



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO  
DE MÉXICO



FACULTAD DE ECONOMÍA

“RELACIÓN CAPITAL-TRABAJO EN EL MODELO DE LOTKA-  
VOLTERRA. CASO MEXICANO, 2000-2015”

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADA EN ECONOMÍA**

PRESENTA:

**GABRIELA GUTIÉRREZ GÓMEZ**

ASESORA:

DRA. EN E. A. y N. LIDIA ELENA CARVAJAL GUTIÉRREZ

REVISORES:

DR. EN A. OSWALDO GARCÍA SALGADO

DR. EN C.S. OSCAR M. RODRÍGUEZ PICHARDO

TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO

ABRIL 2017

*A Dios por darme vida y salud.*

*A mi madre Vicky por su amor,  
su apoyo, su esfuerzo y su devoción.*

*A mis hermanas Carmen y Guadalupe  
por su apoyo incondicional.*

## ***Agradecimientos.***

A la Dra. Lidia por su tiempo, su paciencia, sus enseñanzas como asesora y por su invaluable apoyo para la realización y culminación de este trabajo. Infinitas gracias.

Especial agradecimiento al Dr. Oswaldo por el valioso tiempo que me brindo, gracias por darme la oportunidad de iniciar esta investigación bajo su asesoría y sobre todo muchas gracias por fomentar en los alumnos el interés por la investigación en temas nuevos e innovadores.

Agradezco también al Dr. Oscar por tomarse el tiempo de revisar mi trabajo y por sus aportaciones al mismo.

Gracias a todos los que directa e indirectamente contribuyeron a la realización de este trabajo, sin su guía no hubiera sido posible. Gracias.

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	4
Análisis deductivo del Capital y el Trabajo en el periodo 2000-2015 .....	5
Trabajo.....	5
Capital.....	14
CAPÍTULO I. MARCO TEÓRICO.....	27
1.1 Aportaciones teóricas sobre el capital y el trabajo .....	29
1.2 Revisión de literatura .....	35
CAPÍTULO II. MODELO LOTKA-VOLTERRA.....	40
2.1 Modelos presa-depredador en la ciencia económica.....	40
2.1.1 Ecuaciones de Lotka-Volterra .....	41
2.2 Sistemas lineales desacoplados de dos ecuaciones. ....	47
CAPÍTULO III ANÁLISIS EMPÍRICO DE LA RELACIÓN CAPITAL-TRABAJO EN EL MODELO LOTKA-VOLTERRA. CASO MEXICANO, 2000-2015. ....	50
3.1 El modelo Lotka-Volterra: un aspecto metodológico .....	53
3.1.1 Sistema de ecuaciones simultáneas.....	53
3.1.1.1 El problema de la identificación. ....	54
3.1.1.2 Método de estimación: Mínimos Cuadrados en dos etapas. ....	57
3.1.2 Método de estimación: Mínimos Cuadrados en dos etapas. ....	57
3.2 Variables para el análisis .....	57
3.3 Resultados del Modelo.....	58
3.3.1 Coeficientes del modelo Lotka-Volterra. ....	58
3.3.2 Solución del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015. ....	59
CONCLUSIONES.....	64
Recomendaciones finales .....	67
ANEXOS .....	69
FUENTES DE INFORMACIÓN .....	85

## INTRODUCCIÓN

El bajo crecimiento económico es uno de los problemas que más aquejan a las economías del mundo, ya que además de determinar la producción de bienes y servicios de un país durante un período de tiempo determinado, también representa un aspecto fundamental para el desarrollo de cada nación. De acuerdo con lo dicho por Schumpeter (1912), el desarrollo económico es un proceso continuo de crecimiento de la economía durante el cual se aplican nuevas tecnologías a los procesos productivos y a otros campos a los que les sucede cambios institucionales, sociales y políticos, por tanto, desarrollo implica crecimiento económico sostenido (de la Paloma, Maeztu & Gargallo, 2011).

En este sentido, la teoría del crecimiento económico, que se ocupa principalmente de analizar los factores que influyen en el ritmo al que crece una economía (Uxó, 2016), considera que los factores de producción con mayor influencia en el comportamiento del crecimiento económico son el capital y el trabajo, dada su presencia y participación en cualquier economía del mundo.

México, al tener una economía altamente globalizada por su apertura comercial, está expuesto ante fenómenos de la economía mundial como la volatilidad del tipo de cambio, movimientos en las tasas de interés, fluctuaciones en los precios de las materias primas, entre otros; razón por la que es del interés propio investigar si a través de un modelo dinámico como el de Lotka-Volterra puede explicarse la relación capital-trabajo en la economía mexicana.

Resulta importante exponer el panorama general de las variables capital-trabajo en contexto actual. A continuación se hace un análisis deductivo (a nivel mundial, regional y nacional) del capital y el trabajo en el periodo 2000-2015.

## **Análisis deductivo del Capital y el Trabajo en el periodo 2000-2015**

### **Trabajo**

El trabajo o fuerza laboral, tal como lo definió Marx (1867) en su obra *El Capital*, se refiere a la capacidad física y mental todo ser humano para realizar un trabajo.

#### ***A nivel Mundial.***

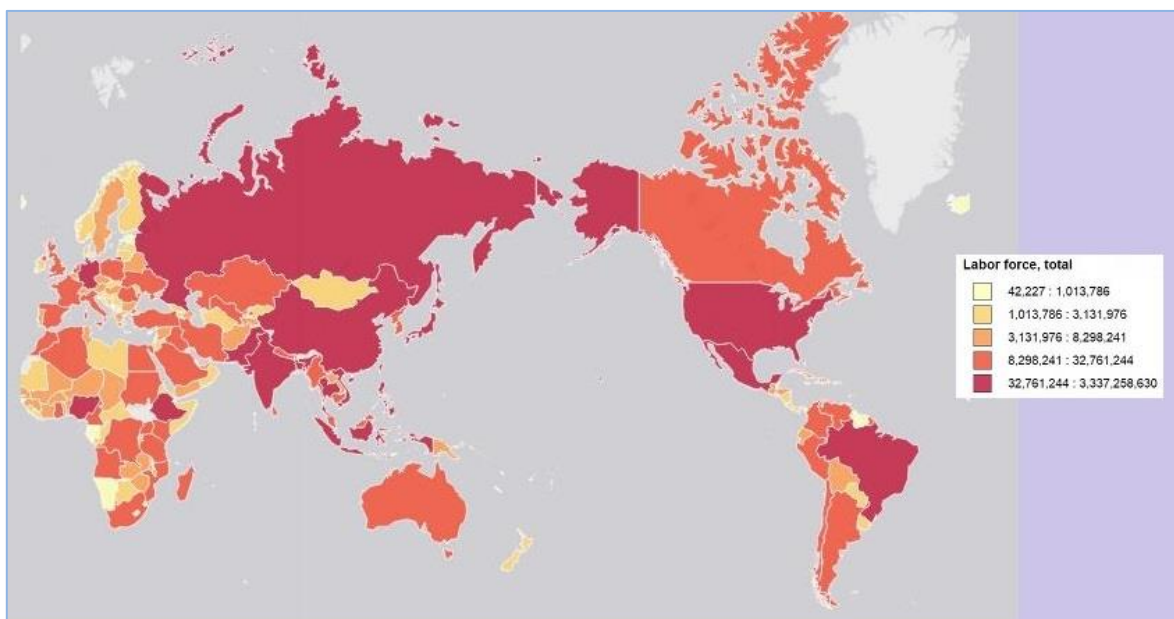
En el año 2015, la Organización de las Naciones Unidas (ONU) reportó que en el mundo vivían 7.3 mil millones de personas, de las cuales, de acuerdo con información del Banco Mundial (2016) 3,4 mil millones conformaron el total de la fuerza laboral<sup>1</sup> a nivel mundial. En la ilustración 1 se puede observar la distribución de la fuerza laboral en el mundo, por países durante el año 2015.

Economías emergentes como China, India, Indonesia y Brasil y economías desarrolladas como Estados Unidos de América y Japón son los principales naciones que cuentan con mayor fuerza laboral en el mundo, mientras que países en vías de desarrollo como San Marino, Dominica, Islas Pitcairn, Antigua y Barbuda y Belice son de las naciones con menor fuerza laboral (Banco Mundial, 2016).

---

<sup>1</sup> La fuerza laboral comprende a las personas dentro del rango de edad de 15 -64 años.

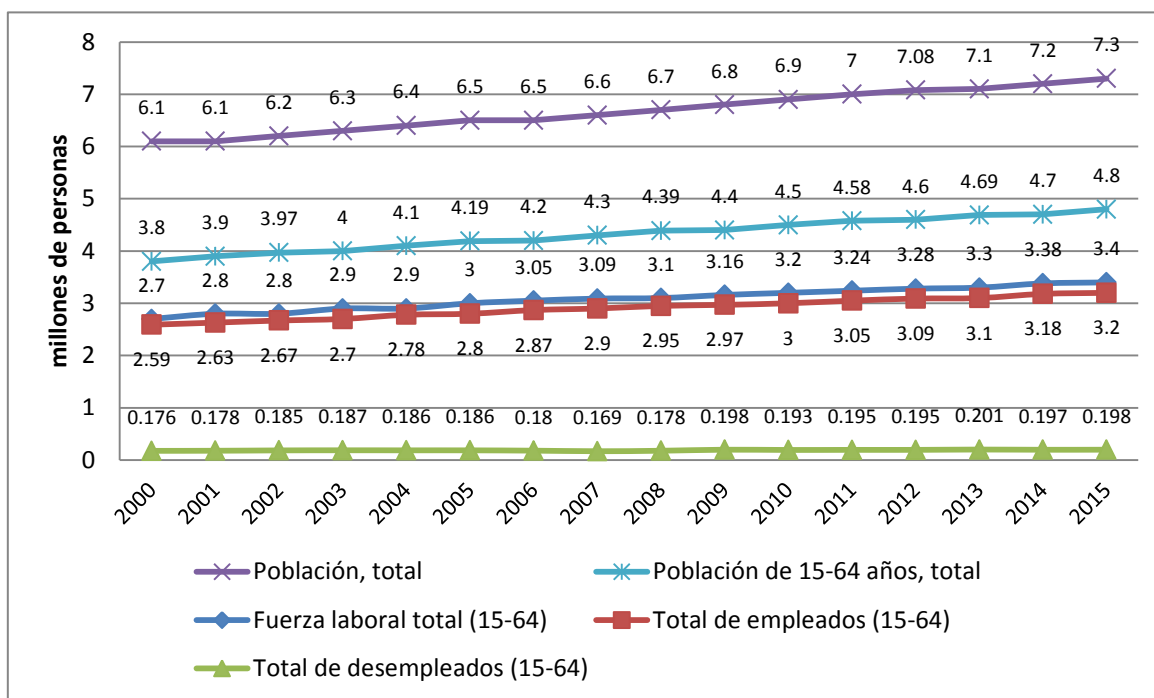
Ilustración 1. Fuerza laboral a nivel mundial, 2015.



Fuente: Banco Mundial (2015)

Como se muestra en la gráfica 1, el empleo es una variable en constante cambio. En el periodo de 2000-2015, la fuerza laboral incrementó 23.5% derivado del aumento poblacional en el mundo. Las personas empleadas en el año 2000 eran 2.59 mil millones y para 2015 se contabilizaron 3.2 mil millones de personas, mientras que las personas desempleadas aumentaron a nivel mundial en 12.97% respecto al año 2000. Es importante señalar que en el año 2008 se habían 178 millones de desempleados, las cuales incrementaron notablemente a 198 millones el siguiente año, cifra que coincide para 2015, lo que implicaría que lejos de que el desempleo mejore a nivel mundial, está estancado.

Gráfica 1. Evolución del empleo, 2000-2015  
(millones de personas)



Fuente: Elaboración propia en base a datos del Banco Mundial (2015)

Información recabada de la Organización Internacional del Trabajo (OIT, 2016) indica que la desaceleración de las economías emergentes a causa de la disminución de los precios de las materias primas tiene un efecto negativo sobre el trabajo a nivel mundial. Estos desequilibrios provocaron que en el año 2015, economías desarrolladas hayan registrado elevadas tasas de desempleo y que en economías emergentes persista el empleo vulnerable por la precarización de los empleos y la insuficiente especialización del mismo

Por su parte, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en su informe “Employment Outlook 2015”, reportó que a pesar de la disminución desempleados en países desarrollados de la Unión Europea y en Estados Unidos, donde la tasa de desempleo bajó de 7.1% en 2014 a 6.7% en 2015, esta mejora no fue suficiente para aminorar los problemas de desempleo que persisten fruto de la crisis financiera mundial generada por el petróleo. En la tabla 1 se presentan un



comparativo de los países con menor y mayor tasa de desempleo en el mundo durante el año 2015 (OCDE, 2016).

Tabla 1. Comparativo de las tasas de desempleo a nivel mundial, 2015.  
(Tasa de crecimiento %)

Mayor tasa de desempleo		Menor tasa de desempleo			
País	(%)	País	(%)	País	(%)
Sudáfrica	25.82	Venezuela	7.3	Alemania	4.6
Grecia	25.6	Canadá	6.9	México	4.4
España	22.7	Brasil	6.8	Islandia	4
Italia	12.3	Argentina	6.6	Corea del Norte	3.6
Francia	10.5	Indonesia	5.7	India	3.5
		Australia	5.7	Japón	3.2
		Rusia	5.6	Qatar	0.3
		E.U.A.	5.4		
		China	5.1		

Fuente: Elaboración propia en base a datos del Banco Mundial (2016)

Es importante destacar que debido a la inestabilidad financiera de 2015- 2016 por el sector energético, no solo el empleo ha sido afectado negativamente, también lo ha sido la inversión en las economías emergentes, sobre todo en Brasil, China y en los países productores de petróleo.

Por su parte, la Organización Internacional del Trabajo (OIT) reconoce que el empleo vulnerable presente en las economías emergentes aún representa más de 46% del total del empleo a nivel mundial, afectando alrededor de mil 500 millones de personas (OIT, 2016).

### ***A nivel regional (América Latina).***

El mercado laboral en América Latina y el Caribe es uno de los más propensos a los cambios y desequilibrios mundiales, ya que los países que integran la región son economías en vías de desarrollo y economías emergentes, por lo que movimientos de la economía mundial repercuten significativamente en su respectivo contexto macroeconómico.

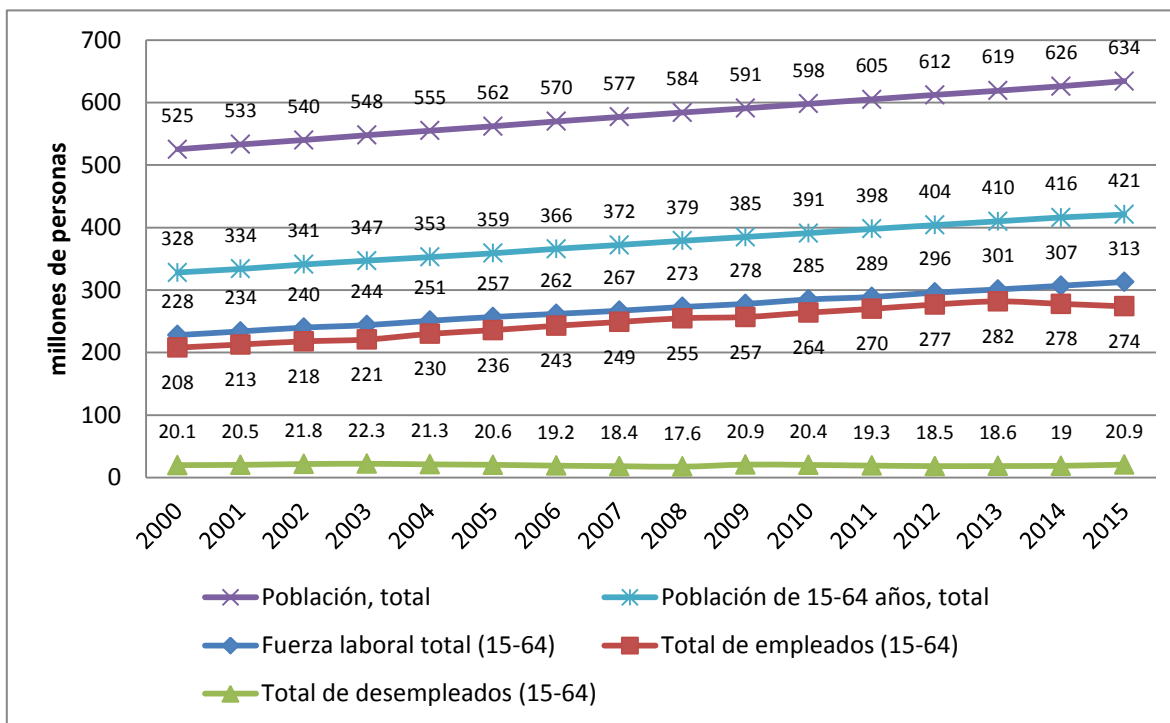
En el informe “Coyuntura laboral en América Latina y el Caribe” presentado de forma conjunta en 2016 por la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) y la Organización Internacional del Trabajo (OIT), se afirma que en la región, la baja calidad del trabajo es una tendencia negativa que crece alarmantemente, dado que, en tan solo el último año la tasa de desempleo regional pasó de 6,0% en 2014 a 6,5% en 2015 (CEPAL & OIT, 2016).

La anterior información de la CEPAL y la OIT coincide con los datos del Banco Mundial (2016). En la gráfica 2 se observa el comportamiento del mercado laboral en Latinoamérica y el Caribe durante el periodo de estudio, en donde destaca la irregularidad del desempleo en la región.

El tema del desempleo es un tema que afecta a la mayoría de las economías de América Latina y el Caribe, pues en el año 2003 se contabilizaban 22.3 millones de personas desempleadas, mientras que en 2008 se redujo el número al pasar a 17.6 millones pero en 2015 esta cifra creció al llegar a 20.9 millones de personas sin empleo.

La fuerza laboral ha crecido un 37% en los últimos quince años, pues tan solo en el año 2000 habían 328 millones de personas para trabajar mientras que en el 2015 la cifra se elevó a los 421 millones de personas, por lo que la variable fuerza laboral es la que más percibe la inestabilidad del mercado laboral en la región, una vez que no deja de crecer y por tanto no se deja de demandar puestos de trabajo, los cuales se han visto reducidos en los dos últimos años.

Gráfica 2. Evolución del empleo en América Latina y el Caribe, 2000-2015  
(millones de personas)



Fuente: Elaboración propia en base a datos del Banco Mundial (2015)

Sin embargo pese a la inestabilidad del empleo en la región, la CEPAL y la OIT, afirmaron que durante 2015, solo en nueve países de América Latina y el Caribe la tasa de desempleo disminuyó, entre los que sobresale México (en el 2014 tenía una tasa del 4.8% y para 2015 disminuyó a 4.4%). Las naciones menos favorecidas fueron las de América del Sur, pues en siete países la tasa de desempleo aumentó, destacando Brasil, donde la tasa subió del 4,8% en 2014 al 6,8% en 2015; Uruguay del 6,9% al 7,8%, y en Perú del 5,9 % al 6,5% (CEPAL & OIT, 2016).

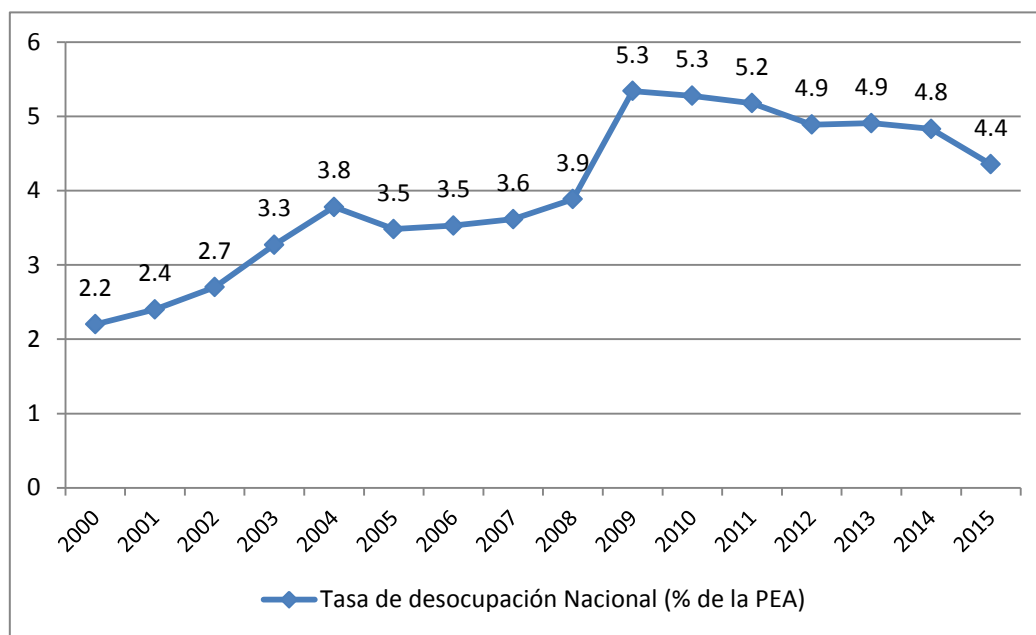
### ***A nivel nacional, México.***

En México, el mercado laboral pareciera estar atravesando uno de sus mejores momentos, pues información del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI, 2016) se reportó que durante el año 2015 la tasa de desempleo disminuyó al 4.4%, en relación a la de 4.8% de 2014, siendo una de las más bajas a nivel mundial.

En el mismo tenor, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), indican que su conjunto los países miembro registran una tasa general de desempleo del 7% en 2015, dato que posiciona a México como el cuarto país con la tasa de desempleo más baja dentro de la OCDE. Lo anterior permite coincidir a la OCDE y al INEGI en que el mercado laboral en México está mejorando pese la crisis económica que sigue siendo dispar entre economías desarrolladas y emergentes (OCDE, 2016).

El gráfico 3 presenta la tasa de desempleo en México en el periodo de estudio 2000-2015, en la cual se observa que en el año 2008 se tenía una tasa de 3.9% y que para 2009 se registró la tasa de desempleo más alta en los últimos quince años siendo de 5.3%, lo que a la par implicó que 2,5 millones de personas que perdieron su trabajo. Desde el año 2010 la tendencia ha sido a la baja, ya que para 2015 se tuvo una tasa del 4.4%, es decir que el desempleo ha disminuido un 17.6% en los últimos cinco años.

Gráfica 3. Evolución del empleo en América Latina y el Caribe, 2000-2015  
(porcentaje de la Población Económicamente Activa)



Fuente: Elaboración propia en base a datos del INEGI (2016).

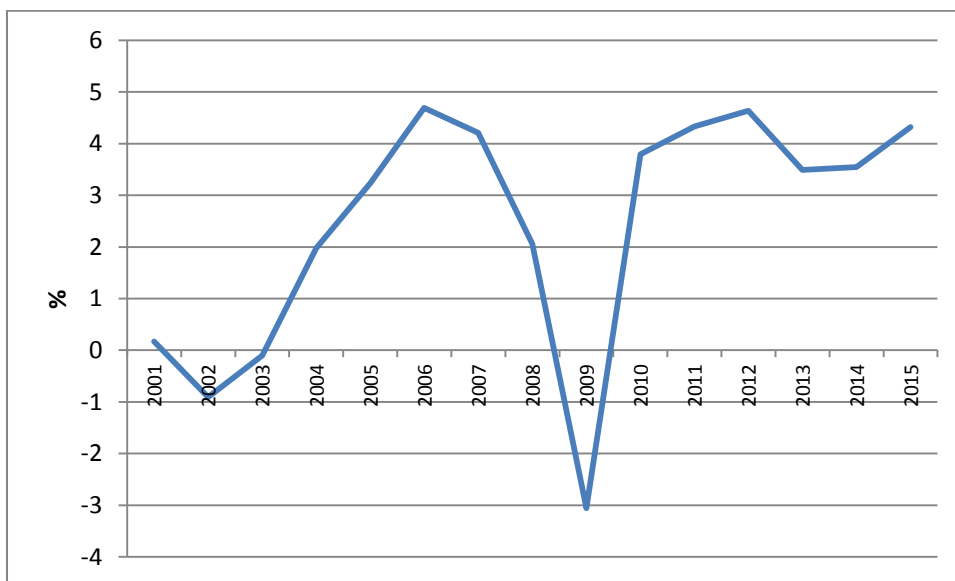
Dicha información sugiere que la desocupación laboral en México se ha reducido, lo que sugeriría que más mexicanos han tenido la oportunidad de insertarse al mercado laboral al encontrar un empleo, sin embargo, es importante revisar las condiciones del mercado laboral en el país.

Para conocer el contexto del mercado laboral mexicano, es importante revisar datos del INEGI (2016) sobre los registrados al Instituto Mexicano del Seguro Social, pues esta variable es la que mide el empleo en el país.

En un panorama general, la gráfica 4 permite deducir que a partir del proceso de recuperación económica posterior a la crisis financiera de 2008-2009 creció el número de personas que encontraron un empleo formal, pese al comportamiento errático del mercado laboral en México en los últimos dieciséis años.

Gráfica 4. Trabajadores registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social, 2000-2015

(Tasa de crecimiento %)



Fuente: Realización propia con base en datos del INEGI (2016).

Sin embargo se debe mencionar que existen fenómenos económicos que repercuten negativamente en las condiciones del mercado laboral mexicano, ya que de acuerdo con Olave, P. (2014), en su estudio “Transformación productiva y cambios en el mercado laboral: el caso de México” las condiciones del empleo en el país son cada vez más difíciles, gracias a los cambios estructurales de 2012 y la competencia internacional que se deriva de la globalización, los cuales han provocado precariedad en los trabajos, falta de seguridad en el empleo y la pérdida del poder adquisitivo del salario.

## **Capital**

De acuerdo con la teoría marxiana, la forma inicial del capital es una masa de dinero cuya utilización se enfoca en el proceso productivo capitalista, que sirve, por una parte para comprar maquinarias y materias primas, y por la otra para comprar fuerza de trabajo (Veraza, 2012).

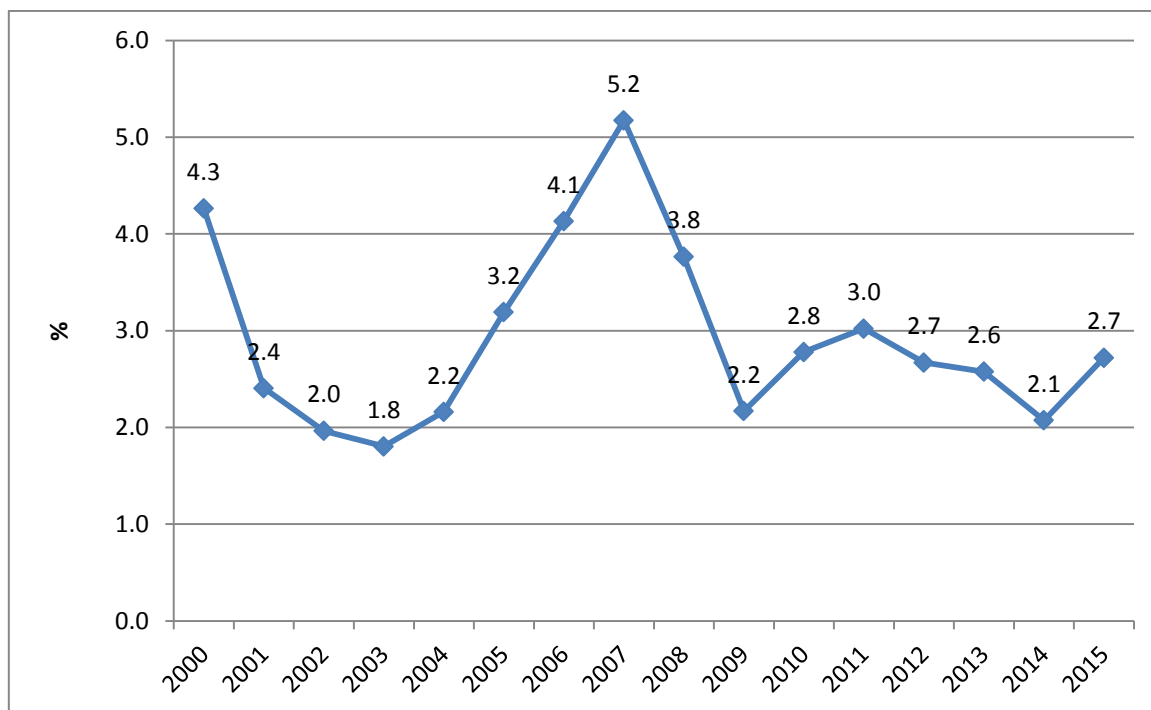
Entonces, a pesar de que el concepto de capital implica un amplio marco de definiciones, con objeto de la presente investigación, se considera al capital como aquel valor que se valoriza (Marx, 1867), es decir, se hace referencia al conjunto de bienes producidos que sirven para producir otros bienes (Veraza, 2012).

### ***A nivel mundial.***

El capital en el mundo es variante y fluye entre de las economías del mundo, principalmente entre las economías emergentes y en vías de desarrollo. Resulta importante analizarla, ya que a esta se le atribuye el fomento del empleo, el desarrollo de nuevas industrias e incluso su mismo crecimiento económico.

En la gráfica 5 se puede observar el comportamiento de la IED mundial en el periodo de estudio 2000-2015, en esta, destaca que en el 2007 se presentó la mayor inversión mundial alcanzando un 5.2% pero fue a partir de este año que comenzó a disminuir. En el 2015, la IED apenas representó el 2.7%, debido en gran medida a la fragilidad de la economía mundial, la incertidumbre de los inversores y el riesgos que implica invertir en economías emergentes.

Gráfica 5. Evolución de la Inversión Extranjera Directa, 2000-2015  
(porcentaje del DGP)



Fuente: Elaboración propia en base a datos del Banco Mundial (2015)

Tal como se muestra en la gráfica 6. Comparativo de las principales regiones receptoras de IED en el mundo, actualmente Asia es la región que mayor IED recibe, derivado de la inestabilidad de las economías occidentales en años recientes.

En la misma gráfica 6 también es posible observar que en el periodo 2005-2009, la Unión Europea era el destino principal para este tipo de inversión, sin embargo, a raíz de los problemas suscitados en la zona euro agravados en 2010, esta tendencia ya no persiste. En 2014 la IED en Europa fue de 267 mil millones de dólares, -53.5% menos que en 2009 cuando la recepción fue de 574 mdd.

Por su parte, América del Norte, es otra de las zonas que redujo la recepción de IED, pues tan en 2014 vio una disminución en el flujo de IED, la cual en 2013 fue de 302 miles millones de dólares y que en 2014 descendió a 139 millones de dólares. Cabe destacar que después de 2014, la región de Norteamérica fue superada por

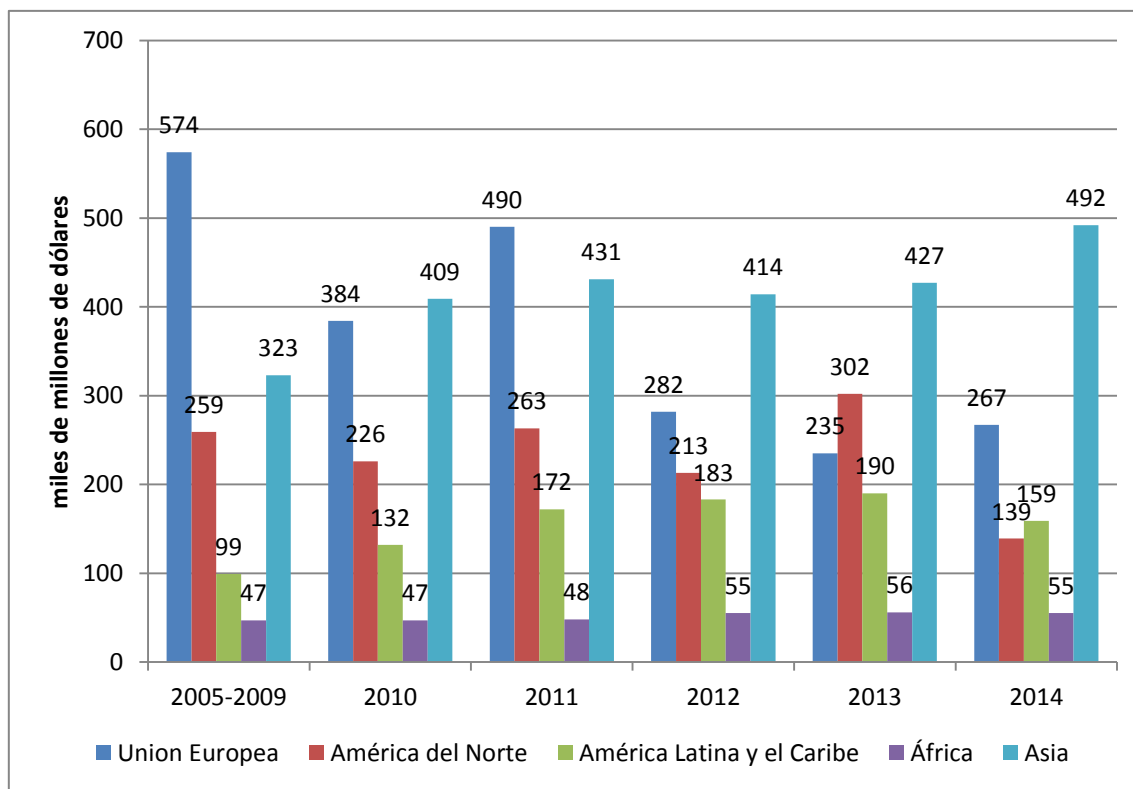


América Latina y el Caribe como la tercera región receptora de IED en el mundo (UNCTAD, 2015).

Sin embargo, América Latina, que se caracteriza por tener mano de obra barata, el flujo de IED ha sido inconstante, pues a pesar de haber visto sus índices aumentados, en el año 2014 descendió a 159 mil millones de dólares, es decir, 31 mil millones de dólares menos respecto a 2013, esto en gran medida a la incertidumbre derivada por la caída de los precios del petróleo, las crisis políticas de Brasil, Venezuela y Argentina, problemas naturales en Chile, entre otros.

Finalmente, se puede decir que la región menos favorecida, históricamente es África, zona que la IED solo ha crecido un 17% desde 2005.

Gráfica 6. Comparativo de las principales regiones receptoras de IED, 2014-2015 (miles de millones de dólares)



Fuente. Elaboración propia con datos de la UNCTAD (2015).

Según el Informe sobre las Inversiones en el Mundo de la UNCTAD (2015), las entradas de inversión extranjera directa (IED) en los países desarrollados se contrajeron por tercer año consecutivo durante 2015, significando un descenso de un 28% y alcanzando los 499.000 millones de dólares de los Estados Unidos. Estos datos indican que la inversión de capitales extranjeros actualmente está apostando por invertir en las economías emergentes.

Es importante señalar que durante 2014, la India fue el principal destino receptor de capital extranjero, donde las entradas de IED fueron de 34 mil millones de dólares, es decir que aumentó 22% respecto a 2013.

### ***América Latina y el Caribe.***

En América Latina y el Caribe, la Inversión Extranjera Directa es un componente importante en el Producto Interno Bruto (PIB) de las economías de la región, las cuales todas son países en vías de desarrollo.

*“... En las economías de menor tamaño, la IED suele representar un alto porcentaje del PIB y en los países del Caribe llega habitualmente al 10% del producto... las economías de mayor tamaño suelen a registrar proporciones mucho menores, como en Brasil y México...”*

(CEPAL, 2015)

En los países Centroamericanos y del Caribe, durante 2015 la IED aumentó, específicamente en Barbados y Antigua y Barbuda donde crecieron en 5.1% y 66% respectivamente. La mayor pérdida de IED se suscitó en Venezuela, país donde se tuvo un descenso en los niveles de inversión de -88% (CEPAL, 2015), esto en gran medida a los conflictos políticos de ese país que generan incertidumbre entre los inversionistas.

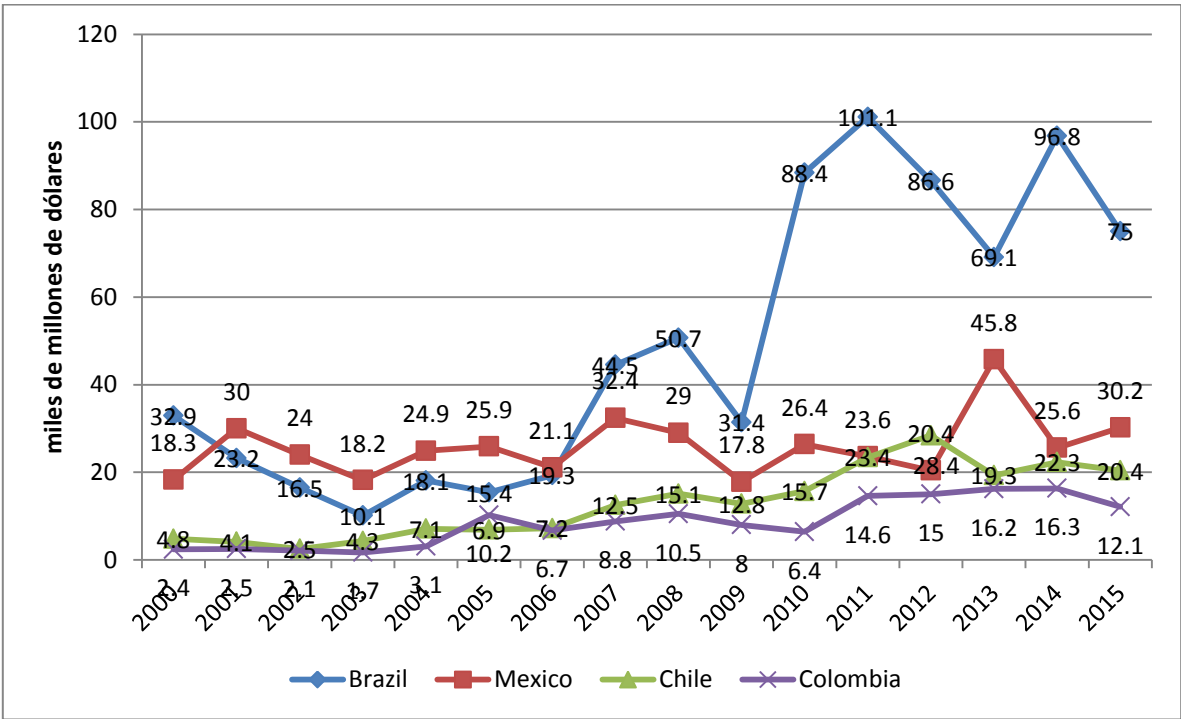
En la gráfica 7, se pueden observar a los principales países receptores de IED de América Latina y el Caribe, los que incluyen a Brasil, México, Chile y Colombia.

Brasil, que ha enfrentado problemas sociales y políticos de magnitudes importantes que derivaron en la desaceleración de su economía, se mantiene como el

destino número uno de la Inversión Extranjera Directa en la región. Tan solo en el año 2011, Brasil registro la IED más alta de su historia, un total de 101.1 mil millones de dólares, desafortunadamente desde entonces ha ido en descenso, pues en 2015 apenas recibió 75 mil millones de dólares.

Por su parte, México, el segundo destino de IED en la región, ha tenido un comportamiento promedio de 25.8 mil millones de dólares anuales en el periodo comprendido entre 2000-2015, mientras que Chile, tercer país receptor de IED promedió anualmente un total de 12.9 mil millones de dólares y Colombia 8.5 mil millones de dólares anuales.

**Gráfica 7.** Principales receptores de Inversión Extranjera Directa en América Latina y el Caribe, 2000-2015  
(miles de millones de dólares)



Fuente: Elaboración propia en base a datos del Banco Mundial (2015)

Es importante señalar que el caso de Argentina es particular, ya que es una economía que no termina por convencer a inversionistas extranjeros, por tanto los flujos de IED es inconstante. Tan solo en 2012 tenía un flujo de 15.3 mil millones de dólares y en 2014 registro un total de 5 mil millones de dólares, cifra que mejoró en 2015, cuando alcanzo un total de 11.6 mil millones de dólares en IED.

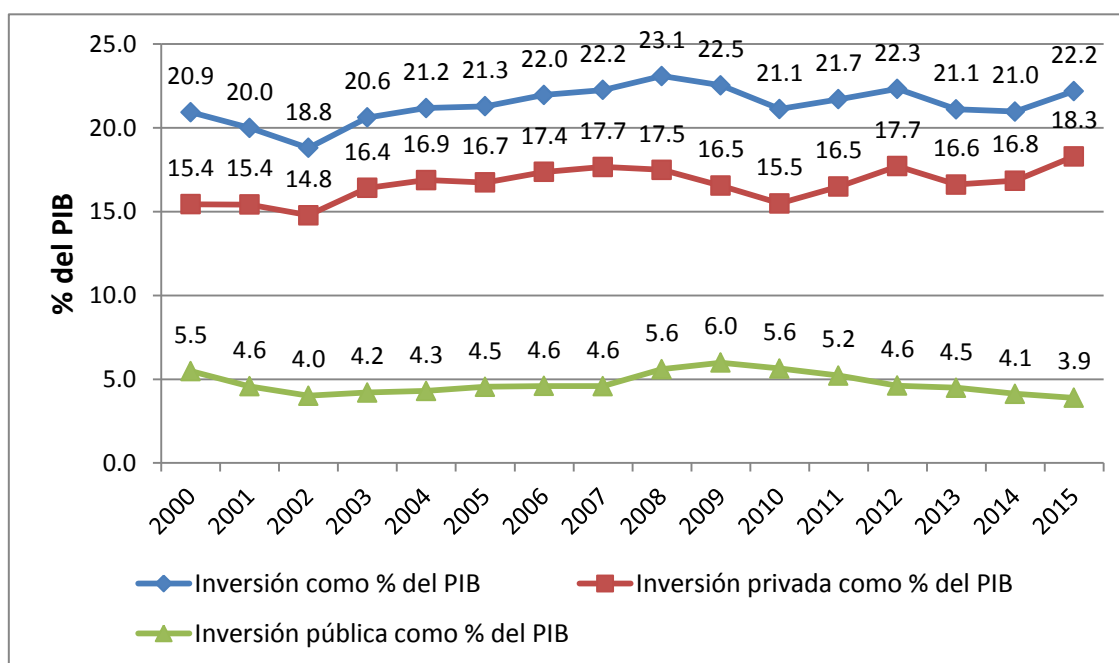
Así entonces, Brasil es la economía principal que recibe IED, seguida por México, Chile, Colombia, Argentina, Perú, Panamá, Uruguay, Bolivia y Paraguay.

### ***A nivel nacional.***

De acuerdo con la teoría marxiana, la forma inicial del capital es una masa de dinero cuya utilización se enfoca en el proceso productivo capitalista y sirve, por una parte para comprar maquinarias y materias primas, y fuerza de trabajo por la otra (Veraza, 2012). Es por ello que para desarrollar la presente investigación el capital estará siendo explicado por el total de la inversión en la economía y por el capital humano (fuerza laboral o trabajo), ya referido con anterioridad.

En 2016, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) reportaba que la inversión en el país representó el 22% del total del Producto Interno Bruto (PIB) en 2015, lo que indica que la Inversión además de ser uno componentes más importantes de la demanda agregada, y por tanto de la oferta agregada, también tiene impacto directo en el crecimiento económico del país, ya que de su constante dinamismo depende el desarrollo y funcionamiento de los sectores productivos de la economía, los que en el largo plazo demandarán capital humano.

Gráfica 8. Evolución de la Inversión Total, Pública y Privada, 2000-2015  
(porcentaje del Producto Interno Bruto)



Fuente: Elaboración propia en base a datos del INEGI (2016)

### ***Inversión pública***

La inversión pública se concentra en la sociedad y es responsabilidad del Estado, está orientada a cubrir los sectores de la salud, la educación, las comunicaciones, así como en el abastecimiento de bienes y servicios públicos, en el desarrollo de infraestructura, entre otros, para que derivado de esto, se cuente con mejores niveles de capital humano, más preparado y de calidad, que en su conjunto dotará a la economía de capital físico útil para la expansión de sectores productivos.

En México, a pesar de que la Inversión pública ha aumentado en casi el doble durante los últimos dieciséis años (en 2000 se tuvo una inversión de 354 mil millones de pesos y que para 2015 fue de 705 mil millones de pesos), en términos de participación en el PIB ha disminuido progresivamente y por tanto también aminoró su participación el crecimiento económico del país.

En el año 2009, el Estado invertía un total de 723 mil millones de pesos, es decir, el 6% del total del PIB, desde entonces dicha participación ha descendido, pues en 2013 la inversión pública fue de 724 mil millones de pesos y en 2015 disminuyó a 705 mil millones de pesos, tan solo el 3.9% del Producto Interno Bruto.

El retroceso gradual de la Inversión pública se atañe principalmente al actuar del gobierno y a la conducción de la política económica que ha favorecido al proceso de la globalización, la cual promueve el comercio exterior y por tanto la entrada de capitales extranjeros al país. Cabe señalar que existe un comportamiento similar entre Inversión pública y crecimiento de económico mexicano, los cuales reportan indicadores macroeconómicos muy bajos.

Lo cierto es que si la Inversión pública disminuye, entonces el capital humano mexicano se verá sumergido en un déficit, falta de preparación y con baja calidad, lo que de inicio pudiera ser una de las respuestas al porque actualmente el mercado laboral en México ofrece empleos precarios, inseguros y mal remunerados.

### ***Inversión privada***

En el país, el escenario de la Inversión pública difiere al de la Inversión privada, ya que esta última tiende a ser más susceptible frente a cambios de la economía mundial como

la volatilidad de los flujos de capital y la caída de los precios de las materias primas, por citar algunos.

Tal como se señalaba en la gráfica 8, durante el periodo 2000-2015, la inversión privada en términos de participación en el PIB ha crecido aunque de forma discreta. Dado que, tanto la inversión privada como el total de la inversión en el país tienen un comportamiento histórico semejante, se infiere que la inversión privada define la evolución del total de la inversión pues la inversión privada es la principal fuente de inversión para la economía mexicana.

De acuerdo con datos del INEGI, en 2015 la participación de la Inversión privada como porcentaje del PIB fue de 18.3% (3,318 mil millones de pesos), la cifra más alta registrada en el periodo de estudio, pues creció 1.5% respecto al 2014 cuando la inversión privada represento el 16.8% del total del PIB.

En el año 2009, la inversión privada registro la cifra más baja en el periodo analizado, cuando se invirtió un total de 2,001 mil millones de pesos, 142 millones de pesos menos que el año 2008, descenso que también repercutió en la participación del PIB, que fue del 16.5%, y que tal como señala el informe del Banco de México, estas cifras negativas fueron producto de la crisis económica mundial de 2008, que para la economía mexicana significo una desaceleración de la demanda externa, caída de las exportaciones y debilitamiento de la industria manufacturera nacional (Banco de México, 2009).

El comportamiento de la inversión privada en el país es inestable en gran medida a que el principal componente del marco global de las inversiones en la economía nacional derivan de la Inversión Extranjera Directa (IED), la cual es la fuente principal de los flujos de capital que radican en el país.

Referido con anterioridad, se sabe que México es el segundo país receptor de IED en América Latina, únicamente superado por Brasil. En la gráfica 9 se presenta el comportamiento de la Inversión Extranjera Directa en la economía mexicana dentro del periodo de estudio 2000-2015. En esta se puede observar que la IED ha tenido un comportamiento inestable, que está fuertemente influenciado por los fenómenos económicos globales, prueba de esto es que en el año 2009 los efectos de la crisis

inmobiliaria de Estados Unidos de América estaban su apogeo y al ser E.U.A. el principal país inversor en México, la Inversión Extranjera Directa fue de 17.8 millones de dólares, es decir, que hubo un déficit del -61.4%<sup>2</sup> respecto a los 29 millones de dólares de 2008.

En la misma grafica 9, también es posible observar que la Inversión Extranjera Directa alcanzó su punto más alto en el año 2013, con un total de 45.8 millones de dólares (incremento del 144.5% respecto a 2012), gracias al concepto de nuevas inversiones, especialmente la suscitada durante el segundo trimestre de ese año, cuando se concretó la compra de Grupo Modelo por parte de la belga AB Inbev (Secretaría de Economía, 2016).

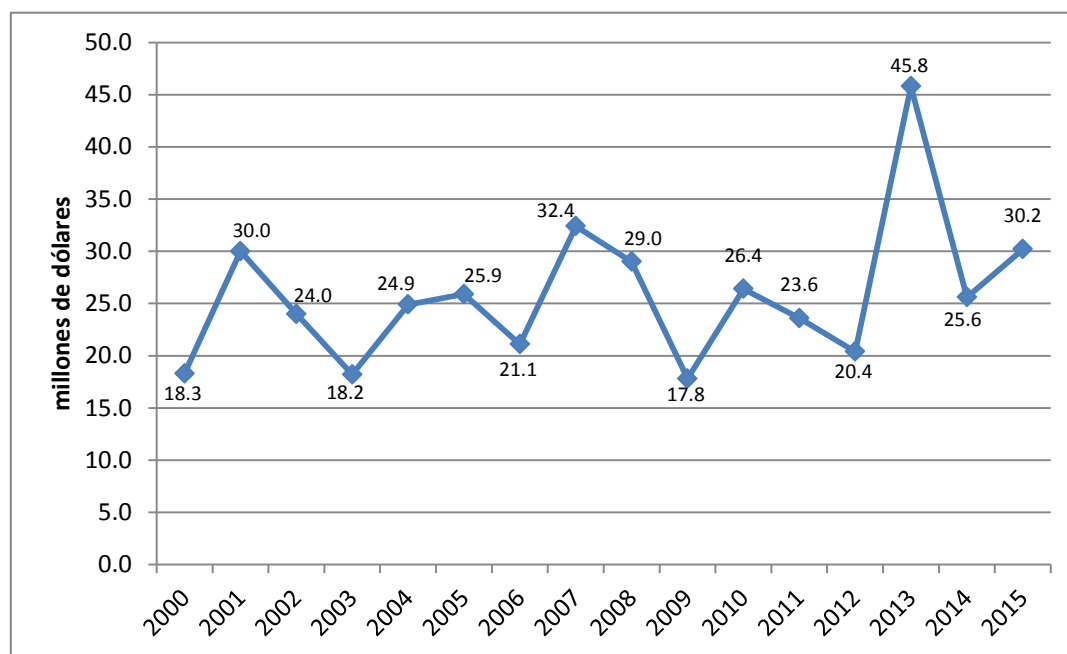
Sin embargo dicho crecimiento no fue sostenido ni constante, ya que para 2014 hubo un descenso drástico del 55.6% en la IED, pues la cifra alcanzada en este año tan solo fue de 25.6 millones de dólares. Finalmente para el año 2015 la tendencia volvió a ser ligeramente favorecedora pues la IED creció, llegando a los 30.2 millones de dólares.

---

<sup>2</sup> Calculado por el autor en términos de variación porcentual.



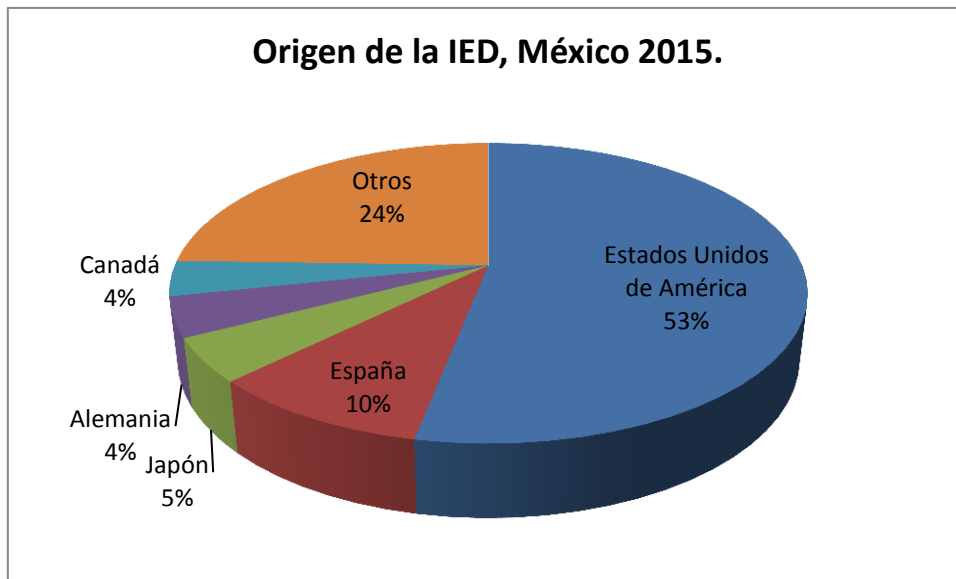
Gráfica 9. Inversión Extranjera Directa en México, 2000-2015  
(millones de dólares)



Fuente: Elaboración propia en base a datos del INEGI (2016).

De acuerdo con información de la Secretaría de Economía, en 2015 la inversión extranjera directa percibida en el país fue destinada a las manufacturas en un 50.0%; al sector de los servicios financieros en 10.0%; a los medios masivos en un 9.8%; al sector del comercio 9.0% y al de construcción en un 7.3%; mientras que el origen del financiamiento provino en un 37.2% de nuevas inversiones, 32.1% por cuentas entre compañías y 30.7% por reinversión de utilidades. Así mismo en un reporte de actividades anual, la Secretaría de Economía cito que los países que más invirtieron en México son Estados Unidos participando en un total de 53.1%; España 9.6%; Japón, 4.7%; Alemania, 4.3%, y Canadá, 3.8%; otros 74 países aportaron el 24.5% restante del total (Secretaría de Economía, 2016).

Gráfica 9. Origen de la Inversión Extranjera Directa en México durante 2015.



Fuente: Elaboración propia en base a datos de la SE (2016).

A partir de lo expuesto con anterioridad, se puede inferir que el capital en México es dependiente de la inversión extranjera que llega al país, la cual es altamente volátil, pues no tiene asegurada su permanencia en los procesos productivos nacionales y desde luego los beneficios que emanan de ella son retornados a su país de origen.

Planteadas las condicionantes anteriores, se conoce que tanto el trabajo como el capital en México están estrechamente relacionados el uno con el otro, por lo que resulta importante conocer si su asociación, que está caracterizada por los desequilibrios económicos externos fruto de la apertura y globalización de la economía mundial, se está dando de forma conjunta en el país, o si existe una desasociación en la relación capital-trabajo, que permitiría inferir el por qué no se estén beneficiando mutuamente.

Entonces, la presente investigación tiene por objetivo analizar la relación capital-trabajo en la economía mexicana durante el periodo 2000-2015, utilizando como técnica al modelo de Lotka-Volterra o presa-depredador, el cual permite conocer si ambas variables, capital y trabajo, presentan un estado de simbiosis<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Simbiosis. Def. I. Asociación íntima de organismos de especies diferentes para beneficiarse mutuamente en su desarrollo vital. II. Relación de ayuda o apoyo mutuo que se establece entre dos personas o entidades, especialmente cuando trabajan o realizan algo en común.

Para comprobar la hipótesis de investigación ( $H_0$ = La relación capital-trabajo en la economía mexicana presenta un estado de (simbiosis) asociación estrecha que permite su desarrollo y beneficio mutuo) y con propósitos de cumplir el objetivo del trabajo, la tesis se divide en tres capítulos y un apartado de conclusiones.

Capítulo 1. Marco Teórico: Este capítulo tiene por objetivo presentar los ejes teóricos de las variables capital y trabajo en el contexto de las principales teorías económicas, así como revisar aportaciones recientes derivadas de la consulta literaria sobre tema de estudio.

Capítulo 2. Técnica: En este capítulo se explican las principales técnicas y los métodos matemáticos que serán utilizados en el trabajo, específicamente, el modelo Lotka-Volterra y el Sistema lineal desacoplado de dos ecuaciones.

Capítulo 3: Análisis empírico: modelo Lotka-Volterra para el caso mexicano, 2000-2015: tiene por objetivo comprobar la hipótesis de investigación mediante la solución de un modelo econométrico de ecuaciones simultáneas, que proviene de la adaptación del modelo Lotka-Volterra en términos económicos.

Conclusiones: Se hace una exposición de los resultados obtenidos de la solución modelo econométrico y se formulan recomendaciones de política. Finalmente y para soportar la investigación se presentan las fuentes de información consultadas para la elaboración del presente trabajo.

## **CAPÍTULO I. MARCO TEÓRICO.**

La teoría económica históricamente ha referido la importancia de los factores de producción en una economía gracias a su participación en el crecimiento y desarrollo económico de un país. Economistas como David Ricardo, Carlos Marx, Jhon Keynes, por mencionar algunos, coinciden en que para generar producción se necesita esencialmente la presencia de tres factores: la tierra, el capital y el trabajo.

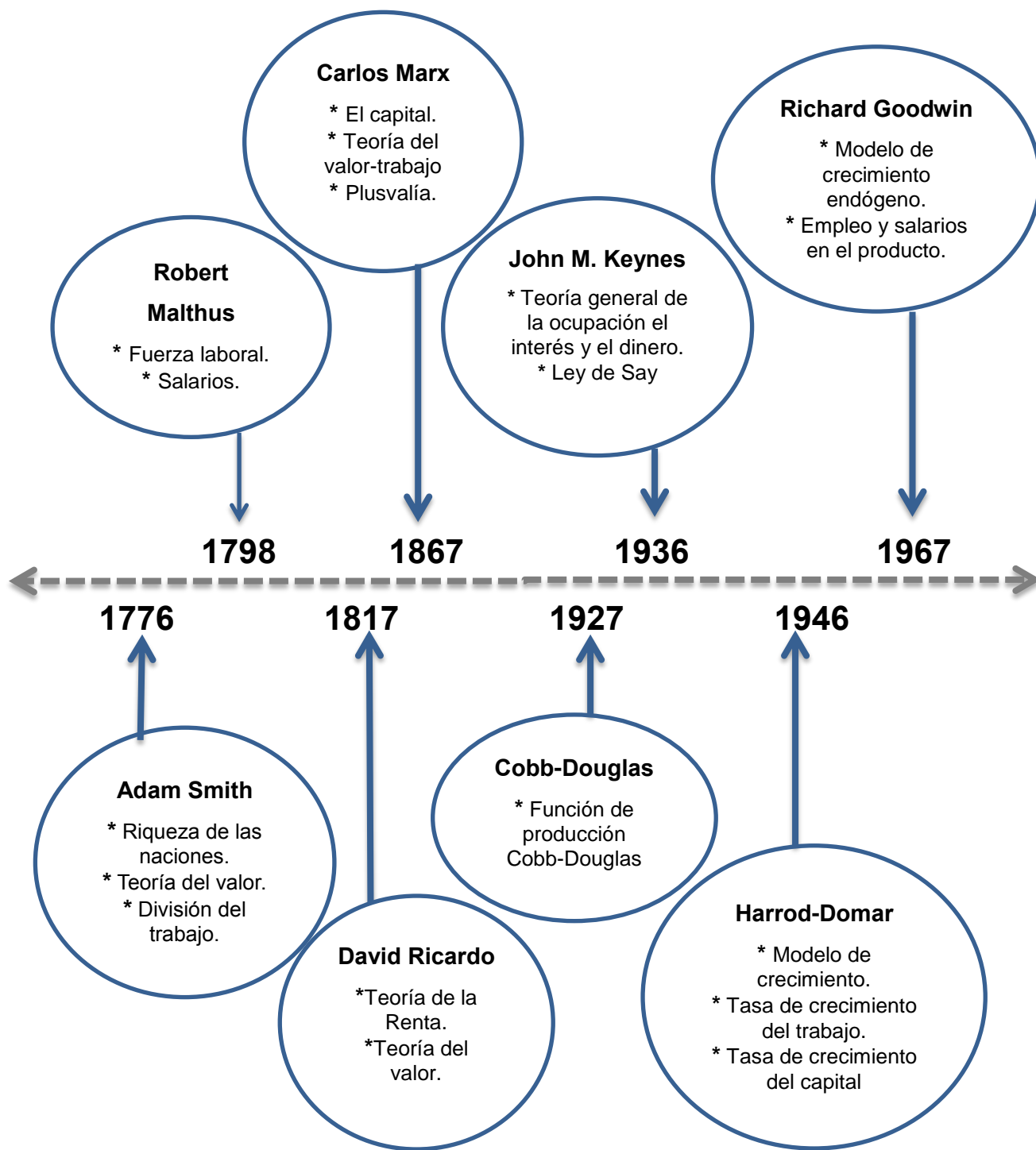
La teoría del crecimiento económico se ocupa de analizar los factores que influyen en el ritmo al que crece una economía (Uxó, 2016). Derivado de teóricas, doctrinas y obras se conoce que el capital y el trabajo son los dos factores de producción que mayor influencia tienen sobre el comportamiento económico de un territorio.

No se omite mencionar que históricamente se ha buscado que ambos factores, capital y trabajo, converjan al equilibrio para lograr estabilidad en la economía, sin embargo es un hecho prácticamente imposible de conseguir, especialmente en el caso de México, debido a su entorno económico tan vulnerable que se deriva de su dependencia con la economía mundial.

El objetivo de este capítulo es revisar y presentar las aportaciones teóricas de la ciencia económica sobre el tema de estudio. Para lograr el objetivo referido, el capítulo se divide en dos apartados, al primero le competen los aportes de los principales ejes económicos sobre el capital, el trabajo y la relación de ambos factores; y el segundo apartado se refiere a la revisión de literatura, destacando la aplicación del modelo Lotka-Volterra en la ciencia económica.

Figura 1.1

Línea del tiempo: Teorías económicas revisadas.



Fuente: Elaboración propia.

## 1.1 Aportaciones teóricas sobre el capital y el trabajo

Adam Smith (1776), en su obra fundamental “Una investigación sobre la naturaleza y las causas de la Riqueza de las Naciones” postula la ley del valor, en la que enuncia la problemática de la división de clases y refiere que la creación de la riqueza procede del trabajo, su división y de su especialización. Con estos tres conceptos el trabajador incrementaría la eficiencia y productividad de su trabajado, pues se produciría más por unidad de tiempo (Ekelund & Hébert, 2005).

La relación capital-trabajo en la teoría smithiana es referida cuando Smith postula que los límites de la división del trabajo vienen determinados por el stock de capital y el tamaño del mercado.

Para Smith, la amplitud del mercado dependía de la acumulación de capital, es decir, del stock de capital existente, además de que él creía que sin la intervención de ningún agente externo, el mercado sería capaz por si solo de regularse y generar bienestar para todos a través de una mano invisible (Ekelund & Hebert, 2005).

Derivado de lo anterior, se pensó que los trabajadores incrementarían sus ingresos vendiendo su mano de obra al capitalista que mejor le pague. Sobre el capitalista indicó que si incrementara el capital y la mano de obra, se disminuirían los costos de producción y que de mantenerse precios constantes en el mercado, entonces se incrementarían de los beneficios de la producción. (Smith, 1776).

En base a lo anterior es posible establecer que, de acuerdo con Adam Smith, el capital y el trabajo están directamente relacionados y que su acompañamiento sería fundamental para fortalecer al sistema capitalista del siglo XVIII, ya que la fuerza laboral especializada permitió que se incrementara el capital al ser más eficiente el trabajador.

Por su parte, Malthus, R. derivó su análisis de la producción y de la fuerza de trabajo, en su *Ensayo sobre el principio de la población (1798)*, él partió del supuesto de que se pagaban salarios de subsistencia a los trabajadores como medida para asegurar el reemplazo generacional, pero dicha estrategia provocó escasez de fuerza de trabajo, al resultar insuficientes los salarios para subsistir, por lo que el trabajador optó por abandonar esos empleo y buscar nuevos. Esta acción provocaba que escaseara el

empleo y serviría a elevar los salarios, los que incentivaban nuevamente al trabajador a insertarse en el mercado laboral (Gonnard, 1972).

Robert Malthus también hizo referencia sobre los temas de la producción y de la fuerza de trabajo. Él se preocupó por el exceso relativo de oferta que provocaba una caída de los precios, así mismo también enfatizó la importancia de las utilidades, pues él creía que servían de estímulo a la inversión. En este sentido, Malthus mencionó que debido al exceso de oferta y una disminución de la demanda había un exceso de mercancías, de capital y puestos de trabajo que buscaba corregirse con la caída de los precios (Ekelund & Hebert, 2005:140).

Otra doctrina importante de la economía es la postulada por David Ricardo, quien se ocupó de averiguar las causas del crecimiento económico del país, el comercio internacional, las finanzas públicas, los rendimientos decrecientes, la renta y enfoca su teoría en el valor. Él elaboró su estudio utilizando al factor trabajo como la medida para establecer el valor de los bienes.

Ricardo (1817), en su obra "Principios de economía política y tributación" sostenía que el precio del trigo estaba regulado por el trabajo empleado en tierras de renta cero por lo que no será necesario considerar a la renta como componente del valor de un producto. Por su parte, el capital podía expresarse en factor trabajo si consideramos a las maquinarias y demás insumos como trabajo acumulado o incorporado, que agrega parte de ese trabajo al producto elaborado (Ekelund & Hébert, 2005: 155-159).

La relación capital-trabajo en el análisis de David Ricardo se establece principalmente en la Teoría de la Renta. En esta se realiza un análisis sobre las diferencias de renta existentes entre los terratenientes (capital) y los trabajadores (fuerza laboral). Para David Ricardo, los capitalistas contribuían a una eficaz asignación de los recursos al transferir el capital a sectores que ofrecen mayor ganancia además iniciaron el crecimiento económico mediante el ahorro y la inversión, mientras que los trabajadores recibían salarios por su fuerza laboral (Roll, 1994).

Uno de los economistas que enfatiza fuertemente la importancia de la relación del capital y el trabajo es Carlos Marx al crear la teoría del valor-trabajo. Marx (1867) en

su obra “El capital” afirma que cada mercancía encierra un valor correspondiente al tiempo de trabajo socialmente necesario requerido para su producción, es decir, que el capital está formado por trabajo acumulado, asegurando que era el obrero quien producía el capital de la economía, por lo que el aumento de capital debería beneficiar al proletariado, sin embargo este crecimiento beneficia al capitalista y muy poco al proletariado.

La teoría valor-trabajo afirma que al obrero no se le debería pagar por lo que produce sino que se le tendría que dar un salario basado en su fuerza de trabajo, aunque este variaría de acuerdo al género, edad, las condiciones geográficas del país en el que vive el trabajador, al sector en el que trabaja y también con arreglo a ciertas oscilaciones por la oferta y la demanda de ese puesto de trabajo (Ekelund & Hébert, 2005: 277-294).

En la teoría marxiana, la forma inicial del capital es una masa de dinero cuya utilización en el proceso productivo capitalista permite a su dueño obtener una cantidad mayor que la inicial. El dinero sirve para comprar maquinarias y materias primas por una parte, y fuerza de trabajo por la otra (Veraza, 2012). Cabe destacar que Marx definió a la fuerza de trabajo como la mercancía cuyo valor de uso tiene la propiedad de ser fuente de valor y refirió también que el obrero debería ser libre para poder vender su fuerza de trabajo al capitalista con el que mejor considere trabajar.

Las aportaciones de las teorías clásicas son la base de la teoría económica, pero en la transición a nuevas teorías surgieron otros postulados que también es importante citar debido a su participación en la ciencia económica.

Tal es el caso de los economistas Charles Cobb y Paul Douglas, quienes realizaron una modelización de la economía de Estados Unidos de América del periodo 1899-1922.

Cobb y Douglas, en su análisis afirmaron que en la economía estadounidense, la salida de producción estaba determinada por la cantidad de mano de obra necesaria y la cantidad de capital invertido, además de la tecnología utilizada. En 1927 Douglas observó que la distribución de la renta entre trabajo y capital en EEUU se había mantenido más o menos constante a lo largo del tiempo, concretamente, el trabajo se



llevaba el 70% de las rentas y el capital el 30%. Cobb, gracias a lo referido por Douglas elaboró la función de producción que mantenía las participaciones constantes en los factores dadas las condiciones existentes (Nicholson, 2008).

$$Y_t = A K_t^\alpha L_t^\beta ; \quad \text{donde} \quad 0 < \alpha , \beta < 1$$

$Y_t$  : Producción;  $A$  : progreso técnico exógeno;  $K_t$  : Stock de capital;  $L_t$  : número de empleados en una economía

En la función elaborada por Cobb-Douglas,  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros que representan el peso de los factores  $K$  y  $L$  en la distribución de la renta, factores productivos que se mantienen constantes en el tiempo adicional al factor progreso técnico. Actualmente la función de Cobb-Douglas es una de las técnicas microeconómicas más importantes que se instrumentan para explicar la relación del capital y el trabajo, además de que es una de las herramientas matemáticas básicas en la formación de un economista.

Otra de las doctrinas más sobresalientes e importantes en la Economía general gracias a los postulados de John Maynard Keynes, es la teoría keynesiana.

Las aportaciones de Keynes surgen del análisis del entorno capitalista en el que se desarrollaba la economía de Estados Unidos de América tras la crisis de la Gran Depresión<sup>4</sup>. Entre sus posturas destaca su oposición a lo dicho por la Ley de Say<sup>5</sup>, pues según Keynes la economía capitalista no genera necesariamente niveles de demanda agregada lo suficientemente altos como para asegurar la consecución de los equilibrios de pleno empleo. Keynes mantuvo que la ley de Say sólo podía ser aplicable a una economía no capitalista, en la que el dinero nunca estuviera inactivo de forma que todos los ahorros fueran invertidos (Sardoni, 2004).

Keynes (1936) en su obra *“Teoría general de la ocupación el interés y el dinero”* refiere que la entonces situación económica de Estados Unidos de América se debía a

---

<sup>4</sup> La Gran Depresión es un período de contracción económica mundial que inicia el jueves 24 de octubre de 1929, cuando se produjo el crash de la bolsa de Wall Street.

<sup>5</sup> Ley de los mercados (1803) sugiere que no puede haber una producción excesiva ya que toda oferta creaba su propia demanda (Sardoni, 2004).

que no se estaba ocupando todo el potencial productivo y a consecuencia, existía una elevada tasa de desempleo. Por tanto, él sugirió que si se aumentaba la inversión, entonces mejoraría la situación económica global del país y por consiguiente los trabajadores recibirían aumentos de sueldo (Ekelund & Hebert, 2005).

De las ideas keynesianas surge uno de los modelos de crecimiento más importantes de la teoría económica: el modelo crecimiento de Harrod-Domar.

El modelo Harrod-Domar concebido concebido de forma independiente por Roy Harrod (1939) y Evsey Domar (1946), analiza los factores que influyen en la velocidad del crecimiento a través de la relación capital-trabajo en forma de la tasa de crecimiento del trabajo, la productividad del trabajo, la tasa de crecimiento del capital y la productividad del capital.

Harrod y Domar coinciden en que para que haya un crecimiento económico equilibrado y con pleno empleo es necesario que el producto y el capital productivo crezcan exactamente en esa misma proporción llamada la tasa natural. Por lo que si el crecimiento del capital es menor del crecimiento del trabajo, habrá desempleo, provocando distorsiones en la tasa de ahorro e inversión que desequilibrarán el crecimiento (Ray, 2002).

Tomando como soporte teórico el modelo Harrod-Domar, el economista Richard Goodwin (1967) diseña el modelo de crecimiento en el que se sustentará el presente trabajo de investigación: el modelo de Goodwin.

Tal como lo refieren Colacchio, Sparro y Tebaldi (2007) “El modelo de crecimiento endógeno de Richard Goodwin existen dos factores de producción: K y L, los cuales generan fluctuaciones endógenas en la actividad económica sin depender de suposiciones extrañas de los choques externos, sea del lado de la Demanda o de la Oferta.”

El modelo de Goodwin consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales las cuales determinan, simultáneamente, la evolución de la tasa de empleo y de la participación de los salarios en el producto, supone que la productividad del trabajo crece a una tasa constante siendo  $\alpha$  la tasa de crecimiento de la productividad, mientras

que la tasa de crecimiento de la población se considera exógena y constante a lo largo del tiempo. Siendo  $\beta$  la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo. Así mismo supone una razón capital-producto constante ( $\sigma$ ) (Goodwin, 1967).

A pesar de la complejidad de las ideas de Goodwin, sus aportes siguen vigentes, ya que su modelización está siendo recuperado por una nueva forma de estudio, la determinística.

## 1.2 Revisión de literatura

Como se mencionaba al inicio del capítulo, este apartado tiene como fin demostrar que el tema de estudio es del interés actual del campo académico y científico, por lo que se revisa literatura sobre la relación capital-trabajo así como investigaciones prácticas sobre el Modelo Lotka-Volterra en la economía.

Inicialmente se tiene lo aportado por González (2005), quien que aborda el tema de la relación capital-trabajo. En su investigación expone los efectos socioeconómicos de la globalización y el cambio tecnoeconómico sobre el capital y el trabajo, refiriendo el conflicto entre ambas variables al concebirlas como dos poderes independientes unidos por el deseo de obtener plusvalía.

El eje principal del trabajo revisado tiene como tesis el fin del trabajo. González, plantea que con las transformaciones promovidas por la innovación tecnológica, el trabajo humano está siendo sistemáticamente eliminado del proceso de producción, adhiriéndose a la idea de que estamos ante el fin de la clase obrera y del trabajo mismo.

Entre otros aportes de González esta su afirmación de que en efecto el proceso de globalización y los avances tecnoeconómicos ha transformado la organización de la producción y las formas de división social del trabajo, modificando la estructura tradicional de la clase obrera, exigiendo un nuevo tipo de calificación de la fuerza de trabajo, provocando que el capital variable tienda a reducir de manera dadas las nuevas formas del trabajo.

González concluye sobre la relación trabajo-capital que "... la aparición de un enorme ejército industrial de reserva de carácter global, que si bien brinda un amplio margen de maniobra al capital, implica también problemas tanto de gestión de fuerza de trabajo como de absorción suficiente del proceso de reproducción, dándose por ello el fenómeno de crecimiento sin empleo, lo cual es una muestra más de la crisis del sistema de economía capitalista mundial (González, 2005)." Es decir, que no estamos ante el fin del trabajo sino en un contexto de crisis de las relaciones de producción capitalistas, las cuales no garantizan el proceso de reproducción de la fuerza de trabajo

En esta misma línea de investigación, Odriozola & Colina (2005) realizan una valoración crítica de la relación capital-trabajo frente en las condiciones contemporáneas de la economía mundial. Los autores destacan que la creciente informatización de los procesos de producción y su robotización es un factor predominante que subordina a la lógica del capital y su valor.

En su trabajo los autores plasman que, su intento por darle valor al capital, ha conllevado a la búsqueda del incremento de la productividad del trabajo, con el objetivo de reducir el tiempo de trabajo necesario y así lograr una mayor extracción de plusvalía. De este modo, Odriozola & Colina dicen que la nueva forma de producción capitalista no ha hecho más que contribuir a la expansión del capital.

Los autores concluyen diciendo que la propia dinámica de la acumulación capitalista tiende a promover el desarrollo científico y tecnológico como una de sus condicionantes, pues de estos factores se derivan el trabajo valorizado y la reproducción del capital.

El trabajo de Odriozola & Colina permite comprender el papel de las nuevas tecnologías en el proceso de producción y como a pesar del contexto actual de las economías, la plusvalía, término acuñado por Marx sigue siendo un referente en la relación del capital-trabajo y en el funcionamiento de cada economía.

Con propósitos de la elaboración de este apartado es importante mencionar que el modelo de Lotka-Volterra es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, acopladas, autónomas y no lineales que buscan explicar la dinámica de las poblaciones de presa y depredador. (Colacchio, Sparro, & Tebaldi, 2007).

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta yx$$

donde: x: número de presas; y: número de depredadores;  $\alpha$ : tasa de crecimiento de las presas;  $\beta$ : éxito en la caza del depredador;  $\gamma$ : tasa de decrecimiento de los depredadores;  $\delta$ : éxito en la caza y cuánto alimenta cazar una presa al depredador.

En el capítulo 2 se hace una explicación más detallada del modelo Lotka-Volterra, pero era necesario dar indicios de lo implicaba para comprender los trabajos revisados que se citaran a continuación, los cuales analizan al sector económico.

Asenjo & González (2002) elaboraron un estudio sobre la inestabilidad de las economías modernas, basándose en el modelo depredador-presa para explicar la interacción entre el sector real y el sector financiero. Siguiendo el modelo poskeynesiano, determinaron al dinero como variable endógeno, por lo que el sector real a través de la tasa de acumulación del capital fijo adopto el papel de la presa, mientras que sector financiero mediante el coste de la financiación y la rentabilidad de los activos financieros, es decir el tipo de interés, sería el depredador.

Los autores encuentran que el tipo de interés experimenta presiones alcistas cuando la economía lleva un tiempo creciendo por encima de la tasa garantizada y cuando los bancos conceden todo tipo de facilidades crediticias a las empresas, que en el largo plazo dicha elevación del tipo de interés de mercado por encima de su valor convencional paralizan algunos proyectos de inversión, por consiguiente si los tipos de interés suben, la inversión productiva y la producción se estancarían.

En su trabajo *Inestabilidad financiera y ciclos a partir de un modelo "depredador-presa"*, los autores afirman que "... los ciclos financieros de carácter endógeno responden a comportamientos racionales de los agentes económicos, al deseo de los empresarios de obtener en sus inversiones productivas los mayores tipos de beneficios y al deseo de los bancos y rentistas de sacar el máximo rendimiento financiero a su cartera de valores (Asenjo & González, 2002: 26)".

En otro trabajo revisado, Moreno (2002) evalúa la hipótesis del crecimiento cíclico de Richard Goodwin utilizando datos colombianos, él plantea el objetivo de contrastar las ideas del modelo original contra sus propias hipótesis.

El autor presenta una prueba cualitativa del ciclo económico de Colombia, encontrando límites en los datos, así como variaciones en el capital y trabajo a nivel cualitativo demostrando cierta correspondencia con las predicciones teóricas de Goodwin. En contraste, los resultados cuantitativos obtenidos rechazan los supuestos del modelo, dado que el modelo empírico no describe el verdadero proceso generador

de los datos que explican el crecimiento económico en Colombia, por lo que. Moreno resulta que es importante mejorar el modelo mediante un proceso de refinamiento y flexibilización de los supuestos, una vez que empíricamente, para el caso colombiano, el modelo de Goodwin no cumple con su propósito (Moreno, 2002).

Por su parte, Lordemann, Rubin, & Villegas (2011), en su trabajo “El modelo de Goodwin: ciclos económicos e inversión en Bolivia” plantea la hipótesis de que el producto nacional se mueve en ciclos dinámicos, los cuales difieren de una economía a otra debido al impacto del capital (inversión) sobre el producto. El objetivo del estudio radicó en examinar la causalidad de la inversión en los ciclos económicos.

Los autores mencionan que la magnitud y regularidad de las inversiones tiene que ser coordinado por políticas del Gobierno de Bolivia para que su impacto sea un acelerador para la economía, con lo dicha instrumentación del capital invertido impacte directamente al trabajo, que en el largo plazo crearían mayores fuentes de empleo, más calificado y en abundancia, aspecto que sin duda mejoraría la producción de esa economía (Lordemann, Rubin, & Villegas, 2011).

Lordemann, Rubin, & Villegas llegan a la conclusión de que el capital y el trabajo están relacionados directamente y afirman que el capital promueve y revitaliza al trabajo en la producción, sin embargo de la investigación realizada encontraron que Bolivia es una economía que desincentiva a las inversiones en la fabricación de nuevos bienes de capital, puesto que la capacidad de fabricar bienes de capital es baja y toma mucho tiempo en crear nuevos bienes. Por lo tanto, en Bolivia la brecha entre el tiempo de producir nuevos bienes de consumo y nuevos bienes de capital es amplia.

Es importante decir que los modelos presa-depredador como el de Lotka-Volterra y el de Lorenz, además del modelo de Goodwin, la bifurcación matemática y la teoría del catástrofe son solo algunas de las técnicas de la teoría de dinámica de sistemas que se están utilizando de como herramientas para generar nuevos aportes principalmente sobre fenómenos del sector financiero, tales como movimientos bursátiles.

## **CONCLUSIONES PARCIALES**

Las teorías económicas, además de ser base en la formación de un economista, son el fundamento para cualquier estudio e investigación del área económica, razón por la cual se presentaron las principales doctrinas y sus postulados. Como se pudo leer, el capital y el trabajo son dos variables de magnitudes muy importantes en las investigaciones dada su atemporalidad y trascendencia. Las circunstancias del entorno, el tiempo y el espacio están en constante cambio, sin embargo, el capital y el trabajo seguirán siendo instrumentados para dar explicación a nuevos fenómenos económicos, incluso sociales, ambientales, entre otros.

La importancia de revisar literatura reciente que atañe a los modelos de la teoría de dinámica de sistemas radica en que era necesario exponer que estos temas aunque relativamente nuevos son del interés actual de investigadores para ofrecer nuevas posturas sobre temas económicos.



## CAPÍTULO II. MODELO LOTKA-VOLTERRA

El objetivo de este capítulo es explicar las principales técnicas y los métodos matemáticos que serán utilizados para buscar comprobar la hipótesis de investigación (HG= *La relación capital-trabajo en la economía mexicana presenta un estado de (simbiosis) asociación estrecha que permite su desarrollo y beneficio mutuo*), específicamente se expondrán el modelo Lotka-Volterra y el Sistema lineal desacoplado de dos ecuaciones.

### 2.1 Modelos presa-depredador en la ciencia económica.

Un modelo presa-depredador supone la coexistencia de dos especies en un ambiente aislado. Denotamos con  $x(t) \geq 0$  la población de la primera especie en el tiempo  $t$ , y con  $y(t) \geq 0$  la población de la segunda. Un modelo presa-depredador permite al investigador comprender la forma en que las especies evolucionan con el tiempo (Golubitsky & Dellnitz, 2001).

La suposición general acerca de los modelos de crecimiento poblacional es que en cualquier tiempo  $t$  la población de una especie es 0, la población de esa especie se extingue permaneciendo así para todo tiempo subsiguiente. Las ecuaciones están expresadas como,

$$\frac{dx}{dt} = x f_1(x, y) \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = y f_2(x, y) \quad (2.2)$$

Donde  $x, y \geq 0$ . La presencia del factor  $x$  en (2.1) y el factor  $y$  en (2.2) asegura que las poblaciones que se han extinto permanecen extintas. Los factores  $f_j$  son las tasas de crecimiento de las especies. Sin  $f_1(x, y) = \mu_1$  y  $f_2(x, y) = \mu_2$  son constantes, el sistema (2.1), (2.2) es un sistema desacoplado de ecuaciones lineales y las dos especies evolucionan de manera independiente.

## *Suposiciones de los modelos presa-depredador*

En el desarrollo de los modelos presa-depredador hay cuatro suposiciones:

- a) Sin depredadores, la población de presas crece.
- b) A falta de presas, la población de depredadores se contrae.
- c) Ante los depredadores, la tasa de crecimiento de las presas se reduce.
- d) En presencia de la presa, aumenta la tasa de crecimiento de depredadores.

### **2.1.1 Ecuaciones de Lotka-Volterra**

El modelo Lotka-Volterra, también conocido como ecuaciones de Lotka-Volterra, son un par de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que se usa comúnmente para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan: una como presa ( $x_t$ ) y otra como depredador ( $y_t$ ) (Colacchio, Sparro, & Tebaldi, 2007).

El modelo presa-depredador Lotka-Volterra, se desarrolla de manera independiente en la primera mitad del siglo XX, gracias al trabajo del matemático Vito Volterra y del biólogo estadounidense Alfred J. Lotka. Este modelo es la extensión más sencilla del sistema logístico desacoplado para especies que afectan mutuamente y tienen la forma

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \quad (2.3)$$

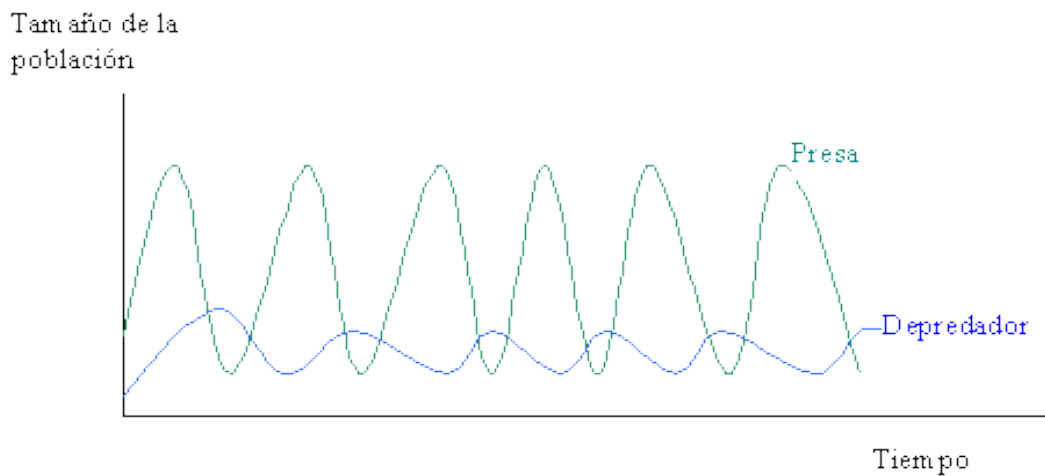
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy \quad (2.4)$$

Donde  $x$  es el número de presas y  $y$  es el número de depredadores,  $a$  es la razón de crecimiento de la presa,  $c$  es la razón de muerte del depredador y  $b$  es la razón que caracteriza el efecto de la interacción presa-depredador sobre la muerte de la presa y  $d$  son el crecimiento del depredador. Los términos que se multiplican ( $xy$ ) hacen que las ecuaciones sean no lineales (Chapra & Canale, 2007).

Un ejemplo clásico para explicar el modelo presa-depredador es el que surge de las observaciones realizadas por la compañía canadiense Hudson's Bay en los años 90,

cuando registran el comportamiento de la población de dos especies: conejos como las presas ( $x_t$ ) y lince como los depredadores ( $y_t$ ) en el periodo 1800-1900, asumiendo que estas capturas son representativas del tamaño de las poblaciones. La Figura 2.1 se puede observar la representación en el dominio del tiempo de los números de presas y depredadores con el modelo de Lotka-Volterra

Figura 2.1  
Comportamiento presa-depredador con el modelo de Lotka-Volterra.



Fuente: Extraído de Chapra & Canale (2007).

La dinámica de población que pronostica este sistema de ecuaciones depende de los valores de los parámetros  $a, b, c$  y  $d$  y de la simultaneidad que en la solución resulta de los parámetros de error.

El modelo de Lotka-Volterra hay un equilibrio cuando ninguna especie se ha extinguido. Para comprender las dinámicas cerca de este equilibrio se calcula la matriz jacobiana, la cual se encuentra linealizando el sistema de ecuaciones diferenciales (2.3) y (2.4) y calculando las derivadas parciales.

$$f(x, y) = ax - bxy \quad (2.3.1)$$

$$g(x, y) = -cy + dxy \quad (2.4.1)$$

Para la ecuación (2.3.1)  $f(x, y) = \alpha x - bxy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha - by \quad 2.3.1.1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -bx \quad 2.3.2.1$$

Para la ecuación (2.3.1)  $g(x, y) = -cy + dxy$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = dy \quad 2.3.1.2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -c + dx \quad 2.3.2.2$$

Por tanto la matriz jacobiana, será

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

Posteriormente se hace la sustitución en el primer punto  $P_1 = (0,0)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha - b(0) & -b(0) \\ d(0) & -c + d(0) \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Valores y vectores propios de la matriz

$$J(0,0) = (\alpha, 0), (0, -c)$$

$$J(0,0) = (\alpha, 0), (0, -c)$$

Vector propio  
 $\{\alpha, -c\}$

Valor propio  
 $\{1,0\}\{0,1\}$

Los resultados muestran que el punto de equilibrio  $P_1 = (0,0)$  tiene soluciones que crecen exponencialmente a lo largo del eje  $x(t)$  y que disminuyen a lo largo del eje  $y(t)$ .

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\alpha t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}$$

Las soluciones lineales son de la forma:

$$x(t) = c_1(1)e^{\alpha t} + c_2(0) e^{-ct}$$

$$y(t) = c_1(0)e^{\alpha t} + c_2(1) e^{-ct}$$

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t}$$

$$y(t) = c_2 e^{-ct}$$

Para el  $P_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{\alpha}{b}\right)$ , la matriz jacobiana es la siguiente:

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{\alpha}{b}\right) = \begin{pmatrix} \alpha - b\left(\frac{\alpha}{b}\right) & -b\left(\frac{c}{d}\right) \\ d\left(\frac{\alpha}{b}\right) & -c + d\left(\frac{c}{d}\right) \end{pmatrix}$$

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{\alpha}{b}\right) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{b\alpha}{b} & \frac{-bc}{d} \\ \frac{d\alpha}{b} & -c + \frac{dc}{d} \end{pmatrix}$$

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{\alpha}{b}\right) = \begin{pmatrix} \alpha - \alpha & \frac{-bc}{d} \\ \frac{d\alpha}{b} & -c + c \end{pmatrix}$$

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{\alpha}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{d\alpha}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios de la matriz

$$J = \left\{ 0, -\frac{\alpha c}{d} \right\}, \left\{ \frac{\alpha d}{b}, 0 \right\}$$

Es decir,  $\lambda = \pm\sqrt{\alpha c} \equiv iw$  ; lo que muestra que  $P_2$  es un centro y sugiere que las soluciones girarán en torno a él, dando lugar, en este caso, a soluciones periódicas de las poblaciones.

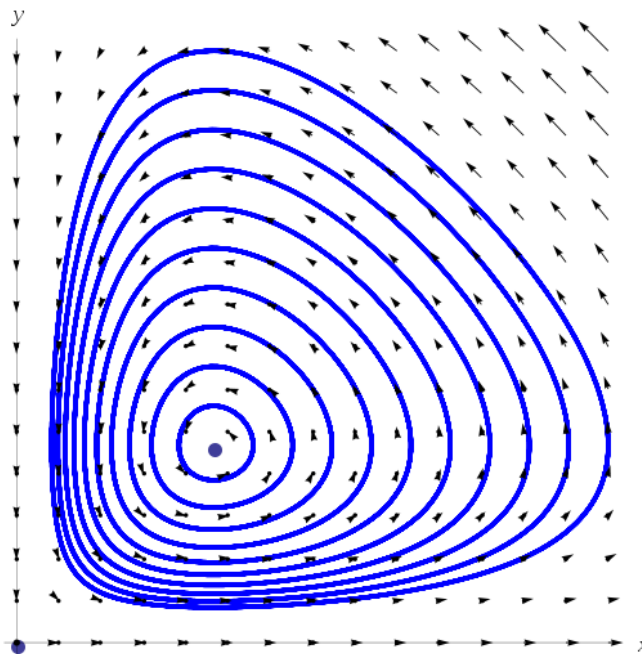
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} \cos wt \\ A \sin wt \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sin wt \\ -A \cos wt \end{pmatrix}$$

Con,

$$A = \frac{d}{c} \sqrt{\frac{\alpha}{b}}$$

En la figura 2.2, se muestra la representación del modelo Lotka-Volterra. La interacción entre el depredador y la presa define una órbita cerrada y la existencia de un punto crítico en el centro de la órbita.

Figura 2.2  
Órbitas del modelo presa-depredador



Fuente: Extraído de Golubitsky y Dellnitz (2001).

Es importante observar de la figura anterior que cuando las poblaciones de depredadores y presas están cerca de sus valores mínimos, las presas aumentan y los depredadores permanecen casi constantes (supuesto a) de los modelos presa-depredador) pero tras un tiempo aumenta primero la tasa de crecimiento de la población de depredadores, luego la población de estos (suposición d)) y empieza a descender a población de presas (supuesto c)). La población de resas se reduce aún más y, cuando esto ocurre, disminuye la tasa de crecimiento de los depredadores (supuesto b)). Por último cae la población de depredadores hasta que ambas poblaciones están cerca de sus valores mínimos, y todo el proceso se repite exactamente (Golubitsky & Dellnitz, 2001).

A manera de ejemplificación del modelo presa-depredador, en el apartado anexos, (Anexo 1) se formular de forma numérica el modelo de Lotka-Volterra.

## 2.2 Sistemas lineales desacoplados de dos ecuaciones.

Un sistema autónomo de dos ecuaciones diferenciales, de primer orden, tienen la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= f(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt}(t) &= g(x(t), y(t))\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones de las variables  $x$  y  $y$ . Las soluciones a (2.5) son pares de funciones  $(x(t), y(t))$ .

Para la ecuación individual (2.5), las soluciones más sencillas son equilibrios, donde las funciones  $(x(t)$  y  $y(t))$  son constantes, es decir  $(x(t) = x_o$  y  $y(t) = y_o$ . Para equilibrios, se deduce que  $\frac{dx}{dt} = 0$  y  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Por lo tanto, los equilibrios de (2.5) pueden hallarse al resolver al mismo tiempo las ecuaciones  $f(x, y) = 0$  y  $g(x, y) = 0$ .

Un sistema lineal autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= ax(t) + by(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) &= cx(t) + dy(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son constantes reales. El origen  $(x(t), y(t)) = 0$  es siempre un equilibrio para un sistema lineal.

Se considera un sistema desacoplado cuando la ecuación para  $\frac{dx}{dt}$  no depende de  $y$  y la ecuación para  $\frac{dy}{dt}$  no depende de  $x$ . El sistema desacoplado de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias considera la forma

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t)\tag{2.7}$$

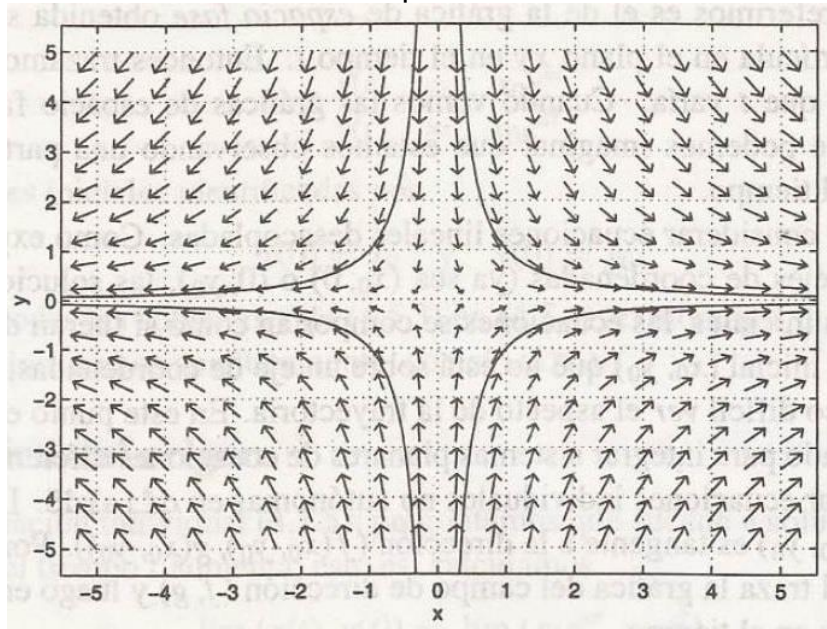


$$\frac{dy}{dt}(t) = dy(t)$$

Para dar solución a este tipo de sistemas se tiene que resolver cada ecuación lineal por separado. En la figura 2.3, se puede observar la forma gráfica de un sistema lineal desacoplado de dos ecuaciones.

Figura 2.3

Sistema lineal desacoplado de dos ecuaciones



Fuente: Extraído de Golubitsky & Dellnitz (2001).

## **CONCLUSIONES PARCIALES DEL CAPÍTULO**

Gracias a las bondades del modelo Lotka-Volterra, es posible adaptarlo en términos económicos y econométricos en la presente investigación.

La importancia de utilizar el modelo Lotka-Volterra radica en que, de su interacción, permite conocer si existe asociación entre dos variables, por lo que tras su instrumentación será posible deducir si existe o no relación capital-trabajo en la economía mexicana, así como permitirá decir si dicha asociación es mutuamente benéfica o no en el periodo de estudio, 2000-2015.

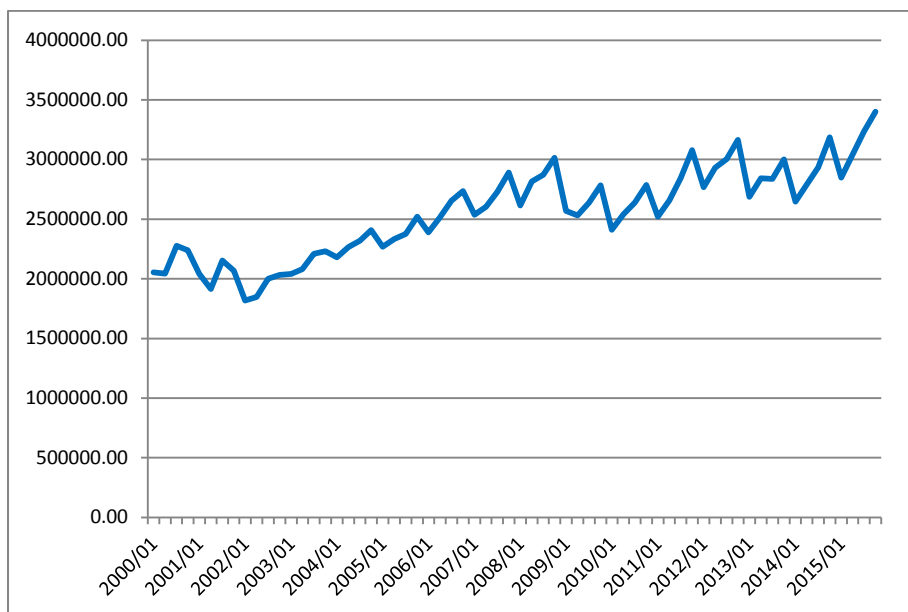
### **CAPÍTULO III ANÁLISIS EMPÍRICO DE LA RELACIÓN CAPITAL-TRABAJO EN EL MODELO LOTKA-VOLTERRA. CASO MEXICANO, 2000-2015.**

En los últimos dieciséis años la economía mexicana ha afianzado su estatus como economía abierta y altamente globalizada, por lo que el escenario económico actual, caracterizado por un ambiente de incertidumbre y volatilidad, significa un alto riesgo para las actividades económicas del país.

Estas condicionantes permiten inferir que tanto el capital como el trabajo no están exentas de verse afectadas por los movimientos de la economía mundial y por tanto estar sujetos a cambios económicos y políticos que a su vez afectan el entorno social en términos de creación de empleo y estabilidad económica en general.

En función de lo anterior, Góngora (2012) afirma que México no ha logrado establecer un dinamismo favorable en la acumulación de capital que permita experimentar un ritmo de crecimiento constante, en este sentido, la gráfica 3.1 muestra que a pesar de que han existido tendencias alcistas durante el periodo 2000-2015, este comportamiento ha sido inconstante, presentando alzas y bajas muy notorias. Este comportamiento puede atribuirse a factores como crisis económicas, volatilidad bursátil, movimiento en tasas de interés, cambios en el valor de la moneda, entre otros.

Grafica 3.1. Formación Bruta de Capital Fijo en México, 2000-2015  
(millones de pesos)



Fuente: Realización propia con base en información del INEGI (2016).

Por su parte y con propósito de este análisis, se define al trabajo como fuerza laboral, pues tal como lo refería Marx (1867), la fuerza laboral es aquella capacidad física y mental que requiere todo ser humano para realizar un trabajo.

En este contexto y como se exponía con anterioridad, de acuerdo con datos de 2016 del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), el mercado laboral en México está atravesando uno de sus mejores momentos, ya que este instituto reportó que durante el año 2015 la tasa de desempleo disminuyó a 4.4%, en relación a la registrada en 2014 de 4.8%, siendo ésta una de las más bajas a nivel mundial.

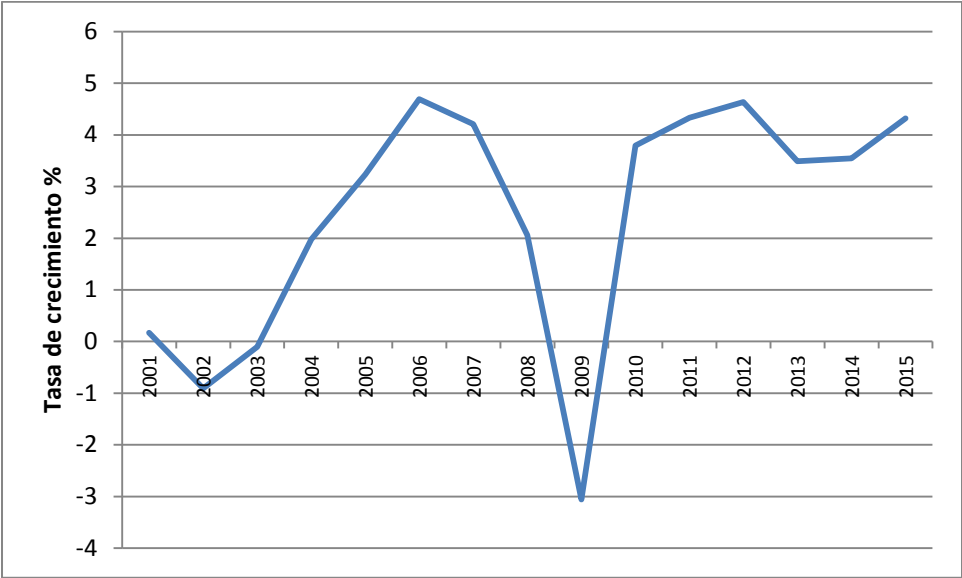
En el mismo tenor, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), indica que en su conjunto los países miembros registran una tasa general de desempleo del 7% en 2015, cifra que ubica a México como el cuarto país con la tasa de desempleo más baja dentro de la OCDE.

Tal como se puede observar en la gráfica 3.2, a partir del proceso de recuperación económica posterior a la crisis financiera de 2008-2009 más personas han

tenido la oportunidad de encontrar un empleo formal, pese al comportamiento errático del mercado laboral en México en los últimos dieciséis años.

Grafica 3.2. Trabajadores registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social, 2000-2015

(Tasa de crecimiento %)



Fuente: Realización propia con base en datos del INEGI (2016).

Sin embargo, autores como Olave, P. (2014) afirman lo contrario: las condiciones del empleo en el país son cada vez más difíciles, gracias a los cambios estructurales de 2012 y la competencia internacional que se deriva de la globalización, los cuales han provocado precariedad en los trabajos, falta de seguridad en el empleo y la pérdida del poder adquisitivo del salario.

En este sentido, se busca comprobar la hipótesis de investigación: La relación capital-trabajo en la economía mexicana presenta un estado de (simbiosis) asociación estrecha que permite su desarrollo y beneficio mutuo. A continuación se presenta las bases metodológicas bajo las cuales se desarrollara el Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano para el periodo 2000-2015.

### 3.1 El modelo Lotka-Volterra: un aspecto metodológico

Como se mencionaba en el Capítulo 2, el modelo de Lotka-Volterra consta de dos ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, las cuales corresponden a un sistema de ecuaciones simultáneas que encuentran su solución da de forma conjunta.

Con propósitos del presente estudio el modelo se expresa de la siguiente forma:

$$TCL_t = C(1)L_t - C(2)K_tL_t + \mu_1 \quad 3.1$$

$$TCK_t = -C(3)K_t + C(4)K_tL_t + \mu_2 \quad 3.2$$

Donde  $TCL_t$  es la tasa de crecimiento anual de la fuerza laboral;  $TCK_t$  es la tasa de crecimiento anual del Capital;  $L_t$  es la fuerza laboral (Registrados en el IMSS por tipo de contrato);  $K_t$  es Formación Bruta de Capital Fijo;  $C(1), C(2), C(3)$  y  $C(4)$  son los parámetros a estimar y  $\mu_j$  es el término de error.

#### 3.1.1 Sistema de ecuaciones simultáneas.

El Modelo de ecuaciones simultáneas es un modelo estadístico conformado por un conjunto de ecuaciones lineales, se utiliza para encontrar valores de parámetros que se encuentran correlacionados y que suceden paralelamente (Pindyck & Rubinfeld, 2001).

De esta forma, el modelo Lotka-Volterra en su forma estructural se expresa:

$$TCL_t - [C(1)L_t] + [C(2)K_tL_t] = u_t \quad 3.1'$$

$$TCK_t + [C(3)K_t] - [C(4)K_tL_t] = \varepsilon_t \quad 3.2'$$

Matricialmente se tiene  $Y'\Gamma + X'\beta = \mu$

$$\begin{pmatrix} TCL_t \\ TCK_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_t & K_t & K_t * L_t & K_{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C(1) & 0 \\ 0 & C(3) \\ 0 & -C(4) \\ C(2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}$$

FORMA ESTRUCTURAL

En las ecuaciones (3.1') y (3.2'), las variables  $TCL_t$  y  $TCK_t$  son endógenas, es decir que están determinadas dentro del sistema de ecuaciones;  $L_t$ ,  $K_t$  y  $(K_t * L_t)$ .

Para la estimación de las ecuaciones simultaneas, de acuerdo con Pindyck & Rubinfeld (2001) la aplicación de mínimos cuadrados ordinarios generará estimadores sesgados e inconsistentes, por lo que se debe ajustar el modelo original eliminando las variables rezagadas, esto es que se debe pasar de la forma estructural del modelo a la forma reducida<sup>6</sup> del mismo.

La forma reducida de un sistema de ecuaciones simultaneas permite encontrar a través del método de Mínimos Cuadrados, estimadores insesgados y consistentes de los parámetros  $\Pi$ . Teóricamente se expresa de la siguiente forma,

$$Y_t = \Pi X^1 + V_t \quad \longrightarrow \text{Forma reducida}$$

Dónde:  $\Pi = \beta^{-1}\Gamma$  ;  $V_t = \Gamma^{-1}\mu^1$

Sin embargo, para el caso particular del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano 2000-2015, la forma reducida del sistema es idéntica a la forma estructural, dado que en el modelo planteado no existe una variable exógena predeterminada. Esto es un factor determinante para la identificación del sistema de ecuaciones (3.1) y (3.2) y por tanto para la solución del modelo.

### 3.1.1.1 El problema de la identificación.

El problema de la identificación consiste en conocer si el sistema cuenta con suficiente información a priori<sup>7</sup> para permitir la determinación de los parámetros estructurales  $\beta$  y  $\Gamma$  a partir de los parámetros de la forma reducida  $\Pi$ , mediante Mínimos Cuadrados.

- Con insuficiente información a priori es imposible determinar  $\beta$  y  $\Gamma$  a partir de  $\Pi$ ; este caso se conoce como subidentificado e indica que el modelo simultaneó no tiene solución.
- Con información justamente suficiente pueden terminarse de manera única los elementos de  $\beta$  y  $\Gamma$  a partir de los parámetros de la forma reducida  $\Pi$ ; este caso

<sup>6</sup> Para pasar de la forma estructural a la forma reducida se debe premultiplicar la ecuación estructural por  $\Gamma^{-1}$  (Pindyck & Rubinfeld, 2001).

<sup>7</sup> Información conocida.

se conoce como justamente identificado o exactamente identificado, en el cual existe un solo punto de equilibrio, esto es que solo un par de parámetros estructurales será consistente con la información a priori y con los parámetros de la forma reducida.

- Con mayor información, existirían más de una forma para determinar los elementos de  $\beta$  y  $\Gamma$  a partir de  $\Pi$  y de la información a priori, esto corresponde al caso sobreidentificado y es el que comúnmente se da en la mayoría de los modelos econométricos.

Identificar un sistema de ecuaciones es importante debido permite conocer si el sistema tiene solución o no, así como determinar cuál es el método de estimación que debe ser instrumentado.

*Condiciones para la identificación de un sistema de ecuaciones.*

### **Notación**

$K$ = número de variables exógenas en el sistema.

$K_i$ = número de variables exógenas incluidas en el sistema a identificar.

$K - K_i$ = número de variables exógenas excluidas en el sistema a identificar.

$g$ = número de variables endógenas en el sistema.

$g_i$ = número de variables endógenas incluidas en el sistema a identificar.

### **Condición necesaria**

Se compara la cantidad de variables exógenas excluidas en el sistema con la cantidad de endógenas incluidas en el sistema menos 1.

- Si  $K - K_i \geq g_i - 1$ , el sistema tiene solución.
- Cuando  $K - K_i > g_i - 1$ , el sistema se encuentra sobreidentificado y el sistema cuenta con información más que suficiente para su solución. En este sentido existen muchos puntos de equilibrio y cada uno de ellos es válido.
- Si  $K - K_i = g_i - 1$  el sistema se encuentra exactamente identificado y solo tiene un punto de equilibrio.



- Cuando  $K - K_i < g_i - 1$  el sistema no tiene solución porque no cuenta con la cantidad suficiente de variables exógenas para estimar los parámetros estructurales. En este caso existe la necesidad de replantear el sistema.

Es importante referir que la identificación del sistema de ecuaciones tiene que hacerse ecuación por ecuación y debe resolverse antes de realizar cualquier tipo de estimación. Por tanto se presenta a continuación la identificación del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano 2000-2015.

$$\text{Ecuación (3.1) } T C L_t = C(1)L_t - C(2)K_t L_t + \mu_1$$

$K = 2$	$K - K_i \langle \geq   >   =   < \rangle g_i - 1$
$K_i = 2$	$2 - 2_i \langle \geq   >   =   < \rangle 1 - 1$
$g = 1$	$2 - 2 = 1 - 1$
$g_i = 1$	<b><math>0 = 0</math></b>

Se concluye que la ecuación (3.1)  $T C L_t = C(1)L_t - C(2)K_t L_t + \mu_1$ , esta exactamente identificada.

$$\text{Ecuación (3.2) } T C K_t = -C(3)K_t + C(4)K_t L_t + \mu_2$$

$K = 2$	$K - K_i \langle \geq   >   =   < \rangle g_i - 1$
$K_i = 2$	$2 - 2_i \langle \geq   >   =   < \rangle 1 - 1$
$g = 1$	$2 - 2 = 1 - 1$
$g_i = 1$	<b><math>0 = 0</math></b>

Se concluye que la ecuación (3.1)  $T C K_t = -C(3)K_t + C(4)K_t L_t + \mu_2$  esta exactamente identificada.

De esta forma, se conoce que el modelo Lotka-Volterra: caso mexicano 2000-2015 es un sistema de ecuaciones simultáneas exactamente identificadas, por tanto se infiere la existencia de un solo punto de equilibrio en el modelo y que un par de parámetros estructurales resultará consistente con la información a priori.

### **3.1.2 Método de estimación: Mínimos Cuadrados en dos etapas.**

Los mínimos cuadrados de dos etapas permite obtener estimadores consistentes para los parámetros estructurales (elementos de las matrices  $B$  y  $\Gamma$ ) en el caso de ecuaciones sobreidentificadas o exactamente identificadas y su procedimiento de estimación radica en utilizar la información disponible de la especificación de un sistema de ecuaciones para obtener una estimación única para cada parámetro estructural (Pindyck & Rubinfeld, 2001).

El método de mínimos cuadrados de dos etapas consiste en: i) Para cada variable endógena explicativa de la ecuación, hallar la ecuación de regresión de ésta sobre todas las variables exógenas del sistema. ii) Con las ecuaciones de regresión obtenidas, hallar los valores estimados para cada variable endógena, y realizar la regresión de la variable endógena dependiente sobre las variables explicativas usando dichos valores estimados (en lugar de los valores observados) (Juan, Kizys, & Manzanedo, 2009).

A continuación se especifican los criterios bajo los cuales se aplicó la metodología.

### **3.2 Variables para el análisis**

Planteado el objetivo de investigación el cual es analizar la relación entre el capital y el trabajo en la economía mexicana durante el periodo 2000-2015; se utiliza como técnica al modelo de Lotka-Volterra para buscar comprobar la hipótesis general de investigación (*HG= La relación capital-trabajo en la economía mexicana presenta un estado de (simbiosis) asociación estrecha que permite su desarrollo y beneficio mutuo*).

Para la construcción de este análisis se utilizaron series de datos obtenidas del Banco de Información Económica (BIE) del Instituto Nacional de Geografía y Estadística (INEGI) y del Banco de México (Banxico) para el periodo de 2000-2015.

La variable que se utiliza para medir al Trabajo en México es la de los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato, periodicidad trimestral.

Para la variable Capital se obtuvo la Formación Bruta de Capital Fijo de periodicidad trimestral, y tras deflactar, se convirtieron a cifras reales (100=08) de millones de pesos.

Debido a la participación de la Inversión Extranjera Directa en la economía mexicana inicialmente se pensó utilizarla para el análisis sin embargo por su alta volatilidad y fluctuación se rechazó su utilización, sin embargo únicamente se empleó la serie de datos de IED a modo de complementación de resultados (Revisar apartado Anexos). Los datos están expresados de forma trimestral y en millones de pesos reales (100=08).

### 3.3 Resultados del Modelo

Para el análisis de la relación capital-trabajo en México se retoman las ecuaciones (3.1) y (3.2) del modelo de Lotka-Volterra, las cuales son analizadas mediante los paquetes estadísticos *Econometric Views* (Eviews) versión 7, para determinar los coeficientes  $C(1), C(2), C(3)$  y  $C(4)$  del modelo; posteriormente conocidos los valores de los parámetros se utiliza *Matrix Laboratory* (MATLAB), para dar solución al sistema Lotka-Volterra.

#### 3.3.1 Coeficientes del modelo Lotka-Volterra.

La evidencia generada por el método Two-stage least squares (mínimos cuadrados de dos etapas) de Eviews (Anexo 1) se refiere al valor de los coeficientes  $C(1), C(2), C(3)$  y  $C(4)$  del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015, los cuales se presentan a continuación:

$$TCL_t = -0.0000000978 L_t + 0.0000000000000545 K_t L_t + \mu_1 \quad 3.1.1$$

(- 2.008496)\*\*    (- 2.981779)\*\*

$$TCK_t = -0.000000764 K_t + 0.0000000000000862 K_t L_t + \mu_2 \quad 3.2.2$$

(0.271777)\*\*    (0.454035)\*\*

Estos resultados indican que para la ecuación (3.1) correspondiente al trabajo, los parámetros  $C(1)$  y  $C(2)$  son estadísticamente significativos al intervalo de confianza del 95%<sup>8</sup>, sugiriendo que el capital influye en el crecimiento del trabajo.

Para la ecuación (3.2), la del capital, los parámetros  $C(3)$  y  $C(4)$  no son estadísticamente significativos, que aunado a un bajo coeficiente de determinación  $R^2$  del 1% indican que el crecimiento del capital no depende del trabajo, es decir, no existe una relación capital-trabajo para la segunda ecuación.

Estos resultados coinciden con uno de los postulados de la exacta identificación del modelo Lotka-Volterra, el cual decía que solo un par de parámetros estructurales es consistente con la información a priori, en este caso los parámetros de la ecuación (3.1) correspondiente al Trabajo, no así los del Capital (ecuación 3.2). Estos primeros resultados serían indicios de que no hay estado de simbiosis o asociación estrecha entre el capital y el trabajo.

Es importante señalar que debido a la alta sensibilidad de los datos, el modelo es regresivo solo para un periodo, esto quiere decir que la relación existente de las variables no es ni fija ni constante, demostrando que para periodos sucesivos el comportamiento del capital y el trabajo será distinto cada periodo.

### **3.3.2 Solución del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.**

A partir de la determinación de los coeficientes del sistema de ecuaciones (3.1) y (3.2), se recurrió a Matrix Laboratory (MATLAB), mediante la programación `pplane8`, para conocer el comportamiento y solución del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano en el periodo 2000-2015.

Los resultados obtenidos demuestran que, tal como se observa en la gráfica 3.3, el modelo planteado en esta investigación no tiene el comportamiento de un modelo

---

Nota: valores de  $t_{calculado}$  entre paréntesis.

\*\* intervalo de confianza del 95%.

<sup>8</sup> Para la ecuación (3.1) le corresponde un  $R^2=0.1739$  y para la ecuación (3.2) el  $R^2= 0.0169$

presa-depredador<sup>9</sup>, por tanto, la trayectoria de las variables corresponden a un sistema desacoplado y por tanto existiría desasociación en la relación capital trabajo.

Esto significa que la ecuación (3.2) no depende de la ecuación (3.1), por lo que dichas trayectorias encuentran su límite en el origen, atribuyéndose a lo anteriormente expuesto: el crecimiento del capital no depende de variaciones del trabajo. Por tanto, se rechaza la hipótesis de investigación, una vez que no hay solución en forma conjunta en el sistema de ecuaciones, postulado principal del modelo Lotka-Volterra, es decir que no existe asociación estrecha entre el capital y el trabajo que permite su desarrollo y beneficio mutuo dentro de la economía mexicana.

Cabe la pena señalar que a pesar de que es un sistema desacoplado, el modelo tiene un punto de equilibrio en  $(K,L)=8835405, 1776923$ , esto en función de que para la ecuación (3.1) si hay evidencia de que el capital interviene en la generación de más empleos, interpretándose que para que se genere crecimiento de empleo en México son necesarios 8,835,405 mdp trimestralmente. Debido a la alta sensibilidad de los datos, el comportamiento del capital y el trabajo será distinto en periodos sucesivos

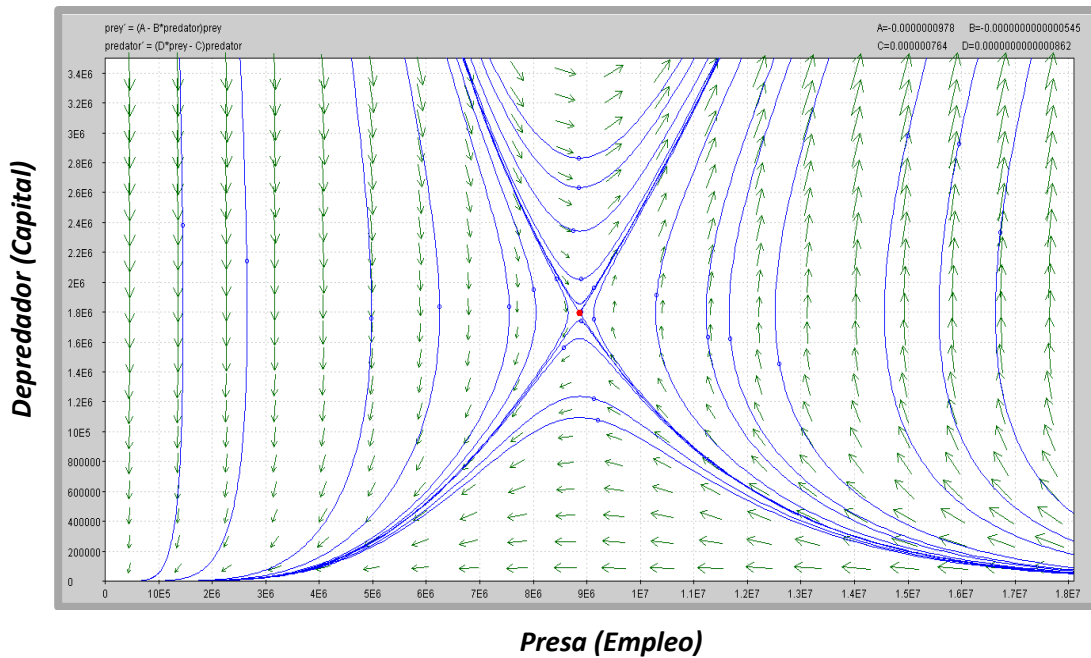
Estos resultado coincide con otro de los planteamientos de la exacta identificación del modelo, el cual advierte de la existencia de un solo punto de equilibrio para el sistema de ecuaciones.

---

<sup>9</sup> Comportamiento explicado en el Capítulo 2.

Gráfica 3.3

Trayectoria del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.

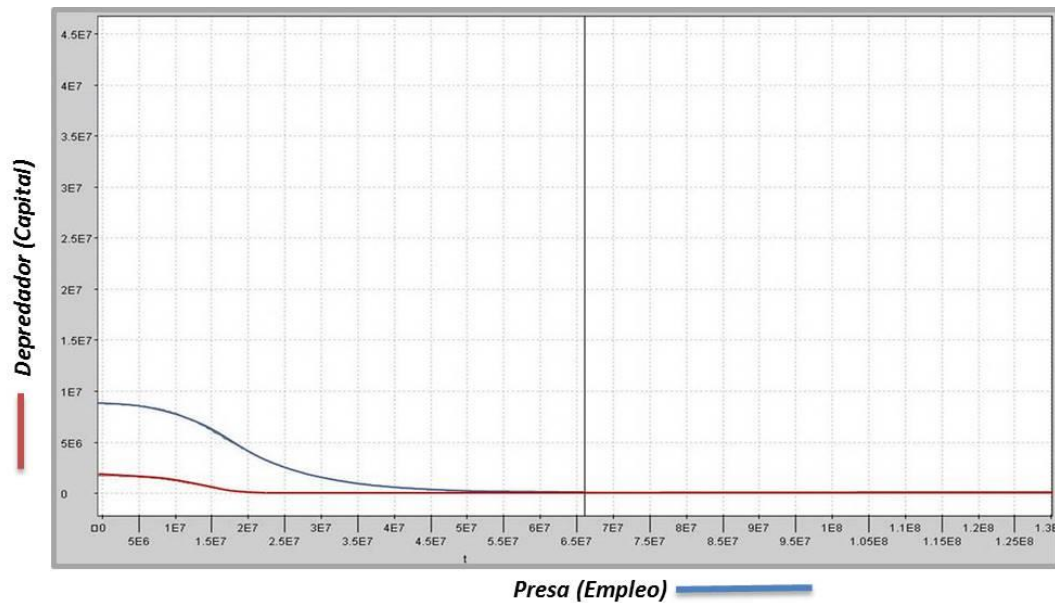


Fuente: Elaboración propia con base en los resultados obtenidos del modelo.

Como es posible observar, en la gráfica 3.4, la variable trabajo es la variable que converge al equilibrio, aunque también tiene un comportamiento de decrecimiento exponencial; mientras que el capital permanece sin alteraciones en el periodo observado y su comportamiento que tendría que ser de crecimiento exponencial permanece constante.

Gráfica 3.4

Punto de equilibrio del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.



Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente es posible reafirmar que se rechaza la hipótesis de la investigación, debido a dos resultados que se enlistan a continuación:

i) Se rechazan las cuatro suposiciones del modelo presa-depredador:

- a) Sin capital, las presas se extinguen, es decir, no se genera trabajo.
- b) A falta de presas (trabajadores), el depredador (capital) no se contrae.
- c) Ante el capital, la tasa de crecimiento del trabajo se expande.
- d) El depredador (capital) no tiene reacción no aumenta por la presencia de trabajo.

ii) El sistema de ecuaciones (3.1) y (3.2) se vuelven un sistema desacoplado al rechazarse los supuestos a) y d), esto es que los parámetros  $C(1)$ ,  $C(2)$  y  $C(3)$  no cumplen con los supuestos teóricos descritos en el capítulo dos, por tanto, para encontrar la solución de este nuevo sistema se tiene que resolver cada ecuación por separado contradiciendo la naturaleza del modelo Lotka-Volterra que encuentra su solución a través de ambas ecuaciones.

Esta conclusión queda fundamentada desde el problema de la identificación, donde se determinó que el modelo está exactamente identificado, lo que permite que sea posible que las ecuaciones puedan ser estimadas de forma independiente, ya que las variables exógenas  $L_t$ ,  $K_t$  y  $(K_t * L_t)$  no se encuentran previamente estimadas en alguna de las ecuaciones (3.1) o (3.2).

En este caso, dichas variables exógenas funcionan únicamente como variables instrumentales en el modelo, es decir,  $L_t$  y  $(K_t * L_t)$  influyen en el comportamiento de su variable endógena  $TCL_t$  pero no tienen correlación con el término de error. Por su parte, las variables  $K_t$  y  $(K_t * L_t)$  al ser no significativas, no influyen en el comportamiento de su variable endógena  $TCK_t$  ni tampoco tienen correlación con el término de error.



## CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue analizar la relación entre el capital y el trabajo en la economía mexicana durante el periodo 2000-2015, utilizando como técnica al modelo Lotka-Volterra, ya que a través de este método se conoce si un par de elementos guardan un estado de simbiosis entre sí. Este modelo, que pertenece a las ciencias naturales, para cumplir con propósitos de la investigación se adaptó en términos económicos y se construyó un modelo econométrico, el cual fue estimado a través del método de Mínimos Cuadrados en dos etapas.

Antes de pasar al análisis y conclusión de los resultados, es pertinente hacer algunas consideraciones teóricas e instrumentales. Sobre las consideraciones teóricas se tiene, primero: la relación capital y trabajo es un tema que ha sido estudiado desde incluso antes del nacimiento de la economía como ciencia, gracias a su importancia e impacto en el funcionamiento de un país. Autores como Adam Smith, Carlos Marx o John M. Keynes, son solo algunos de los precursores de doctrinas que destacaron la importancia de ambas variables en sus estudios.

Es importante mencionar que el capital y el trabajo son dos variables de magnitudes muy importantes en las investigaciones dada su atemporalidad y trascendencia. Las circunstancias del entorno, el tiempo y el espacio están en constante cambio, sin embargo, el capital y el trabajo seguirán siendo instrumentados para dar explicación a nuevos fenómenos económicos, incluso sociales, ambientales, entre otros.

Segundo, a pesar de que el modelo Lotka-Volterra es comúnmente instrumentado para explicar temas de las ciencias naturales, sus postulados tienen la bondad de ser aplicados en otras ciencias como las sociales, especialmente en demografía, finanzas y economía. Sin embargo, el modelo Lotka-Volterra, fuera del área de la biología o demografía, ve limitada su participación en investigaciones por lo complejo que resulta su naturaleza determinista. En el área económica, el modelo Lotka-Volterra es un método poco usual e incluso se pudiera considerar como un modelo nuevo, aunque innovador, pues rompe los esquemas tradicionales de modelos económicos.

Tercero, tanto el capital como el trabajo son afectados de forma sustancial por fenómenos económicos externos, esto como consecuencias de la apertura comercial y la globalización en la que México ha incurrido desde la década de los noventa. Las personas en México encuentran su principal fuente de trabajo formal en el país en las empresas transnacionales mientras que el capital es uno de los indicadores macroeconómicos más expuestos al sector externo por los altos flujos de Inversión Extranjera Directa, razón por la que se optó por utilizar a la Formación Fija Bruja de Capital, ya que esta no solo participa en el proceso de crecimiento sino también en el de desarrollo económico de México, mientras que la IED persigue procesos productivos de agentes económicos particulares.

En lo que respecta a la consideración instrumental, es claro que el modelo consta de dos ecuaciones mutuamente independientes, sin embargo, se puede demostrar que las ecuaciones (3.1) y (3.2) si guardan cierto grado de interrelación entre sí, esto gracias a la instrumentación de los métodos de Mínimos Cuadrados por Tres Etapas (MC3E) y Seemingly Unrelated Regression (SUR).

Al dar solución al modelo mediante MC3E y SUR, los resultados (anexos 4 y 5) indican que las ecuaciones (3.1) y (3.2) se interrelacionan a través de los términos de error, esto se suscita a partir de las bondades de los métodos, que eliminan problemas de heteroscedasticidad en el sistema al elevar los errores al cuadrado, sacar su varianza e incorporarlos nuevamente al sistema, por lo que como lo plantea el método SUR, en primer instancia, aparentemente no hay relación entre ambas variables, sin embargo, si se relacionan a través de los vectores de error.

Respecto a lo anterior, es posible decir que derivado de la solución del modelo econométrico, la evidencia indica que los parámetros estimados para la ecuación (3.2) no son significativos, lo que provoca el desacoplamiento en el modelo Lotka-Volterra para el caso mexicano.

Que la ecuación (3.1) tenga coeficientes significativos y los de la ecuación (3.2) resulten no serlos, provocan que el modelo Lotka-Volterra se linealice y se transforme en un sistema lineal desacoplado de dos ecuaciones, es decir, que con datos de 2000-2015, el trabajo guarda relación con el capital pero el capital no se ve afectado por el

comportamiento del trabajo, por tanto, ambas ecuaciones no se correlacionan recíprocamente y encuentran su solución de forma independiente.

Tras lo expuesto en el punto anterior que rechaza la hipótesis de investigación, se concluye que el capital y el trabajo no se afectan mutuamente, dado que la combinación de capital-trabajo no generan crecimiento de más capital en la economía mexicana mientras que para generar crecimiento del empleo es necesario reducir la combinación de capital y trabajo, hecho que contradice la naturaleza del modelos. No se benefician mutuamente.

Rechazar la hipótesis de investigación es ser atribuido a la falta de simultaneidad entre los datos y a la exacta identificación del modelo Lotka-Volterra.

Incluso se pensaba que pudiera existir algún tipo de correlación recíproca entre variables a partir de los términos de error pero la aplicación de los métodos Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), Mínimos Cuadrados por dos etapas y Mínimos Cuadrados por tres etapas resulta indistinto, se obtienen los mismos resultados (sistema de ecuaciones desacoplado) (ver Anexos 3 y 4).

Así mismo se replanteo el modelo Lotka-Volterra, de forma que los datos de la variable Capital ( $K_t$ ) fueran la serie de Inversión Extranjera Directa (mdp 100=08) obtenida de INEGI (2016) y conservar los datos de la variable Empleo ( $L_t$ ), Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato; sin embargo los resultados finales, obtenidos a través de los métodos Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), Mínimos Cuadrados por dos etapas y Mínimos Cuadrados por tres etapas, coincidieron con los obtenidos en la investigación: el sistema de ecuaciones diferenciales vuelve a linealizarse, por lo tanto las ecuaciones encuentran nuevamente su solución de forma independiente al no afectarse mutuamente (el comportamiento de la ecuación (3.1) no incide en el comportamiento de la ecuación (3.2) o viceversa). (Ver resultados en Anexos 5, 6 y 7)

## **Recomendaciones finales**

Sobre el capital, sería conveniente decir que se tienen que generar condiciones y estrategias por parte del Estado para que el capital nuevo que llega a una región, se establezca, se retenga y ese encadene con sectores productivos locales, además de que estos nuevos capitales deben contraer compromisos (económicos, sociales, ecológicos) a largo plazo que garanticen su estancia en el país por tiempo definido.

Así mismo se tienen que impulsar políticas de inversión, que no antepongan a la inversión extranjera sobre la inversión nacional. El ofrecer subsidios y beneficios en términos de impuestos e infraestructura a las empresas debe ser una medida fiscal homogénea destinada a la creación de nuevas empresas, de lo contrario se está generando una brecha de oportunidades entre las inversiones en el país. La IED no debe separarse de la inversión nacional, por el contrario tienen que buscarse las condiciones para conectarlas, por ejemplo, a través de las cadenas de valor añadido o por medio de las pequeñas y medias empresas.

Sobre estas últimas, se debería seguir impulsar una mayor participación de las pequeñas y medianas empresas en sectores productivos vinculados con las actividades más dinámicas de la economía mexicana, puesto que las pymes propician la creación de más empleos formales y productivos en México.

Ante la fragilidad de la economía nacional por fenómenos como la apertura económica, la tercerización de las actividades económicas, la alta exposición del sector financiero ante las fluctuaciones de la economía mundial, entre otros, el Estado, en su papel de agente regulador, no solo debe buscar la creación de empleos formales sino garantizar su conservación y monitoreo para no fomentar la precarización laboral que surge de la reducción de jornadas de trabajo, disminución de prestaciones laborales, aligeramiento de las obligaciones patronales y debilitamiento de los sistemas de seguridad social. Aunado a esto, también se tiene que continuar con la labor de generar estrategias que permitan eliminar incentivos para permanecer en la informalidad laboral.

Finalmente, se hace la recomendación de estudiar e implementar este tipo de modelos y técnicas a futuras investigaciones con el fin de ofrecer nuevos aportes a la

economía, ya que si bien existen trabajos hechos, teorías de bifurcación matemática, teorías del catástrofe u otros modelo presa-depredador como el de Lorenz son relativamente nuevos en la economía.

Esta investigación ofrece las condiciones para que otros trabajos lo retomen; incluso se propone ser la posibilidad de ser adaptado a un modelo simultáneo, incorporando variables exógenas predeterminadas, para ofrecer otros resultados. Es decir, modificar la estructura econométrica del modelo para que se pueda contar con una relación simultánea o al menos recursiva entre las dos ecuaciones.

## ANEXOS

### ***Anexo 1. Análisis numérico para formular un modelo Presa-Depredador.***

La tabla 2.1 muestra el índice de capturas de lince y conejos elaboradas por la compañía Hudson Bay entre los años 1900 y 1920.

Tabla 2  
Índice de capturas de lince y conejos, 1900-1921.

Año	Conejos	Lince
1900	30	4
1901	47.2	6.1
1902	70.2	9.8
1903	77.4	35.2
1904	36.3	59.4
1905	20.6	41.7
1906	18.1	19
1907	21.4	13
1908	22.0	8.3
1909	25.4	9.1
1910	27.1	7.4
1911	40.3	8
1912	57	12.3
1913	76.6	19.5
1914	52.3	45.7
1915	19.5	51.1
1916	11.2	29.7
1917	7.6	15.8
1918	14.6	9.7
1920	16.2	10.1
1921	24.7	8.6
1922	-	-

Fuente: Hudson's Bay (1922)

Para aplicar el modelo presa-depredador a los datos de la tabla 2.1, es necesario conocer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $x(0)$  y  $y(0)$ .

1. Se empieza tomando como valores iniciales para el primer año:  $x(0)= 30$  e  $y(0)= 4$ . Para encontrar el resto de los parámetros se debe tener en cuenta los valores medios:

$$\bar{x}(t) = \frac{\delta}{\gamma} \qquad \bar{y}(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

2. Eligiendo los datos comprendidos entre dos valores máximos o mínimos, y se obtiene su media, se podrá estimar  $\bar{x}(t)$  y  $\bar{y}(t)$ .

2.1 En el caso de los conejos consideraremos la población comprendida entre los años 1903 y 1913

$$\frac{77.4 + 36.3 + 20.6 + 18.1 + 21.4 + 22 + 25.4 + 27.1 + 40.3 + 57}{10} = 34.6$$

2.2 Y para los lince, los comprendidos entre 1904 y 1914

$$\frac{59.4 + 41.7 + 19 + 13 + 8.3 + 9.1 + 7.4 + 8 + 12.3 + 19.5 + 45.7}{11} = 22.12$$

De esta manera:

$$\bar{x}(t) = \frac{\delta}{\gamma} = 34.6 \qquad (1)$$

$$\bar{y}(t) = \frac{\alpha}{\beta} = 22.12 \qquad (2)$$

- 2.3 Para calcular  $\alpha$ , se plantea la hipótesis de que cuando la población de depredadores sea muy baja, es de esperar que las presas estén creciendo de manera exponencial.

En tabla 2.1 se observa que en el año 1910, una población baja de lince, y al

mismo tiempo un crecimiento rápido de los conejos.

Para estos años los datos son  $x(t) = 27.1$  en 1910 y  $x(t + 1) = 40.3$  en 1911. Sustituyendo en la fórmula del crecimiento exponencial  $\bar{x}(t) = x(0)e^{\alpha t}$ , se obtiene:

$$40.3 = 27.1e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha = \ln\left(\frac{40.3}{27.1}\right) = 0.397 \quad (3)$$

2.4 En el otro caso, una población muy baja de conejos que implica un ritmo elevado en el descenso de la población de linces, se da en el año 1905. Sean  $y(0) = 41.7$ ;  $y(1) = 19$ . Se sustituye  $\bar{y}(t) = x(0)e^{-\delta t}$ ,

$$19 = 41.7e^{-\delta t} \Rightarrow \delta = -\ln\left(\frac{19}{41.7}\right) = 0.786 \quad (4)$$

2.5 De las expresiones (1,2,3,4) se deduce:

$$x(0) = 30, \quad y(0) = 4, \quad \alpha = 0.4, \quad \beta = 0.018, \quad \delta = 0.8, \quad \gamma = 0.023$$

2.6 El modelo presa-depredador es el siguiente:

$$\begin{cases} x'(t) = 0.4x(t) - 0.018x(t)y(t) & ; & x(0) = 30 \\ y'(t) = -0.8y(t) + 0.023x(t)y(t) & ; & y(0) = 4 \end{cases}$$



**Anexo 2. Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.**

Tabla 3. Resultados del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.  
(método: Mínimos Cuadrados por Dos Etapas)

System: SYS01RESULTADOSFINALES				
Estimation Method: Two-Stage Least Squares				
Date: 11/23/16 Time: 15:49				
Sample: 2000Q2 2015Q4				
Included observations: 63				
Total system (balanced) observations 126				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-9.78E-08	4.87E-08	-2.008496	0.0468
C(2)	-5.45E-14	1.83E-14	-2.981779	0.0035
C(3)	7.64E-07	2.81E-06	0.271777	0.7863
C(4)	8.62E-14	1.90E-13	0.454035	0.6506
Determinant residual covariance		18.93360		
Equation: $TCL=C(1)*L-C(2)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.173900	Mean dependent var	0.632984	
Adjusted R-squared	0.160357	S.D. dependent var	0.838118	
S.E. of regression	0.767984	Sum squared resid	35.97781	
Durbin-Watson stat	0.966818			
Equation: $TCK=-C(3)*K+C(4)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.016992	Mean dependent var	1.038190	
Adjusted R-squared	0.000877	S.D. dependent var	6.780564	
S.E. of regression	6.777589	Sum squared resid	2802.079	
Durbin-Watson stat	2.545495			

Nota: Se considera como Capital ( $K_t$ ) a la Formación Bruta de Capital Fijo en México (mdp 100=08) y como Trabajo ( $L_t$ ) a los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato.

Fuente: Realización propia (EViews) en base a datos de INEGI (2016).

### Anexo 3. Análisis del modelo Lotka-Volterra a través del método de Mínimos Cuadrados Ordinarios.

A través de la solución del modelo mediante el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, la evidencia generada en Eviews indica que los resultados son exactamente los mismos a los obtenidos mediante el método de Mínimos Cuadrados por Dos Etapas.

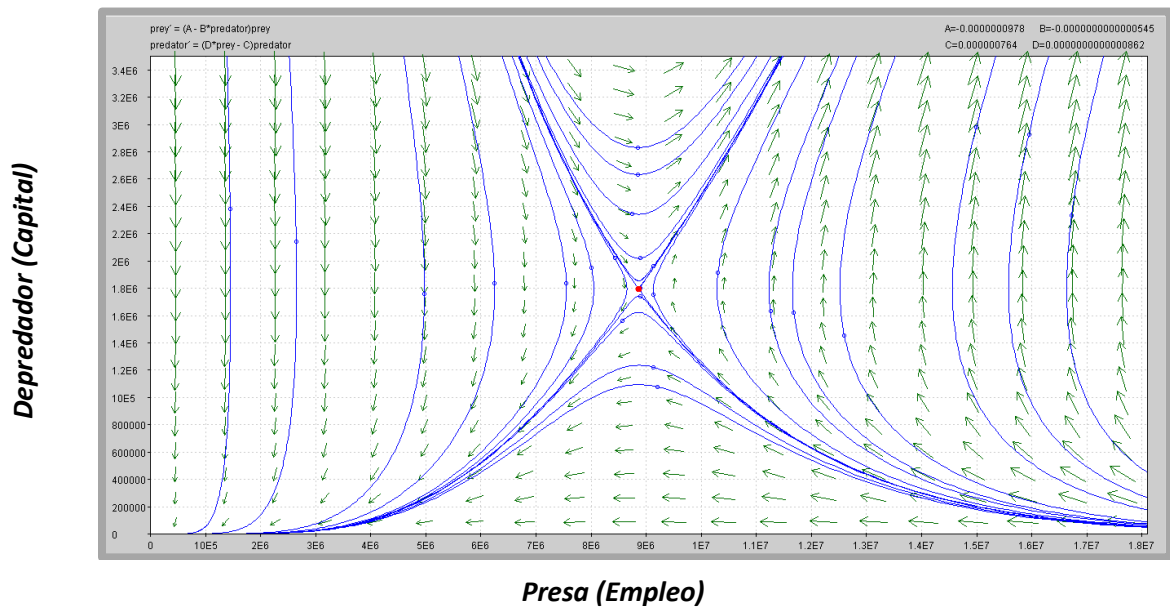
Tabla 4. Resultados del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.  
(método: Mínimos Cuadrados Ordinarios)

System: SYS01RESULTADOSFINALES				
Estimation Method: Two-Stage Least Squares				
Date: 11/23/16 Time: 15:49				
Sample: 2000Q2 2015Q4				
Included observations: 63				
Total system (balanced) observations 126				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-9.78E-08	4.87E-08	-2.008496	0.0468
C(2)	-5.45E-14	1.83E-14	-2.981779	0.0035
C(3)	7.64E-07	2.81E-06	0.271777	0.7863
C(4)	8.62E-14	1.90E-13	0.454035	0.6506
Determinant residual covariance		18.93360		
Equation: $TCL=C(1)*L-C(2)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.173900	Mean dependent var	0.632984	
Adjusted R-squared	0.160357	S.D. dependent var	0.838118	
S.E. of regression	0.767984	Sum squared resid	35.97781	
Durbin-Watson stat	0.966818			
Equation: $TCK=-C(3)*K+C(4)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.016992	Mean dependent var	1.038190	
Adjusted R-squared	0.000877	S.D. dependent var	6.780564	
S.E. of regression	6.777589	Sum squared resid	2802.079	
Durbin-Watson stat	2.545495			

Nota: Se considera como Capital ( $K_t$ ) a la Formación Bruta de Capital Fijo en México (mdp 100=08) y como Trabajo ( $L_t$ ) a los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato.

Fuente: Realización propia (EViews) con base en datos de INEGI (2016).

Gráfica 10. Trayectoria del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.  
(Mínimos Cuadrados Ordinarios)



Fuente: Elaboración propia con base en los resultados obtenidos del modelo.

**Anexo 4. Análisis del modelo Lotka-Volterra a través del método de Mínimos Cuadrados por Tres Etapas.**

Los resultados obtenidos a través del método *Mínimos Cuadrados por Tres Etapas* de Eviews indican que el Modelo Lotka-Volterra, aunque cambian los valores de los coeficientes, sigue presentando el mismo comportamiento de linealización y desacoplamiento en las ecuaciones, tal como los resultados obtenidos por Mínimos Cuadrados por Dos Etapas.

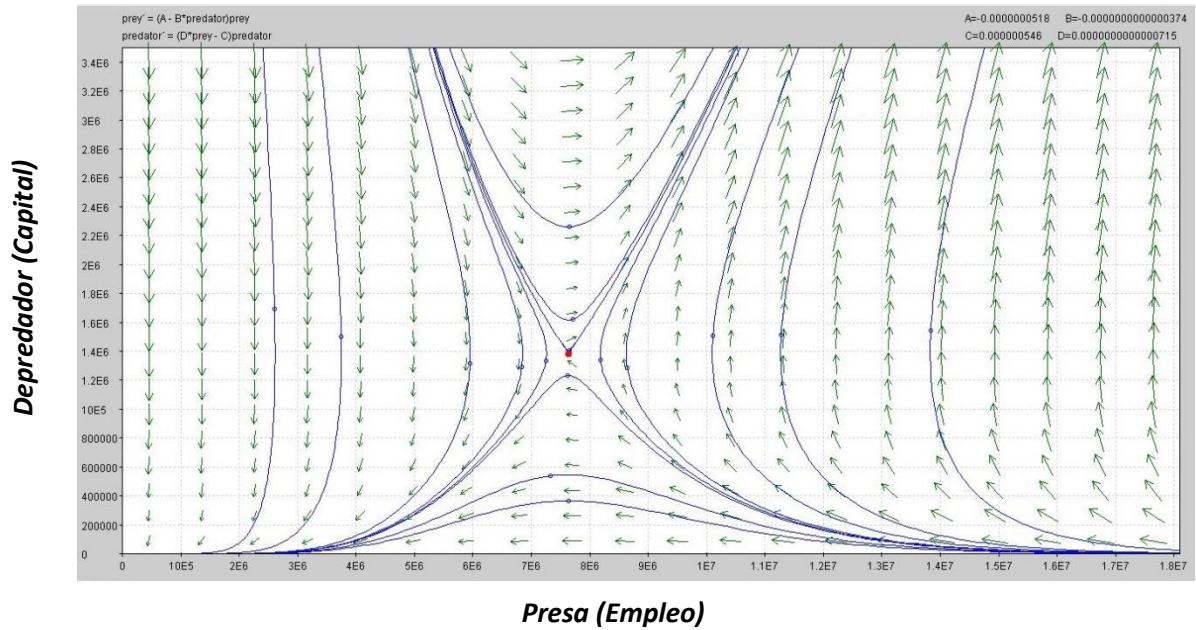
Tabla 5. Resultados del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.  
(método: Mínimos Cuadrados por Tres Etapas)

System: SYS01RESULTADOSFINALES				
Estimation Method: Three-Stage Least Squares				
Date: 01/19/17 Time: 02:21				
Sample: 2000Q2 2015Q4				
Included observations: 63				
Total system (balanced) observations 126				
Linear estimation after one-step weighting matrix				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-5.18E-08	4.61E-08	-1.125140	0.2627
C(2)	-3.74E-14	1.73E-14	-2.162181	0.0326
C(3)	5.46E-07	2.66E-06	0.205375	0.8376
C(4)	7.15E-14	1.80E-13	0.398439	0.6910
Determinant residual covariance		18.56641		
Equation: $TCL=C(1)*L-C(2)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.161820	Mean dependent var	0.632984	
Adjusted R-squared	0.148079	S.D. dependent var	0.838118	
S.E. of regression	0.773579	Sum squared resid	36.50390	
Durbin-Watson stat	1.020784			
Equation: $TCK=-C(3)*K+C(4)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.016895	Mean dependent var	1.038190	
Adjusted R-squared	0.000779	S.D. dependent var	6.780564	
S.E. of regression	6.777923	Sum squared resid	2802.355	
Durbin-Watson stat	2.546054			

Nota: Se considera como Capital ( $K_t$ ) a la Formación Bruta de Capital Fijo en México (mdp 100=08) y como Trabajo ( $L_t$ ) a los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato.

Fuente: Realización propia (EViews) con base en datos de INEGI (2016).

Gráfica 11. Trayectoria del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.  
(Mínimos Cuadrados por Tres Etapas)



Fuente: Elaboración propia con base en los resultados obtenidos del modelo

## Anexo 5. Análisis del modelo Lotka-Volterra a través del método de Seemingly Unrelated Regression (SUR)

Mediante la aplicación del método *Seemingly Unrelated Regression (SUR)* de Eviews, se puede afirmar que los resultados obtenidos son exactamente iguales a los previamente calculados por el método de Mínimos Cuadrados por Tres Etapas, por lo que se puede concluir que el sistema de ecuaciones se desacoplan, no afectándose una a la otra y además se linealizan.

Tabla 6. Resultados del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.

(método: Mínimos Cuadrados por Tres Etapas)

System: SYS01RESULTADOSFINALES				
Estimation Method: Three-Stage Least Squares				
Date: 01/19/17 Time: 02:21				
Sample: 2000Q2 2015Q4				
Included observations: 63				
Total system (balanced) observations 126				
Linear estimation after one-step weighting matrix				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-5.18E-08	4.61E-08	-1.125140	0.2627
C(2)	-3.74E-14	1.73E-14	-2.162181	0.0326
C(3)	5.46E-07	2.66E-06	0.205375	0.8376
C(4)	7.15E-14	1.80E-13	0.398439	0.6910
Determinant residual covariance		18.56641		
Equation: $TCL=C(1)*L-C(2)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.161820	Mean dependent var	0.632984	
Adjusted R-squared	0.148079	S.D. dependent var	0.838118	
S.E. of regression	0.773579	Sum squared resid	36.50390	
Durbin-Watson stat	1.020784			
Equation: $TCK=-C(3)*K+C(4)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.016895	Mean dependent var	1.038190	
Adjusted R-squared	0.000779	S.D. dependent var	6.780564	
S.E. of regression	6.777923	Sum squared resid	2802.355	
Durbin-Watson stat	2.546054			

Nota: Se considera como Capital ( $K_t$ ) a la Formación Bruta de Capital Fijo en México (mdp 100=08) y como Trabajo ( $L_t$ ) a los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato.

Fuente: Realización propia (EViews) con base en datos de INEGI (2016).

**Anexo 6. Análisis del modelo Lotka-Volterra a través del método de Mínimos Cuadrados por Dos Etapas.**

Con datos de Inversión Extranjera Directa como Capital y de Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato para el Trabajo, los resultados obtenidos a través del método *Mínimos Cuadrados por Dos Etapas* de Eviews indica que el Modelo Lotka-Volterra genera los mismo resultados finales que en los obtenidos por el modelo planteado en el Capítulo 3.

Tabla 7. Resultados del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.

(método: Mínimos Cuadrados por Dos Etapas)

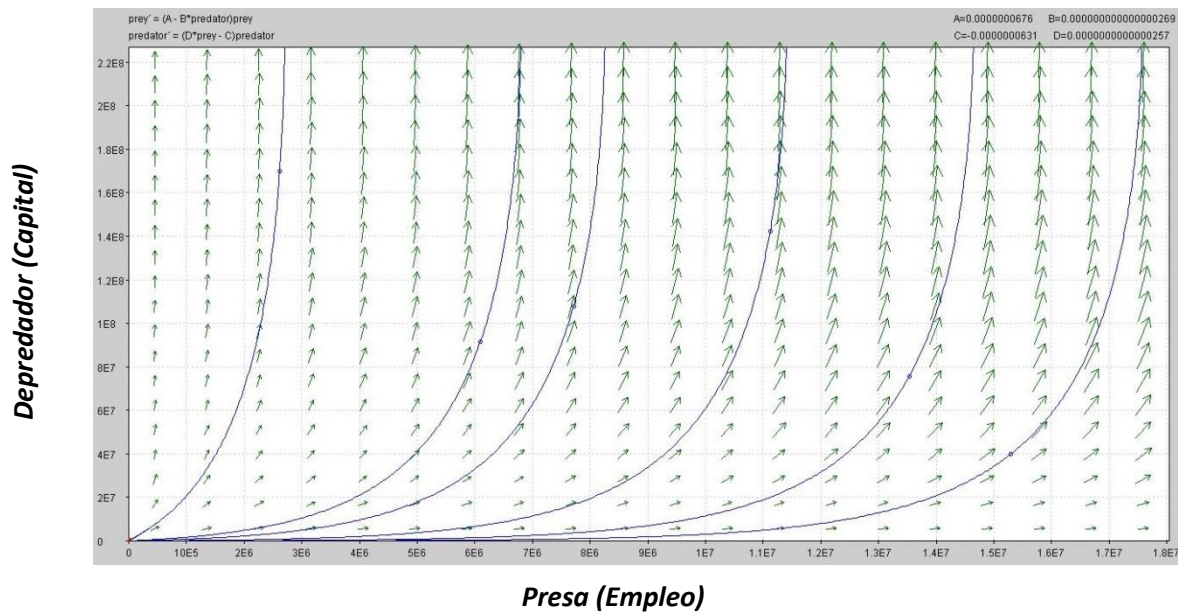
System: SYSACTUAL				
Estimation Method: Two-Stage Least Squares				
Date: 01/19/17 Time: 00:16				
Sample: 2000Q2 2015Q4				
Included observations: 63				
Total system (balanced) observations 126				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	6.76E-08	1.71E-08	3.948454	0.0001
C(2)	2.69E-16	1.94E-16	1.384951	0.1686
C(3)	-6.31E-08	7.68E-07	-0.082180	0.9346
C(4)	2.57E-14	5.31E-14	0.484080	0.6292
Determinant residual covariance		2735.670		
Equation: $TCL=C(1)*L-C(2)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.082347	Mean dependent var	0.632984	
Adjusted R-squared	0.067304	S.D. dependent var	0.838118	
S.E. of regression	0.809423	Sum squared resid	39.96506	
Durbin-Watson stat	1.115230			
Equation: $TCK=-C(3)*K+C(4)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.194341	Mean dependent var	19.77854	
Adjusted R-squared	0.181133	S.D. dependent var	74.32438	
S.E. of regression	67.25706	Sum squared resid	275934.3	
Durbin-Watson stat	2.298077			

Nota: Se considera como Capital ( $K_t$ ) a la Inversión Extranjera Directa (mdp 100=08) y como Trabajo ( $L_t$ ) a los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato.

Fuente: Realización propia (EViews) con base en datos de INEGI (2016).

Gráfica 12. Trayectoria del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.

(método: Mínimos Cuadrados por Dos Etapas)



Fuente: Elaboración propia con base en los resultados obtenidos del modelo.



## Anexo 7. Análisis del modelo Lotka-Volterra a través del método de Mínimos Cuadrados Ordinarios

Con datos de Inversión Extranjera Directa como Capital y de Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato para el Trabajo, los resultados obtenidos a través del método *Mínimos Cuadrados Ordinarios* de Eviews generan resultados similares a los obtenidos en el Capítulo 3: desacoplamiento de las ecuaciones diferenciales.

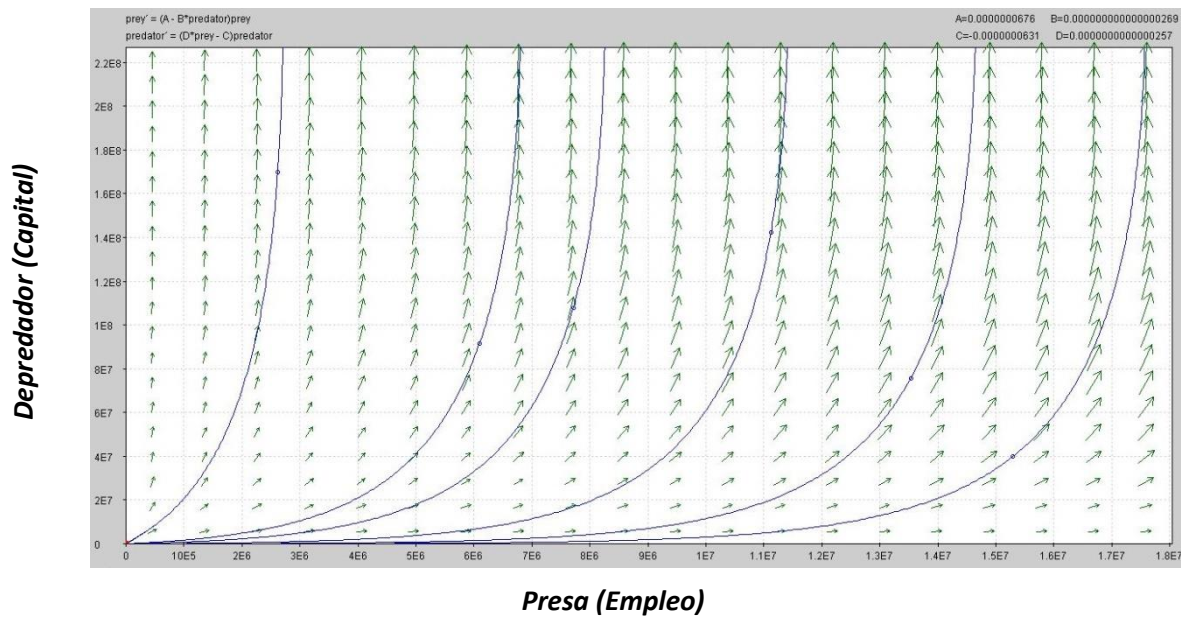
Tabla 7. Resultados del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.  
(método: Mínimos Cuadrados Ordinarios)

System: SYSACTUAL				
Estimation Method: Least Squares				
Date: 01/19/17 Time: 02:57				
Sample: 2000Q2 2015Q4				
Included observations: 63				
Total system (balanced) observations 126				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	6.76E-08	1.71E-08	3.948454	0.0001
C(2)	2.69E-16	1.94E-16	1.384951	0.1686
C(3)	-6.31E-08	7.68E-07	-0.082180	0.9346
C(4)	2.57E-14	5.31E-14	0.484080	0.6292
Determinant residual covariance		2735.670		
Equation: $TCL=C(1)*L-C(2)*K*L$				
Observations: 63				
R-squared	0.082347	Mean dependent var	0.632984	
Adjusted R-squared	0.067304	S.D. dependent var	0.838118	
S.E. of regression	0.809423	Sum squared resid	39.96506	
Durbin-Watson stat	1.115230			
Equation: $TCK=-C(3)*K+C(4)*K*L$				
Observations: 63				
R-squared	0.194341	Mean dependent var	19.77854	
Adjusted R-squared	0.181133	S.D. dependent var	74.32438	
S.E. of regression	67.25706	Sum squared resid	275934.3	
Durbin-Watson stat	2.298077			

Nota: Se considera como Capital ( $K_t$ ) a la Inversión Extranjera Directa (mdp 100=08) y como Trabajo ( $L_t$ ) a los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato.

Fuente: Realización propia (EViews) con base en datos de INEGI (2016).

Gráfica 13. Trayectoria del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.  
(método: Mínimos Cuadrados Ordinarios)



Fuente: Elaboración propia con base en los resultados obtenidos del modelo.

**Anexo 8. Análisis del modelo Lotka-Volterra a través del método de Mínimos Cuadrados por Tres Etapas.**

La evidencia generada por el método *Mínimos Cuadrados por Tres Etapas* de Eviews indica que el Modelo Lotka-Volterra sigue presentando el mismo comportamiento de linealización y desacoplamiento, aun cuando se hayan considerado datos de Inversión Extranjera Directa como Capital.

Tabla 8. Resultados del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.

(método: Mínimos Cuadrados por Tres Etapas)

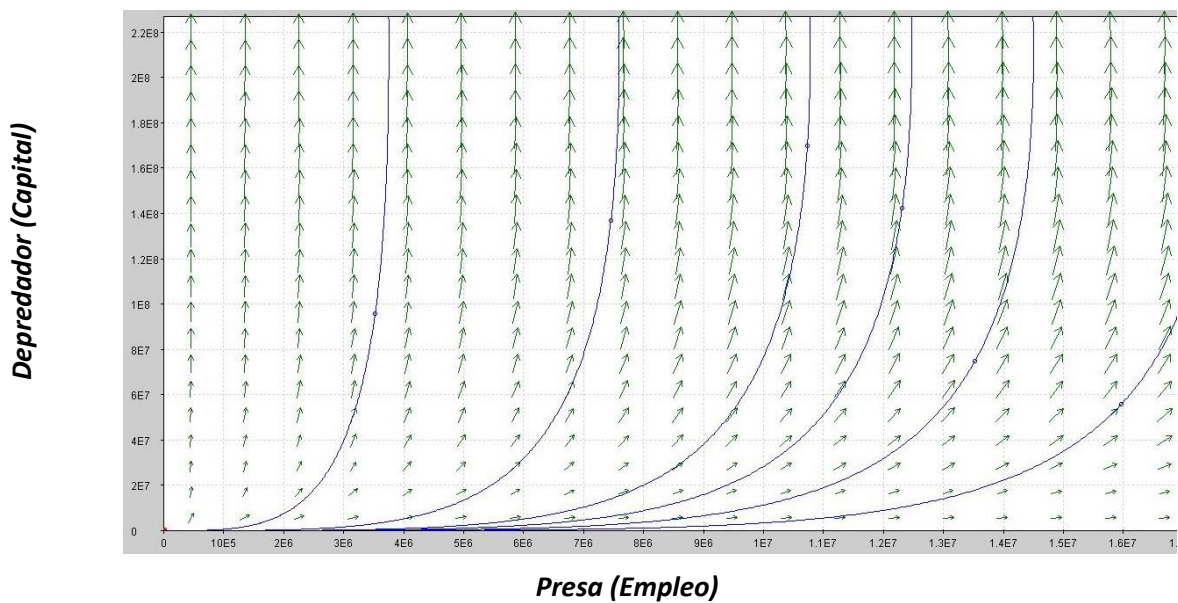
System: SYSACTUAL				
Estimation Method: Three-Stage Least Squares				
Date: 01/19/17 Time: 02:59				
Sample: 2000Q2 2015Q4				
Included observations: 63				
Total system (balanced) observations 126				
Linear estimation after one-step weighting matrix				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	7.63E-08	1.67E-08	4.566718	0.0000
C(2)	3.60E-16	1.90E-16	1.891789	0.0609
C(3)	-2.53E-07	7.49E-07	-0.336955	0.7367
C(4)	1.27E-14	5.19E-14	0.244962	0.8069
Determinant residual covariance		2716.143		
Equation: $TCL=C(1)*L-C(2)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.078425	Mean dependent var	0.632984	
Adjusted R-squared	0.063317	S.D. dependent var	0.838118	
S.E. of regression	0.811150	Sum squared resid	40.13587	
Durbin-Watson stat	1.147056			
Equation: $TCK=-C(3)*K+C(4)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.193536	Mean dependent var	19.77854	
Adjusted R-squared	0.180315	S.D. dependent var	74.32438	
S.E. of regression	67.29064	Sum squared resid	276209.9	
Durbin-Watson stat	2.286753			

Nota: Se considera como Capital ( $K_t$ ) a la Inversión Extranjera Directa (mdp 100=08) y como Trabajo ( $L_t$ ) a los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato.

Fuente: Realización propia (EViews) con base en datos de INEGI (2016).

Gráfica 14. Trayectoria del modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.

(método: Mínimos Cuadrados por Tres Etapas)



Fuente: Elaboración propia con base en los resultados obtenidos del modelo

## Anexo 9. Análisis del modelo Lotka-Volterra a través del método de Seemingly Unrelated Regression (SUR)

Incluso considerando al capital como Inversión Extranjera Directa, se coincide con lo planteado en el anexo 5, mediante la aplicación del método *Seemingly Unrelated Regression (SUR)* de Eviews, los resultados obtenidos son los mismos a los obtenidos a través método de Mínimos Cuadrados por Tres Etapas, es decir, el sistema de ecuaciones se linealizan y se desacoplan.

Tabla 9. Resultados del Modelo Lotka-Volterra: caso mexicano, 2000-2015.

(método: Mínimos Cuadrados por Tres Etapas)

System: SYSACTUAL				
Estimation Method: Three-Stage Least Squares				
Date: 01/19/17 Time: 02:59				
Sample: 2000Q2 2015Q4				
Included observations: 63				
Total system (balanced) observations 126				
Linear estimation after one-step weighting matrix				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	7.63E-08	1.67E-08	4.566718	0.0000
C(2)	3.60E-16	1.90E-16	1.891789	0.0609
C(3)	-2.53E-07	7.49E-07	-0.336955	0.7367
C(4)	1.27E-14	5.19E-14	0.244962	0.8069
Determinant residual covariance		2716.143		
Equation: $TCL=C(1)*L-C(2)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.078425	Mean dependent var	0.632984	
Adjusted R-squared	0.063317	S.D. dependent var	0.838118	
S.E. of regression	0.811150	Sum squared resid	40.13587	
Durbin-Watson stat	1.147056			
Equation: $TCK=-C(3)*K+C(4)*K*L$				
Instruments: K L K*L C				
Observations: 63				
R-squared	0.193536	Mean dependent var	19.77854	
Adjusted R-squared	0.180315	S.D. dependent var	74.32438	
S.E. of regression	67.29064	Sum squared resid	276209.9	
Durbin-Watson stat	2.286753			

Nota: El Capital ( $K_t$ ) es Inversión Extranjera Directa (mdp 100=08) y el Trabajo ( $L_t$ ), los Registrados en el Instituto Mexicano del Seguro Social por tipo de contrato.

Fuente: Realización propia (EViews) con base en datos de INEGI (2016).

## FUENTES DE INFORMACIÓN

- Asenjo, O., & González, J. (2002). Inestabilidad financiera y ciclos a partir de un modelo “Depredador-Presa”. *Jornada de economía crítica*, 22.
- Banco de México. (2009). *Informe Anual 2009*. Recuperado el junio de 2016, de <http://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-discursos/publicaciones/informes-periodicos/anual/%7B16ECB401-6EFF-90E0-1770-2420A397D9FA%7D.pdf>
- Banco Mundial (BM). (2016). *Banco de datos del Banco Mundial*. Recuperado el julio de 2016, de <http://databank.bancomundial.org/data/databases.aspx>
- CEPAL & OIT. (2016). *Coyuntura laboral en América Latina y el Caribe*. Recuperado el junio de 2016, de <http://www.cepal.org/>
- CEPAL. (2015). *Inversión Extranjera Directa en América Latina y el Caribe*. Recuperado el junio de 2016, de Comisión Económica para América Latina y el Caribe: [http://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/38214/S1500535\\_es.pdf](http://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/38214/S1500535_es.pdf)
- Chapra, S., & Canale, R. (2007). Modelos depredador-presa y caos. En S. Chapra, & R. Canale, *Método numérico para ingenieros* (págs. 832-836). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Colacchio, G., Sparro, M., & Tebaldi, C. (2007). Sequences of cycles and transitions to chaos in a modified Goodwin’s growth cycle model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(6), 1911–1932.
- de la Paloma, V., Maeztu, R., & Gargallo, P. (2011). *Ecobachillerato*. Recuperado el diciembre de 2016, de Crecimiento económico y desarrollo: <http://www.revistainternacionaldelmundoeconomicoydelderecho.net/wp-content/uploads/RIMED-Pol%C3%ADtica-econ%C3%B3mica.pdf>
- Ekelund, R., & Hébert, R. (2005). Historia de la teoría económica y de su método. En R. Ekelund, & R. Hébert, *Adam Smith: constructor de un sistema* (págs. 105-128). México: McGraw Hill.
- Ekelund, R., & Hébert, R. (2005). Historia de la teoría económica y de su método. En R. Ekelund, & R. Hébert, *El sistema ricardiano y sus críticos* (pág. 155). México: McGraw Hill.
- Ekelund, R., & Hébert, R. (2005). *Historia de la teoría económica y de su método*. México: McGraw Hill.

- Ekelund, R., & Hebert, R. (2005). Historia de la teoría económica y de su método. En R. Ekelund, & R. Hebert, *El principio de la población en la economía clásica: Thomas Malthus* (pág. 140). México: McGraw Hill.
- Fondo de Población de las Naciones Unidas (UNFPA). (2015). *Estado de la población mundial 2015*. Recuperado el julio de 2016, de Organización de las Naciones Unidas (ONU): [https://www.unfpa.org/sites/default/files/sowp/downloads/State\\_of\\_World\\_Population\\_2015\\_SP.pdf](https://www.unfpa.org/sites/default/files/sowp/downloads/State_of_World_Population_2015_SP.pdf)
- Golubitsky, M., & Dellnitz, M. (2001). Modelos de poblaciones de dos especies. En M. Golubitsky, & M. Dellnitz, *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales en uso de MATLAB* (págs. 314-318). México: International Thomson Editores.
- Góngora, J. (Noviembre-Diciembre de 2012). *Revista Bancomext*. Recuperado el Noviembre de 2016, de La formación bruta de capital fijo en México: [http://revistas.bancomext.gob.mx/rce/magazines/151/2/Nov-Dic\\_7-9.pdf](http://revistas.bancomext.gob.mx/rce/magazines/151/2/Nov-Dic_7-9.pdf)
- Gonnard, R. (1972). Historia de las doctrinas de la población. México: Centro Latinoamericano de Demografía.
- González, M. (2005). Nuevas dimensiones en la relación trabajo-capital en tiempos de globalización. *Revista de la Universidad de La Habana*.
- Goodwin, R. (1967). A growth cycle. (C. University, Ed.) *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, 54-58.
- Grau, P. (1996). *Economía dinámica caótica: una aplicación al mercado de capitales español*. España: Universidad Complutense de Madrid.
- INEGI. (2016). *Banco de información: serie histórica*. Recuperado el 20 de abril de 2016, de Instituto Nacional de Estadística y Geografía: <http://www.inegi.org.mx>
- Juan, A., Kizys, R., & Manzanedo, L. (2009). *Universidad Abierta de Cataluña*. Recuperado el 08 de noviembre de 2016, de Modelos de Ecuaciones Simultáneas: [http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/T09\\_Mod\\_Multiecuacionales.pdf](http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/T09_Mod_Multiecuacionales.pdf)
- Keynes, J. M. (1936). *Teoría general de la ocupación el interés y el dinero*. E.U.A.: Palgrave Macmillan.
- Lordemann, J., Rubin, R., & Villegas, H. (2011). El modelo de Goodwin: ciclos económicos e inversión en Bolivia. *Revista Latinoamericana de Desarrollo Económico*, 133-165.
- Malthus, R. (1798). *Ensayo sobre el principio de la población*. Londres: Hertfordshire.

- Marx, C. (1867). *El capital : Crítica de la economía política*. Hamburgo: Erster Band.
- Monroy, C. (1997). *Teoría del caos*. México: Computec.
- Moreno, A. (2002). El modelo de ciclo y crecimiento de Richard Goodwin: una evaluación empírica para Colombia. *Cuadernos de Economía*, XXI(37), 20.
- Nicholson, W. (2008). *Teoría microeconómica : principios básicos y aplicaciones*. México: Cengage Learning.
- OCDE. (2016). *Employment Outlook 2015*. Recuperado el 24 de abril de 2016, de Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico: [www.oecd.org](http://www.oecd.org)
- Odriozola, S., & Colina, H. (2005). La relación capital-trabajo: ¿cuánto de ayer, cuánto de hoy? (U. d. Habana, Ed.) *Economía y Desarrollo*, 155(2), 6-17.
- OIT. (2016). *Organización Internacional del Trabajo*. Recuperado el 2016, de Perspectivas sociales y del empleo en el mundo – Tendencias 2016: <http://www.ilo.org/>
- Olave, P. (2014). *Transformación productiva y cambios en el mercado laboral: el caso de México*. México: UNAM, Instituto de Investigaciones Económicas.
- Pindyck, R., & Rubinfeld, D. (2001). *Econometría: modelos y pronósticos*. México: Mc Graw Hill.
- Ray, D. (2002). El crecimiento económico. En D. Ray, *Economía del desarrollo* (pág. 49). Barcelona: Antoni Bosch.
- Ricardo, D. (1817). *Principios de economía política y tributación*. Inglaterra: Cambridge.
- Roll, E. (1994). *Historia de las doctrinas económicas*. México: Fondo de cultura económica.
- Rostow, W. (1952). *The Process of Economic Growth*. Nueva York: Oxford Press University.
- Sardoni, C. (2004). *Seminari Taifa*. Recuperado el febrero de 2015, de Marx y Keynes: la crítica a la ley de Say: [http://seminaritaifa.org/descarregues/Corrents\\_tradicionals/Sardoni.pdf](http://seminaritaifa.org/descarregues/Corrents_tradicionals/Sardoni.pdf)
- Secretaría de Economía. (2016). *El portal único del gobierno*. Recuperado el junio de 2016, de <http://www.gob.mx>
- Secretaría de Economía. (2016). *Estadística oficial de los flujos de IED hacia México*. Recuperado el 2016, de <http://www.2006-2012.economia.gob.mx/comunidad-negocios/inversion-extranjera-directa/estadistica-oficial-de-ied-en-mexico>



- Smith, A. (1776). *Investigación de la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones*. Inglaterra: Cambridge.
- UNCTAD. (2015). *Inversiones en el mundo: Panorama general*. Recuperado el junio de 2016, de Conferencia de las Naciones Unidas sobre Comercio y Desarrollo: <http://unctad.org/>
- Uxó, J. (2016). *Diccionario económico*. Recuperado el 2016, de Expansión México: <http://www.expansion.com/diccionario-economico/crecimiento-economico.html>
- Veraza, J. (2012). *Karl Marx y la tecnica desde la perspectiva de la vida: para una teoría marxista de las fuerzas productivas*. México: Itaca.