UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: "SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES"

ELABORÓ: M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: ENERO DE 2016

UNIDAD DE APRENDIZAJE

“ALGEBRA LINEAL”

UNIDAD DE COMPETENCIA I: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

1.1 Introducción
1.2 Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, Eliminación Gauss Jordan y Gaussiana
1.3 Sistemas homogéneos

TEMARIO DE LA UNIDAD I

1.1 Introducción

1.2 Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, Eliminación Gauss Jordan y Gaussiana

1.3 Sistemas homogéneos

1.4 Algebra matricial

1.5 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1.6 Inversa de una matriz cuadrada

1.7 Transpuesta de una matriz

1.8 Matrices elementales y matrices inversas

1.9 Factorización LU de matrices.

1.10 Problemas de aplicación tales como balanceo de ecuaciones químicas, asignación de recursos, circuitos eléctricos

INDICE Y OBJETIVO

1. Objetivos.
2. Introducción.
3. Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, Eliminación Gauss Jordan y Gaussiana.
4. Sistemas homogéneos.

“Planteamiento y solución de problemas que al modelarlos requieran resolver sistemas de ecuaciones lineales”.

Conceptos preliminares sobre líneas

1. La pendiente m que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

2. Si $x_2 - x_1 = 0$ la recta es vertical (pendiente indefinida)

3. Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente

4. De la ecuación de la línea recta ax +by = 0 se puede calcular la pendiente m = -a/b

5. Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, Si m_2 es la pendiente de la recta L_2. $m_1 \neq 0$, L_1 y L_2 son perpendiculares $m_2 = -1/m_1$

6. Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero.

7. Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

ECUACIÓN LINEAL

DEFINICIÓN: Una ecuación lineal es una ecuación polinómica de grado uno con una o varias incógnitas. Una ecuación es un enunciado que iguala dos expresiones matemáticas.

$$\boxed{a_1}x_1 + \boxed{a_2}x_2 + \cdots + \boxed{a_n}x_n = \boxed{b}$$

coeficientes

incógnitas

Término independiente

Algunos ejemplos son : x = 4, 4x +5 = 17, 2x – 8 = 2(x-4)…

Sistemas de Ecuaciones

Un *sistema de ecuaciones* es un conjunto de dos o más ecuaciones simultáneas con dos o más incógnitas.

Ejemplos:

$$1)\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x + 4y = 44 \end{cases};\qquad 2)\begin{cases} x^2 - y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases};\qquad 4)\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Sistemas de Ecuaciones: Ejemplos

1. Con la corriente a su favor una lancha navega a 100 km/h, y con la corriente en contra navega a 70 km/h. ¿Cuál es la velocidad de la corriente, y la de la lancha cuando el río está en calma?

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ x - y &= 70 \end{aligned} \quad ;$$

2. Juan y Jaime salieron del D.F. en sus respectivos autos a Acapulco. Juan condujo a una velocidad constante de 60 km/h. Si Jaime salió 1 hora después que Juan conduciendo a 90 km/h, ¿a qué distancia del D.F. y en cuánto tiempo alcanzó Jaime a Juan?

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{t} &= 60; \\ \frac{d}{t-1} &= 90 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 60t - d &= 0 \\ 90t - d &= 90 \end{aligned}$$

Sistemas de Ecuaciones

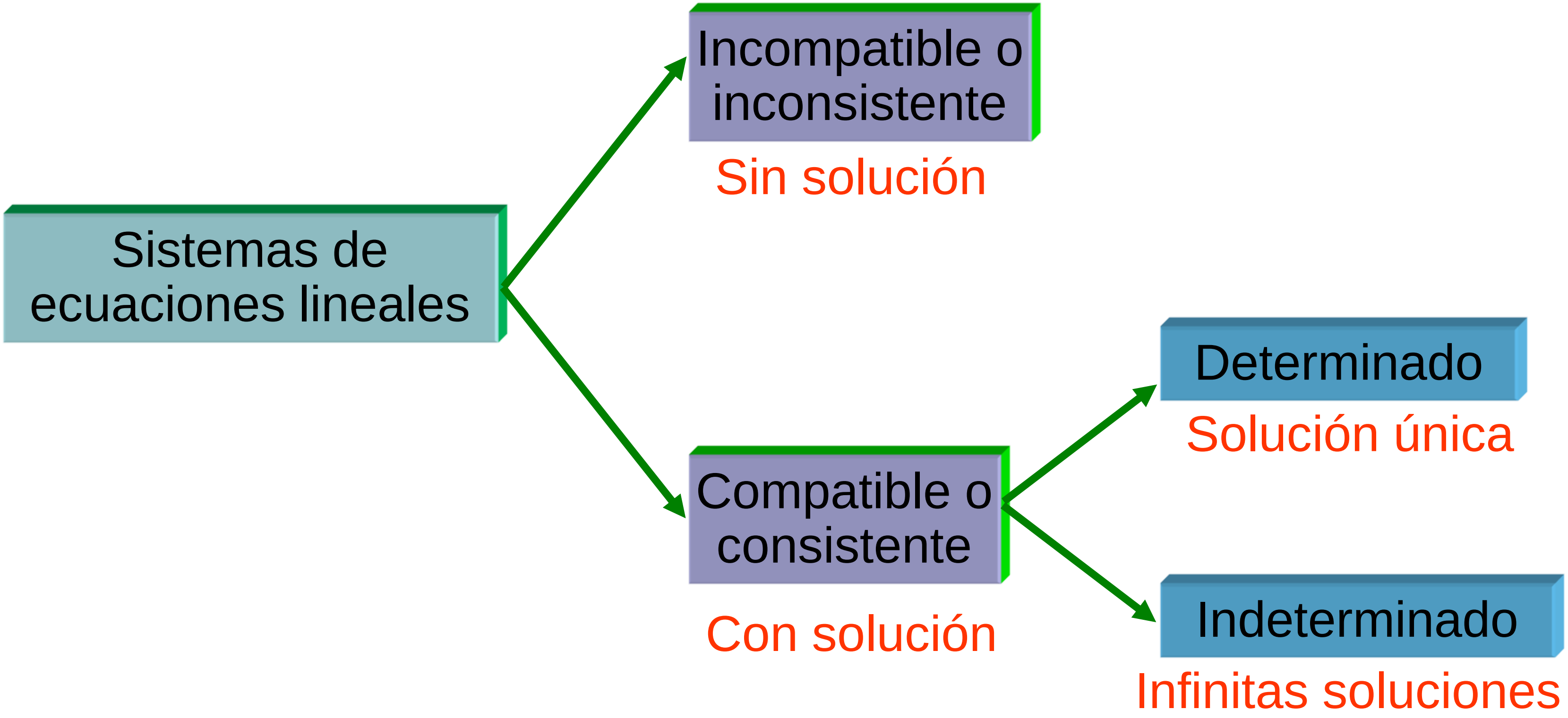
Soluciones de una ecuación. Son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación.

Una solución de un sistema es un conjunto ordenado de números reales (s_1, s_2, s_3, ... , s_n) tales que

$$\left[\begin{array}{c} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{array}\right]$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

Clasificación por tipo de solución:



Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

Los métodos de solución de un sistema con dos ecuaciones lineales de dos variables (2x2), consisten en eliminar una de las incógnitas, esto es, deducir de ambas ecuaciones otra ecuación que no contenga a dicha incógnita y pueda resolverse.

1. Sustitución. Se despeja en una de las ecuaciones la que incógnita que se quiera eliminar y se sustituye su valor en la otra ecuación.

2. Igualación. Se despeja una misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar sus valores.

3. Reducción. Se transforman las ecuaciones dadas en otras en la que sean iguales los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar, se suman o restan posteriormente.

Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

Ejemplo:

$x + 2y = 4$

$2x + y = 5$

1. Sustitución.

$x = -2y + 4$

$2(-2y + 4) + y = 5$

$-4y + 8 + y = 5$

$-3y = 5 - 8; \quad -3y = -3$

$y = 1$

2. Igualación

$x = \frac{5-y}{2}; \quad x = -2y + 4$

$\frac{5-y}{2} = -2y + 4$

$5 - y = -4y + 8$

$4y - y = -5 + 8; \quad 3y = 3$

$y = 1$

3. Reducción.

$x + 2y = 4$

$2x + y = 5$

$-2x - 4y = -8$

$-3y = -3$

$y = 1$

$x + 2(1) = 4$

$x = 4 - 2; \quad x = 2$

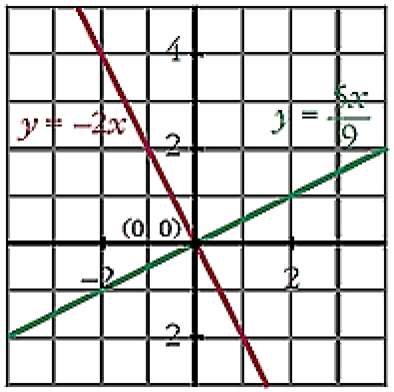
Solución:

$y = 1$

$x = 2$

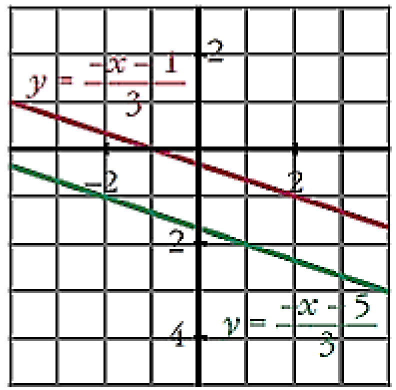
Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2. gráficas

Solución única.



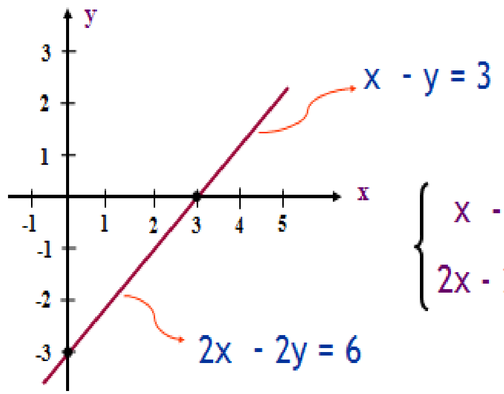
Las rectas se cortan en (0, 0).
La solución es $x = 0$, $y = 0$.

Ninguna solución.



Rectas paralelas.
El sistema no tiene solución.

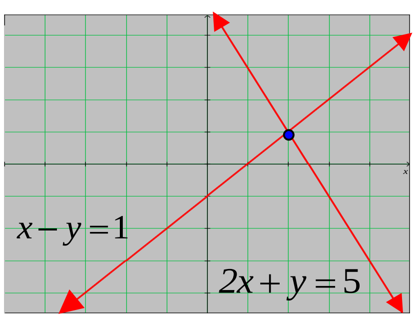
Muchas soluciones.



$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

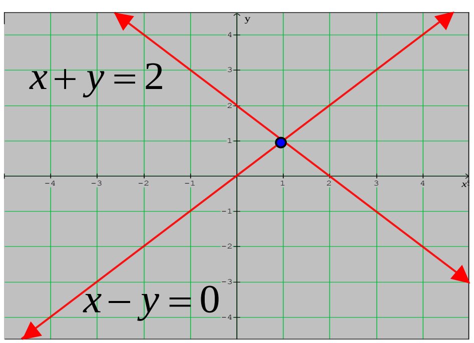
Ejemplos para resolver:

1) $\begin{matrix} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{matrix}$



$Solución: (2, 1)$

2) $\begin{matrix} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{matrix}$



$Solución: (1, 1)$

Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

En un café internet, hay 2 modelos de computadoras, El tipo I y el tipo II, el modelo tipo I los procesadores tiene 2 núcleos y el modelo tipo II tiene 4 núcleos. Si existe en total 15 equipos y 44 núcleos en dicho café internet. ¿ Cuantos equipos del modelo tipo I y cuantos del tipo II existen?

Sea x = nº de Modelos tipo I

y = nº de Modelos tipo II

2x = nº de núcleos de los tipo I

4y = nº de núcleos de los tipo II

Planteando las ecuaciones .

$$x + y = 15$$

$$2x + 4y = 44$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

Plantear las ecuaciones .

$$x + y = 15$$
$$2x + 4y = 44$$

Elegir algún método de resolución (Por el método de reducción).

$$\begin{aligned} x + y &= 15 \\ 2x + 4y &= 44 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} -2x - 2y &= -30 \\ 2x + 4y &= 44 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} 2y &= 14 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Reemplazando y = 7 en la ecuación x + y =15 se tiene x = 15 - 7 = 8

La solución del sistema es x = 8, y = 7

Respuesta: Hay 8 modelos del tipo I y 7 modelos del tipo II.

MATRIZ AUMENTADA

Resolver los grandes sistemas de ecuaciones lineales requiere el planteamiento de la matriz aumentada.

Una matriz aumentada consta de los coeficientes y términos constantes de un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{matrix} 7x + 3y = 4 \\ 2 - y = x \end{matrix};\qquad \left[\begin{array}{cc:c} 7 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Una línea vertical separa los **coeficientes** de las constantes

MATRIZ AUMENTADA

Se debe escribir el sistema de ecuaciones en una matriz aumentada

$$\begin{aligned} -x &= y \\ 2x - 3y &= 10 \end{aligned}; \quad \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -5x - 12 &= 4y \\ z &= 3 - x \\ 10 &= 3z + 4y \end{aligned} \quad ; \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

SISTEMAS EQUIVALENTES

Sistemas equivalentes: Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Es útil convertirlo en otro equivalente ya que facilita su solución. Estas transformaciones que conducen a sistemas equivalentes son:

1. Intercambiar entre sí dos ecuaciones

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

2. Multiplicar ambos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

3. Sumar miembro a miembro un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1+4 & 2+5 & 3+6 \end{array}\right]$$

SISTEMAS EQUIVALENTES

Operaciones elementales en los renglones de la matriz aumentada:

1. Intercambiar entre sí dos renglones

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

2. Multiplicar ambos miembros de un renglón por un número distinto de cero.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

3. Sumar miembro a miembro un múltiplo de un renglón a otro renglón.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1+4 & 2+5 & 3+6 \end{array}\right]$$

Sistemas equivalentes

Ejemplo de transformaciones u operaciones que convierten un sistema en otro equivalente:

$$\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ 3x+5y+z&=3\\ 2x+6y+7z&=1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 3\\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad r_2 \to -3r_1 + r_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_3 \to -2r_1 + r_3 \\ r_2 \to (-1)r_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & +1 & +2 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad r_3 \to -2r_2 + r_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \; . \quad . \quad .$$

SISTEMA ESCALONADO

Un sistema escalonado es aquel en el que los coeficientes de la incógnitas situados por debajo de la diagonal principal (elementos que repiten subíndice) son nulos.

$$\begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 0x - 3y + 8z = -14; \\ 0x + 0y + 2z = -5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x & +y & -2z & 9 \\ & -3y & +8z & -14 \\ & & 2z & -5 \end{array}\right)$$

Los sistemas escalonados son fáciles de solucionar (De abajo a arriba)

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

1. Usando Operaciones Elementales por Renglón (OER), la matriz A es transformada en una matriz triangular superior (todos los elementos debajo de la diagonal son cero).

2. Sustitución hacia atrás es usada para resolver un sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \underset{\text{OER}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{a}_{ii} & \cdots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_i \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} \Uparrow$$

Sustitución atrás

ELIMINACIÓN GAUSSIANA: EJEMPLO

Resolver el sistema de ecuaciones .

$$x + y + z = -1$$

$$2x - y - 2z = 8$$

$$5x + 3y + 2z = 3$$

Para aplicar las operaciones elementales, conformamos primero la matriz de coeficientes y le agregamos la columna de resultados para conformar la matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{2} & -1 & -2 & 8 \\ \boxed{5} & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_2 \rightarrow -2r_1 + r_2 \\ r_3 \rightarrow -5r_1 + r_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{0} & -3 & -4 & 10 \\ \boxed{0} & -2 & -3 & 8 \end{array}\right]$$

$\boxed{(-2*1)+2=0}$ $(-2*1)+(-1)=-3$ $(-2*1)+(-2)=-4$ $(-2*-1)+8=10$

$\boxed{(-5*1)+5=0}$ $(-5*1)+3=-2$ $(-5*1)+2=-3$ $(-5*-1)+3=8$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA: EJEMPLO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{-\,{}^{1}/_{3}\, r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & {}^{4}/_{3} & -{}^{10}/_{3} \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right] r_3 \rightarrow 2r_2 + r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & {}^{4}/_{3} & -{}^{10}/_{3} \\ 0 & 0 & -{}^{1}/_{3} & {}^{4}/_{3} \end{array}\right] \xrightarrow{-3r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & {}^{4}/_{3} & -{}^{10}/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$Z = -4;$

$y + {}^{4}/_{3}(-4) = -{}^{10}/_{3} \rightarrow$ y = 2

$x + 2 - 4 = -1 \rightarrow$ x = 1

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = -4$$

ELIMINACIÓN GAUSS-JORDAN

Eliminación Gauss-Jordan. Es el proceso de llevar a cabo las operaciones elementales por filas en una matriz aumentada para resolver un sistema. El objetivo es conseguir la matriz de identidad en el lado izquierdo. Esto se conoce como la forma escalonada reducida.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to \ 1x = 5 \\ \to \ 1y = 2 \end{array}$$

Resolver por reducción

$$\begin{array}{r} x + y = 15 \\ 2x + 4y = 44 \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 15 \\ 2 & 4 & 44 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \end{array}\right)$$

ELIMINACIÓN GAUSS-JORDAN: EJEMPLO

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{matrix} 2x + y = 11 \\ 3x - 2y = 6 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 3 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 6 & -4 & 12 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -7 & -21 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{8}{2} \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right); \quad \begin{matrix} \rightarrow & 1x = 4 \\ \rightarrow & 1y = 3 \end{matrix}$$

ELIMINACIÓN GAUSS-JORDAN: EJEMPLO

Resolver el sistema de ecuaciones .

$$\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ 2x - y - 2z &= 8 \\ 5x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \rightarrow -2r_1 + r_2 \\ r_3 \rightarrow -5r_1 + r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -{}^{1}/_{3}\, r_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & {}^{4}/_{3} & -{}^{10}/_{3} \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{bmatrix} r_3 \rightarrow 2r_2 + r_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & {}^{4}/_{3} & -{}^{10}/_{3} \\ 0 & 0 & -{}^{1}/_{3} & {}^{4}/_{3} \end{bmatrix} \rightarrow -3r_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & {}^{4}/_{3} & -{}^{10}/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$r_2 \rightarrow -\frac{4}{3} r_3 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & {}^{6}/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad r_1 \rightarrow -r_3 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} r_1 \rightarrow -r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= -4 \end{aligned}$$

EJERCICIO

Manufacturas R.S.C.L.S y asociados fabrica tres tipos de computadora personal: ciclón, ciclope y cicloide. Para armar un ciclón se necesita 10 horas, otras 2 para probar sus componentes y 2 horas más para instalar sus programas. El tiempo requerido para la cíclope es de 12 horas en su ensamble, 2.5 para probarla y 2 horas para instalarla. La cicloide, la más sencilla de la línea, necesita 6 horas de armado, 1.5 horas de prueba u 1.5 horas de instalación. Si la fábrica de esta empresa dispone de 1560 horas de trabajo por mes para armar, 340 horas para probar y 320 horas para instalar ¿Cuántas PC de cada tipo puede producir en un mes?

(Tomado de Nakos y Joyner)

Resolver el sistema de ecuaciones por Eliminación Gaussiana y Eliminación Gauss- Jordan.

$$10\,x + 12y + 6z = 1560$$
$$2x + 2.5y + 1.5z = 340$$
$$2x + 2y + 1.5z = 320$$

$x = 60, y = -40$ y $z = 80$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Sistemas homogéneos. Un sistema de ecuaciones se denomina homogéneo si el término constante de la ecuación es cero.

$$\text{Ejemplo:}\quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

Un **sistema general** de m×n ecuaciones lineales se llama homogéneo si las constantes b_1, b_2, …, b_m son cero. En general:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \;\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS: SOLUCIÓN

Solución trivial o solución cero. Cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables. En tal caso, el sistema tiene solo la solución nula o trivial.

$X = 0 = [x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0]$

Cuando el sistema tiene un número menor de ecuaciones que de variables $(m < n)$. Entonces el sistema tiene una solución no nula o no trivial.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Resolver el sistema homogéneo.

$$x + y - z = 0$$

$$4x - 2y + 7z = 0$$

Al reducir por renglones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} r_2 \rightarrow --4r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{bmatrix} r_2 \rightarrow -{}^{1}/{}_{6}\, r_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{11}/{}_{6} & 0 \end{bmatrix} r_1 \rightarrow -r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & {}^{5}/{}_{6} & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{11}/{}_{6} & 0 \end{bmatrix}$$

Hay un número infinito de soluciones dadas por $(-{}^{5}/{}_{6}\, z;\ {}^{11}/{}_{6}\, z;\ z)$. Esto es así, ya que el sistema contiene tres incógnitas y solamente dos ecuaciones.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Resolver el sistema homogéneo.

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$4x + 5y + 6z = 0$$
$$7x + 8y + 9z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_2 \rightarrow -4r_1 + r_2 \\ r_3 \rightarrow -7r_1 + r_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_2 \rightarrow -{}^{1}/_{3}\ r_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{bmatrix} \quad r_3 \rightarrow 6r_2 + r_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema homogéneo admite solución además de la trivial

Sistema homogéneo: ejemplo

Resolver el sistema homogéneo.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_2 \rightarrow -4r_1 + r_2 \\ r_3 \rightarrow -7r_1 + r_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right] \quad r_2 \rightarrow -{}^{1}/_{3}\ r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right] \quad r_3 \rightarrow 6r_2 + r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Este sistema homogéneo admite solución además de la trivial

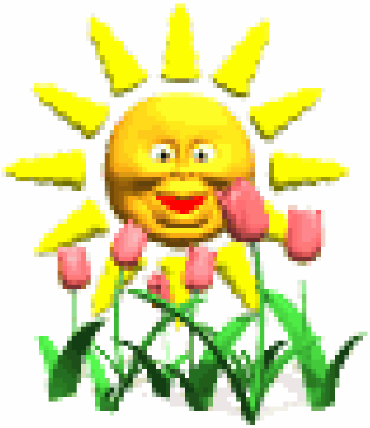
EJERCICIO

EJERCICIO:

Pagina 39. Grossman. “Algebra lineal”, sexta edición

BIBLIOGRAFÍA

Grossman Stanley I. Algebra lineal



FIN DE LA PRESENTACION