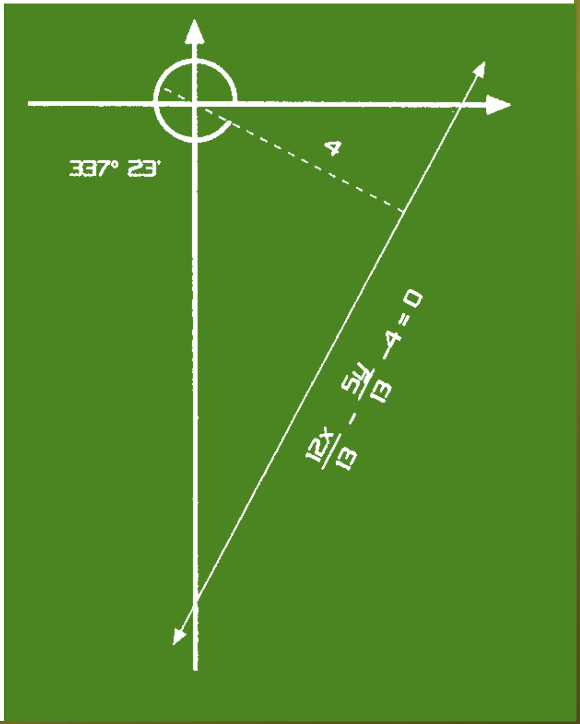
$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

$$\frac{12x}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}-\frac{5y}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}-\frac{52}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=0;$$

$$\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-\frac{52}{13}=0;$$

$\cos w = \frac{12}{13}$; sen $w = \frac{5}{13}$; y $p = 4$

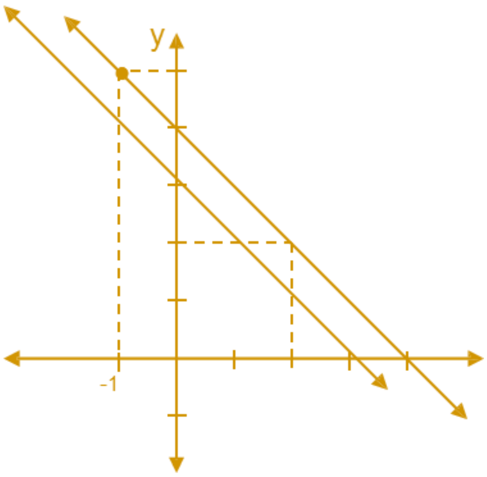
$$x\cos 337.38° + y\, sen\, 337.38° - 4 = 0$$

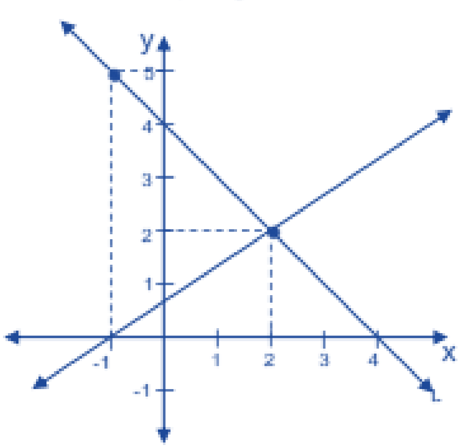


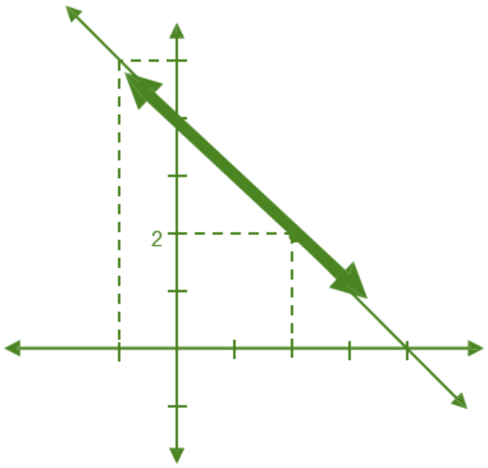
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO

Dos rectas L_1 y L_2 en el plano pueden adoptar 3 posiciones:

- Que sean Paralelas.
- Que se intercepten
- Que sean Coincidentes



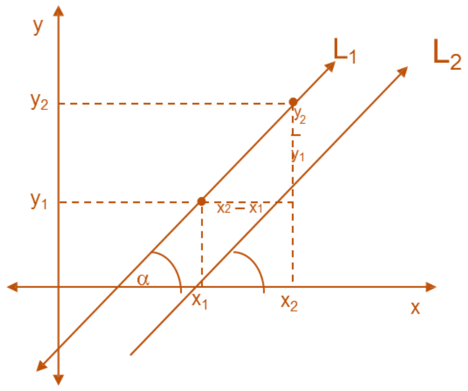




RECTAS PARALELAS.

Dos rectas L_1 y L_2, son paralelas si sus pendientes son iguales:

$$\frac{-A_1}{B_1} = \frac{-A_2}{B_2}$$



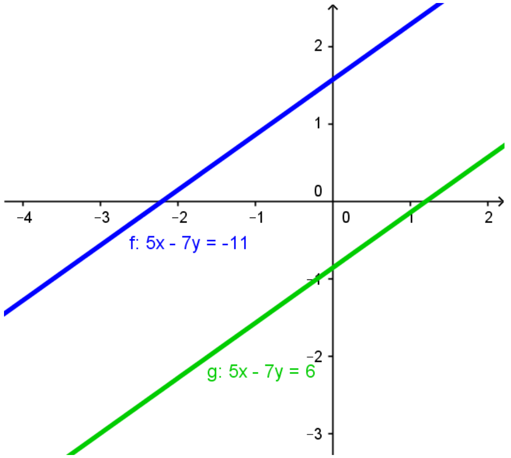
Los coeficientes de x y *y* deben ser proporcionales

Ejemplo: Dado $5x - 7y + 11 = 0$, hallar una paralela que pase por (4, 2).

Dado que $m = \frac{5}{7}$

$$y - 2 = \frac{5}{7}(x - 4); \quad 7y - 14 = 5x - 20$$

$$5x - 7y - 6 = 0$$

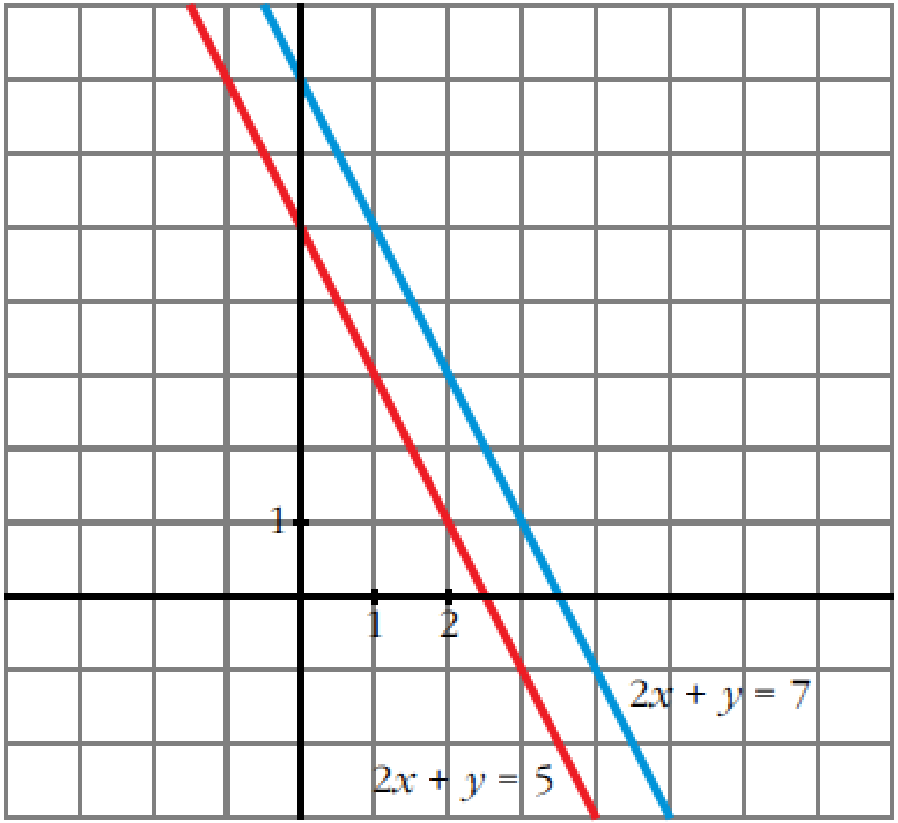


RECTAS PARALELAS.

Graficar las siguientes ecuaciones

$2x + y = 5$

$2x + y = 7$

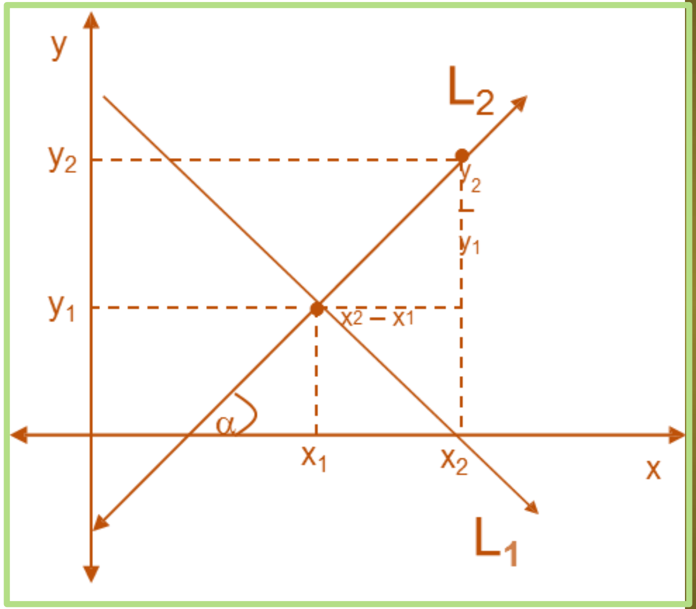


RECTAS PERPENDICULARES.

Dos rectas que se cortan en un punto cualquiera se llaman rectas secantes, pero si además forman un ángulo recto (de 90º), se dice que son perpendiculares.

Sean $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$, entonces son perpendiculares si:

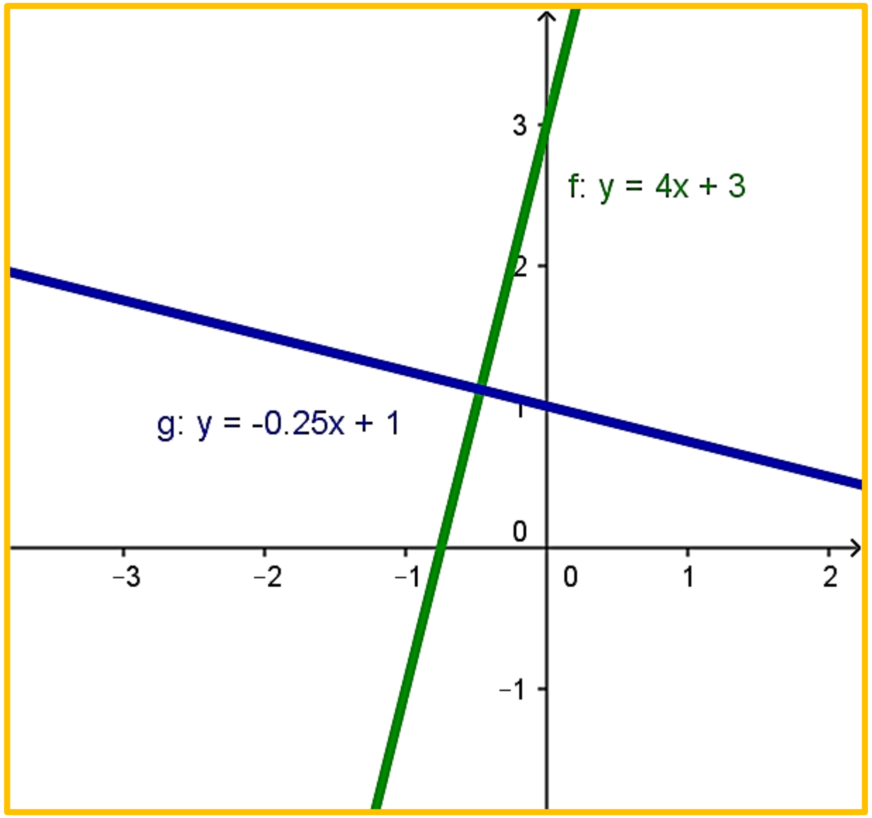
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ (Recíproco negativo)



Graficar las rectas de ecuaciones $y = 4x + 3$; y $y = -\frac{1}{4}x + 1$ en el mismo plano cartesiano.

RECTAS PERPENDICULARES.

Graficar las rectas de ecuaciones $y = 4x + 3$ y $y = -\frac{1}{4}x + 1$ en el mismo plano cartesiano



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

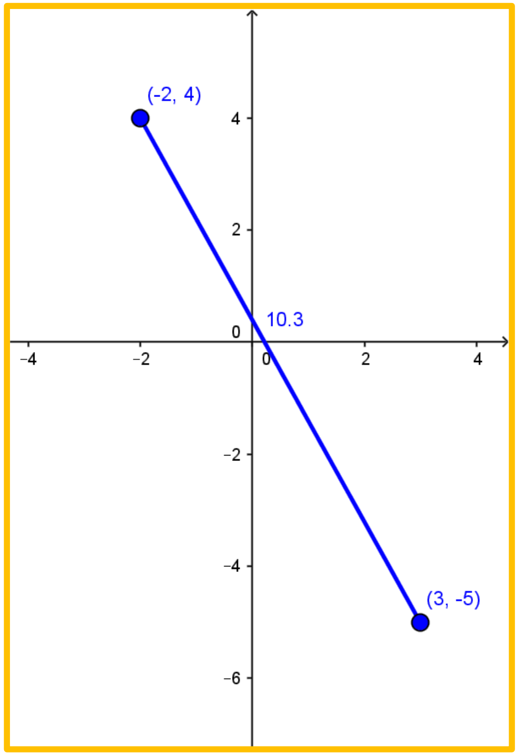
La distancia entre dos puntos A(x_1,y_1) y B (x_2,y_2) es

$$\mathbf{d} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$$

Ejemplo. Calcule la distancia éntrelos puntos A(-2, 4) y B (3, -5)

Aplicando la formula:

$$\mathrm{d} = \sqrt{(3+2)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{106}$$



DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Tomando la fórmula de la recta

$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$ y $P(x_1,y_1)$ se obtiene

$$\boldsymbol{d=\frac{Ax_1}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Se toma el signo de B para determinar el signo de la radical.

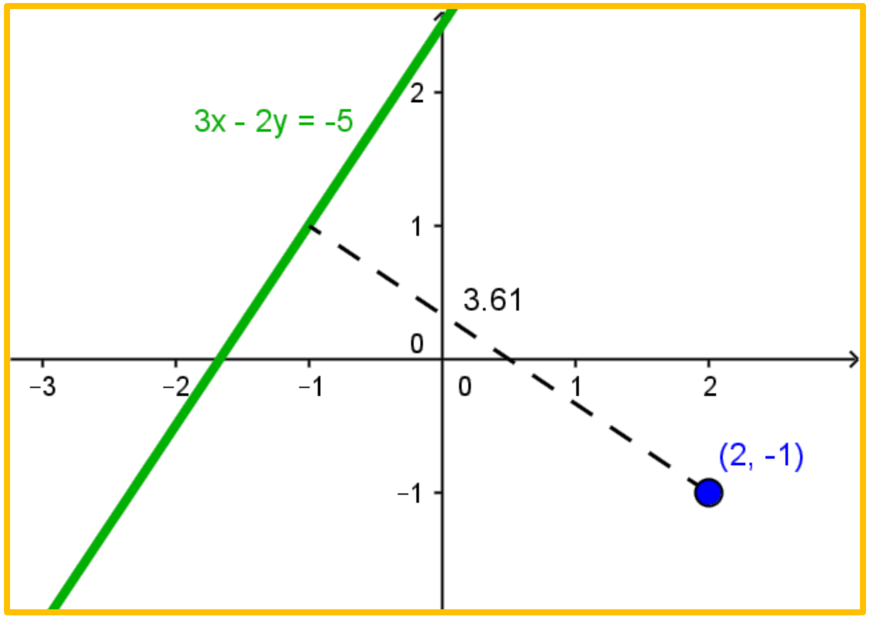
Ejemplo. Determinar la distancia entre el punto (2, -1) y la recta $3-2y+5=0$

$$d=\frac{Ax_1}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{3(2)}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}+\frac{-2(-1)}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}+\frac{5}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{6+2+5}{\sqrt{13}}=-\sqrt{13}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La distancia entre la recta $3 - 2y + 5 = 0$ y el punto (2, -1)

$$d = \frac{3(2)}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} + \frac{-2(-1)}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} + \frac{5}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{6+2+5}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}$$



DISTANCIA ENTRE DOS PARALELAS

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas se toma cualquier punto arbitrario de alguna de ellas y se determina la distancia de ese punto a la otra recta.

Ejemplo. Calcular la distancia entre las rectas:

$3x + 2y - 5 = 0$

$3x + 2y + 6 = 0$

Un punto en la primera ecuación es (1, 1), por lo que:

$$d = \frac{Ax_1}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By_1}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{3(1)+2(1)+6}{\sqrt{3^2+(2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PARALELAS

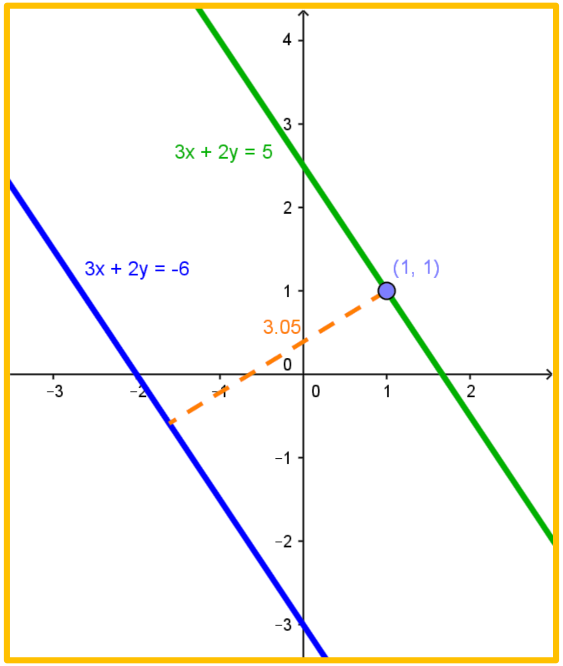
Ejemplo. Calcular la distancia entre las rectas:

$$3x + 2y - 5 = 0$$

$$3x + 2y + 6 = 0$$

Un punto en la primera ecuación es (1, 1), por lo que:

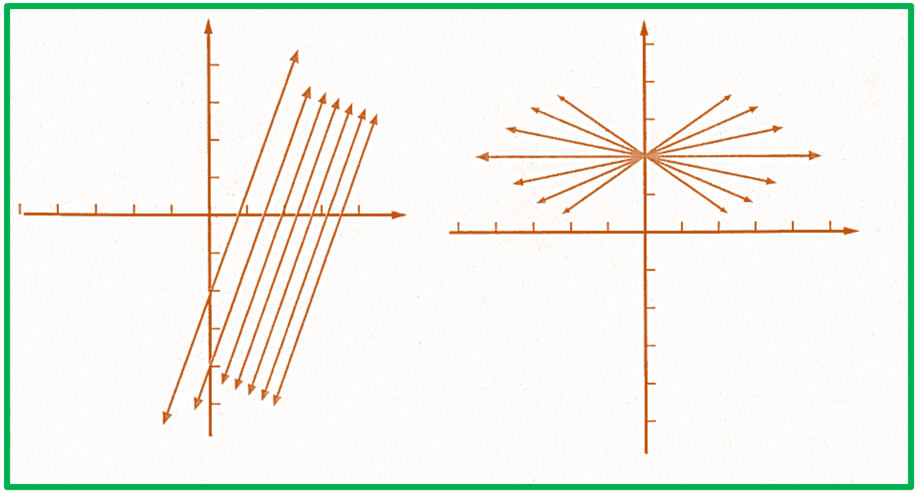
$$d = =\frac{3(1)+2(1)+6}{\sqrt{3^2+(2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}$$



FAMILIA DE RECTAS

La ecuación de una recta, queda determinada por dos condiciones independientes. Todas las rectas que satisfacen una sola condición geométrica previamente establecida forman una familia o haz de rectas .

Si asignamos un valor particular a uno de los parámetros, se obtiene la ecuación de una familia de rectas del otro parámetro que identificaremos como k (k debe ser un número real).

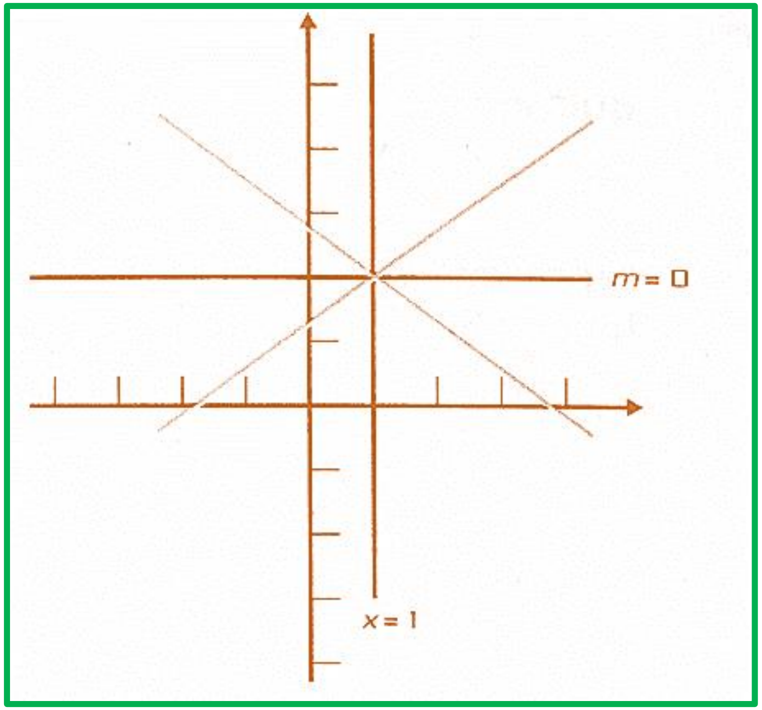


FAMILIA DE RECTAS

Ejemplo: Determina la ecuación de la familia de rectas que pasan a través de (1 , 2). Bosqueja la gráfica.

Solución:

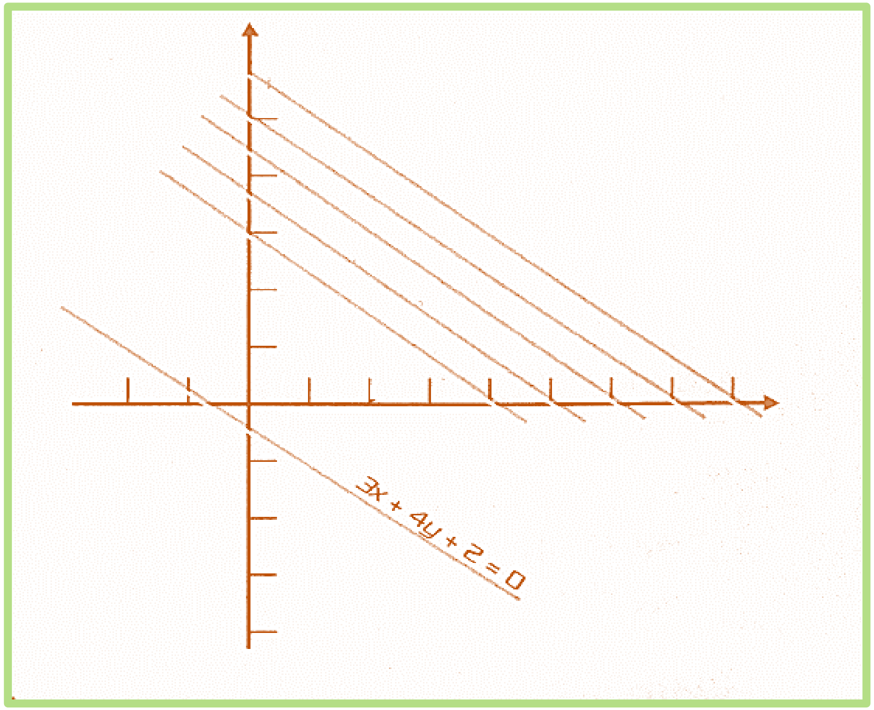
Sol. y -2 = K (x -1), con la recta x = 1.



FAMILIA DE RECTAS

Ejemplo: Determina la ecuación de la familia de las rectas que son paralelas a 3x + 4y + 2 = 0. Haz la gráfica.

Solución. $y = -\frac{3}{4}\mathrm{x} - \mathrm{k}$



BIBLIOGRAFÍA

1. Arcos Ismael, Geometría analítica para estudiantes de ingeniería GECEI-FIUAEM México 2005

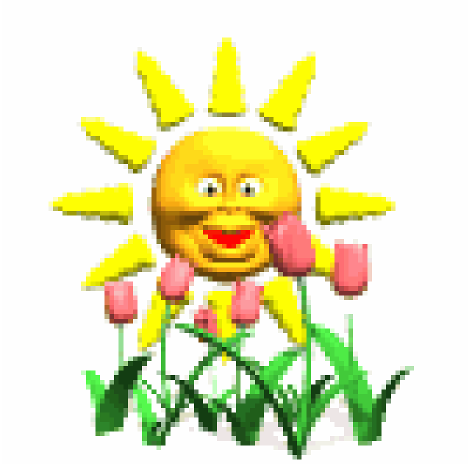
2.- Filloy, Hitt, Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

3.- Lehmann. Geometría Analítica. Limusa. México.

4.- Solis y Nolasco, Geometría Analítica, Editorial Limusa, México.

5. Menna Z. Geometría analítica del espacio, un enfoque vectorial LIMUSA México.

6. Wexler C. Geometría analítica, un enfoque vectorial Montaner y Simon, Espana.



FIN DE LA PRESENTACION