**UNIDAD ACADÉMICA PROFESIONAL TIANGUISTENCO**

**PROGRAMA DE ESTUDIOS**

**LICENCIATURA DE INGENIERÍA EN PRODUCCIÓN INDUSTRIAL**

# UNIDAD DE APRENDIZAJE (UA): ÁLGEBRA

Créditos institucionales de la UA: 6

Material visual: Diapositivas

## Unidad de competencia I

Conceptos preliminares

Elaborado por: Dr. en Ad. Amador Huitrón Contreras

Semestre 2016-B

# Unidad de aprendizaje: Álgebra
# Unidad de competencia I. Conceptos preliminares

## Índice

# 1.1 Conjunto de números reales

# Conjunto

Es una colección de objetos, y a los objetos se les denomina elementos o miembros del conjunto.

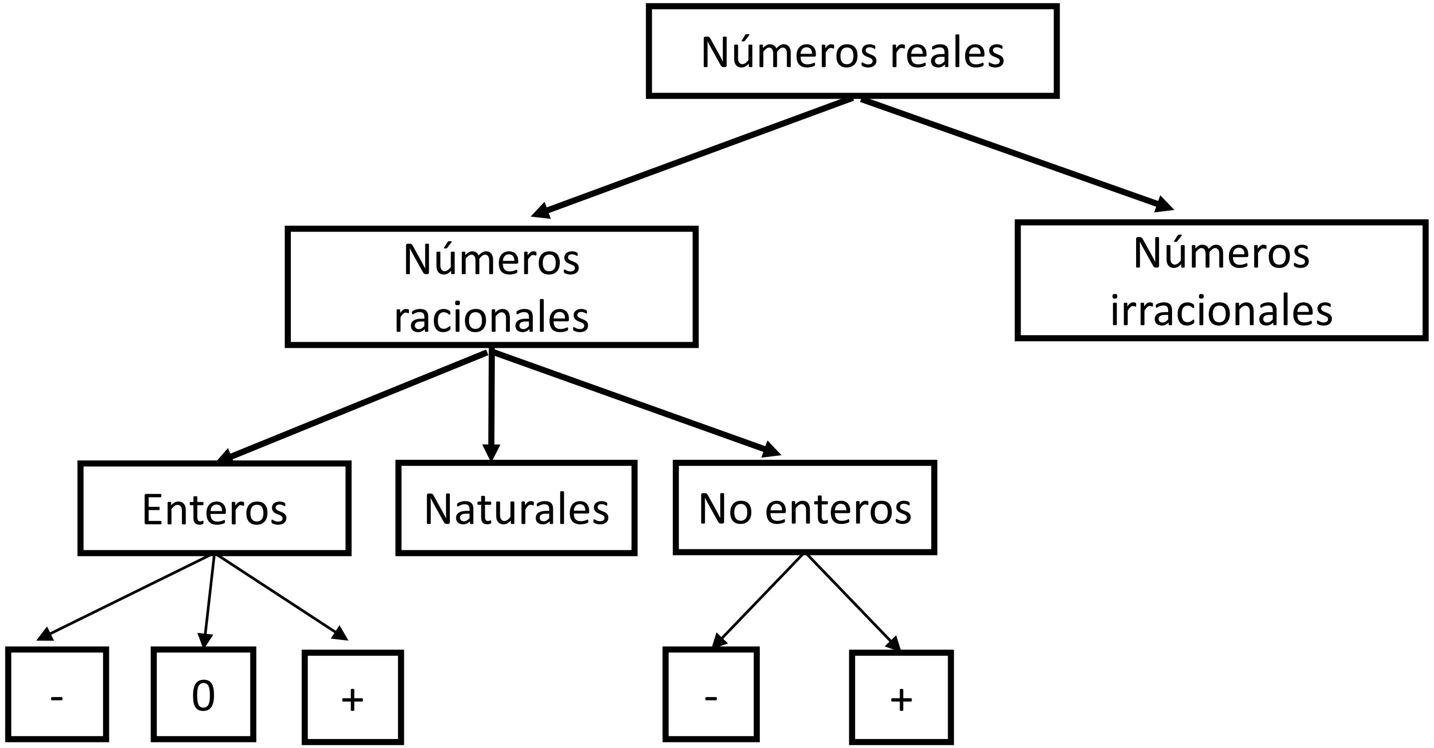
Ejemplo:

$A = \{ \text{vocales del abecedario} \}$ *descripción verbal*

$A = \{ a, e, i, o, u \}$ *listado*

$A = \{ x / x \text{ es un vocal} \}$ *notación constructor*

# Conjunto de números reales




El conjunto de los números reales está compuesta por el conjunto de números racionales y los números irracionales

# Tipos de números en los números reales

Números naturales:

1, 2, 3, 4, …

Números enteros: consta de los números naturales junto con sus negativos y cero

…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …

# Tipos de números en los números reales

Números racional: es cualquier número que se expresa de la forma $\frac{a}{b}$ ;

donde *a* y *b* son enteros, y *b* no es cero.

$$\mathbf{-3,\ \frac{-3}{7},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0.3,\ 3\frac{1}{2}}$$

-3 porque -3 $= \frac{-3}{1} = \frac{3}{-1}$ ; 0 porque $0 = \frac{0}{3} = \frac{0}{-5} = \ldots$

0.3 porque $0.3 = \frac{3}{10}$ ; $3\frac{1}{2}$ porque $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

# Tipos de números en los números reales

Un número racional se puede representar en números decimales, las cuales pueden ser terminales, repetitivos o no repetitivos.

Decimales terminales: 0.3, 0.25, 0.456, 0.7325

Decimales repetitivos: 0.6666…. ; 0.121212…. ; 0.23171717..

Para indicar un bloque repetitivo generalmente se indica encima del bloque una barra

$0.\overline{6}$ ; $0.\overline{12}$ ; $0.23\overline{17}$

# Números irracionales

Un número irracional es un número que no se puede expresar en la forma $\frac{a}{b}$, además tiene una representación decimal no repetitiva y no terminal.

$\sqrt{2}$ = 1.414213562373095

$\sqrt{3}$ = 1.73205080756887

$\pi = \mathbf{3.14159265358979}$

# Razón de ser de los números reales

El ser humano emplea los números reales para satisfacer necesidades específicas:

a) Los números naturales los usa para contar.

b) Los números negativos para representar una deuda o una temperatura bajo cero

c) Los números racionales para representar “tres cuartos de kilo de azúcar”

d) Los irracionales para medir la diagonal de un cuadrado

# 1.2 Jerarquización de operadores aritméticos

# Orden de las operaciones aritméticas

Para llevar a cabo una operación compleja (donde intervienen varias operaciones, se sugiere seguir el siguiente orden:

Primero: Efectuar las operaciones encerradas entre paréntesis, corchete y llaves (hacerlo de adentro hacia afuera).

Segundo: Calcular las potencias y raíces

Tercero: efectuar los productos y cocientes (divisiones)

Cuarto: realizar las sumas y restas

# Orden de las operaciones aritméticas

Ejemplo:

$$= \frac{25 + (15+2)+ ((12*2)-10)- (2)^2}{(12*3)}$$

$$= \frac{25 + 17 + (24-10)-4}{15}$$

$$= \frac{25 + 17 +14 -4}{15}$$

$$= \frac{66}{15}$$

## 1.2 Propiedades de la aritmética

# Propiedades de los números enteros

| Propiedad | Representación | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|---|
| Conmutativa | a + b = b + a<br><br>a * b = b * a | 8 + 3 = 3 + 8<br><br>4 * 6 = 6 * 4 | Cuando se suman dos números, el orden no importa<br><br>Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa |
| Asociativas | (a + b) + c = a + (b + c)<br><br>(a * b) * c = a * (b * c) | (2 + 4) + 6 = 2 + (4 + 6)<br><br>(4*5)*3 = 4*(5*3) | Cuando se suman tres números, no importa cuáles dos de ellos se suman primero<br><br>Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero |
| Distributivas | a * (b + c) = a*b + a*c<br><br>(b + c) * a = a*b + a*c | 3*(6+2) = 3*6 + 3*2<br><br>(6+2)*3 = 3*6 + 3*2 | Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, se obtiene el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados. |

# Propiedades de las fracciones

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$ | $\frac{2}{3} * \frac{7}{9} = \frac{2*7}{3*9} = \frac{14}{27}$ | Para multiplicar fracciones, multiplique numeradores y denominadores |
| $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a*d}{b*c}$ | $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2*7}{3*5} = \frac{14}{15}$ | Para dividir fracciones, multiplique el recíproco el divisor |
| $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ | $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{8}{7}$ | Para sumar fracciones con el mismo denominador, sume los numeradores. El denominador no cambia |
| $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ | $\frac{5}{9} + \frac{2}{7} = \frac{(5*7)+(9*2)}{63} = \frac{53}{63}$ | Para sumar fracciones con diferentes denominadores, encuentre el común denominador, posteriormente sume los productos de numerador por denominador |
| $\frac{a*c}{b*c} = \frac{a+b}{c}$ | $\frac{3*6}{5*6} = \frac{3}{3}$ | Cancelar los números que sean factores comunes en numerador y denominador |
| Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces a*d = b*c | $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ , entonces 2*12 = 3*8<br>24 = 24 | Multiplicación cruzada de dos fracciones equivalentes |

# Leyes de los signos (multiplicación y división)

| Operación de signos | producto |
|---|---|
| (+)  (+) | (+) |
| $\frac{(+)}{(+)}$ | (+) |
| (+) (-) | (-) |
| $\frac{(+)}{(-)}$ | (-) |
| (-)  (-) | (+) |
| $\frac{(-)}{(-)}$ | (+) |
| (-) (+) | (-) |
| $\frac{(-)}{(+)}$ | (-) |

# Leyes de los exponentes (potencia)

| Ley | ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| $a^m . a^n = a^{m+n}$ | $4^3 . 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$ | Al multiplicar dos potencias del mismo número, se suman sus exponentes |
| $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | $\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$ | Al dividir dos potencias del mismo número, restar los exponentes |
| $(a^m)^n = a^{mn}$ | $(5^3)^5 = 5^{15}$ | Al elevar una potencia a una nueva potencia con el mismo número, multiplique los exponentes |
| $(ab)^m = a^m * a^m$ | $(3 . 6)^3 = 3^3 * 6^3$ | Al elevar un producto a una potencia, elevar cada factor a la potencia |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ | $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$ | Para elevar una razón a una potencia, elevar el numerado y denominador a la potencia |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ | $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$ | Para elevar una razón a una potencia negativa, invertir la fracción y cambiar el signo del exponente |
| $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$ | $\frac{2^{-3}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{2^3}$ | Para elevar una potencia de un número negativo, invierta la posición del numerador y denominador. Cambie el signo del exponente. |

Nota: en álgebra se sugiere evitar el uso de exponentes negativos. Tenga presente la última ley.

# Propiedades de las raíces

Una raíz es la expresión de un número a elevado a una fracción como potencia.

Ejemplo:

$\sqrt[5]{a^3}$ = $a^{\frac{3}{5}}$

$\sqrt[4]{3^5}$ = $3^{\frac{5}{4}}$ =$\sqrt[4]{243}$

Donde:

$a$ es la base

3 es el exponente

5 es la raíz,

# Propiedades de raíces

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ | $\sqrt[3]{64*(-27)} = \sqrt[3]{64} * \sqrt[3]{-27}$ = 4 * -3 = -12 | La raíz del producto de dos factores, es igual al producto de la raíz de cada factor |
| $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | $\sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{81}{4}$ | La raíz de un cociente, es igual a la raía del numerador entre la raíz del denominador |
| $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ | $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32768}} = \sqrt[15]{32768} = 2$ | La raíz múltiple de un número, es el producto de sus raíces |
| $\sqrt[n]{a^n} = a$ **si n es impar** | $\sqrt[3]{(-7)^3} = -7$ ; $\sqrt[5]{13^5} = 13$ | Cuando la potencia de un número es igual al de la raíz, el resultado es el mismo número |
| $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ **si n es par** | $\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$ | Cuando la potencia de un número es igual al de la raíz, el resultado es el valor absoluto del número |

## 1.2 Operaciones aritméticas con números reales

# Suma y resta de números reales

**a) 33 + 5 = 38**

**b) 13 – 7 = 8**

**c) 23-12 =11**

**d) 5 – 12 = -7**

**e) 11 + 23 = 34**

f) 2+15-3+6 =
17-3+6 =
14+6 = 18

g) 12-15+3-6+5 =
12+3+5-15-6 =
20-21 =1

Nota:
En la primera operación se realizaron sumas y restas conforme se avanza.
En la segunda operación se juntaron los números con signos iguales para posteriormente efectuar la operación.

# Suma y resta de números reales (mismo denominador)

**a)** $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{1}{13} + \frac{7}{13} = \frac{8}{13}$

c) $\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{5}{25} = \frac{10}{25}$

**d)** $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$

**e)** $\frac{3}{7} - \frac{5}{7} = -\frac{2}{7}$

**f)** $\frac{17}{33} - \frac{2}{33} - \frac{7}{33} - \frac{3}{33} =$

$\frac{17}{33} - \frac{12}{33} = \frac{5}{33}$

Nota: En la suma o resta de fracciones con el mismo denominador, se suman los numeradores y el denominador no sufre cambios.

# Suma y resta de números reales (mismo denominador)

a) $2\frac{2}{7} + 3\frac{3}{7} = 5\frac{5}{7}$

b) $3\frac{5}{9} + 1\frac{8}{9} = \frac{32}{9} + \frac{17}{9}$

$=\frac{49}{9}$

$=5\frac{4}{9}$

c) $3\frac{1}{6} - 1\frac{2}{6} = \frac{19}{6} - \frac{8}{6} = \frac{11}{6}$

d) $3\frac{3}{4} - 6\frac{1}{4} = \frac{15}{4} - \frac{25}{4} = \frac{-10}{4}$

Nota: En la suma y/o resta de números enteros y fracciones con el mismo denominador, se sugiere transformar los enteros por su equivalencia para efectuar la operación correspondiente.

# Suma y resta de números reales (diferente denominador)

a) $\frac{1}{6} + \frac{2}{7} = \frac{(7*1)+(6*2)}{42}$

$= \frac{7+12}{42}$

$= \frac{19}{42}$

b) $\frac{7}{9} - \frac{3}{4} = \frac{(4*7)-(9*3)}{36}$

$= \frac{28-27}{36}$

$= \frac{1}{36}$

c) $\frac{5}{6} - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} = \frac{(5*45)-(3*54)+(3*30)}{270}$

$= \frac{225-162+90}{270}$

$= \frac{153}{270}$

$= \frac{17}{30}$

Al producto de 6*5*9, se le denomina máximo común divisor. En los libros se encuentra como MCD.

# Multiplicación de números reales

a) $2 * 5 * 7 = 70$

b) $2*(-3)*5 = (-6)*5$
$= -30$

c) $(-4)*(-7) = 28$

d) $(-7)*(-3)*(-4) = -84$

e) $(-2)*(-1)*(-3)*(-5) = 30$

f) $(-3)*5*(-2)*7 = (-3)*(-2)*5*7$
$= 6*35$
$= 210$

# Multiplicación de números reales

$a)\quad \frac{1}{3} * \frac{2}{5} = \frac{1*2}{3*5}$

$= \frac{2}{5}$

$b)\quad \frac{1}{3} * \frac{2}{5} * \frac{3}{2} = \frac{1*2*3}{3*5*2}$

$= \frac{6}{30}$

$= \frac{1}{5}$

$c)\quad \frac{3}{5} * \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{(3)*(-1)}{15}$

$= \frac{-3}{15}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)*\left(\frac{2}{3}\right)*\left(\frac{-2}{4}\right)*\left(\frac{-1}{8}\right) = \frac{(1*2)*((-2)(-1))}{2*3*4*8}$

$= \frac{2*2}{6*32}$

$= \frac{4}{192}$

$= \frac{1}{48}$

e) $\frac{1}{3} * \frac{2}{7} * \frac{3}{2} * \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1*2*3*(-1)}{3*7*2*4}$

$= \frac{6*(-1)}{168}$

$= \frac{-6}{168}$

$= \frac{-1}{28}$

# División de números reales

a) $12 \div 4 = 3$

b) $21 \div 3 = 7$

c) $(-28) \div 7 = -4$

d) $(-54) \div (-9) = 6$

d) $(-7) \div 3 = -2.333$

$= -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$

e) $125 \div 5 = 25$

f) $1 \div 5 = 0.20$

$= \frac{1}{5}$

g) $(-4) \div (-3) = 1.333$

$= \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Cuando el resultado se expresa en decimales y no exacto, analizar la necesidad de mantenerlo o expresarlo en fracciones, la cual depende del su aplicación.

# Potencia de un número real (distinta base base)

$3^5$ = 3*3*3*3*3

= 243

$4^3$*$4^6$ = (4*4*4)*(4*4*4*4*4*4)

$4^{3+6}$ = 4*4*4*4*4*4*4*4*4

$4^9$ = 262,144

$6^2$*$6^3$ * $6^5$ = (6*6)*(6*6*6)*(6*6*6*6*6)

$6^{2+3+5}$ = 6*6*6*6*6*6*6*6*6*6

$6^{10}$ = 60,466,176

Para realizar una operación de potencia en donde se tiene la misma base, se suman los exponentes y se efectúa la operación correspondiente

# Potencia de un número real (diferentes bases)

$3^2 * 4^2$ = (3*3)*(4*4)

= 9*16

= 144

$4^2 * 2^3 * 7^2$ = (4*4)*(2*2*2)*(7*7)

= 16*8*49

= 6,272

$2^2 * 4^3 * 7^4$ = (2*2)*(4*4*4)*(7*7*7*7)

= 4 * 64 * 2401

= 614,656

Para realizar una operación de potencia en donde se tienen diferente base, realizar de manera individual cada potencia indicada.

# Potencia de un número real (Cociente)

$$\frac{6^5}{6^5} = 6^{5-5} = 6^0 = 1$$

Desarrollando los términos

$$\frac{6^5}{6^5} = \frac{6*6*6*6*6}{6*6*6*6*6} = 1*1*1*1*1 = 1$$

De aquí se desprende que

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

# Potencia de un número real (Cociente)

$\frac{3^5}{3^3}$ = $3^{5-3}$ = $3^2$ = 9

$\frac{5^5}{5^8}$ = $5^{5-8}$ = $5^{-3}$ = $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

$\frac{3^{-6}}{3^{-2}}$ = $\frac{3^2}{3^6}$ = $3^{2-6}$ = $3^{-4}$ = $\frac{1}{3^4}$ =

$\frac{5^3}{3^5} = \frac{125}{243}$

$\frac{7^2}{3^4}$ = $\frac{49}{81}$

Nota: El desarrollo o permanencia del cociente de potencias va a depender del tipo de problema analizado.

# Logaritmos

El logaritmo de un número, es el exponente de la potencia a que debe elevarse el número tomado como base para obtener el número dado.

$\log_b x$ = *n*   ( el logaritmo base b de x es igual a n)

$\log_2 64$ = 6   ( el logaritmo base 2 de 64 es igual 6)

Base = 2

Exponente = 6

**entonces:**

$2^6 = 64$

# Logaritmos

$\log_5 25$ = 2 ( el logaritmo base 5 de 25 es igual a 2)
$5^2 = 25$

$\log_{10} 10\ 000$ = 4 ( el logaritmo base 10 de 10 000 es igual a 4)
$10^4 = 10000$

$\log_6 216$ = 3 ( el logaritmo base 6 de 216 es igual a 3)
$6^3 = 216$

# Logaritmos

Los logaritmos fueron creados por John Napier (1550 – 1617) y Joost Bürgi (1552 – 1632) para facilitar cálculos de expresiones como:

$$\frac{1\,782.3\ x\ 62\,235.12}{1.4356\ x\ 6\,426.123}$$

Henry Briggs (1561 – 1631) sugirió que el logaritmo de 1 es igual a cero, dando origen a los logaritmos comunes de base 10.

log1 = 0 $10^0 = 1$

log10= 1 $10^1$ = 10

log100=2 $10^2$ = 100

log1000=3 $10^3$= 1000

# Propiedades de los logaritmos

La utilidad de los logaritmos es que convierten las operaciones de multiplicación en sumas y las de división en restas.

$$\log(a * b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

En la época en que se desarrollaron no existían las herramientas computacionales de nuestros días, sin embargo, sus reglas son útiles para la solución de derivadas e integrales muy útiles para la solución de problemas prácticos.

## 1.5 Utilidad de los símbolos de agrupación

# Tipos y utilidad

Los símbolos de agrupación empleados en las operaciones algebraicas son:

$$(paréntesis), [corchetes]\ y\ \{llaves\}$$

$$\left\{\frac{2}{3} - \left[\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{8}\right)\right]\right\}\ ; \{5 + [3 * (5 - 2)]\}$$

Éstos símbolos permiten llevar un orden en la operaciones, como:

a) El orden de su ejecución (de adentro hacia afuera)

b) El signo colocado afuera, afecta a los números interiores

c) Permite desarrollar un grupo de operaciones

# Bibliografía


1. Flores, M; Anfosi, A. 2006. Álgebra. México. Editorial Progreso. 18ª reimpresión.
2. Kaufmann, J. 2010. Álgebra. México. Cengage Learning. Octava edición.
3. Rumbos, P. 2011. Breve historia de las matemáticas. Trillas. México. Primera edición.
4. Steward, J. 2012. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. México. Cengage Learning. Sexta edición.