

Universidad Autónoma del Estado de México  
Unidad Académica Profesional Nezahualcóyotl  
Área de Ingeniería en Transporte

---



# Enfoques de Sistemas para el Transporte

Apuntes 2016B

Javier Romero Torres



## **JUSTIFICACIÓN**

El presente material se elaboró con la intención de apoyar al docente al impartir la materia de Enfoque de Sistemas para el Transporte para facilitar el aprendizaje y aprovechar el tiempo dentro del salón de clases. Contempla también apoyar a los estudiantes a los que se les facilita el aprendizaje visual.

## **PRESENTACIÓN**

El curso Enfoque de Sistemas para el Transporte tiene el propósito de introducir al alumno en el campo de los sistemas de transporte. El alumno aprenderá cómo caracterizar a los sistemas de transporte, definir sus componentes y categorizarlos como variables endógenas y exógenas, para así modelar su comportamiento en el sistema de transporte y poder realizar su análisis a través de modelos matemáticos. El alumno adoptará las técnicas vistas en este curso como herramientas para la valoración y el diseño de sistemas de transporte.

## **PROPÓSITO GENERAL**

Conocer la metodología de análisis de los sistemas y su representación, así como las herramientas de análisis para la solución de problemas de ingeniería en transporte.

## **COMPETENCIAS GENÉRICAS**

- Introducción a la ingeniería de sistemas
- Modelación de sistemas
- Distribuciones de probabilidad
- Simulación de sistemas
- Uso de Promodel

## Contenido

|  |    |
|--|----|
| Unidad 1.....  | 10 |
| 1. Introducción a la ingeniería de sistemas .....                    | 11 |
| 1.1 Conceptos de Sistema.....  | 11 |
| 1.1.1 Otros sistemas.....  | 12 |
| 1.2 Connotaciones ligadas a un "sistema" .....                       | 12 |
| 1.3 Frontera de un sistema.....                                      | 12 |
| 1.4 Componentes de un Sistema .....                                  | 12 |
| 1.5 Estados de un Sistema .....                                      | 13 |
| 1.6 Clasificación de sistema .....                                   | 13 |
| 1.6.1 Sistema según el tipo de variable.....                         | 13 |
| 1.6.2 Sistema según los objetos .....                                | 13 |
| 1.6.3 Sistemas según el tiempo .....                                 | 13 |
| 1.7 Conjunto desorganizado.....                                      | 13 |
| 1.8 Orgánicos y no orgánicos.....                                    | 14 |
| 1.9 Ingeniería de sistemas (comparación con otras ingenierías) ..... | 14 |
| 1.10 Tópicos en la definición de Ingeniería de Sistemas .....        | 14 |
| 1.11 Dimensión del transporte .....                                  | 15 |
| 1.12 Componentes internos de los sistemas de transporte .....        | 15 |
| a) Componentes físicos .....   | 15 |
| b) Operadores.....   | 15 |
| c) Planes de operación.....  | 15 |
| 1.13 Componentes externos de los sistemas de transporte.....         | 16 |
| 1.14 Fases en un sistema de transporte.....                          | 16 |
| 1.15 Ingeniería de sistemas como interfaz.....                       | 17 |
| 1.16 Sistema CLIOS .....   | 17 |
| a) Complejo .....  | 17 |
| b) Gran escala .....   | 17 |
| c) Interconexión.....  | 17 |
| d) Abierto.....  | 17 |
| e) Social-técnico .....  | 17 |
| 1.16.1 Proceso CLIOS .....   | 18 |
| Unidad 2.....  | 19 |

|   |    |
|---|----|
| 2 Modelación de sistemas .....                                | 20 |
| 2.1 Conceptos de modelo.....                                  | 20 |
| 2.2 Características de un modelo.....                         | 20 |
| 2.3 Relación modelo-realidad .....                            | 21 |
| 2.4 Una clasificación de modelos .....                        | 21 |
| 2.5 Modelos .....   | 22 |
| 2.5.1 Modelo conceptual o semántico.....                      | 22 |
| 2.5.2 Modelo formal.....                                      | 22 |
| 2.5.3 Modelo resoluble.....                                   | 22 |
| 2.5.4 Modelo alimentado .....                                 | 22 |
| 2.5.5 Modelo físico.....                                      | 22 |
| 2.5.6 Modelo matemático .....                                 | 22 |
| 2.6 Argumentos de la modelación .....                         | 23 |
| 2.6.1 Argumentos a favor.....                                 | 23 |
| 2.6.2 Argumentos en contra .....                              | 23 |
| 2.7 Formulación de un modelo.....                             | 24 |
| 2.8 Consideraciones en el diseño del modelo.....              | 24 |
| 2.9 Teoría de comportamiento (tratamiento del tiempo).....    | 25 |
| 2.10 Problema de la validación (tratamiento del tiempo) ..... | 25 |
| 2.11 Enfoque de modelación.....                               | 25 |
| 2.12 Especificaciones del modelo.....                         | 26 |
| 2.13 La modelación y errores .....                            | 26 |
| 2.14 Ejemplo de un modelo .....                               | 26 |
| Unidad 3.....   | 27 |
| 3 Distribuciones de probabilidad .....                        | 28 |
| 3.1 Medidas de posición.....                                  | 28 |
| 3.1.1 Media de la muestra.....                                | 28 |
| 3.1.2 Mediana de la muestra.....                              | 28 |
| 3.2 Medidas de variabilidad .....                             | 28 |
| 3.2.1 Rango de la muestra .....                               | 28 |
| 3.2.2 Desviación estándar de la muestra .....                 | 28 |
| 3.2.3 Desviación estándar de la muestra .....                 | 28 |
| 3.3 Espacio muestral discreto.....                            | 29 |
| 3.4 Espacio muestral continuo .....                           | 29 |

|  |    |
|--|----|
| 3.5 Variable aleatoria .....                               | 29 |
| 3.5.1 Variable aleatoria discreta .....                    | 29 |
| 3.5.2 Variable aleatoria continua .....                    | 29 |
| 3.6 Distribuciones discretas.....                          | 30 |
| 3.7 Distribuciones de probabilidad conjunta .....          | 30 |
| 3.8 Función de densidad conjunta .....                     | 30 |
| 3.9 Esperanza matemática .....                             | 31 |
| 3.10 Algunas distribuciones de probabilidad discreta ..... | 32 |
| 3.11 Distribución uniforme discreta.....                   | 32 |
| 3.12 Distribución binomial .....                           | 33 |
| 3.12.1 Propiedades del proceso de Bernoulli .....          | 33 |
| 3.12.2 Distribución binomial.....                          | 33 |
| 3.13 Distribución de Poisson .....                         | 34 |
| 3.13.1 Propiedad de un experimento Poisson.....            | 34 |
| 3.13.2 Distribución de Poisson.....                        | 34 |
| 3.14 Distribuciones de probabilidad continua .....         | 34 |
| 3.15 Distribución uniforme continua.....                   | 35 |
| 3.16 Distribución normal.....                              | 35 |
| 3.16.1 Distribución normal estándar .....                  | 36 |
| 3.17 Distribución exponencial.....                         | 36 |
| 3.18 Distribución gamma.....                               | 36 |
| 3.19 Distribución ji cuadrada.....                         | 37 |
| 3.20 Distribución hipergeométrica.....                     | 37 |
| 3.21 Distribución binomial negativa.....                   | 38 |
| 3.22 Distribución geométrica .....                         | 38 |
| Unidad 4.....  | 46 |
| 4. Simulación de sistemas.....                             | 47 |
| 4.1 Simulación .....                                       | 47 |
| 4.1.1 Simulación de eventos discretos.....                 | 47 |
| 4.2 Ventajas de la simulación .....                        | 48 |
| 4.3 Desventajas de la simulación .....                     | 49 |
| 4.4 Pasos para realizar un estudio de simulación .....     | 49 |
| 4.5 Número aleatorios vs Números pseudoaleatorios.....     | 50 |
| 4.5.1 Propiedades de los números pseudoaleatorios.....     | 50 |

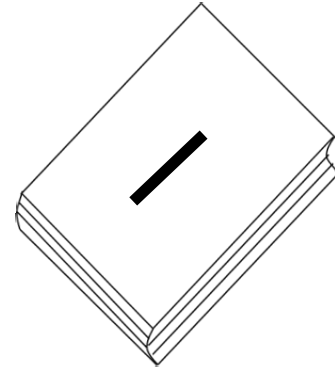
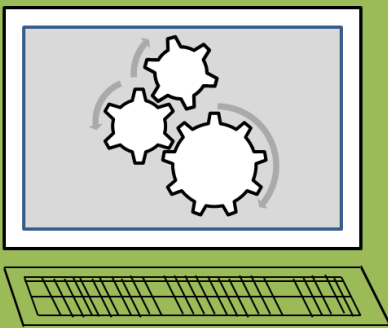


---

|  |    |
|--|----|
| 4.6 Algoritmo para generar números aleatorios .....                  | 50 |
| 4.6.1 Algoritmo de cuadrados medios .....                            | 50 |
| 4.6.2 Algoritmo de productos medios .....                            | 51 |
| 4.6.3 Algoritmo de multiplicador constante.....                      | 51 |
| 4.6.4 Algoritmo Lineal .....   | 52 |
| Anexo 1 Tablas estadísticas: distribución binomial.....              | 53 |
| Anexo 2 Tablas de distribución Poisson .....                         | 58 |
| Anexo 3 Tabla de Función de distribución de la normal estándar ..... | 62 |
| Anexo 4 Tabla de Función de distribución de la t-Student .....       | 64 |
| BIBLIOGRAFÍA .....   | 65 |

# Unidad

## Introducción a la ingeniería de sistemas



Conceptos de Sistema

Connotaciones ligadas a un "sistema"  
Frontera de un sistema

Componentes de un Sistema  
Estados de un Sistema

Clasificación de sistema

Conjunto desorganizado

Orgánicos y no orgánicos

Ingeniería de sistemas (comparación con otras  
ingenierías)

Tópicos en la definición de Ingeniería de  
Sistemas

Dimensión del transporte

Componentes internos de los sistemas de  
transporte

Componentes externos de los sistemas de  
transporte

Fases en un sistema de transporte

Ingeniería de sistemas como interfaz

Sistema CLIOS

## 1. Introducción a la ingeniería de sistemas

### 1.1 Conceptos de Sistema

- Grupo de objetos que están ligados por alguna interacción regular o en interdependencia con el fin de lograr un propósito.
- Combinación de elementos organizados interrelacionando para lograr uno o más propósitos establecidos.
- Aunque consiste en elementos separados es más que un conglomerado de los mismos. Mejor dicho, posee organización e integridad, y mantiene un grado de estabilidad, aunque la materia y energía que la componen están sujetas a cambios constantes.

**Sistema discreto:** Aquellos en el que las variables de estado sólo pueden tomar un conjunto de valores infinitos

**Sistema continuo:** Aquellos en que las variables de estado pueden asumir un número infinito de valores

**Sistema absolutamente cerrado:** Se refieren a aquellos sistemas en los que no existe interacción entre sistema y su ámbito

**Sistema relativamente cerrados:** Aquellos en los que la manera en que el ámbito actúa sobre el sistema y el impacto de éste sobre el primero, se encuentran estrictamente definidos

**Sistemas abiertos:** Aquellos en donde se consideran todos los posibles efectos del sistema sobre el ámbito y viceversa

### Sistemas involucrando el tiempo

En el proceso de determinar las entradas y salidas en cualquier instante.

**Sistema estático:** los valores de salida sólo dependen de los valores presentes de las entradas.

**Sistema dinámico:** las salidas dependen tanto de los valores pasado como de los presentes de las entradas.

En teoría, algunos sistemas dinámicos pueden depender también de los valores futuros de las entradas (**sistema anticipante o no causal**).

El tiempo se considera una variable que puede tomar cualquier valor continuo real.

### 1.1.1 Otros sistemas

Si el efecto de la entrada no se refleja simultáneamente en todos los subsistemas, entonces se define como **de parámetro distribuido**.

Mientras en el **sistema consolidado**, el efecto de una entrada se percibe simultáneamente en todo el sistema.

Si la función de transferencia (relación entrada-salida) no cambia con el tiempo, se identifica como un **sistema invariable respecto al tiempo**; en caso contrario, el **sistema es variante respecto al tiempo**.

**Sistema lineal:** su función de transferencia es aditiva y homogénea.

En un **sistema determinista** la función de transferencia se conoce con certeza. Caso contrario es un **sistema probabilista**

## 1.2 Connotaciones ligadas a un "sistema"

- Elementos o componentes varios
- Actividades, decisiones y evaluaciones
- Relaciones, conexiones
- Procedimientos, esquemas, funciones
- Organización, integridad, dinámica

## 1.3 Frontera de un sistema

- Definir la frontera entre el sistema y su contexto o ambiente
- La frontera se depende de la propósitos del estudio

## 1.4 Componentes de un Sistema

- Entidad: es un objeto de interés en el sistema
- Atributo o variable: es una característica (propiedad) de la entidad
- Actividad: es el periodo a analizar o de interés

## 1.5 Estados de un Sistema

Arreglo de variables necesarias para describir un sistema en un tiempo determinado

- Evento: acontecimiento que puede cambiar el estado del sistema
- Endógeno: se refiere a los acontecimientos y eventos que ocurren en el interior del sistema
- Exógeno: referido a acontecimientos y eventos del contexto o ambiente que afectan al sistema

## 1.6 Clasificación de sistema

### 1.6.1 Sistema según el tipo de variable

- Discretos
- Continuos

### 1.6.2 Sistema según los objetos

- Conjunto desorganizado
- Orgánico y no orgánico
- Abiertos y cerrados

### 1.6.3 Sistemas según el tiempo

- Estático
- Dinámico

## 1.7 Conjunto desorganizado

- Sin características esenciales de organización interna
- Interrelaciones o conexiones entre sus partes son aleatorias o de carácter externa
- Aislamiento entre las partes
- Propiedad aditiva de las partes
- Sin propiedades sistemáticas

### 1.8 Orgánicos y no orgánicos

- Relación entre sus elementos
- Conectividad entre sus elementos
- Característica de unicidad
- Poseen estabilidad estructural
- Características de un sistema orgánico que lo distinguen de un no inorgánicos son:
  - Relaciones no solo estructurales sino también genética
  - Coordinación y subordinación entre sus elementos
  - Mecanismos de control
  - Propiedades de las partes regidas por las leyes y estructura del todo
  - Actividad (transformación) individual reflejada en el todo

### 1.9 Ingeniería de sistemas (comparación con otras ingenierías)

- Su objetivo son los sistemas
- Utilización del enfoque sistemático
- Planteamiento del óptimo general (objetivo general) y óptimos parciales (objetivos particulares)
- Funcionamiento armónico
- No función específica óptima en detrimento de las demás
- Funciones generales del sistema se optimizan ponderando los diversos objetivos

### 1.10 Tópicos en la definición de Ingeniería de Sistemas

- Sistemas grandes y complejos
- Diseño e implementación en función de satisfacer un conjunto de objetivos.
- Maximización de la compatibilidad entre componentes
- Utilización de modelos cuantitativos
- Uso de herramientas informáticas
- Las características globales del sistema se optimizan
- Retroalimentación (acciones correctivas)

## 1.11 Dimensión del transporte

El transporte es multidimensional, teniendo las siguientes perspectivas:

- **Tecnología:** se refiere a la propulsión, combustibles, caminos, dirección y control. También los materiales y como son utilizados en caminos y vehículos
- **Sistemas:** es la noción de análisis y modelado de redes como fuente y demanda interactiva para producir flujos en redes de transporte
- **Instituciones:** el despliegue y la operación de los sistemas (que no suceden por sí mismas), es hecho por las organizaciones dentro de un ambiente complejo social, político y económico

## 1.12 Componentes internos de los sistemas de transporte

### a) Componentes físicos

- Infraestructura: caminos, terminales y estaciones
- Vehículos
- Equipo, es la maquinaria que opera para facilitar los negocios de transporte.
- Fuerza motriz, propulsión de los vehículos
- Combustible
- Sistemas de control, comunicación y localización

### b) Operadores

- Trabajo, trabajo organizado,
- Administración de funciones, planeación, operaciones
- Mercadotecnia,

### c) Planes de operación

- Programa
- Asignación de tripulación
- Distribución del flujo
- Patrones de conexión
- Costos y nivel de servicio

### 1.13 Componentes externos de los sistemas de transporte

Como se sabe un sistema es un conjunto de elementos o componentes que interrelaciona entre sí para un fin, en un sistema de transporte los componentes externos son importantes y se interrelacionan dependiendo y complementándose uno de otro para que idóneamente el sistema funcione adecuadamente.

Los sistemas de transporte regularmente abarcan estos componentes pero adaptados a cada situación o región donde se lleva a cabo un proyecto de un sistema de transporte (figura 1).

**Figura 1 Componentes externos de los sistemas de transporte**



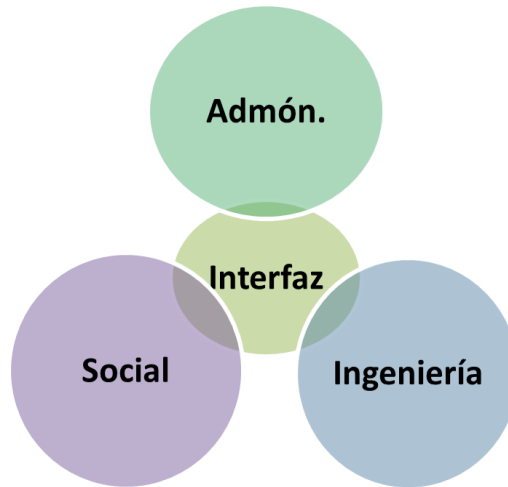
### 1.14 Fases en un sistema de transporte

Para que un sistema de transporte se lleve a cabo, se sigue una serie de pasos que ayudan a que los sistemas que se quieren implantar en una región tengan un buen resultado, ya que en cada fase se revisa el seguimiento de este (figura 2).





### 1.15 Ingeniería de sistemas como interfaz



### 1.16 Sistema CLIOS

#### a) Complejo

**Estructura compleja:** número de componentes e interconexiones.

**Comportamiento complejo:** debido a la interacción de los componentes.

**Evaluación compleja:** sobre diferentes alternativas en el desempeño del sistema.

**Complejidad anidada:** interacción de dominios físicos y entes institucionales

#### b) Gran escala

- Alcances geográficos extensos
- Impactos

#### c) Interconexión

- Transporte conectado con: fuentes de energía, climas, enfermedades, movilidad, accesibilidad

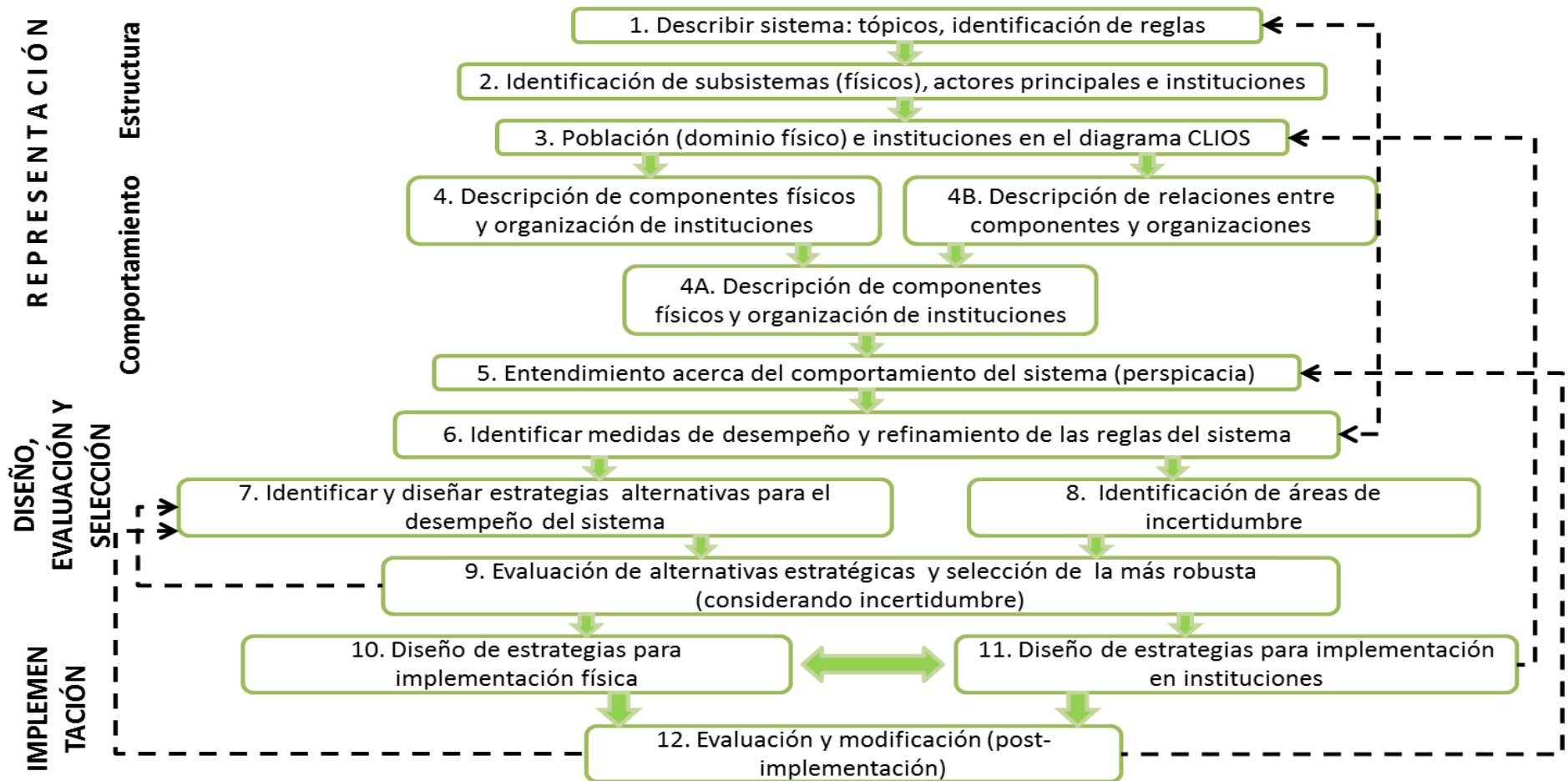
#### d) Abierto

- Factores políticos, sociales, geográficos, económicos

#### e) Social-técnico

- Tecnologías, impactos sociales.

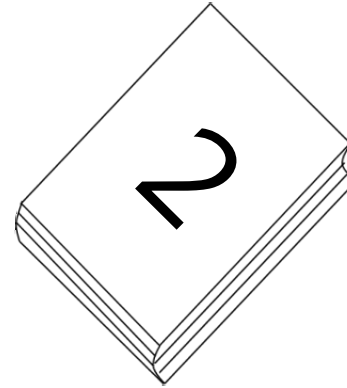
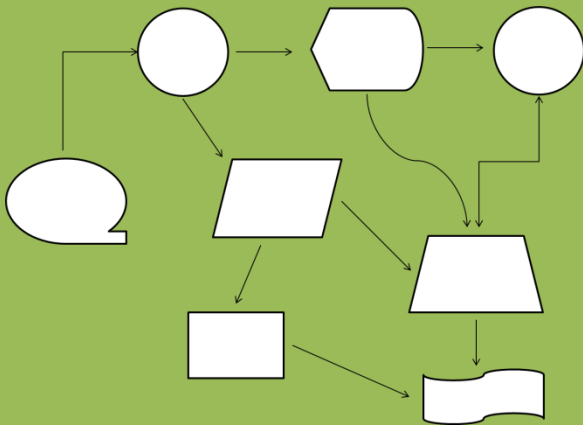
1.16.1 Proceso CLIOS



Referencia: Joseph Sussman. Introduction to Transportation Systems. Artech House, 2005

# Unidad

## Modelación de sistemas



- Conceptos de modelo
- Características de un modelo
- Relación modelo-realidad
- Una clasificación de modelos
- Modelos
- Argumentos de la modelación
- Formulación de un modelo
- Consideraciones en el diseño del modelo
- Teoría de comportamiento (tratamiento del tiempo)
- Problema de la validación (tratamiento del tiempo)
- Enfoque de modelación
- Especificaciones del modelo
- La modelación y errores
- Ejemplo de un modelo

## 2 Modelación de sistemas

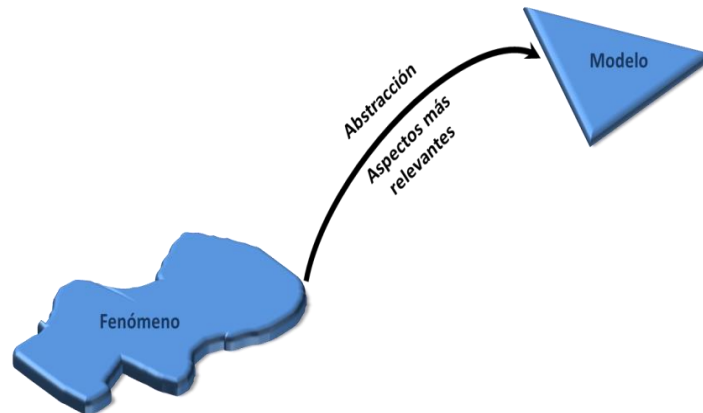
### 2.1 Conceptos de modelo

- Es una representación simplificada de una parte de un sistema del mundo real, el cual se concentra en ciertos elementos considerados importantes para su análisis (desde un punto de vista)
- Son problemas y puntos de vista específicos
- Una abstracción que se utiliza para lograr mayor claridad conceptual acerca de la misma, reduciendo su variedad y complejidad a niveles que permitan comprenderla y especificarla en forma adecuada para su análisis
- Esquema teórico que busca dar cuenta de un proceso, de relaciones existentes entre diversos elementos de un sistema
- Conjunto de ecuaciones y de relaciones que sirven para representar y estudiar un sistema complejo
- Conjunto de características que posee en común una familia de sistemas homomorfos
- Esquema teórico de un sistema o realidad compleja que se elabora para facilitar su comprensión y estudio
- "Todo representación es un modelo y el objetivo de este es proveer un cuadro simplificado e inteligible de la realidad, con el fin de comprenderla mejor".
- "Aproximaciones selectivas que, gracias a la eliminación de detalles incidentales, permiten captar en forma global algunos aspectos fundamentales, relevantes o interesantes del mundo real".
- "El éxito del análisis de sistemas y al validez de sus soluciones están influenciadas por la habilidad de los experimentadores para representar el mundo real del problema en forma simbólica

### 2.2 Características de un modelo

- SIMPLE para que su manipulación y comprensión por parte de quienes lo usan
- REPRESENTATIVO en toda su gama de implicaciones que puede tener
- COMPLEJO para representar fielmente el sistema en estudio

## 2.3 Relación modelo-realidad



## 2.4 Una clasificación de modelos

Para qué está hecho el modelo

- Descriptivo, explica la realidad
- Predictivo, provee una imagen futura del sistema
- Explorativo, descubre por especulación otras realidades que son lógicamente posibles.

De qué está hecho el modelo

- Físico o real
- Icónico
- Análogo
- Conceptual
  - Verbales, describe la realidad (oral o escrita)
  - Matemáticos, describe la realidad (símbolos y relaciones formales)

Cómo está tratado el tiempo: estáticos o dinámicos

## 2.5 Modelos

### 2.5.1 Modelo conceptual o semántico

Es el esquema teórico en el que hay una definición de sistemas y subsistemas (contexto) y una calificación de relaciones (causalidad, simultaneidad)

- **Mecánico explicativo:** Es una relación elemental
- **Contenido semántico:** Conjunto de mecanismos explicativos del modelo conceptual
- **Fórmula característica:** Es la síntesis en lenguaje matemático de los mecanismos explicativos bajo la forma de un problema de tipo matemáticas aplicadas

### 2.5.2 Modelo formal

Designa la unión del modelo semántico y de la fórmula característica

### 2.5.3 Modelo resoluble

El modelo formal unido a un dispositivo de resolución que determina los valores de las variables endógenas en función de las variables exógenas

### 2.5.4 Modelo alimentado

Un modelo resoluble unido a datos de aplicación a un caso particular dado

### 2.5.5 Modelo físico

Representaciones –generalmente- a escala reducida de sistemas

### 2.5.6 Modelo matemático

En éste, las relaciones postuladas se formalizan en series de ecuaciones algebraicas con dos tipos de variables:

- Las exógenas, independientes o explicativas, cuyos valores numéricos se determinan fuera del modelo
- Las endógenas (independientes), cuyo valor resulta de la operación del modelo

Dentro de los modelos matemáticos se pueden distinguir:

- Los modelos predictivos, que buscan determinar la causalidad entre variables, a fin de plantear relaciones funcionales.
- Modelo normativos, su propósito es producir estimaciones acerca del comportamiento del sistema frente a objetivos definidos. (alta complejidad, proyección del creador).

## 2.6 Argumentos de la modelación

### 2.6.1 Argumentos a favor

- Toda representación abstracta contiene un modelo semántico
- Reunión de ideas e intuiciones relativas a un objeto o sistema
- No sólo un papel didáctico sino como instrumento para la concertación y discusión en un proceso de decisión
- Implica métodos cuantitativos para reproducir (estado empírico) además de un análisis prospectivo
- Los modelos formales y calculables son una de las etapas necesarias para la cuantificación
- El modelo alimentado permite esclarecer las decisiones

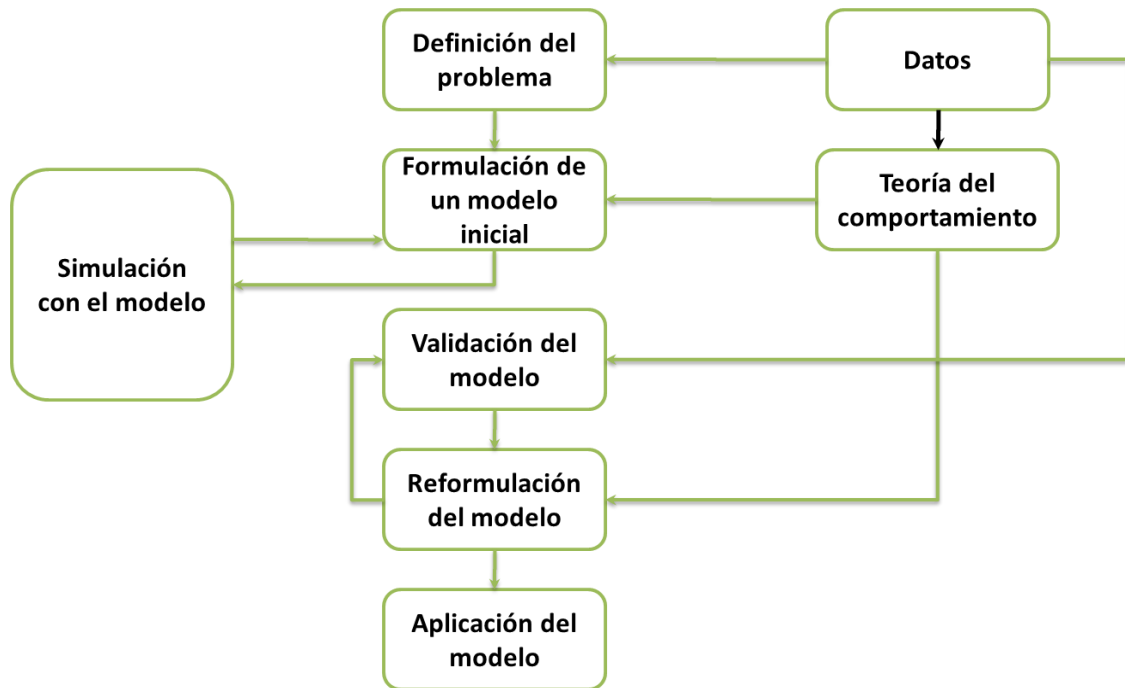
### 2.6.2 Argumentos en contra

- Oposiciones filosóficas. Los modelos son inútiles, ¿cuál es la utilidad final de un modelo de previsión?, ¿enfoque cuantitativo en la existencia de inestabilidad y complejidad altas?
- Oposiciones sociológicas. Éstas se sujetan esencialmente a las circunstancias y condiciones de empleo de los modelos
- Aplicación inocente o brutal
- Empleo maquiavélico de las previsiones cuantitativas. Niveles de manipulación: disimulación (omitir), travestismo (interpretación poco clara), falsificación
- Argumentos pragmáticos.
  - Nula utilidad práctica de una modelación
  - Dificultad de la formalización y empleo de modelo conceptual complejo
  - Restricciones económicas, recursos humanos y financieros
- Incertidumbre relativa a los datos de aplicación (mediciones insuficientes)

## 2.7 Formulación de un modelo

Para formular un modelo es necesario llevar a cabo una secuencia de pasos, para obtener una adecuada formulación, es necesario realizar cada paso de manera precisa desde la obtención de los datos hasta la aplicación del modelo

Figura 6 Proceso de un modelo



## 2.8 Consideraciones en el diseño del modelo

- El propósito con que se está construyendo el modelo
- Variables a incluir especificando cuáles son controladas por el modelador.
- Nivel de agregación.
- Tratamiento del tiempo.
- Teoría que se está representando en el modelo.
- Técnicas estadísticas y matemáticas (disponibles).
- Método para calibrar el modelo y probar el modelo.



## 2.9 Teoría de comportamiento (tratamiento del tiempo)

- Teorías distintas para explicar un mismo fenómeno.
- Realizar discriminación entre teorías.
- Utilización de datos: de sección transversal, series de tiempo (longitudinal).
- Modelos analíticos formalmente idénticos pero con parámetros que deben ser interpretados de forma diferente.

## 2.10 Problema de la validación (tratamiento del tiempo)

- Una estructura causal adecuada del modelo.
- Exactitud de replicación de los datos base
  - calibración del modelo
  - bondades de ajuste
- Existencia de constancia en el tiempo
  - Plazos
  - Variables y su importancia en el tiempo
  - Dificultad del modelo en el tiempo (variables, interpretación)

## 2.11 Enfoque de modelación

- a) El contexto en que se toman las decisiones. Adopción de una perspectiva particular y la selección de un ámbito del sistema de interés
- b) Precisión o nivel de exactitud. Crucial para la calidad del modelo, en particular cuando la decisión no es obvia
- c) Disponibilidad de información. Problemas con la estabilidad temporal de los datos y dificultad en la predicción de sus valores
- d) Estado del arte en modelación. Riqueza conceptual de los modelos, tratamiento matemático, algoritmos, ecuaciones, sistemas computacionales
- e) Recursos disponibles para el estudio. Incluye financieros, datos, software, personal calificado, plazos, niveles

### **2.12 Especificaciones del modelo**

- a) Estructura del modelo: ¿es posible utilizar una estructura sencilla?, ¿todas las opciones son independientes?. Existe problemas con el software y personal capacitado.
- b) Forma funcional. ¿funciones lineales o no lineales?, mayor cantidad de recursos.
- c) Especificaciones de variables. Es decidir qué variables usar y cómo (en qué forma) deben entrar al modelo.

### **2.13 La modelación y errores**

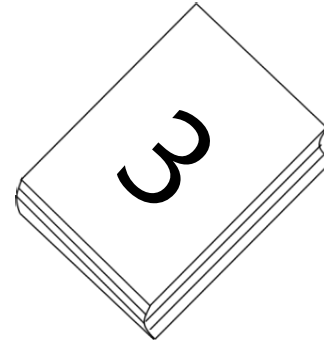
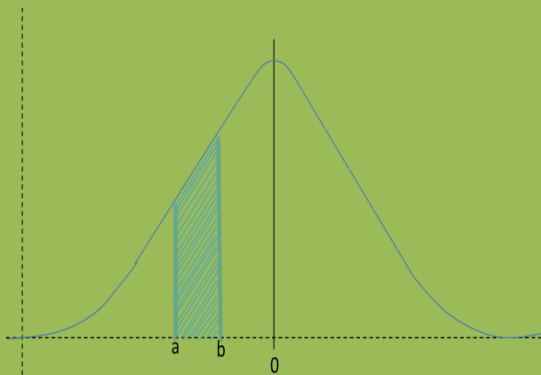
- a) Medición.
- b) Muestreo.
- c) Especificación.
- d) Calibración y predicción.
- e) Transferencia
- f) Agregación.

### **2.14 Ejemplo de un modelo**

- a) Caso de intersección, optimización de la regulación
- b) Caso de entronque de una autopista, niveles de servicio.

# Unidad

## Distribuciones de probabilidad



Medidas de posición

Medidas de variabilidad

Espacio muestral discreto

Espacio muestral continuo

Variable aleatoria

Distribuciones discretas

Distribuciones de probabilidad conjunta

Función de densidad conjunta

Esperanza matemática

Algunas distribuciones de probabilidad discreta

Distribución uniforme discreta

Distribución binomial

Distribución de Poisson

Distribuciones de probabilidad continua

Distribución uniforme continua

Distribución normal

Distribución exponencial

Distribución gamma

Distribución ji cuadrada

### 3 Distribuciones de probabilidad

#### 3.1 Medidas de posición

##### 3.1.1 Media de la muestra.

Es un promedio numérico

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (1)$$

##### 3.1.2 Mediana de la muestra

Su propósito es reflejar la tendencia central de la muestra.

$$\tilde{x} = x_{(n+1)/2} \quad \text{si } n \text{ es impar} \quad (2)$$

$$\tilde{x} = x_{n/2} + x_{(n/2)+1} \quad \text{si } n \text{ es par} \quad (3)$$

#### 3.2 Medidas de variabilidad

##### 3.2.1 Rango de la muestra

$$X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n} \quad (4)$$

##### 3.2.2 Desviación estándar de la muestra

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} \quad (5)$$

##### 3.2.3 Desviación estándar de la muestra

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{(n-1)} \quad (6)$$

### 3.3 Espacio muestral discreto

Contienen un número finito de posibilidades o una serie interminable con tantos elementos como números enteros existen

### 3.4 Espacio muestral continuo

Aquel que contiene un número infinito de posibilidades igual al número de puntos en un segmento de línea

### 3.5 Variable aleatoria

Es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral

- La estadística se encarga de hacer inferencias acerca de poblaciones y sus características
- En el caso de un experimento donde se observan varias descripciones al azar es importante asignar una descripción numérica al resultado
- Estos valores son cantidades aleatorias determinadas por el resultado del experimento

#### 3.5.1 Variable aleatoria discreta

- Se llaman así a los conjuntos en los cuales es posible contar los resultados
- Ejemplos: pesos, alturas, temperaturas, distancias

#### 3.5.2 Variable aleatoria continua

- Cuando los valores pueden ser tomados en una escala continua
- Ejemplos: números de artículos defectuosos de una muestra, accidentes en carretera por año en una cierta carretera, medidas cualitativas: tener hambre o no, bueno o malo)

El conjunto de pares ordenados  $(x, f(x))$  es una función de probabilidad o distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta  $X$  si, para cada resultado posible  $x$

$$1. f(x) \geq 0 \quad (7)$$

$$2. \sum_x f(x) = 1 \quad (8)$$

$$3. P(X = x) = f(x) \quad (9)$$

### 3.6 Distribuciones discretas

- Existen problemas donde se desea calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria  $X$  sea menor o igual que algún número real  $x$ .
- Al escribir  $F(x) = P(X \leq x)$  para cualquier número real  $x$ , definimos a  $F(x)$  como la distribución acumulada de la variable aleatoria  $X$

La **distribución de acumulada**  $F(x)$  de una variable aleatoria discreta  $X$  con distribución de probabilidad  $f(x)$  es

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad (10)$$

La **distribución acumulada**  $F(x)$  de una variable aleatoria continua  $X$  con función de densidad  $f(x)$  es

$$F(x) = P(x \leq X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad (11)$$

### 3.7 Distribuciones de probabilidad conjunta

La función  $f(x, y)$  es una distribución de probabilidad conjunta o función de masa de probabilidad de las variables aleatorias discretas  $X$  y  $Y$  si:

$$1. f(x, y) \geq 0 \quad \text{para toda} \quad (12)$$

$$2. \sum_x \sum_y f(x, y) = 1 \quad (13)$$

$$3. P(X = x, Y = y) = f(x, y) \quad (14)$$

Para cualquier región  $A$  en el plano  $x, y$

$$P[(X, Y) \in A] = \sum \sum_A f(x, y) \quad (15)$$

### 3.8 Función de densidad conjunta

La función  $f(x, y)$  es una función de densidad conjunta de las variables aleatorias continuas  $X$  y  $Y$  si

$$1. f(x, y) \geq 0 \quad \text{para toda } (x, y) \quad (16)$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (17)$$

$$3. [P(X, Y) \in A] = \iint_A f(x, y) dx dy \quad (18)$$

### 3.9 Esperanza matemática

Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución de probabilidad  $f(x)$ . La media o valor esperado de  $X$  es:

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x) \quad \text{si } X \text{ es discreta} \quad (19)$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{si } X \text{ es continua} \quad (20)$$

Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conjunta  $f(x, y)$ . La media o valor esperado de la variable aleatoria  $g(X, Y)$  es

$$\mu_{g(X,Y)} = E[(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y) \quad \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas} \quad (21)$$

$$\mu_{g(X,Y)} = E[(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \quad \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas} \quad (22)$$

Sean  $X$  una variable aleatoria con distribución de probabilidad  $f(x)$  y media  $\mu$ . La varianza de  $X$  es

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x, y) \quad \text{si } X \text{ es discreta} \quad (23)$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad \text{si } X \text{ es continua} \quad (24)$$

O también, la raíz cuadrada positiva de la varianza,  $\sigma$ , se llama desviación estándar.

Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conjunta  $f(x, y)$ . La covarianza de  $X, Y$  es:

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) \quad \text{si } X \text{ es discreta} \quad (25)$$

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_y (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f(x, y) dx dy \quad \text{si } X \text{ es continua} \quad (26)$$

O mediante

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y \quad (27)$$

### 3.10 Algunas distribuciones de probabilidad discreta

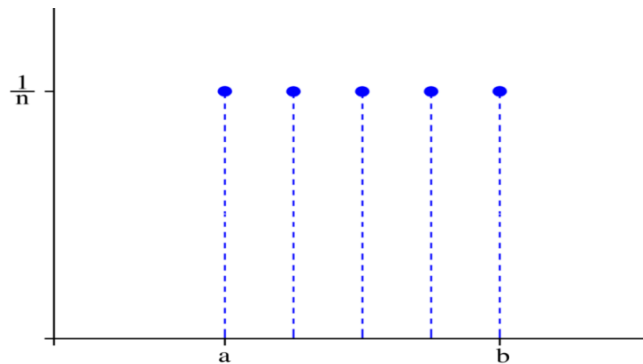
- Distribución uniforme discreta
- Distribuciones binomial y multinomial
- Distribución hipergeométrica
- Distribuciones binomial negativa y geométrica
- Distribución de Poisson

### 3.11 Distribución uniforme discreta

En esta distribución, una variable aleatoria toma cada uno de sus valores con una probabilidad idéntica

Si la variable aleatoria  $X$  toma los valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , con idénticas probabilidades, entonces la distribución uniforme discreta está dada por

$$f(x; k) = \frac{1}{k} \quad x_1, x_2, \dots, x_k \quad (28)$$



Teorema. La media y la varianza de la distribución uniforme discreta  $f(x; k)$  son:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} \quad (29)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2}{k} \quad (30)$$



### 3.12 Distribución binomial

Aquí, un experimento consiste en pruebas repetidas con posibles resultados de éxito o fracaso.

Si la probabilidad de éxito (y fracaso) permanece constante entonces se le denomina proceso de Bernoulli.

El número  $X$  de éxitos en  $n$  experimentos de Bernoulli se le llama variable aleatoria binomial, y se denomina distribución binomial.

#### 3.12.1 Propiedades del proceso de Bernoulli

El experimento consiste en  $n$  pruebas que se repiten, cada prueba produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso

La probabilidad de un éxito, que se denota con  $p$ , permanece constante en cada prueba

Las pruebas que se repiten son independiente

#### 3.12.2 Distribución binomial

Un experimento de Bernoulli puede tener como resultado un *éxito* con probabilidad  $p$  y un fracaso con probabilidad  $q = 1 - p$ . Entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial  $X$ , el número de éxitos en  $n$  pruebas independientes, es

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

$$P(x = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (32)$$

La media y la varianza de la distribución binomial  $b(x; n, p)$  son:

$$\mu = np \quad (33)$$

$$\sigma^2 = npq \quad (34)$$

### 3.13 Distribución de Poisson

Se llaman experimentos de Poisson aquellos donde la variable aleatoria  $X$  da valores de número de resultados que ocurren en un intervalo o región.

Dicho intervalo puede ser de cualquier longitud, como un minuto, un día, una semana, un mes, o un año.

Por ejemplo se puede representar el número de llamadas telefónicas por hora que recibe una oficina

#### 3.13.1 Propiedad de un experimento Poisson

El número de resultados que ocurre en un intervalo o región específica es independiente del número de ocurre en cualquier otro intervalo o región del espacio.

La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo y no depende del número de resultados que ocurre fuera de ese intervalo.

La probabilidad de que ocurra más de un resultado en el intervalo corto es insignificante.

#### 3.13.2 Distribución de Poisson

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson  $X$ , que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo dado o región específica que se denota con  $t$ , es

$$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (35)$$

Donde  $\lambda$  es el número promedio de resultados por unidad de tiempo y  $e = 2.71828\dots$

La media y la varianza de la distribución de Poisson  $p(x; \lambda t)$  tienen el valor  $\lambda t$

### 3.14 Distribuciones de probabilidad continua

- Distribución uniforme continua
- Distribución normal
- Distribución gamma y exponencial

- Distribución ji cuadrada

### 3.15 Distribución uniforme continua

Esta distribución se caracteriza por una función de densidad que es plana y por ello la probabilidad es uniforme en un intervalo cerrado  $[a, b]$ .

La función de densidad de la variable aleatoria uniforme continua en el intervalo  $[a, b]$  es

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b \quad (36)$$

La media y la varianza de la distribución uniforme son

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad (37)$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (38)$$

### 3.16 Distribución normal

Es la distribución de probabilidad más importante en todo el campo de la estadística.

Describe con mucha precisión muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación.

En 1733 Abraham DeMoivre desarrolló la ecuación matemática de la curva normal.

También se le conoce como distribución Gaussiana en honor a Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855).

La función de densidad de la variable aleatoria normal  $X$ , con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , es

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (39)$$

Donde

$$\pi = 3.14159\dots$$

$$e = 2.71828$$

La distribución de una variable aleatoria normal con media cero y varianza 1 se llama distribución normal estándar

### 3.16.1 Distribución normal estándar

Es posible transformar todas las observaciones de una variable aleatoria normal  $X$  a un nuevo conjunto de observaciones de una variable aleatoria normal  $Z$  con media cero y varianza 1

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (40)$$

### 3.17 Distribución exponencial

Es el caso específico de la distribución gamma para la cual su valor  $\alpha = 1$

La variable aleatoria continua  $X$  tiene una distribución exponencial, con parámetro  $\beta$ , si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x/\beta}}{\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (41)$$

Donde  $\beta > 0$

La media y la varianza de la distribución exponencial son

$$\mu = \beta \quad (42)$$

$$\sigma^2 = \beta^2 \quad (43)$$

### 3.18 Distribución gamma

Esta distribución se utiliza para modelar tiempos de llegadas en instalaciones de servicio y tiempo de falla entre componentes y sistemas eléctricos.

La función gamma se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \text{para } \alpha > 0 \quad (44)$$

La variable aleatoria continua  $X$  tiene una distribución gamma, con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (45)$$

Cuando  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ .

La media y la varianza de la distribución gamma son

$$\mu = \alpha\beta \quad (46)$$

$$\sigma^2 = \alpha\beta^2 \quad (47)$$

### 3.19 Distribución ji cuadrada

Es otro caso especial de la distribución gamma que se obtiene al hacer  $\alpha = v / 2$  y  $\beta = 2$ , donde  $v$  es un entero positivo

La distribución tiene sólo un parámetro  $v$  llamado grados de libertad

La variable aleatoria continua  $X$  tiene una distribución ji cuadrada, con  $v$  grados de libertad, si su función está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{(v/2-1)} e^{(-x/2)}}{2^{(v/2)} \Gamma(v/2)}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (48)$$

Cuando  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$

La media y la varianza de la distribución ji cuadrada son

$$\mu = v \quad (49)$$

$$\sigma^2 = 2v \quad (50)$$

### 3.20 Distribución hipergeométrica

Aquí, nos interesa la probabilidad de seleccionar **x éxitos** de los **k artículos** considerados como éxito, y **n-x fracasos** de los **N-k fracasos** cuando se selecciona una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de  $N$  artículos.

Se tienen las siguientes dos propiedades:

- Se selecciona sin reemplazo una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de  $N$  artículos
- $k$  de los  $N$  son éxitos y  $N - k$  son fracasos

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria hipergeométrica  $X$ , el número de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño  $n$  que se selecciona de  $N$  artículos de los que  $k$  se denominan éxito y  $N-k$  fracaso, es

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (51)$$

La media y la varianza de la distribución hipergeométrica  $h(x; N, n, k)$  son

$$\mu = \frac{nk}{N} \quad (52)$$

$$\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \quad (53)$$

### 3.21 Distribución binomial negativa

Aquí, nos interesa la probabilidad de que ocurra el  $k$ -ésimo éxito en la  $x$ -ésima prueba

Los experimentos de este tipo se llaman experimentos binomiales negativos

El número  $X$  de pruebas que produce  $k$  éxitos es un experimento binomial negativo. Sus probabilidades dependen del número de éxitos que se desean y la probabilidad de un éxito en una prueba dada

Si pruebas independientes repetidas pueden tener como resultado un éxito con probabilidad  $p$  y un fracaso con probabilidad  $q = 1 - p$ , entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ , el número de la prueba en la que ocurre el  $k$ -ésimo éxito es

$$b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} \quad x = k, k+1, k+2, \dots \quad (54)$$

### 3.22 Distribución geométrica

Si se considera el caso especial de la distribución binomial negativa donde  $k = 1$ , entonces se tiene la distribución de probabilidad para el número de pruebas que se requieren para sólo un éxito.

Por ejemplo, nos podría interesar la probabilidad de que ocurra el primer sol en el tercer lanzamiento

Si pruebas independientes repetidas pueden tener como resultado un éxito con probabilidad  $p$  y un fracaso con probabilidad  $q = 1 - p$ , entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ , el número de la prueba en la que ocurre el primer éxito es

$$g(x; p) = pq^{x-1} \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

La media y la varianza de una variable aleatoria que sigue la distribución geométrica  $g(x; p)$  son:

$$\mu = \frac{1}{p} \quad (56)$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} \quad (57)$$



## Ejercicios

### Medidas de posición y variabilidad

1. Un fabricante de componentes electrónicos se interesa en determinar el tiempo de vida de cierto tipo de batería. La que sigue es una muestra, en horas de vida:

123, 116, 112, 110, 175, 126, 125, 111, 118, 117

- a) Encuentre la media de la muestra
- b) ¿cuál característica en este conjunto de datos es la responsable de la diferencia sustancial entre las dos?

2. Un fabricante de neumáticos quiere determinar el diámetro interior de cierto grado de neumático. Idealmente el diámetro sería 570 mm. Los datos son los siguientes: 572, 572, 568, 569, 565, 570

- a) Encuentre la media y mediana de la muestra
- b) Encuentre la varianza, desviación estándar y rango de la muestra
- c) Mediante el uso de las estadísticas calculadas en las partes a) y b), realice comentarios sobre la calidad de los neumáticos

### Variable aleatoria

3. Un embarque de ocho computadoras similares para una tienda contiene tres que están defectuosas. Si una escuela hace una compra al azar de dos de estas computadoras, encuentre la distribución de probabilidad para el número de defectuosas.
4. Encuentre la función acumulada de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  del ejemplo anterior., mediante el uso de  $F(x)$  , además verifique que  $f(2) = 3/8$ .

5. El número total de horas, medidas en unidades de 100 horas, que una familia utiliza una aspiradora en un periodo de un año es una variable aleatoria continua  $X$  que tiene la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

6. La proporción de personas que responden a cierta encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua  $X$  que tiene la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(x + 2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- a) Muestre que  $P(0 < X < 1) = 1$
- b) Encuentre la probabilidad de que más de  $\frac{1}{4}$  pero menos de  $\frac{1}{2}$  de las personas contactadas responden a este tipo de encuestas
7. Una fábrica de dulces distribuye cajas de chocolate con un surtido de cremas, chiclosos y nueces cubiertas con chocolate claro y oscuro. Para una caja seleccionada al azar, sean  $X$  y  $Y$ , respectivamente, las proporciones de chocolate claro y oscuro que son cremas y suponga que la función de densidad conjunta es

$$f(X, Y) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- a) Verifique la condición 1 de la función de densidad conjunta.
- b) Encuentre  $P[(X, Y) \in A]$ , donde  $A$  está en la región.

$$\left\{ (x, y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \right\}$$

8. Una vinatería opera instalaciones para atención en el automóvil y para atender a quien llega caminando. Un día seleccionado al azar, sean  $X$  y  $Y$ , respectivamente, las proporciones del tiempo que se utiliza cada instalación, y suponga que la función de densidad conjunta es



$$f(X, Y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que las instalaciones para atención en carro estén ocupadas menos de la mitad del tiempo.

9. Sea  $X$  la variable aleatoria que denota la vida en horas de cierto dispositivo electrónico. La función de densidad de probabilidad es

$$f(X, Y) = \begin{cases} \frac{20000}{x^3}, & x > 100 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre la vida esperada de este tipo de dispositivo.

10. Suponga que el número de autos  $X$  que pasa por un lavado de autos entre las 16 y 17 horas, en cualquier viernes tiene la siguiente distribución de probabilidad.

| <b>x</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> | <b>7</b> | <b>8</b> | <b>9</b> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $P(X=x)$ | 1/12     | 1/12     | 1/4      | 1/4      | 1/6      | 1/6      |

Sea  $g(X) = 2X - 1$  la cantidad de dinero, que en este periodo particular.

11. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f(X, Y) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre el valor esperado de  $g(X) = 4X + 3$

12. Sea la variable aleatoria  $X$  el número de automóviles que se utilizan con propósitos de negocios en un día de trabajado dado. Las distribuciones de probabilidad para las compañía A y B, respectivamente, son:

| <b>x</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
|----------|----------|----------|----------|
| $f(x)$   | 0.3      | 0.4      | 0.3      |

|      |     |     |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x    | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   |
| f(x) | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

- a) Grafique ambas distribuciones.
- b) Muestre que la varianza de la distribución de probabilidad de B es mayor que la de A.
13. Sea la variable aleatoria X el número de partes defectuosas de una máquina cuando se muestrean tres partes de una línea de producción y se prueban. La siguiente es la distribución de probabilidad de X.

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| x    | 0    | 1    | 2    | 3    |
| f(x) | 0.51 | 0.38 | 0.10 | 0.01 |

- a) Calcule  $\sigma^2$
14. La demanda semanal de Coca-Cola, en miles de litros, de una cadena local de tiendas, es una variable aleatoria continua X que tiene la densidad de probabilidad.

$$f(X, Y) = \begin{cases} 2(x - 1), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- a) Encuentre la media y la varianza de X.

### Distribución uniforme

15. Cuando se selecciona un foco al azar de una caja que contiene un foco de 40 watts, uno de 60, uno de 75 y uno de 100.
- .a) Obtenga el espacio muestral S, y la probabilidad de seleccionar cada uno de los focos
16. Cuando se lanza un dado, obtenga el espacio muestral S, y la probabilidad de obtener cada uno de los puntos del dado.

También calcule la media y varianza

17. Se selecciona un empleado de un equipo de 10 para supervisar cierto proyecto mediante la selección de una etiqueta al azar de una caja que contiene 10 etiquetas numeradas del 1 al 10.
- Encuentre la fórmula para distribución de probabilidad de  $X$  que representa el número en la etiqueta que se saca.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que el número que se extrae sea menor de 5?
  - Encuentre la varianza y media de la variable aleatoria  $X$ .
18. El temario de un examen para un proceso selectivo contiene 50 temas, de los cuales se elegirá uno por sorteo. Si una persona no ha estudiado los 15 últimos temas
- ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen?
  - Además calcule la media y varianza del evento

### Distribución binomial

19. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque dada es  $\frac{3}{4}$ . Encuentre la probabilidad de que sobrevivan exactamente dos de los siguientes cuatro componentes que se prueban.
20. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es  $\frac{4}{10}$ . Si se sabe que 15 personas contraen la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que:
- Sobrevivan al menos 10?
  - Sobrevivan de 3 a 8?
  - Sobrevivan exactamente 5?
21. Al probar cierta clase de neumático para camión en un terreno escabroso, se encuentra que 25% de los camiones no completan la prueba sin ponchaduras. De los siguientes 15 camiones probados, encuentre la probabilidad de que:
- De tres a seis tengan ponchadura
  - Menos de cuatro tengan ponchadura
  - Más de cinco tengan ponchadura?
  - ¿Cuántos de los 15 camiones se esperaría que tuviera ponchadura?

22. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es  $4/10$ . Si se sabe que 15 personas contraen la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que:
- a) Sobrevivan al menos 10?
  - b) Sobrevivan de 3 a 8?
  - c) Sobrevivan exactamente 5?
23. De acuerdo a un reporte publicado, una encuesta a nivel nacional aplicada a estudiantes universitarios reveló que casi el 70% desapruban el consumo diario de marihuana. Si se seleccionan 12 estudiantes al azar y se les pide su opinión, encuentre la probabilidad de que el número de los que desapruban fumar marihuana todos los días sea:
- a) Cualquier valor de 7 a 9
  - b) A lo más 5
  - c) No menos de 8

### **Distribución de Poisson**

24. Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es cuatro. ¿Cuál es la probabilidad de que seis partículas entren al contador en un milisegundo dado?
25. El número promedio de camiones tanque que llega cada día a cierta ciudad portuaria es 10. Las instalaciones en el puerto pueden manejar a lo más 15 camiones tanque por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día dado los camiones se tengan que regresar?
26. El estudio de un inventario determina que, en promedio, las demandas de un artículo en un almacén se realizan cinco veces al día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día dado se pida este artículo
- a) Más de cinco veces
  - b) Ninguna vez
27. Una secretaria comete dos errores por página, en promedio. ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente página cometa

- a) cuatro o más errores
- b) ningún error

**Distribución normal estándar**

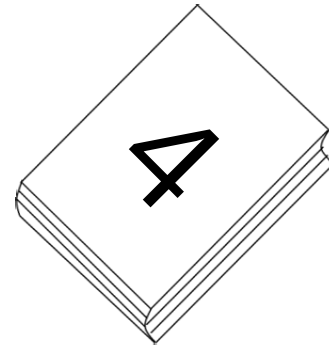
28. Dada una distribución normal estándar, encuentre el área bajo la curva que yace

- a) A la derecha de  $z = 1.84$
- b) Entre  $z = -1.97$  y  $z = 0.86$

29. Dada una distribución de probabilidad normal con  $\mu=300$  y  $\sigma=50$ , encuentre la probabilidad de que  $X$  tome un valor mayor que 362.

# Unidad

## Simulación de sistemas



Simulación

Ventajas de la simulación

Desventajas de la simulación

Pasos para realizar un estudio de simulación

Número aleatorios vs Números pseudoaleatorios

Algoritmo para generar números aleatorios

## 4. Simulación de sistemas

### 4.1 Simulación

Es la imitación de la operación de un proceso o sistema real a lo largo del tiempo, en ese reflejo se utilizan distribuciones de probabilidad para generar aleatoriamente los distintos eventos.

Se debe caracterizar matemáticamente las relaciones que definen de manera lógica la interacción de los componentes y de las variables endógenas y exógenas.

#### 4.1.1 Simulación de eventos discretos

Es el conjunto de relaciones lógicas, matemáticas y probabilísticas que integran el comportamiento de un sistema cuando se presenta un evento determinado.

**Entidad:** es la representación de los flujos de entrada a un sistema. Este es el responsable de que el estado del sistema cambie.

Ejemplo:

- Un vehículo que llega a una intersección.
- Un cliente que llega a un centro comercial.
- Los usuarios que llegan a hacer una transacción en el correo.

**Estados del sistema:** es la condición que guarda el sistema bajo estudio en un momento determinado. El estado de un sistema se compone de variables o características de operación puntuales, y de variables o características de operación acumuladas o promedio.

Ejemplo:

- Tiempo promedio de permanencia de una entidad en el sistema, en una fila, en un almacén, en un equipo.

**Evento:** es un cambio en el estado actual del sistema, existen dos tipos: actuales y futuros.

**Eventos actuales:** Son los que suceden en un sistema en un momento dado.

**Eventos futuros:** Son los cambios que se presentaran en el sistema de acuerdo a una programación dada.

Ejemplo:

- El evento actual se presenta cuando a una entidad llamada "pieza" se le realiza un proceso en una máquina.

- Evento futuro es el momento de conclusión del trabajo con la pieza y la continuación hacia el siguiente proceso de acuerdo con una programación (almacenamiento, inspección, etcétera).

**Localizaciones:** son todos aquellos lugares en los que la pieza puede detenerse para ser transformada, en general es un espacio físico donde llega una entidad a experimentar un evento.

Ejemplo:

- Un montacargas que transporta una pieza de un lugar a otro.
- Una persona que realiza una inspección y toma turnos para descansar

**Atributo:** es la característica de una entidad. Los atributos son útiles para diferenciar entidades y pueden adjudicarse en el momento de su creación o bien asignarse o cambiarse durante el proceso.

**Reloj de simulación:** es la cantidad de tiempo de la simulación. En general se relaciona con la tabla de eventos futuros, pues al cumplirse el tiempo programado para la realización de un evento futuro, éste se convierte en un evento actual.

Existen dos tipos de reloj:

- a) Absoluto: Parte de cero y termina en un tiempo total de simulación definido (inicio de operaciones hasta el cierre de ésta).
- b) Relativo: Sólo considera el lapso de tiempo que transcurre entre dos eventos.

## 4.2 Ventajas de la simulación

- Es una herramienta para conocer el impacto de los cambios en los procesos sin necesidad de llevarlos a cabo en la realidad
- Mejora el conocimiento del proceso actual al permitir que el analista vea, como se comporta el modelo bajo diferentes escenarios
- Es un medio de capacitación para la toma de decisiones
- Es más económico realizar un estudio de simulación que hacer muchos cambios en los procesos reales
- Permite encontrar las mejores condiciones de trabajo



- En problemas de gran complejidad la simulación permite generar una buena solución
- En la actualidad el software de simulación tiene una interface muy amigable con el usuario
- Existen herramientas de animación que facilitan la validación del sistema en todas sus etapas y facilita también la toma de decisiones

### **4.3 Desventajas de la simulación**

- La simulación puede ser costosa para problemas relativamente sencillos de resolver
- Se requiere bastante tiempo (generalmente meses) para realizar un buen estudio de simulación

### **4.4 Pasos para realizar un estudio de simulación**

1. Definición del sistema bajo estudio
2. Generación de modelo de simulación base
3. Recolección y análisis de datos
4. Generación del modelo preliminar
5. Verificación del modelo
6. Validación del modelo
7. Generación del modelo final
8. Determinación de los escenarios para el análisis
9. Análisis de sensibilidad.
10. Documentación del modelo, sugerencias y conclusiones

## 4.5 Número aleatorios vs Números pseudoaleatorios

Al realizar una simulación es necesario que exista variabilidad en sus eventos. Es necesario generar una serie de números que sean aleatorios por sí mismos y que su aleatoriedad se extrapole al modelo de simulación que se está construyendo

Existen muchas aplicaciones comerciales que incluyen generadores de números pseudoaleatorios, que pueden generar un conjunto muy grande de números que genera un conjunto muy grande de números que no muestren correlación entre ellos

**Números aleatorios:** se generan con cierta distribución que aparece en cualquier momento (número obtenido con cualquier posibilidad).

**Números pseudoaleatorio:** se utiliza un algoritmo para su obtención. Se puede garantizar que dichos números cumplen con condiciones generales de independencia y uniformidad.

Se tienen que evitar problemas como:

- Que los números del conjunto no estén uniformemente distribuidos, es decir, que haya demasiados en un subintervalo y en otros muy pocos o ninguno
- Los números generados sean discretos en lugar de continuos
- Que la media del conjunto este muy arriba o muy abajo de un medio
- Que la varianza del conjunto que este muy arriba o muy abajo un medio

### 4.5.1 Propiedades de los números pseudoaleatorios

1. Media de los aleatorios entre 0 y 1

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1 \quad (58)$$

2. Independencia implica que los números aleatorios no deben tener relación entre sí (figura)

## 4.6 Algoritmo para generar números aleatorios

### 4.6.1 Algoritmo de cuadrados medios

1. Seleccionar una semilla ( $X_0$ ) con D dígitos ( $D > 3$ ).

2. Sea  $X_0$  el resultado de elevar  $X_0$  al cuadrado; sea  $X_1$  D los dígitos del centro y sea  $r_i = 0.D$  dígitos del centro.
3. Sea  $Y_i$  el resultado de elevar  $X_i$  al cuadrado; sea  $X_{i+1} = D$  dígitos del centro, y sea  $r_{i+1} = 0.D$  dígitos del centro, para todo  $i=1,2,3\dots n$

Repetir el paso tres hasta obtener los n números deseados

$$X_0 = 5735$$

$$D = 4$$

#### 4.6.2 Algoritmo de productos medios

1. Seleccionar una semilla ( $X_0$ ) con D dígitos ( $D > 3$ ).
2. Seleccionar una semilla ( $X_1$ ) con D dígitos ( $D > 3$ ).
3. Sea  $Y_0 = X_0 * X_1$  y sea  $X_2 = D$  dígitos del centro. Sea  $r_i = 0.D$  dígitos del centro.
4. Sea  $Y_i = X_i * X_{i+1}$ ; sea  $X_{i+2}$  los D dígitos del centro y sea  $r_{i+1} = 0.D$  dígitos del centro para toda  $i$  igual= 1,2,3...n
5. Repetir el paso 4 hasta obtener los n números deseados.

$$X_0 = 5015$$

$$D = 4$$

#### 4.6.3 Algoritmo de multiplicador constante

Es similar al algoritmo de productos medios. En lugar de utilizar el producto de dos semillas, se realiza el producto de una semilla por una constante  $a$  ( $a > 3$  dígitos).

$$Y_0 = X_0 * a \quad (59)$$

$$Y_i = X_i * a \quad (60)$$

$$X_0 = 9803$$

$$D = 4$$

$$a = 6965$$

#### 4.6.4 Algoritmo Lineal

Este algoritmo fue propuesto por Lehmer en 1951, este algoritmo genera una sucesión de números enteros, por medio de la siguiente ecuación recursiva.

$$X_{i+1} = (ax_i + c) \bmod(m) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (61)$$

$X_0$  =es la semilla

$a$ = es la constante multiplicativa

$c$ = es la constante aditiva

$m$ =es el modulo

Nota: Todas las variables deben ser números enteros

**Anexo 1 Tablas estadísticas: distribución binomial**

Referencia: Richard A. Johnson, Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Editoria Pearson, Octava edición, 2012

| n | x | p      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|   |   | 0.05   | 0.10   | 0.15   | 0.20   | 0.25   | 0.30   | 0.35   | 0.40   | 0.45   | 0.50   | 0.55   | 0.60   | 0.65   | 0.70   | 0.75   | 0.80   | 0.85   | 0.90   | 0.95   |
| 2 | 0 | 0.9025 | 0.8100 | 0.7225 | 0.6400 | 0.5625 | 0.4900 | 0.4225 | 0.3600 | 0.3025 | 0.2500 | 0.2025 | 0.1600 | 0.1225 | 0.0900 | 0.0625 | 0.0400 | 0.0225 | 0.0100 | 0.0025 |
|   | 1 | 0.9975 | 0.9900 | 0.9775 | 0.9600 | 0.9375 | 0.9100 | 0.8775 | 0.8400 | 0.7975 | 0.7500 | 0.6975 | 0.6400 | 0.5775 | 0.5100 | 0.4375 | 0.3600 | 0.2775 | 0.1900 | 0.0975 |
| 3 | 0 | 0.8574 | 0.7290 | 0.6141 | 0.5120 | 0.4219 | 0.3430 | 0.2746 | 0.2160 | 0.1664 | 0.1250 | 0.0911 | 0.0640 | 0.0429 | 0.0270 | 0.0156 | 0.0080 | 0.0034 | 0.0010 | 0.0001 |
|   | 1 | 0.9927 | 0.9720 | 0.9393 | 0.8960 | 0.8438 | 0.7840 | 0.7183 | 0.6480 | 0.5748 | 0.5000 | 0.4252 | 0.3520 | 0.2818 | 0.2160 | 0.1563 | 0.1040 | 0.0607 | 0.0280 | 0.0073 |
|   | 2 | 0.9999 | 0.9990 | 0.9966 | 0.9920 | 0.9844 | 0.9730 | 0.9571 | 0.9360 | 0.9089 | 0.8750 | 0.8336 | 0.7840 | 0.7254 | 0.6570 | 0.5781 | 0.4880 | 0.3859 | 0.2710 | 0.1426 |
| 4 | 0 | 0.8145 | 0.6561 | 0.5220 | 0.4096 | 0.3164 | 0.2401 | 0.1785 | 0.1296 | 0.0915 | 0.0625 | 0.0410 | 0.0256 | 0.0150 | 0.0081 | 0.0039 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 |
|   | 1 | 0.9860 | 0.9477 | 0.8905 | 0.8192 | 0.7383 | 0.6517 | 0.5630 | 0.4752 | 0.3910 | 0.3125 | 0.2415 | 0.1792 | 0.1265 | 0.0837 | 0.0508 | 0.0272 | 0.0120 | 0.0037 | 0.0005 |
|   | 2 | 0.9995 | 0.9963 | 0.9880 | 0.9728 | 0.9492 | 0.9163 | 0.8735 | 0.8208 | 0.7585 | 0.6875 | 0.6090 | 0.5248 | 0.4370 | 0.3483 | 0.2617 | 0.1808 | 0.1095 | 0.0523 | 0.0140 |
|   | 3 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9984 | 0.9961 | 0.9919 | 0.9850 | 0.9744 | 0.9590 | 0.9375 | 0.9085 | 0.8704 | 0.8215 | 0.7599 | 0.6836 | 0.5904 | 0.4780 | 0.3439 | 0.1855 |
| 5 | 0 | 0.7738 | 0.5905 | 0.4437 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.1160 | 0.0778 | 0.0503 | 0.0313 | 0.0185 | 0.0102 | 0.0053 | 0.0024 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
|   | 1 | 0.9774 | 0.9185 | 0.8352 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.4284 | 0.3370 | 0.2562 | 0.1875 | 0.1312 | 0.0870 | 0.0540 | 0.0308 | 0.0156 | 0.0067 | 0.0022 | 0.0005 | 0.0000 |
|   | 2 | 0.9988 | 0.9914 | 0.9734 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.7648 | 0.6826 | 0.5931 | 0.5000 | 0.4069 | 0.3174 | 0.2352 | 0.1631 | 0.1035 | 0.0579 | 0.0266 | 0.0086 | 0.0012 |
|   | 3 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9978 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9460 | 0.9130 | 0.8688 | 0.8125 | 0.7438 | 0.6630 | 0.5716 | 0.4718 | 0.3672 | 0.2627 | 0.1648 | 0.0815 | 0.0226 |
|   | 4 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9947 | 0.9898 | 0.9815 | 0.9688 | 0.9497 | 0.9222 | 0.8840 | 0.8319 | 0.7627 | 0.6723 | 0.5563 | 0.4095 | 0.2262 |
| 6 | 0 | 0.7351 | 0.5314 | 0.3771 | 0.2621 | 0.1780 | 0.1176 | 0.0754 | 0.0467 | 0.0277 | 0.0156 | 0.0083 | 0.0041 | 0.0018 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|   | 1 | 0.9672 | 0.8857 | 0.7765 | 0.6554 | 0.5339 | 0.4202 | 0.3191 | 0.2333 | 0.1636 | 0.1094 | 0.0692 | 0.0410 | 0.0223 | 0.0109 | 0.0046 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 |
|   | 2 | 0.9978 | 0.9841 | 0.9527 | 0.9011 | 0.8306 | 0.7443 | 0.6471 | 0.5443 | 0.4415 | 0.3438 | 0.2553 | 0.1792 | 0.1174 | 0.0705 | 0.0376 | 0.0170 | 0.0059 | 0.0013 | 0.0001 |
|   | 3 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9941 | 0.9830 | 0.9624 | 0.9295 | 0.8826 | 0.8208 | 0.7447 | 0.6563 | 0.5585 | 0.4557 | 0.3529 | 0.2557 | 0.1694 | 0.0989 | 0.0473 | 0.0158 | 0.0022 |
|   | 4 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9954 | 0.9891 | 0.9777 | 0.9590 | 0.9308 | 0.8906 | 0.8364 | 0.7667 | 0.6809 | 0.5798 | 0.4661 | 0.3446 | 0.2235 | 0.1143 | 0.0328 |
|   | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9982 | 0.9959 | 0.9917 | 0.9844 | 0.9723 | 0.9533 | 0.9246 | 0.8824 | 0.8220 | 0.7379 | 0.6229 | 0.4686 | 0.2649 |
| 7 | 0 | 0.6983 | 0.4783 | 0.3206 | 0.2097 | 0.1335 | 0.0824 | 0.0490 | 0.0280 | 0.0152 | 0.0078 | 0.0037 | 0.0016 | 0.0006 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|   | 1 | 0.9556 | 0.8503 | 0.7166 | 0.5767 | 0.4449 | 0.3294 | 0.2338 | 0.1586 | 0.1024 | 0.0625 | 0.0357 | 0.0188 | 0.0090 | 0.0038 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
|   | 2 | 0.9962 | 0.9743 | 0.9262 | 0.8520 | 0.7564 | 0.6471 | 0.5323 | 0.4199 | 0.3164 | 0.2266 | 0.1529 | 0.0963 | 0.0556 | 0.0288 | 0.0129 | 0.0047 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 |
|   | 3 | 0.9998 | 0.9973 | 0.9879 | 0.9667 | 0.9294 | 0.8740 | 0.8002 | 0.7102 | 0.6083 | 0.5000 | 0.3917 | 0.2898 | 0.1998 | 0.1260 | 0.0706 | 0.0333 | 0.0121 | 0.0027 | 0.0002 |
|   | 4 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9953 | 0.9871 | 0.9712 | 0.9444 | 0.9037 | 0.8471 | 0.7734 | 0.6836 | 0.5801 | 0.4677 | 0.3529 | 0.2436 | 0.1480 | 0.0738 | 0.0257 | 0.0038 |
|   | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9962 | 0.9910 | 0.9812 | 0.9643 | 0.9375 | 0.8976 | 0.8414 | 0.7662 | 0.6706 | 0.5551 | 0.4233 | 0.2834 | 0.1497 | 0.0344 |
|   | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9994 | 0.9984 | 0.9963 | 0.9922 | 0.9848 | 0.9720 | 0.9510 | 0.9176 | 0.8665 | 0.7903 | 0.6794 | 0.5217 | 0.3017 |
| 8 | 0 | 0.6634 | 0.4305 | 0.2775 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0576 | 0.0319 | 0.0168 | 0.0084 | 0.0039 | 0.0017 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|   | 1 | 0.9428 | 0.8131 | 0.6572 | 0.5033 | 0.3671 | 0.2553 | 0.1691 | 0.1064 | 0.0632 | 0.0352 | 0.0181 | 0.0085 | 0.0036 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|   | 2 | 0.9942 | 0.9619 | 0.8948 | 0.7969 | 0.6785 | 0.5518 | 0.4278 | 0.3154 | 0.2201 | 0.1445 | 0.0885 | 0.0498 | 0.0253 | 0.0113 | 0.0042 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
|   | 3 | 0.9996 | 0.9950 | 0.9786 | 0.9437 | 0.8862 | 0.8059 | 0.7064 | 0.5941 | 0.4770 | 0.3633 | 0.2604 | 0.1737 | 0.1061 | 0.0580 | 0.0273 | 0.0104 | 0.0029 | 0.0004 | 0.0000 |
|   | 4 | 1.0000 | 0.9996 | 0.9971 | 0.9896 | 0.9727 | 0.9420 | 0.8939 | 0.8263 | 0.7396 | 0.6367 | 0.5230 | 0.4059 | 0.2936 | 0.1941 | 0.1138 | 0.0563 | 0.0214 | 0.0050 | 0.0004 |
|   | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9958 | 0.9887 | 0.9747 | 0.9502 | 0.9115 | 0.8555 | 0.7799 | 0.6846 | 0.5722 | 0.4482 | 0.3215 | 0.2031 | 0.1052 | 0.0381 | 0.0058 |
|   | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9964 | 0.9915 | 0.9819 | 0.9648 | 0.9368 | 0.8936 | 0.8309 | 0.7447 | 0.6329 | 0.4967 | 0.3428 | 0.1869 | 0.0572 |
|   | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9983 | 0.9961 | 0.9916 | 0.9832 | 0.9681 | 0.9424 | 0.8999 | 0.8322 | 0.7275 | 0.5695 | 0.3366 |

| n  | x      | P      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    |        | 0.05   | 0.10   | 0.15   | 0.20   | 0.25   | 0.30   | 0.35   | 0.40   | 0.45   | 0.50   | 0.55   | 0.60   | 0.65   | 0.70   | 0.75   | 0.80   | 0.85   | 0.90   | 0.95   |
| 9  | 0      | 0.6302 | 0.3874 | 0.2316 | 0.1342 | 0.0751 | 0.0404 | 0.0207 | 0.0101 | 0.0046 | 0.0020 | 0.0008 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 1      | 0.9288 | 0.7748 | 0.5995 | 0.4362 | 0.3003 | 0.1960 | 0.1211 | 0.0705 | 0.0385 | 0.0195 | 0.0091 | 0.0038 | 0.0014 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 2      | 0.9916 | 0.9470 | 0.8591 | 0.7382 | 0.6007 | 0.4628 | 0.3373 | 0.2318 | 0.1495 | 0.0898 | 0.0498 | 0.0250 | 0.0112 | 0.0043 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 3      | 0.9994 | 0.9917 | 0.9661 | 0.9144 | 0.8343 | 0.7297 | 0.6089 | 0.4826 | 0.3614 | 0.2539 | 0.1658 | 0.0994 | 0.0536 | 0.0253 | 0.0100 | 0.0031 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 |
|    | 4      | 1.0000 | 0.9991 | 0.9944 | 0.9804 | 0.9511 | 0.9012 | 0.8283 | 0.7334 | 0.6214 | 0.5000 | 0.3786 | 0.2666 | 0.1717 | 0.0988 | 0.0489 | 0.0196 | 0.0056 | 0.0009 | 0.0000 |
|    | 5      | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9969 | 0.9900 | 0.9747 | 0.9464 | 0.9006 | 0.8342 | 0.7461 | 0.6386 | 0.5174 | 0.3911 | 0.2703 | 0.1657 | 0.0856 | 0.0339 | 0.0083 | 0.0006 |
|    | 6      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9957 | 0.9888 | 0.9750 | 0.9502 | 0.9102 | 0.8505 | 0.7682 | 0.6627 | 0.5372 | 0.3993 | 0.2618 | 0.1409 | 0.0530 | 0.0084 |
|    | 7      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9986 | 0.9962 | 0.9909 | 0.9805 | 0.9615 | 0.9295 | 0.8789 | 0.8040 | 0.6997 | 0.5638 | 0.4005 | 0.2252 | 0.0712 |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9992 | 0.9980 | 0.9954 | 0.9899 | 0.9793 | 0.9596 | 0.9249 | 0.8658 | 0.7684 | 0.6126 | 0.3698 |
| 10 | 0      | 0.5987 | 0.3487 | 0.1969 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0135 | 0.0060 | 0.0025 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 1      | 0.9139 | 0.7361 | 0.5443 | 0.3758 | 0.2440 | 0.1493 | 0.0860 | 0.0464 | 0.0233 | 0.0107 | 0.0045 | 0.0017 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 2      | 0.9885 | 0.9298 | 0.8202 | 0.6778 | 0.5256 | 0.3828 | 0.2616 | 0.1673 | 0.0996 | 0.0547 | 0.0274 | 0.0123 | 0.0048 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 3      | 0.9990 | 0.9872 | 0.9500 | 0.8791 | 0.7759 | 0.6496 | 0.5138 | 0.3823 | 0.2660 | 0.1719 | 0.1020 | 0.0548 | 0.0260 | 0.0106 | 0.0035 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 |        |
|    | 4      | 0.9999 | 0.9984 | 0.9901 | 0.9672 | 0.9219 | 0.8497 | 0.7515 | 0.6331 | 0.5044 | 0.3770 | 0.2616 | 0.1662 | 0.0949 | 0.0473 | 0.0197 | 0.0064 | 0.0014 | 0.0001 |        |
|    | 5      | 1.0000 | 0.9999 | 0.9986 | 0.9936 | 0.9803 | 0.9527 | 0.9051 | 0.8338 | 0.7384 | 0.6230 | 0.4956 | 0.3669 | 0.2485 | 0.1503 | 0.0781 | 0.0328 | 0.0099 | 0.0016 |        |
|    | 6      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9740 | 0.9452 | 0.8980 | 0.8281 | 0.7340 | 0.6177 | 0.4862 | 0.3504 | 0.2241 | 0.1209 | 0.0500 | 0.0128 |        |
|    | 7      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9952 | 0.9877 | 0.9726 | 0.9453 | 0.9004 | 0.8327 | 0.7384 | 0.6172 | 0.4744 | 0.3222 | 0.1798 | 0.0702 |        |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 | 0.9955 | 0.9893 | 0.9767 | 0.9536 | 0.9140 | 0.8507 | 0.7560 | 0.6242 | 0.4557 | 0.2639 |        |
| 9  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9975 | 0.9940 | 0.9865 | 0.9718 | 0.9437 | 0.8926 | 0.8031 | 0.6513 | 0.4023 |        |        |
| 11 | 0      | 0.5688 | 0.3138 | 0.1673 | 0.0859 | 0.0422 | 0.0198 | 0.0088 | 0.0036 | 0.0014 | 0.0005 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 1      | 0.8981 | 0.6974 | 0.4922 | 0.3221 | 0.1971 | 0.1130 | 0.0606 | 0.0302 | 0.0139 | 0.0059 | 0.0022 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 2      | 0.9848 | 0.9104 | 0.7788 | 0.6174 | 0.4552 | 0.3127 | 0.2001 | 0.1189 | 0.0652 | 0.0327 | 0.0148 | 0.0059 | 0.0020 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 3      | 0.9984 | 0.9815 | 0.9306 | 0.8389 | 0.7133 | 0.5696 | 0.4256 | 0.2963 | 0.1911 | 0.1133 | 0.0610 | 0.0293 | 0.0122 | 0.0043 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 |        |        |
|    | 4      | 0.9999 | 0.9972 | 0.9841 | 0.9496 | 0.8854 | 0.7897 | 0.6683 | 0.5328 | 0.3971 | 0.2744 | 0.1738 | 0.0994 | 0.0501 | 0.0216 | 0.0076 | 0.0020 | 0.0003 |        |        |
|    | 5      | 1.0000 | 0.9997 | 0.9973 | 0.9883 | 0.9657 | 0.9218 | 0.8513 | 0.7535 | 0.6331 | 0.5000 | 0.3669 | 0.2465 | 0.1487 | 0.0782 | 0.0343 | 0.0117 | 0.0027 |        |        |
|    | 6      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9980 | 0.9924 | 0.9784 | 0.9499 | 0.9006 | 0.8262 | 0.7256 | 0.6029 | 0.4672 | 0.3317 | 0.2103 | 0.1146 | 0.0504 | 0.0159 |        |        |
|    | 7      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9957 | 0.9878 | 0.9707 | 0.9390 | 0.8867 | 0.8089 | 0.7037 | 0.5744 | 0.4304 | 0.2867 | 0.1611 | 0.0694 |        |        |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9980 | 0.9941 | 0.9852 | 0.9673 | 0.9348 | 0.8811 | 0.7999 | 0.6873 | 0.5448 | 0.3826 | 0.2212 |        |        |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9978 | 0.9941 | 0.9861 | 0.9698 | 0.9394 | 0.8870 | 0.8029 | 0.6779 | 0.5078 |        |        |
| 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9995 | 0.9986 | 0.9964 | 0.9912 | 0.9802 | 0.9578 | 0.9141 | 0.8327 |        |        |        |
| 12 | 0      | 0.5404 | 0.2824 | 0.1422 | 0.0687 | 0.0317 | 0.0138 | 0.0057 | 0.0022 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |        |
|    | 1      | 0.8816 | 0.6590 | 0.4435 | 0.2749 | 0.1584 | 0.0850 | 0.0424 | 0.0196 | 0.0083 | 0.0032 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |        |
|    | 2      | 0.9804 | 0.8891 | 0.7358 | 0.5583 | 0.3907 | 0.2528 | 0.1513 | 0.0834 | 0.0421 | 0.0193 | 0.0079 | 0.0028 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |        |
|    | 3      | 0.9978 | 0.9744 | 0.9078 | 0.7946 | 0.6488 | 0.4925 | 0.3467 | 0.2253 | 0.1345 | 0.0730 | 0.0356 | 0.0153 | 0.0056 | 0.0017 | 0.0004 | 0.0001 |        |        |        |
|    | 4      | 0.9998 | 0.9957 | 0.9761 | 0.9274 | 0.8424 | 0.7237 | 0.5833 | 0.4382 | 0.3044 | 0.1938 | 0.1117 | 0.0573 | 0.0255 | 0.0095 | 0.0028 | 0.0006 |        |        |        |
|    | 5      | 1.0000 | 0.9995 | 0.9954 | 0.9806 | 0.9456 | 0.8822 | 0.7873 | 0.6652 | 0.5269 | 0.3872 | 0.2607 | 0.1582 | 0.0846 | 0.0386 | 0.0143 | 0.0039 |        |        |        |
|    | 6      | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9961 | 0.9857 | 0.9614 | 0.9154 | 0.8418 | 0.7393 | 0.6128 | 0.4731 | 0.3348 | 0.2127 | 0.1178 | 0.0544 | 0.0194 |        |        |        |
|    | 7      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9972 | 0.9905 | 0.9745 | 0.9427 | 0.8883 | 0.8062 | 0.6956 | 0.5618 | 0.4167 | 0.2763 | 0.1576 | 0.0726 |        |        |        |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9983 | 0.9944 | 0.9847 | 0.9644 | 0.9270 | 0.8655 | 0.7747 | 0.6533 | 0.5075 | 0.3512 | 0.2054 |        |        |        |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9972 | 0.9921 | 0.9807 | 0.9579 | 0.9166 | 0.8487 | 0.7472 | 0.6093 | 0.4417 |        |        |        |
|    | 10     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9968 | 0.9917 | 0.9804 | 0.9576 | 0.9150 | 0.8416 | 0.7251 |        |        |        |
| 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9978 | 0.9943 | 0.9862 | 0.9683 | 0.9313 |        |        |        |        |

| n  | x      | P      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    |        | 0.05   | 0.10   | 0.15   | 0.20   | 0.25   | 0.30   | 0.35   | 0.40   | 0.45   | 0.50   | 0.55   | 0.60   | 0.65   | 0.70   | 0.75   | 0.80   | 0.85   | 0.90   | 0.95   |        |
| 13 | 0      | 0.5133 | 0.2542 | 0.1209 | 0.0550 | 0.0238 | 0.0097 | 0.0037 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 1      | 0.8646 | 0.6213 | 0.3983 | 0.2336 | 0.1267 | 0.0637 | 0.0296 | 0.0126 | 0.0049 | 0.0017 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 2      | 0.9755 | 0.8661 | 0.6920 | 0.5017 | 0.3326 | 0.2025 | 0.1132 | 0.0579 | 0.0269 | 0.0112 | 0.0041 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 3      | 0.9969 | 0.9658 | 0.8820 | 0.7473 | 0.5843 | 0.4206 | 0.2783 | 0.1686 | 0.0929 | 0.0461 | 0.0203 | 0.0078 | 0.0025 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 4      | 0.9997 | 0.9935 | 0.9658 | 0.9009 | 0.7940 | 0.6543 | 0.5005 | 0.3530 | 0.2279 | 0.1334 | 0.0698 | 0.0321 | 0.0126 | 0.0040 | 0.0010 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 5      | 1.0000 | 0.9991 | 0.9925 | 0.9700 | 0.9198 | 0.8346 | 0.7159 | 0.5744 | 0.4268 | 0.2905 | 0.1788 | 0.0977 | 0.0462 | 0.0182 | 0.0056 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 6      | 1.0000 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9930 | 0.9757 | 0.9376 | 0.8705 | 0.7712 | 0.6437 | 0.5000 | 0.3563 | 0.2288 | 0.1295 | 0.0624 | 0.0243 | 0.0070 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 7      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9944 | 0.9818 | 0.9538 | 0.9023 | 0.8212 | 0.7095 | 0.5732 | 0.4256 | 0.2841 | 0.1654 | 0.0802 | 0.0300 | 0.0075 | 0.0009 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9960 | 0.9874 | 0.9679 | 0.9302 | 0.8666 | 0.7721 | 0.6470 | 0.4995 | 0.3457 | 0.2060 | 0.0991 | 0.0342 | 0.0065 | 0.0003 | 0.0000 |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9975 | 0.9922 | 0.9797 | 0.9539 | 0.9071 | 0.8314 | 0.7217 | 0.5794 | 0.4157 | 0.2527 | 0.1180 | 0.0342 | 0.0031 | 0.0000 |
|    | 10     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9959 | 0.9888 | 0.9731 | 0.9421 | 0.8868 | 0.7975 | 0.6674 | 0.4983 | 0.3080 | 0.1339 | 0.0245 | 0.0000 |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 | 0.9951 | 0.9874 | 0.9704 | 0.9363 | 0.8733 | 0.7664 | 0.6017 | 0.3787 | 0.1354 | 0.0000 |
| 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9963 | 0.9903 | 0.9762 | 0.9450 | 0.8791 | 0.7458 | 0.4867 | 0.0000 |        |
| 14 | 0      | 0.4877 | 0.2288 | 0.1028 | 0.0440 | 0.0178 | 0.0068 | 0.0024 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 1      | 0.8470 | 0.5846 | 0.3567 | 0.1979 | 0.1010 | 0.0475 | 0.0205 | 0.0081 | 0.0029 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 2      | 0.9699 | 0.8416 | 0.6479 | 0.4481 | 0.2811 | 0.1608 | 0.0839 | 0.0398 | 0.0170 | 0.0065 | 0.0022 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 3      | 0.9958 | 0.9559 | 0.8535 | 0.6982 | 0.5213 | 0.3552 | 0.2205 | 0.1243 | 0.0632 | 0.0287 | 0.0114 | 0.0039 | 0.0011 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 4      | 0.9996 | 0.9908 | 0.9533 | 0.8702 | 0.7415 | 0.5842 | 0.4227 | 0.2793 | 0.1672 | 0.0898 | 0.0426 | 0.0175 | 0.0060 | 0.0017 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 5      | 1.0000 | 0.9985 | 0.9885 | 0.9561 | 0.8883 | 0.7805 | 0.6405 | 0.4859 | 0.3373 | 0.2120 | 0.1189 | 0.0583 | 0.0243 | 0.0083 | 0.0022 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 6      | 1.0000 | 0.9998 | 0.9978 | 0.9884 | 0.9617 | 0.9067 | 0.8164 | 0.6925 | 0.5461 | 0.3953 | 0.2586 | 0.1501 | 0.0753 | 0.0315 | 0.0103 | 0.0024 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 7      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9976 | 0.9897 | 0.9685 | 0.9247 | 0.8499 | 0.7414 | 0.6047 | 0.4539 | 0.3075 | 0.1836 | 0.0933 | 0.0383 | 0.0116 | 0.0022 | 0.0002 | 0.0000 |        |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9996 | 0.9978 | 0.9917 | 0.9757 | 0.9417 | 0.8811 | 0.7880 | 0.6627 | 0.5141 | 0.3595 | 0.2195 | 0.1117 | 0.0439 | 0.0115 | 0.0015 | 0.0000 |        |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9983 | 0.9940 | 0.9825 | 0.9574 | 0.9102 | 0.8328 | 0.7207 | 0.5773 | 0.4158 | 0.2585 | 0.1298 | 0.0467 | 0.0092 | 0.0004 |        |
|    | 10     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9989 | 0.9961 | 0.9886 | 0.9713 | 0.9368 | 0.8757 | 0.7795 | 0.6448 | 0.4787 | 0.3018 | 0.1465 | 0.0441 | 0.0042 |        |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9978 | 0.9935 | 0.9830 | 0.9602 | 0.9161 | 0.8392 | 0.7189 | 0.5519 | 0.3521 | 0.1584 | 0.0301 |        |
|    | 12     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9991 | 0.9971 | 0.9919 | 0.9795 | 0.9525 | 0.8990 | 0.8021 | 0.6433 | 0.4154 | 0.1530 |        |
| 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9976 | 0.9932 | 0.9822 | 0.9560 | 0.8972 | 0.7712 | 0.5123 |        |        |
| 15 | 0      | 0.4633 | 0.2059 | 0.0874 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 1      | 0.8290 | 0.5490 | 0.3186 | 0.1671 | 0.0802 | 0.0353 | 0.0142 | 0.0052 | 0.0017 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 2      | 0.9638 | 0.8159 | 0.6042 | 0.3980 | 0.2361 | 0.1268 | 0.0617 | 0.0271 | 0.0107 | 0.0037 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 3      | 0.9945 | 0.9444 | 0.8227 | 0.6482 | 0.4613 | 0.2969 | 0.1727 | 0.0905 | 0.0424 | 0.0176 | 0.0063 | 0.0019 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 4      | 0.9994 | 0.9873 | 0.9383 | 0.8358 | 0.6865 | 0.5155 | 0.3519 | 0.2173 | 0.1204 | 0.0592 | 0.0255 | 0.0093 | 0.0028 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 5      | 0.9999 | 0.9977 | 0.9832 | 0.9389 | 0.8516 | 0.7216 | 0.5643 | 0.4032 | 0.2608 | 0.1509 | 0.0769 | 0.0338 | 0.0124 | 0.0037 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 6      | 1.0000 | 0.9997 | 0.9964 | 0.9819 | 0.9434 | 0.8689 | 0.7548 | 0.6098 | 0.4522 | 0.3036 | 0.1818 | 0.0950 | 0.0422 | 0.0152 | 0.0042 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 7      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9958 | 0.9827 | 0.9500 | 0.8868 | 0.7869 | 0.6535 | 0.5000 | 0.3465 | 0.2131 | 0.1132 | 0.0500 | 0.0173 | 0.0042 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9958 | 0.9848 | 0.9578 | 0.9050 | 0.8182 | 0.6964 | 0.5478 | 0.3902 | 0.2452 | 0.1311 | 0.0566 | 0.0181 | 0.0036 | 0.0003 | 0.0000 |        |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 | 0.9876 | 0.9662 | 0.9231 | 0.8491 | 0.7392 | 0.5968 | 0.4357 | 0.2784 | 0.1484 | 0.0611 | 0.0168 | 0.0022 | 0.0001 |        |
|    | 10     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9972 | 0.9907 | 0.9745 | 0.9408 | 0.8796 | 0.7827 | 0.6481 | 0.4845 | 0.3135 | 0.1642 | 0.0617 | 0.0127 | 0.0006 |        |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9981 | 0.9937 | 0.9824 | 0.9576 | 0.9095 | 0.8273 | 0.7031 | 0.5387 | 0.3518 | 0.1773 | 0.0556 | 0.0055 |        |
|    | 12     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9963 | 0.9893 | 0.9729 | 0.9383 | 0.8732 | 0.7639 | 0.6020 | 0.3958 | 0.1841 | 0.0362 |        |
|    | 13     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 | 0.9948 | 0.9858 | 0.9647 | 0.9198 | 0.8329 | 0.6814 | 0.4510 | 0.1710 |
| 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9984 | 0.9953 | 0.9866 | 0.9648 | 0.9126 | 0.7941 | 0.5367 |        |        |

| n  | x      | p      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    |        | 0.05   | 0.10   | 0.15   | 0.20   | 0.25   | 0.30   | 0.35   | 0.40   | 0.45   | 0.50   | 0.55   | 0.60   | 0.65   | 0.70   | 0.75   | 0.80   | 0.85   | 0.90   | 0.95   |
| 16 | 0      | 0.4401 | 0.1853 | 0.0743 | 0.0281 | 0.0100 | 0.0033 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 1      | 0.8108 | 0.5147 | 0.2839 | 0.1407 | 0.0635 | 0.0261 | 0.0098 | 0.0033 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 2      | 0.9571 | 0.7892 | 0.5614 | 0.3518 | 0.1971 | 0.0994 | 0.0451 | 0.0183 | 0.0066 | 0.0021 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 3      | 0.9930 | 0.9316 | 0.7899 | 0.5981 | 0.4050 | 0.2459 | 0.1339 | 0.0651 | 0.0281 | 0.0106 | 0.0035 | 0.0009 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 4      | 0.9991 | 0.9830 | 0.9209 | 0.7982 | 0.6302 | 0.4499 | 0.2892 | 0.1666 | 0.0853 | 0.0384 | 0.0149 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 5      | 0.9999 | 0.9967 | 0.9765 | 0.9183 | 0.8103 | 0.6598 | 0.4900 | 0.3288 | 0.1976 | 0.1051 | 0.0486 | 0.0191 | 0.0062 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 6      | 1.0000 | 0.9995 | 0.9944 | 0.9733 | 0.9204 | 0.8247 | 0.6881 | 0.5272 | 0.3660 | 0.2272 | 0.1241 | 0.0583 | 0.0229 | 0.0071 | 0.0016 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 7      | 1.0000 | 0.9999 | 0.9989 | 0.9930 | 0.9729 | 0.9256 | 0.8406 | 0.7161 | 0.5629 | 0.4018 | 0.2559 | 0.1423 | 0.0671 | 0.0257 | 0.0075 | 0.0015 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9985 | 0.9925 | 0.9743 | 0.9329 | 0.8577 | 0.7441 | 0.5982 | 0.4371 | 0.2839 | 0.1594 | 0.0744 | 0.0271 | 0.0070 | 0.0011 | 0.0001 | 0.0000 |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9984 | 0.9929 | 0.9771 | 0.9417 | 0.8759 | 0.7728 | 0.6340 | 0.4728 | 0.3119 | 0.1753 | 0.0796 | 0.0267 | 0.0056 | 0.0005 | 0.0000 |
|    | 10     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9938 | 0.9809 | 0.9514 | 0.8949 | 0.8024 | 0.6712 | 0.5100 | 0.3402 | 0.1897 | 0.0817 | 0.0235 | 0.0033 | 0.0001 |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9951 | 0.9851 | 0.9616 | 0.9147 | 0.8334 | 0.7108 | 0.5501 | 0.3698 | 0.2018 | 0.0791 | 0.0170 | 0.0009 |
|    | 12     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9719 | 0.9349 | 0.8661 | 0.7541 | 0.5950 | 0.4019 | 0.2101 | 0.0684 | 0.0070 |
|    | 13     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9979 | 0.9934 | 0.9817 | 0.9549 | 0.9006 | 0.8029 | 0.6482 | 0.4386 | 0.2108 | 0.0429 |
|    | 14     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9967 | 0.9902 | 0.9739 | 0.9365 | 0.8593 | 0.7161 | 0.4853 | 0.1892 |
| 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9967 | 0.9900 | 0.9719 | 0.9257 | 0.8147 | 0.5599 |        |
| 17 | 0      | 0.4181 | 0.1668 | 0.0631 | 0.0225 | 0.0075 | 0.0023 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 1      | 0.7922 | 0.4818 | 0.2525 | 0.1182 | 0.0501 | 0.0193 | 0.0067 | 0.0021 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 2      | 0.9497 | 0.7618 | 0.5198 | 0.3096 | 0.1637 | 0.0774 | 0.0327 | 0.0123 | 0.0041 | 0.0012 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 3      | 0.9912 | 0.9174 | 0.7556 | 0.5489 | 0.3530 | 0.2019 | 0.1028 | 0.0464 | 0.0184 | 0.0064 | 0.0019 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 4      | 0.9988 | 0.9779 | 0.9013 | 0.7582 | 0.5739 | 0.3887 | 0.2348 | 0.1260 | 0.0596 | 0.0245 | 0.0086 | 0.0025 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 5      | 0.9999 | 0.9953 | 0.9681 | 0.8943 | 0.7653 | 0.5968 | 0.4197 | 0.2639 | 0.1471 | 0.0717 | 0.0301 | 0.0106 | 0.0030 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 6      | 1.0000 | 0.9992 | 0.9917 | 0.9623 | 0.8929 | 0.7752 | 0.6188 | 0.4478 | 0.2902 | 0.1662 | 0.0826 | 0.0348 | 0.0120 | 0.0032 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 7      | 1.0000 | 0.9999 | 0.9983 | 0.9891 | 0.9598 | 0.8954 | 0.7872 | 0.6405 | 0.4743 | 0.3145 | 0.1834 | 0.0919 | 0.0383 | 0.0127 | 0.0031 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 |        |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9974 | 0.9876 | 0.9597 | 0.9006 | 0.8011 | 0.6626 | 0.5000 | 0.3374 | 0.1989 | 0.0994 | 0.0403 | 0.0124 | 0.0026 | 0.0003 | 0.0000 |        |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9969 | 0.9873 | 0.9617 | 0.9081 | 0.8166 | 0.6855 | 0.5257 | 0.3595 | 0.2128 | 0.1046 | 0.0402 | 0.0109 | 0.0017 | 0.0001 |        |
|    | 10     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9968 | 0.9880 | 0.9652 | 0.9174 | 0.8338 | 0.7098 | 0.5522 | 0.3812 | 0.2248 | 0.1071 | 0.0377 | 0.0083 | 0.0008 |        |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9970 | 0.9894 | 0.9699 | 0.9283 | 0.8529 | 0.7361 | 0.5803 | 0.4032 | 0.2347 | 0.1057 | 0.0319 | 0.0047 |        |
|    | 12     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9975 | 0.9914 | 0.9755 | 0.9404 | 0.8740 | 0.7652 | 0.6113 | 0.4261 | 0.2418 | 0.0987 | 0.0221 |        |
|    | 13     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9981 | 0.9936 | 0.9816 | 0.9536 | 0.8972 | 0.7981 | 0.6470 | 0.4511 | 0.2444 | 0.0826 |        |
|    | 14     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9988 | 0.9959 | 0.9877 | 0.9673 | 0.9226 | 0.8363 | 0.6904 | 0.4802 | 0.2382 |        |
|    | 15     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9979 | 0.9933 | 0.9807 | 0.9499 | 0.8818 | 0.7475 | 0.5182 |        |
| 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9977 | 0.9925 | 0.9775 | 0.9369 | 0.8332 |        |        |
| 18 | 0      | 0.3972 | 0.1501 | 0.0536 | 0.0180 | 0.0056 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 1      | 0.7735 | 0.4503 | 0.2241 | 0.0991 | 0.0395 | 0.0142 | 0.0046 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 2      | 0.9419 | 0.7338 | 0.4797 | 0.2713 | 0.1353 | 0.0600 | 0.0236 | 0.0082 | 0.0025 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 3      | 0.9891 | 0.9018 | 0.7202 | 0.5010 | 0.3057 | 0.1646 | 0.0783 | 0.0328 | 0.0120 | 0.0038 | 0.0010 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 4      | 0.9985 | 0.9718 | 0.8794 | 0.7164 | 0.5187 | 0.3327 | 0.1886 | 0.0942 | 0.0411 | 0.0154 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 5      | 0.9998 | 0.9936 | 0.9581 | 0.8671 | 0.7175 | 0.5344 | 0.3550 | 0.2088 | 0.1077 | 0.0481 | 0.0183 | 0.0058 | 0.0014 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 6      | 1.0000 | 0.9988 | 0.9882 | 0.9487 | 0.8610 | 0.7217 | 0.5491 | 0.3743 | 0.2258 | 0.1189 | 0.0537 | 0.0203 | 0.0062 | 0.0014 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |        |        |
|    | 7      | 1.0000 | 0.9998 | 0.9973 | 0.9837 | 0.9431 | 0.8593 | 0.7283 | 0.5634 | 0.3915 | 0.2403 | 0.1280 | 0.0576 | 0.0212 | 0.0061 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 |        |        |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9957 | 0.9807 | 0.9404 | 0.8609 | 0.7368 | 0.5778 | 0.4073 | 0.2527 | 0.1347 | 0.0597 | 0.0210 | 0.0054 | 0.0009 | 0.0001 |        |        |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9946 | 0.9790 | 0.9403 | 0.8653 | 0.7473 | 0.5927 | 0.4222 | 0.2632 | 0.1391 | 0.0596 | 0.0193 | 0.0043 | 0.0005 |        |        |
| 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9939 | 0.9788 | 0.9424 | 0.8720 | 0.7597 | 0.6085 | 0.4366 | 0.2717 | 0.1407 | 0.0569 | 0.0163 | 0.0027 |        |        |        |



| n  | x  | p      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    |    | 0.05   | 0.10   | 0.15   | 0.20   | 0.25   | 0.30   | 0.35   | 0.40   | 0.45   | 0.50   | 0.55   | 0.60   | 0.65   | 0.70   | 0.75   | 0.80   | 0.85   | 0.90   | 0.95   |
| 11 |    | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9986 | 0.9938 | 0.9797 | 0.9463 | 0.8811 | 0.7742 | 0.6257 | 0.4509 | 0.2783 | 0.1390 | 0.0513 | 0.0118 | 0.0012 | 0.0000 |
| 12 |    | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9986 | 0.9942 | 0.9817 | 0.9519 | 0.8923 | 0.7912 | 0.6450 | 0.4656 | 0.2825 | 0.1329 | 0.0419 | 0.0064 | 0.0002 |
| 13 |    | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9951 | 0.9846 | 0.9589 | 0.9058 | 0.8114 | 0.6673 | 0.4813 | 0.2836 | 0.1206 | 0.0282 | 0.0015 |
| 14 |    | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9962 | 0.9880 | 0.9672 | 0.9217 | 0.8354 | 0.6943 | 0.4990 | 0.2798 | 0.0982 | 0.0109 |        |
| 15 |    | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9975 | 0.9918 | 0.9764 | 0.9400 | 0.8647 | 0.7287 | 0.5203 | 0.2662 | 0.0581 |
| 16 |    | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9954 | 0.9858 | 0.9605 | 0.9009 | 0.7759 | 0.5497 | 0.2265 |
| 17 |    | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9944 | 0.9820 | 0.9464 | 0.8499 | 0.6028 |
| 19 | 0  | 0.3774 | 0.1351 | 0.0456 | 0.0144 | 0.0042 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 1  | 0.7547 | 0.4203 | 0.1985 | 0.0829 | 0.0310 | 0.0104 | 0.0031 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 2  | 0.9335 | 0.7054 | 0.4413 | 0.2369 | 0.1113 | 0.0462 | 0.0170 | 0.0055 | 0.0015 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 3  | 0.9868 | 0.8850 | 0.6841 | 0.4551 | 0.2631 | 0.1332 | 0.0591 | 0.0230 | 0.0077 | 0.0022 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 4  | 0.9980 | 0.9648 | 0.8556 | 0.6733 | 0.4654 | 0.2822 | 0.1500 | 0.0696 | 0.0280 | 0.0096 | 0.0028 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 5  | 0.9998 | 0.9914 | 0.9463 | 0.8369 | 0.6678 | 0.4739 | 0.2968 | 0.1629 | 0.0777 | 0.0318 | 0.0109 | 0.0031 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 6  | 1.0000 | 0.9983 | 0.9837 | 0.9324 | 0.8251 | 0.6655 | 0.4812 | 0.3081 | 0.1727 | 0.0835 | 0.0342 | 0.0116 | 0.0031 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 7  | 1.0000 | 0.9997 | 0.9959 | 0.9767 | 0.9225 | 0.8180 | 0.6656 | 0.4878 | 0.3169 | 0.1796 | 0.0871 | 0.0352 | 0.0114 | 0.0028 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 8  | 1.0000 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9933 | 0.9713 | 0.9161 | 0.8145 | 0.6675 | 0.4940 | 0.3238 | 0.1841 | 0.0885 | 0.0347 | 0.0105 | 0.0023 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 9  | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9984 | 0.9911 | 0.9674 | 0.9125 | 0.8139 | 0.6710 | 0.5000 | 0.3290 | 0.1861 | 0.0875 | 0.0326 | 0.0089 | 0.0016 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9977 | 0.9895 | 0.9653 | 0.9115 | 0.8159 | 0.6762 | 0.5060 | 0.3325 | 0.1855 | 0.0839 | 0.0287 | 0.0067 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9972 | 0.9886 | 0.9648 | 0.9129 | 0.8204 | 0.6831 | 0.5122 | 0.3344 | 0.1820 | 0.0775 | 0.0233 | 0.0041 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9969 | 0.9884 | 0.9658 | 0.9165 | 0.8273 | 0.6919 | 0.5188 | 0.3345 | 0.1749 | 0.0676 | 0.0163 | 0.0017 | 0.0000 |
|    | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9969 | 0.9891 | 0.9682 | 0.9223 | 0.8371 | 0.7032 | 0.5261 | 0.3322 | 0.1631 | 0.0537 | 0.0086 | 0.0002 |
|    | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9972 | 0.9904 | 0.9720 | 0.9304 | 0.8500 | 0.7178 | 0.5346 | 0.3267 | 0.1444 | 0.0352 | 0.0020 |        |
|    | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9978 | 0.9923 | 0.9770 | 0.9409 | 0.8668 | 0.7369 | 0.5449 | 0.3159 | 0.1150 | 0.0132 |        |
|    | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9985 | 0.9945 | 0.9830 | 0.9538 | 0.8887 | 0.7631 | 0.5587 | 0.2946 | 0.0665 |        |
|    | 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9969 | 0.9896 | 0.9690 | 0.9171 | 0.8015 | 0.5797 | 0.2453 |        |
|    | 18 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9958 | 0.9856 | 0.9544 | 0.8649 | 0.6226 |        |
| 20 | 0  | 0.3585 | 0.1216 | 0.0388 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 1  | 0.7358 | 0.3917 | 0.1756 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0021 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 2  | 0.9245 | 0.6769 | 0.4049 | 0.2061 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0121 | 0.0036 | 0.0009 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 3  | 0.9841 | 0.8670 | 0.6477 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0444 | 0.0160 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 4  | 0.9974 | 0.9568 | 0.8298 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.1182 | 0.0510 | 0.0189 | 0.0059 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 5  | 0.9997 | 0.9887 | 0.9327 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.2454 | 0.1256 | 0.0553 | 0.0207 | 0.0064 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 6  | 1.0000 | 0.9976 | 0.9781 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.4166 | 0.2500 | 0.1299 | 0.0577 | 0.0214 | 0.0065 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 7  | 1.0000 | 0.9996 | 0.9941 | 0.9679 | 0.8982 | 0.7723 | 0.6010 | 0.4159 | 0.2520 | 0.1316 | 0.0580 | 0.0210 | 0.0060 | 0.0013 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 8  | 1.0000 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.7624 | 0.5956 | 0.4143 | 0.2517 | 0.1308 | 0.0565 | 0.0196 | 0.0051 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 9  | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9974 | 0.9861 | 0.9520 | 0.8782 | 0.7553 | 0.5914 | 0.4119 | 0.2493 | 0.1275 | 0.0532 | 0.0171 | 0.0039 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9961 | 0.9829 | 0.9468 | 0.8725 | 0.7507 | 0.5881 | 0.4086 | 0.2447 | 0.1218 | 0.0480 | 0.0139 | 0.0026 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
|    | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9949 | 0.9804 | 0.9435 | 0.8692 | 0.7483 | 0.5857 | 0.4044 | 0.2376 | 0.1133 | 0.0409 | 0.0100 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 |
|    | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9987 | 0.9940 | 0.9790 | 0.9420 | 0.8684 | 0.7480 | 0.5841 | 0.3990 | 0.2277 | 0.1018 | 0.0321 | 0.0059 | 0.0004 | 0.0000 |
|    | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9935 | 0.9786 | 0.9423 | 0.8701 | 0.7500 | 0.5834 | 0.3920 | 0.2142 | 0.0867 | 0.0219 | 0.0024 | 0.0000 |
|    | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9936 | 0.9793 | 0.9447 | 0.8744 | 0.7546 | 0.5836 | 0.3828 | 0.1958 | 0.0673 | 0.0113 | 0.0003 |        |
|    | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9941 | 0.9811 | 0.9490 | 0.8818 | 0.7625 | 0.5852 | 0.3704 | 0.1702 | 0.0432 | 0.0026 |        |        |
|    | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9951 | 0.9840 | 0.9556 | 0.8929 | 0.7748 | 0.5886 | 0.3523 | 0.1330 | 0.0159 |        |        |        |
|    | 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9991 | 0.9964 | 0.9879 | 0.9645 | 0.9087 | 0.7939 | 0.5951 | 0.3231 | 0.0755 |
|    | 18 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9979 | 0.9924 | 0.9757 | 0.9308 | 0.8244 | 0.6083 | 0.2642 |        |
|    | 19 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9968 | 0.9885 | 0.9612 | 0.8784 | 0.6415 |        |        |

Referencia: Richard A. Johnson, Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Editoria Pearson, Octava edición, 2012

## Anexo 2 Tablas de distribución Poisson

| $\lambda \backslash x$ | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.02                   | 0.980 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.04                   | 0.961 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.06                   | 0.942 | 0.998 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.08                   | 0.923 | 0.997 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.10                   | 0.905 | 0.995 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.15                   | 0.861 | 0.990 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 0.20                   | 0.819 | 0.982 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 0.25                   | 0.779 | 0.974 | 0.998 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 0.30                   | 0.741 | 0.963 | 0.996 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 0.35                   | 0.705 | 0.951 | 0.994 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 0.40                   | 0.670 | 0.938 | 0.992 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 0.45                   | 0.638 | 0.925 | 0.989 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 0.50                   | 0.607 | 0.910 | 0.986 | 0.998 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 0.55                   | 0.577 | 0.894 | 0.982 | 0.998 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 0.60                   | 0.549 | 0.878 | 0.977 | 0.997 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 0.65                   | 0.522 | 0.861 | 0.972 | 0.996 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |
| 0.70                   | 0.497 | 0.844 | 0.966 | 0.994 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |
| 0.75                   | 0.472 | 0.827 | 0.959 | 0.993 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |
| 0.80                   | 0.449 | 0.809 | 0.953 | 0.991 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |
| 0.85                   | 0.427 | 0.791 | 0.945 | 0.989 | 0.998 | 1.000 |       |       |       |       |
| 0.90                   | 0.407 | 0.772 | 0.937 | 0.987 | 0.998 | 1.000 |       |       |       |       |
| 0.95                   | 0.387 | 0.754 | 0.929 | 0.984 | 0.997 | 1.000 |       |       |       |       |
| 1.0                    | 0.368 | 0.736 | 0.920 | 0.981 | 0.996 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |
| 1.1                    | 0.333 | 0.699 | 0.900 | 0.974 | 0.995 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |
| 1.2                    | 0.301 | 0.663 | 0.879 | 0.966 | 0.992 | 0.998 | 1.000 |       |       |       |
| 1.3                    | 0.273 | 0.627 | 0.857 | 0.957 | 0.989 | 0.998 | 1.000 |       |       |       |
| 1.4                    | 0.247 | 0.592 | 0.833 | 0.946 | 0.986 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |       |
| 1.5                    | 0.223 | 0.558 | 0.809 | 0.934 | 0.981 | 0.996 | 0.999 | 1.000 |       |       |
| 1.6                    | 0.202 | 0.525 | 0.783 | 0.921 | 0.976 | 0.994 | 0.999 | 1.000 |       |       |
| 1.7                    | 0.183 | 0.493 | 0.757 | 0.907 | 0.970 | 0.992 | 0.998 | 1.000 |       |       |
| 1.8                    | 0.165 | 0.463 | 0.731 | 0.891 | 0.964 | 0.990 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |
| 1.9                    | 0.150 | 0.434 | 0.704 | 0.875 | 0.956 | 0.987 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |
| 2.0                    | 0.135 | 0.406 | 0.677 | 0.857 | 0.947 | 0.983 | 0.995 | 0.999 | 1.000 |       |
| 2.2                    | 0.111 | 0.355 | 0.623 | 0.819 | 0.928 | 0.975 | 0.993 | 0.998 | 1.000 |       |
| 2.4                    | 0.091 | 0.308 | 0.570 | 0.779 | 0.904 | 0.964 | 0.988 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |
| 2.6                    | 0.074 | 0.267 | 0.518 | 0.736 | 0.877 | 0.951 | 0.983 | 0.995 | 0.999 | 1.000 |

| $\lambda \backslash x$ | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2.8                    | 0.061 | 0.231 | 0.469 | 0.692 | 0.848 | 0.935 | 0.976 | 0.992 | 0.998 | 0.999 |
| 3.0                    | 0.050 | 0.199 | 0.423 | 0.647 | 0.815 | 0.916 | 0.966 | 0.988 | 0.996 | 0.999 |
| 3.2                    | 0.041 | 0.171 | 0.380 | 0.603 | 0.781 | 0.895 | 0.955 | 0.983 | 0.994 | 0.998 |
| 3.4                    | 0.033 | 0.147 | 0.340 | 0.558 | 0.744 | 0.871 | 0.942 | 0.977 | 0.992 | 0.997 |
| 3.6                    | 0.027 | 0.126 | 0.303 | 0.515 | 0.706 | 0.844 | 0.927 | 0.969 | 0.988 | 0.996 |
| 3.8                    | 0.022 | 0.107 | 0.269 | 0.473 | 0.668 | 0.816 | 0.909 | 0.960 | 0.984 | 0.994 |
| 4.0                    | 0.018 | 0.092 | 0.238 | 0.433 | 0.629 | 0.785 | 0.889 | 0.949 | 0.979 | 0.992 |
| 4.2                    | 0.015 | 0.078 | 0.210 | 0.395 | 0.590 | 0.753 | 0.867 | 0.936 | 0.972 | 0.989 |
| 4.4                    | 0.012 | 0.066 | 0.185 | 0.359 | 0.551 | 0.720 | 0.844 | 0.921 | 0.964 | 0.985 |
| 4.6                    | 0.010 | 0.056 | 0.163 | 0.326 | 0.513 | 0.686 | 0.818 | 0.905 | 0.955 | 0.980 |
| 4.8                    | 0.008 | 0.048 | 0.143 | 0.294 | 0.476 | 0.651 | 0.791 | 0.887 | 0.944 | 0.975 |
| 5.0                    | 0.007 | 0.040 | 0.125 | 0.265 | 0.440 | 0.616 | 0.762 | 0.867 | 0.932 | 0.968 |
| 5.2                    | 0.006 | 0.034 | 0.109 | 0.238 | 0.406 | 0.581 | 0.732 | 0.845 | 0.918 | 0.960 |
| 5.4                    | 0.005 | 0.029 | 0.095 | 0.213 | 0.373 | 0.546 | 0.702 | 0.822 | 0.903 | 0.951 |
| 5.6                    | 0.004 | 0.024 | 0.082 | 0.191 | 0.342 | 0.512 | 0.670 | 0.797 | 0.886 | 0.941 |
| 5.8                    | 0.003 | 0.021 | 0.072 | 0.170 | 0.313 | 0.478 | 0.638 | 0.771 | 0.867 | 0.929 |
| 6.0                    | 0.002 | 0.017 | 0.062 | 0.151 | 0.285 | 0.446 | 0.606 | 0.744 | 0.847 | 0.916 |
| 6.2                    | 0.002 | 0.015 | 0.054 | 0.134 | 0.259 | 0.414 | 0.574 | 0.716 | 0.826 | 0.902 |
| 6.4                    | 0.002 | 0.012 | 0.046 | 0.119 | 0.235 | 0.384 | 0.542 | 0.687 | 0.803 | 0.886 |
| 6.6                    | 0.001 | 0.010 | 0.040 | 0.105 | 0.213 | 0.355 | 0.511 | 0.658 | 0.780 | 0.869 |
| 6.8                    | 0.001 | 0.009 | 0.034 | 0.093 | 0.192 | 0.327 | 0.480 | 0.628 | 0.755 | 0.850 |
| 7.0                    | 0.001 | 0.007 | 0.030 | 0.082 | 0.173 | 0.301 | 0.450 | 0.599 | 0.729 | 0.830 |
| 7.2                    | 0.001 | 0.006 | 0.025 | 0.072 | 0.156 | 0.276 | 0.420 | 0.569 | 0.703 | 0.810 |
| 7.4                    | 0.001 | 0.005 | 0.022 | 0.063 | 0.140 | 0.253 | 0.392 | 0.539 | 0.676 | 0.788 |
| 7.6                    | 0.001 | 0.004 | 0.019 | 0.055 | 0.125 | 0.231 | 0.365 | 0.510 | 0.648 | 0.765 |
| 7.8                    | 0.000 | 0.004 | 0.016 | 0.048 | 0.112 | 0.210 | 0.338 | 0.481 | 0.620 | 0.741 |
| 8.0                    | 0.000 | 0.003 | 0.014 | 0.042 | 0.100 | 0.191 | 0.313 | 0.453 | 0.593 | 0.717 |
| 8.5                    | 0.000 | 0.002 | 0.009 | 0.030 | 0.074 | 0.150 | 0.256 | 0.386 | 0.523 | 0.653 |
| 9.0                    | 0.000 | 0.001 | 0.006 | 0.021 | 0.055 | 0.116 | 0.207 | 0.324 | 0.456 | 0.587 |
| 9.5                    | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.015 | 0.040 | 0.089 | 0.165 | 0.269 | 0.392 | 0.522 |
| 10.0                   | 0.000 | 0.000 | 0.003 | 0.010 | 0.029 | 0.067 | 0.130 | 0.220 | 0.333 | 0.458 |
| 10.5                   | 0.000 | 0.000 | 0.002 | 0.007 | 0.021 | 0.050 | 0.102 | 0.179 | 0.279 | 0.397 |
| 11.0                   | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.005 | 0.015 | 0.038 | 0.079 | 0.143 | 0.232 | 0.341 |
| 11.5                   | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.003 | 0.011 | 0.028 | 0.060 | 0.114 | 0.191 | 0.289 |
| 12.0                   | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.002 | 0.008 | 0.020 | 0.046 | 0.090 | 0.155 | 0.242 |
| 12.5                   | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.002 | 0.005 | 0.015 | 0.035 | 0.070 | 0.125 | 0.200 |

| $\lambda \backslash x$ | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 13.0                   | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.011 | 0.026 | 0.054 | 0.100 | 0.166 |
| 13.5                   | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.003 | 0.008 | 0.019 | 0.041 | 0.079 | 0.135 |
| 14.0                   | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.002 | 0.006 | 0.014 | 0.032 | 0.062 | 0.109 |
| 14.5                   | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.010 | 0.024 | 0.048 | 0.088 |
| 15.0                   | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.003 | 0.008 | 0.018 | 0.037 | 0.070 |
|                        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|                        | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    | 17    | 18    | 19    |
| 2.8                    | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3.0                    | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3.2                    | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3.4                    | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3.6                    | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3.8                    | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| 4.0                    | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| 4.2                    | 0.996 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| 4.4                    | 0.994 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 4.6                    | 0.992 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 4.8                    | 0.990 | 0.996 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 5.0                    | 0.986 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 5.2                    | 0.982 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 5.4                    | 0.977 | 0.990 | 0.996 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 5.6                    | 0.972 | 0.988 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |
| 5.8                    | 0.965 | 0.984 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |
| 6.0                    | 0.957 | 0.980 | 0.991 | 0.996 | 0.999 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |
| 6.2                    | 0.949 | 0.975 | 0.989 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |
| 6.4                    | 0.939 | 0.969 | 0.986 | 0.994 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |
| 6.6                    | 0.927 | 0.963 | 0.982 | 0.992 | 0.997 | 0.999 | 0.999 | 1.000 |       |       |
| 6.8                    | 0.915 | 0.955 | 0.978 | 0.990 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |
| 7.0                    | 0.901 | 0.947 | 0.973 | 0.987 | 0.994 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |
| 7.2                    | 0.887 | 0.937 | 0.967 | 0.984 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | 1.000 |       |
| 7.4                    | 0.871 | 0.926 | 0.961 | 0.980 | 0.991 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |
| 7.6                    | 0.854 | 0.915 | 0.954 | 0.976 | 0.989 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |
| 7.8                    | 0.835 | 0.902 | 0.945 | 0.971 | 0.986 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |       |
| 8.0                    | 0.816 | 0.888 | 0.936 | 0.966 | 0.983 | 0.992 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |
| 8.5                    | 0.763 | 0.849 | 0.909 | 0.949 | 0.973 | 0.986 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 0.999 |
| 9.0                    | 0.706 | 0.803 | 0.876 | 0.926 | 0.959 | 0.978 | 0.989 | 0.995 | 0.998 | 0.999 |
| 9.5                    | 0.645 | 0.752 | 0.836 | 0.898 | 0.940 | 0.967 | 0.982 | 0.991 | 0.996 | 0.998 |
| 10.0                   | 0.583 | 0.697 | 0.792 | 0.864 | 0.917 | 0.951 | 0.973 | 0.986 | 0.993 | 0.997 |

| $\lambda \backslash x$ | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    | 17    | 18    | 19    |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 10.5                   | 0.521 | 0.639 | 0.742 | 0.825 | 0.888 | 0.932 | 0.960 | 0.978 | 0.988 | 0.994 |
| 11.0                   | 0.460 | 0.579 | 0.689 | 0.781 | 0.854 | 0.907 | 0.944 | 0.968 | 0.982 | 0.991 |
| 11.5                   | 0.402 | 0.520 | 0.633 | 0.733 | 0.815 | 0.878 | 0.924 | 0.954 | 0.974 | 0.986 |
| 12.0                   | 0.347 | 0.462 | 0.576 | 0.682 | 0.772 | 0.844 | 0.899 | 0.937 | 0.963 | 0.979 |
| 12.5                   | 0.297 | 0.406 | 0.519 | 0.628 | 0.725 | 0.806 | 0.869 | 0.916 | 0.948 | 0.969 |
| 13.0                   | 0.252 | 0.353 | 0.463 | 0.573 | 0.675 | 0.764 | 0.835 | 0.890 | 0.930 | 0.957 |
| 13.5                   | 0.211 | 0.304 | 0.409 | 0.518 | 0.623 | 0.718 | 0.798 | 0.861 | 0.908 | 0.942 |
| 14.0                   | 0.176 | 0.260 | 0.358 | 0.464 | 0.570 | 0.669 | 0.756 | 0.827 | 0.883 | 0.923 |
| 14.5                   | 0.145 | 0.220 | 0.311 | 0.413 | 0.518 | 0.619 | 0.711 | 0.790 | 0.853 | 0.901 |
| 15.0                   | 0.118 | 0.185 | 0.268 | 0.363 | 0.466 | 0.568 | 0.664 | 0.749 | 0.819 | 0.875 |
|                        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|                        | 20    | 21    | 22    | 23    | 24    | 25    | 26    | 27    | 28    | 29    |
| 8.5                    | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 9.0                    | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 9.5                    | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 10.0                   | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| 10.5                   | 0.997 | 0.999 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 11.0                   | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| 11.5                   | 0.992 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |       |
| 12.0                   | 0.988 | 0.994 | 0.997 | 0.999 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |       |
| 12.5                   | 0.983 | 0.991 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |
| 13.0                   | 0.975 | 0.986 | 0.992 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |       |
| 13.5                   | 0.965 | 0.980 | 0.989 | 0.994 | 0.997 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |       |       |
| 14.0                   | 0.952 | 0.971 | 0.983 | 0.991 | 0.995 | 0.997 | 0.999 | 0.999 | 1.000 |       |
| 14.5                   | 0.936 | 0.960 | 0.976 | 0.986 | 0.992 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 0.999 | 1.000 |
| 15.0                   | 0.917 | 0.947 | 0.967 | 0.981 | 0.989 | 0.994 | 0.997 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |

Referencia: Richard A. Johnson, Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Editoria Pearson, Octava edición, 2012

**Anexo 3 Tabla de Función de distribución de la normal estándar**

| $z$  | 0.00      | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -5.0 | 0.0000003 |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -4.0 | 0.00003   |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -3.5 | 0.0002    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -3.4 | 0.0003    | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 |
| -3.3 | 0.0005    | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0006 | 0.0003 |
| -3.2 | 0.0007    | 0.0007 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 |
| -3.1 | 0.0010    | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 | 0.0007 |
| -3.0 | 0.0013    | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| -2.9 | 0.0019    | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| -2.8 | 0.0026    | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| -2.7 | 0.0035    | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| -2.6 | 0.0047    | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| -2.5 | 0.0062    | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| -2.4 | 0.0082    | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| -2.3 | 0.0107    | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| -2.2 | 0.0139    | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| -2.1 | 0.0179    | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| -2.0 | 0.0228    | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| -1.9 | 0.0287    | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| -1.8 | 0.0359    | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| -1.7 | 0.0446    | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| -1.6 | 0.0548    | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| -1.5 | 0.0668    | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| -1.4 | 0.0808    | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| -1.3 | 0.0968    | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| -1.2 | 0.1151    | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| -1.1 | 0.1357    | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| -1.0 | 0.1587    | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| -0.9 | 0.1841    | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| -0.8 | 0.2119    | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| -0.7 | 0.2420    | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| -0.6 | 0.2743    | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| -0.5 | 0.3085    | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| -0.4 | 0.3446    | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| -0.3 | 0.3821    | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| -0.2 | 0.4207    | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| -0.1 | 0.4602    | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| -0.0 | 0.5000    | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |

| $z$ | 0.00     | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000   | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398   | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5973   | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179   | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554   | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915   | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257   | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580   | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881   | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159   | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413   | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643   | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849   | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032   | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192   | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332   | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452   | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554   | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641   | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713   | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772   | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821   | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861   | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893   | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918   | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938   | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953   | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965   | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974   | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981   | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987   | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990   | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993   | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995   | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997   | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998   |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| 4.0 | 0.99997  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| 5.0 | 0.999997 |        |        |        |        |        |        |        |        |        |

Referencia: Richard A. Johnson, Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Editoria Pearson, Octava edición, 2012

**Anexo 4 Tabla de Función de distribución de la t-Student**

| $\nu$ | $\alpha = 0.10$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.025$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.00833$ | $\alpha = 0.00625$ | $\alpha = 0.005$ | $\nu$ |
|-------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|--------------------|--------------------|------------------|-------|
| 1     | 3.078           | 6.314           | 12.706           | 31.821          | 38.204             | 50.923             | 63.657           | 1     |
| 2     | 1.886           | 2.920           | 4.303            | 6.965           | 7.650              | 8.860              | 9.925            | 2     |
| 3     | 1.638           | 2.353           | 3.182            | 4.541           | 4.857              | 5.392              | 5.841            | 3     |
| 4     | 1.533           | 2.132           | 2.776            | 3.747           | 3.961              | 4.315              | 4.604            | 4     |
| 5     | 1.476           | 2.015           | 2.571            | 3.365           | 3.534              | 3.810              | 4.032            | 5     |
| 6     | 1.440           | 1.943           | 2.447            | 3.143           | 3.288              | 3.521              | 3.707            | 6     |
| 7     | 1.415           | 1.895           | 2.365            | 2.998           | 3.128              | 3.335              | 3.499            | 7     |
| 8     | 1.397           | 1.860           | 2.306            | 2.896           | 3.016              | 3.206              | 3.355            | 8     |
| 9     | 1.383           | 1.833           | 2.262            | 2.821           | 2.934              | 3.111              | 3.250            | 9     |
| 10    | 1.372           | 1.812           | 2.228            | 2.764           | 2.870              | 3.038              | 3.169            | 10    |
| 11    | 1.363           | 1.796           | 2.201            | 2.718           | 2.820              | 2.891              | 3.106            | 11    |
| 12    | 1.356           | 1.782           | 2.179            | 2.681           | 2.780              | 2.934              | 3.055            | 12    |
| 13    | 1.350           | 1.771           | 2.160            | 2.650           | 2.746              | 2.896              | 3.012            | 13    |
| 14    | 1.345           | 1.761           | 2.145            | 2.624           | 2.718              | 2.864              | 2.977            | 14    |
| 15    | 1.341           | 1.753           | 2.131            | 2.602           | 2.694              | 2.837              | 2.947            | 15    |
| 16    | 1.337           | 1.746           | 2.120            | 2.583           | 2.673              | 2.813              | 2.921            | 16    |
| 17    | 1.333           | 1.740           | 2.110            | 2.567           | 2.655              | 2.793              | 2.898            | 17    |
| 18    | 1.330           | 1.734           | 2.101            | 2.552           | 2.639              | 2.775              | 2.878            | 18    |
| 19    | 1.328           | 1.729           | 2.093            | 2.539           | 2.625              | 2.759              | 2.861            | 19    |
| 20    | 1.325           | 1.725           | 2.086            | 2.528           | 2.613              | 2.744              | 2.845            | 20    |
| 21    | 1.323           | 1.721           | 2.080            | 2.518           | 2.602              | 2.732              | 2.831            | 21    |
| 22    | 1.321           | 1.717           | 2.074            | 2.508           | 2.591              | 2.720              | 2.819            | 22    |
| 23    | 1.319           | 1.714           | 2.069            | 2.500           | 2.582              | 2.710              | 2.807            | 23    |
| 24    | 1.318           | 1.711           | 2.064            | 2.492           | 2.574              | 2.700              | 2.797            | 24    |
| 25    | 1.316           | 1.708           | 2.060            | 2.485           | 2.566              | 2.692              | 2.787            | 25    |
| 26    | 1.315           | 1.706           | 2.056            | 2.479           | 2.559              | 2.684              | 2.779            | 26    |
| 27    | 1.314           | 1.703           | 2.052            | 2.473           | 2.553              | 2.676              | 2.771            | 27    |
| 28    | 1.313           | 1.701           | 2.048            | 2.467           | 2.547              | 2.669              | 2.763            | 28    |
| 29    | 1.311           | 1.699           | 2.045            | 2.462           | 2.541              | 2.663              | 2.756            | 29    |
| inf.  | 1.282           | 1.645           | 1.960            | 2.326           | 2.394              | 2.498              | 2.576            | inf.  |

Referencia: Richard A. Johnson, Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Editoria Pearson, Octava edición, 2012



## BIBLIOGRAFÍA

### BÁSICA

- Joseph Sussman. Introduction to Transportation Systems. Artech House, 2005.
- Ludwin Von Bertalanffy. Teoría General de Sistemas. Fondo de Cultura Económica, 2006.
- Eduardo García Dunna. Simulación y Análisis de Sistemas con Promodel, Pearson, 2006.
- Sheldon M. Ross. Simulación. Pearson, 1999.

### COMPLEMENTARIA

- Jerry Banks, John S. Carson II, Barry L. Nelson y David M. Nicol. Discrete Event System Simulation. Prentice Hall, 4ta Edición, 2004.
- Francisco García, José Sierra, Virginia Guzmán. Simulación de Sistemas para Administración e Ingeniería, Editoria Patria, 2007.
- Mohammad R. Azarang y Eduardo García Dunna. Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos, McGraw Hill, 1996.
- Sheldon M. Ross. Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. McGraw Hill, 2a Edición, 2000.

### CONSULTADA

- Richard A. Johnson, Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Editoria Pearson, Octava edición, 2012